

висимой съемки отдельных фасадов здания. Данный подход не требует создания единого планово-высотного обоснования (ПВО) вокруг объекта. Этот вариант целесообразно применять при съемке небольших зданий и сооружений, достаточно простых по конфигурации и лишенных каких-либо архитектурных излишеств [1].

Результатом обработки фасадной съемки являются развертки фасадов здания. При этом возникает необходимость определения отклонения фасада от вертикальной или проектной плоскости. Тогда при обработке результатов измерений все отклонения фасада от вертикали будут показаны относительно этой плоскости, что облегчит дальнейшее проведение проектных и монтажных работ [2].

Таким образом, возникает задача аппроксимации набора точек с трехмерными координатами вертикальной или наклонной плоскостью. Любую плоскость можно задать уравнением плоскости первой степени вида

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (1)$$

Тогда для наклонной или горизонтальной плоскости необходимо найти такую функцию $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = z$, которая будет оптимальной с точки зрения МНК, то есть вычислить соответствующие коэффициенты A , B и C под условием

$$Q(A, B, C) = \sum([A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z - z]^2) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Это приводит к системе трех линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i y_i & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i y_i & \sum_{i=1}^m y_i^2 & \sum_{i=1}^m y_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m y_i & \sum_{i=1}^m 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m x_i z_i \\ \sum_{i=1}^m y_i z_i \\ \sum_{i=1}^m z_i \end{bmatrix}, \quad (3)$$

которая может быть легко решена.

Для вертикальной плоскости такой метод не подходит, так как z не зависит от значений x и y ($C = 0$). Вторым вариантом поиска оптимальной с точки зрения МНК плоскости (1) может быть минимизация целевой функции (4) [3]:

$$\sum_{i=1}^m V_i^2 \Rightarrow \min, \quad (4)$$

где

$$V_i = F_i(a, b, c, d) = \frac{|ax_i + by_i + cz_i + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (5)$$

В уравнении (5) выражение в правой части равно расстоянию от точки до плоскости. Данный метод поиска аппроксимирующей плоскости более универсален и не имеет ограничений к положению плоскости.

Обработка результатов. Рассмотрим применение изложенного выше алгоритма при обработке реальных измерений выполненных при съемке фасадов.

Для решения данной задачи нами было использован программный продукт Excel с функцией «Поиск решения» (рис. 2). Здесь исходные координаты $X Y Z$ помещены в ячейках B10, C10, D10, приближенные значения неизвестных в ячейках B3, B4, B5, B6

В столбце E10 вычисляется значение L по формуле:

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (6)$$

В ячейке E6 вычисляется $\sum v^2$.

Для получения нормированных коэффициентов A , B , C и D на неизвестные параметры налагают условие:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1. \quad (7)$$

В результате вычислений мы получили нормированные коэффициенты A , B , C и D с помощью программы Excel. На (рис. 2, б) представлены вычисления под условием $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. В этом случае видно, что $\sum L^2$ стремится к нулю, а max и min значения L равны соответственно 0,035 и -0,026.

	A	B	C	D	E
1					
2		Условие	3,00000		
3		A1=	1,0000000		
4		B1=	1,0000000		
5		C1=	1,0000000		
6		D1=	1,00000		876877,2071727
7					
8				max	244,055
9				min	228,413
10	№	X	Y	Z	L
11	1	277,921	7,558	128,524	239,602
12	2	277,937	7,595	136,183	244,055
13	3	277,939	1,199	139,215	242,114
14	4	277,941	-5,734	139,197	238,102
15	5	277,986	-11,839	136,188	232,866
16	6	277,933	-11,839	128,529	228,413
17	7	277,946	-10,102	129,034	229,715
18	8	277,938	-10,102	129,576	230,023
19	9	277,967	-10,042	130,878	230,826
20	10	277,961	-10,031	132,614	231,832

а)

