



женную в [13], автор показал, что опорный момент в стойке при определенных сочетаниях знаков вариаций коэффициентов и свободных членов канонических уравнений меняет свой знак. При этом модуль вариаций коэффициентов и свободных членов не превышает 1 %.

Поэтому можно констатировать, что решение канонических уравнений в рассмотренной задаче является неустойчивым, несмотря на то, что оценка устойчивости с помощью числа обусловленности говорила о его устойчивости, так как не соблюдалось соотношение  $\mu \gg 10^{-2}$ . И на этом основании были сделаны выводы о ненадежности использования числа обусловленности для оценки устойчивости решения рассмотренных уравнений, недостоверности расчета рамной конструкции и возможности ее аварии при эксплуатации в реальных условиях.

Однако данные выводы нуждаются в проверке, так как при расчете рамной конструкции методом сил возможно использование различных вариантов основной системы. Известно [3], что чем ближе основная система по параметрам напряженно-деформированного состояния к заданной, тем лучше обусловленность матрицы коэффициентов соответствующей системы канонических уравнений. Поэтому выявленная в работе [1] смена знака опорного момента рамной конструкции может быть связана с использованным в работе [2] вариантом основной системы, а не с достоверностью расчета самой конструкции вследствие неустойчивости решения канонических уравнений, не выявляемого с помощью числа обусловленности матрицы коэффициентов этих уравнений.

Исследование проводится на примере расчета рамы, рассмотренной в работах [1; 2] и приведенной на рисунке 1 расчетной схемы рамы

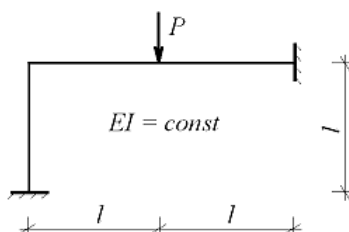


Рис. 1. Расчетная схема рамы

При расчете данной рамы методом сил возможно образование следующих базовых вариантов основной системы (рис. 2, а, б, в).

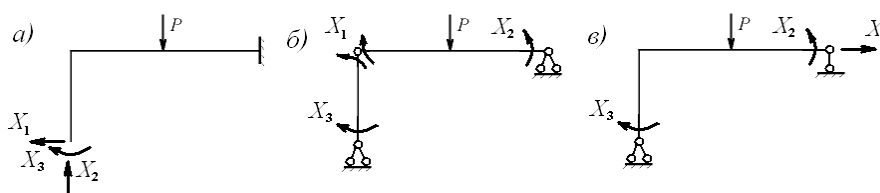


Рис. 2. Базовые варианты основной системы

Вариант основной системы, показанный на рисунке 2, а, использовался в [2].

С учетом полученных выражений для коэффициентов и свободных членов канонические уравнения метода сил для данного варианта основной системы после преобразований принимают вид

$$\begin{aligned} 14x_1 + 12x_2 + 15x_3 &= 3; \\ 12x_1 + 16x_2 + 12x_3 &= 5; \\ 15x_1 + 12x_2 + 18x_3 &= 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая (2), найдем следующие значения составляющих его решения

$$x_1 = -0.25, \quad x_2 = 0.4375, \quad x_3 = 0.0833, \quad (3)$$

которые являются безразмерными внутренними усилиями стойки в опорном сечении, соответственно поперечная сила, продольная сила и изгибающий момент.

Поскольку число обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ (2)

$$\mu = \|A\|^{-1} \|A\| = 100.119 \quad (4)$$

не удовлетворяет признаку  $\mu \gg 10^{-2}$ , можно сделать вывод, что данное значение говорит о хорошей обусловленности матрицы коэффициентов и, следовательно, устойчивости решения (3).