	A	B	C	D	E
1					
2		Условие	1,00000		
3		A1=	0,9999985		
4		B1=	0,0017226		
5		C1=	0,0000075		
6		D1=	-277,93095		0,0066742
7					
8				max	0,035
9				min	-0,026
10	№	X	Y	Z	L
11	1	277,921	7,558	128,524	0,004
12	2	277,937	7,595	136,183	0,020
13	3	277,939	1,199	139,215	0,011
14	4	277,941	-5,734	139,197	0,001
15	5	277,986	-11,839	136,188	0,035
16	6	277,933	-11,839	128,529	-0,018
17	7	277,946	-10,102	129,034	-0,002
18	8	277,938	-10,102	129,576	-0,010
19	9	277,967	-10,042	130,878	0,019
20	10	277,961	-10,031	132,614	0,013

б)

Рис. 2. Результаты вычислений в Excel с функцией «Поиск решения»:
а – без условия; б – с условием (7)

Для контроля правильности полученного решения по тем же исходным данным коэффициенты уравнения плоскости были получены в программе JAG3D (рис. 3).

File Report ?		
Settings	Form Points (a-priori)	Parameter
Abbreviation	Parameter	σ
Nx	0.9999985163	0.0000004716
Ny	0.0017225767	0.0002739172
Nz	0.0000074823	0.0004725670
D	277.9309465100	0.0629518636

Рис. 3. Результаты в программе JAG3D

Сравнивая полученные результаты, можно сделать вывод, что параметры плоскости, определенные двумя различными способами, получились примерно одинаковые и расхождения находятся в пределах точности их определения.

В результате таких вычислений мы получаем параметры (коэффициенты) оптимальной по МНК аппроксимирующей вертикальной плоскости.

В случае если требуется определить отклонение от вертикальной плоскости, то необходимо добавить еще одно условие ($C = 0$). Полученные результаты приведены на рисунке 4.

При проектировании навесных фасадных систем иногда желательно иметь величины отклонений от плоскости с одним знаком. Например, для составления спецификации типоразмеров крепежных элементов.

Фасад здания после возведения почти никогда не будет идеально вертикальным, то есть в большинстве случаев будет искривлён или наклонён, и отклонения от оптимальной плоскости будет со зна-

ком «+» и «-». С помощью анкеров крепления вентфасадов различной длины можно добиться выравнивания ранее возведённого фасада здания. Для этого надо произвести сдвиг по системе координат (то есть привести к одному знаку отклонения от плоскости), а затем выбрать количество, размер и тип крепёжных элементов.

Чтобы сдвинуть плоскость, требуется изменить параметр D , отвечающий за смещение плоскости, то есть при увеличении его будет увеличиваться расстояние от точки до плоскости в сторону знака «+», а при уменьшении параметра D в сторону уменьшения к знаку «-».

Как видно из рисунка 2, б, плоскость необходимо сдвинуть до максимального значения 0,035 или до минимального значения $-0,026$ и тем самым привести значения к одному знаку, а затем выбирать размер крепёжных элементов и их размеры.

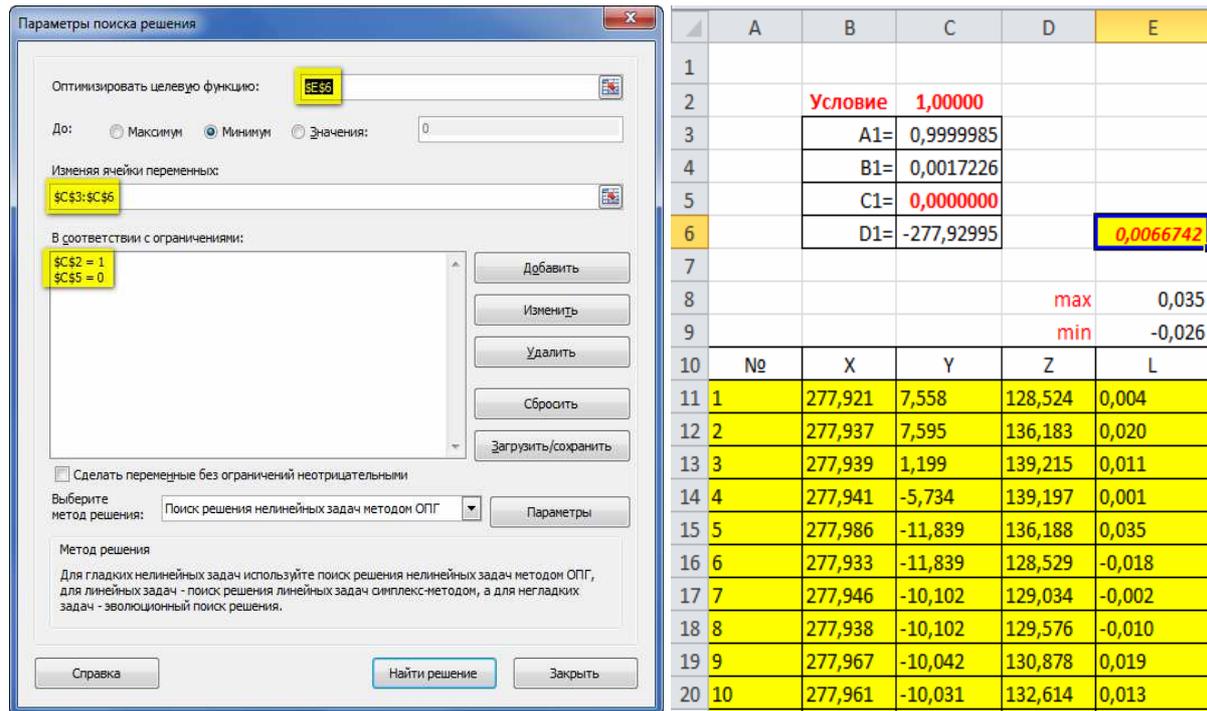


Рис. 4. Результаты вычислений с условием ($C = 0$)

Для оформления окончательного результата необходимо выполнить проектирование всех наблюдаемых точек на аппроксимирующую плоскость и систему координат в программе установить так, чтобы плоскость XOY совпала с аппроксимирующей плоскостью.

Известно, что, если плоскость задана общим уравнением $A_x + B_y + C_z + D = 0$, то вектор $\vec{n}(A, B, C)$ является вектором нормали данной плоскости.

Для того чтобы вычислить координаты спроектированных точек на плоскость, нам требуются направляющий вектор $\vec{n}(A, B, C)$ и расстояние L от точки до плоскости с обратным знаком, тогда

$$\begin{aligned} X' &= X - AL; \\ Y' &= Y - AL; \\ Z' &= Z - AL, \end{aligned} \quad (8)$$

где L вычисляется по формуле (6):

$$L = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

На рисунке 5 приведены результаты обработки измерений по фасаду административного здания. Синим цветом показаны отклонения от вертикальной плоскости, красным – размеры элементов фасада.

Имея набор точек на вертикальной плоскости, можно выполнить образмеривание чертежа и выполнить проектирование навесных фасадных систем.