Используя формулы Крамера, запишем опорный изгибающий момент стойки как

$$x_3 = \frac{D_3}{D},$$

где определитель  $D_3$ , имеет вид

$$D_3 = \begin{vmatrix} 14 & 12 & 3 \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций его элементов, согласно [1], соответствует таблице

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ - & + & - \end{vmatrix}.$$

Основными причинами вариаций коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил могут быть отклонения геометрических размеров реальных конструкций от их проектных значений, разброс и изменение механических характеристик конструкционных материалов, отличия внешних нагрузок от их расчетных значений. Следовательно, они оказывают одинаковое влияние на вариации величин коэффициентов и свободных членов и можно принять модуль этих вариаций одинаковым.

Тогда определитель  $D_3$ , с учетом возможных одинаковых по модулю вариаций его элементов, принимает вид

$$D_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} 14 \cdot (1 + \varepsilon) & 12 \cdot (1 - \varepsilon) & 3 \cdot (1 + \varepsilon) \\ 12 \cdot (1 - \varepsilon) & 16 \cdot (1 + \varepsilon) & 5 \cdot (1 - \varepsilon) \\ 5 \cdot (1 - \varepsilon) & 4 \cdot (1 + \varepsilon) & (1 - \varepsilon) \end{vmatrix}$$

Рассматривая определитель  $D_3$  как функцию от вариации  $\varepsilon$ , получим следующий график изменения его величины при значениях вариации величин его элементов, не превышающих 1 %.

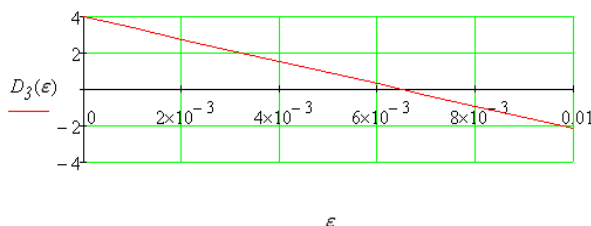


Рис. 3. Зависимость величины  $D_3$  от вариации  $\varepsilon$  для первого варианта основной системы

Из приведенного графика видно, что величина определителя  $D_3$  может претерпевать существенные изменения как по величине, так и по знаку, а следовательно, такие же изменения будут происходить и с опорным моментом в стойке. На этом основании в [1] делается вывод о недостоверности расчета рамы, приведенного в [2], и вероятности разрушения рамы вследствие возможного изменения знака опорного момента стойки при эксплуатации в реальных условиях вследствие неизбежности малых изменений параметров конструкции.

Сделаем аналогичный анализ изменения величины опорного момента стойки при расчете рамы методом сил с использованием двух других базовых вариантов основной системы, показанных на рисунке 2.

При расчете рамы с использованием второго варианта основной системы метода сил (рис. 2, б) канонические уравнения метода сил принимают вид

$$\begin{aligned} 12x_1 + 14x_2 - 2x_3 &= 0; \\ 4x_1 + 8x_2 &= 5; \\ x_1 - 2x_3 &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Решая (5), получим то же самое значение безразмерного опорного момента стойки, что и при решении (2)

$$x_3 = 0.0833.$$

Однако для второго варианта основной системы определитель  $D_3$  при сочетании знаков вариаций его элементов, что и в первом случае, примет вид

$$D_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} 12 \cdot (1 + \varepsilon) & 4 \cdot (1 - \varepsilon) & -3 \cdot (1 + \varepsilon) \\ 4 \cdot (1 - \varepsilon) & 8 \cdot (1 + \varepsilon) & 5 \cdot (1 - \varepsilon) \\ (1 - \varepsilon) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

График функциональной зависимости величины определителя от вариации  $\varepsilon$  для второго варианта основной системы метода сил представлен на рисунке 4.