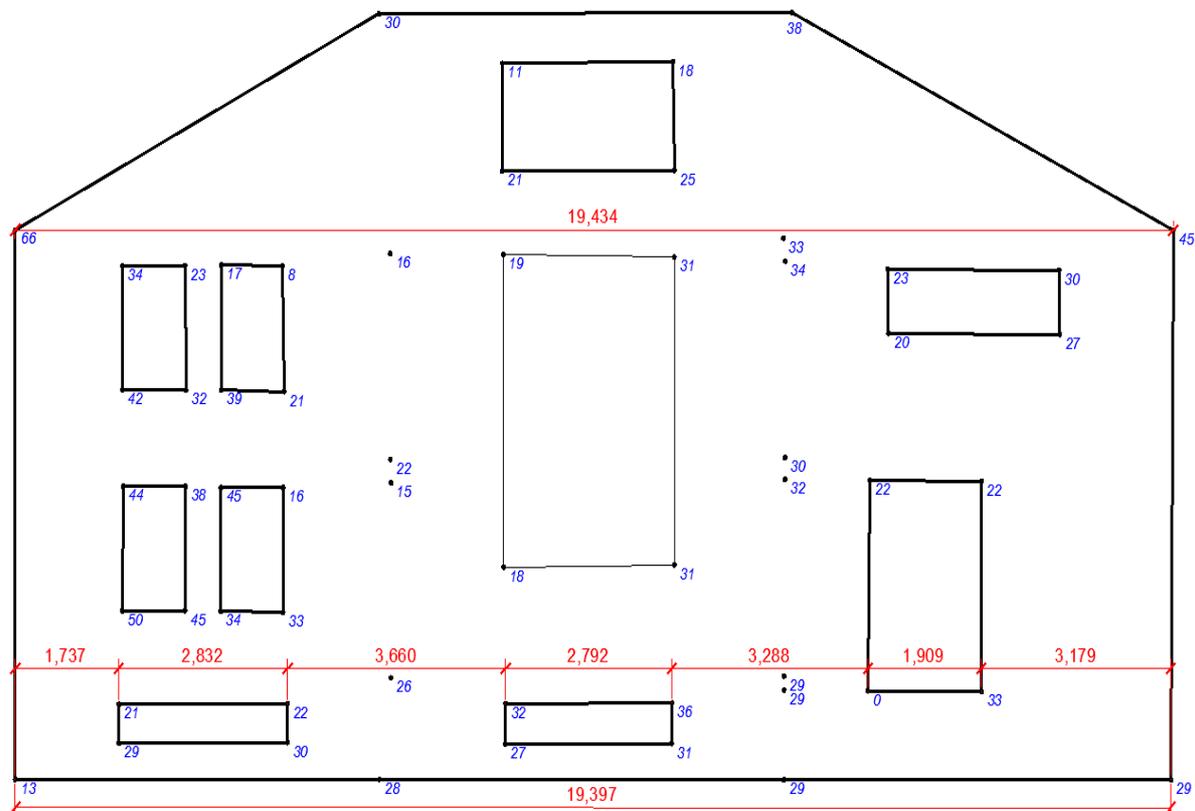


Рис. 5. Результаты обработки измерений по фасаду административного здания

Необходимо отметить, что точность определения пространственных координат фасада здания и достоверность результатов фасадной съемки зависит не только от точности геодезических работ, но и от правильности интерпретации результатов измерений, рационального выбора точек фасада, подлежащих съемке.

Применение вышеизложенного алгоритма позволяет определить параметры оптимальной плоскости для расчета отклонений строительных конструкций от плоскостности и в дальнейшем – для создания проектных чертежей при ремонте, облицовке фасада или реконструкции здания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Валтонен, Д.А. Съемка фасадов зданий с помощью электронных тахеометров / Д.А. Валтонен, // Геопрофи. – 2010. – № 1. – С. 25–29.
2. Методика высокоточной бесконтактной исполнительной съемки навесных фасадных систем с воздушными зазорами при возведении высотных зданий: МДС 11-20.2009. – М., 2009.
3. Eberly D. Least Squares Fitting of Data / David Eberly // Geometric Tools, LLC [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.geometrictools.com/>.
4. Стальные конструкции. Правила монтажа = Стальныя канструкцыі. Правілы мантажу: ТКП 45-5.04-41-2006 (02250). – Введ. 01.07.07 (с отменой раздела 4 СНиП 3.03.01-87). – Минск: М-во архитектуры и строительства, 2007. – 40 с.
5. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://eng-geo.ru/15-fasadnaia-semka>.