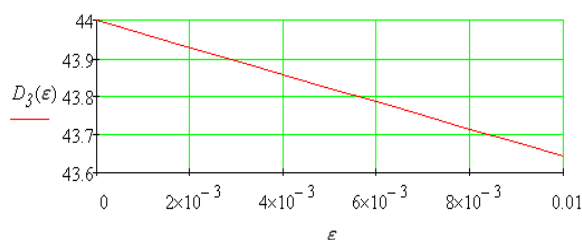


Рис. 4. Зависимость величины  $D_3$  от вариации  $\varepsilon$  для второго варианта основной системы

При расчете рамы с использованием третьего варианта основной системы метода сил (рис. 2, в) канонические уравнения метода сил имеют вид

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 14x_3 &= -3; \\ 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= -3; \\ 14x_1 + 4x_2 + 20x_3 &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Решая (6), получим то же самое значение безразмерного опорного момента стойки, что и при решении (2), (5):

$$x_3 = 0.0833.$$

Для третьего варианта основной системы определитель  $D_3$ , при том же сочетании знаков вариаций его элементов, что и в первом случае, примет вид

$$D_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} 4 \cdot (1 + \varepsilon) & 4 \cdot (1 - \varepsilon) & -3 \cdot (1 + \varepsilon) \\ 4 \cdot (1 - \varepsilon) & 8 \cdot (1 + \varepsilon) & -3 \cdot (1 - \varepsilon) \\ 14 \cdot (1 - \varepsilon) & 4 \cdot (1 + \varepsilon) & -3 \cdot (1 - \varepsilon) \end{vmatrix}$$

График функциональной зависимости величины определителя от вариации  $\varepsilon$  для третьего варианта основной системы метода сил представлен на рисунке 5.

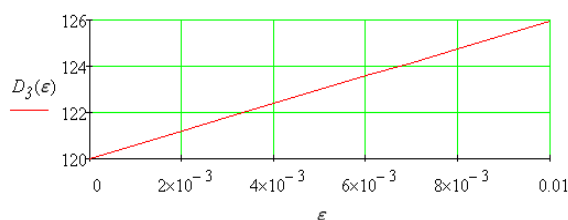


Рис. 5. Зависимость величины  $D_3$  от вариации  $\epsilon$  для третьего варианта основной системы

Из приведенных графиков на рисунках 4, 5 видно, что величина определителя  $D_3$  в случае использования при расчете рамы методом сил второго и третьего вариантов основной системы не изменяет знак и не претерпевает заметных изменений по величине. Наибольшее относительное изменение величины определителя в обоих случаях составляет менее 1 %.

Таким образом, существенные изменения величины и знака определителя  $D_3$  в первом случае является следствием использованного в работе [2] варианта основной системы метода сил, а не признаком неустойчивости решения канонических уравнений. Следовательно, и никаких существенных изменений опорного момента в стойке рамы в ходе эксплуатации возникнуть также не может.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров, Ю.П. Как получать надежные решения систем уравнений / Ю.П. Петров. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 176 с.
2. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1979. – 559 с.
3. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Минск: Выш. шк., 1990. – 349 с.

УДК 69.04

#### ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОГО СОЕДИНЕНИЯ В УЗЛАХ ФЕРМЫ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

**Н.И. ХЛУД, А.В. ГРЕМИТСКИХ**  
(Представлено: В.К. РОДИОНОВ)

*Рассмотрена на примере простейшей фермы погрешность в определении напряжений при жестком и шарнирном соединении в узлах фермы. Исследовано влияние угла наклона конструкции и радиуса инерции поперечных сечений стержней на погрешность в напряжении при расчетах по шарнирной и жесткой схемах соединения в узлах.*

Стержневыми системами называются системы, состоящие из отдельных, обычно прямолинейных стержней, соединенных между собой в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов или других крепежных; одним из видов таких систем являются плоские фермы. В большинстве случаев соединения стержней фермы в узлах являются жесткими, т.е. не шарнирными. Точный расчет фермы с такими узлами весьма сложен, так как обычно она является много раз статически неопределимой системой. Если жесткие узлы фермы условно заменить шарнирными, расчет ее значительно упрощается и при известных условиях может быть выполнен с помощью одних лишь уравнений статики. Опытные данные и теоретические исследования показывают, что такая замена допустима, так как при сосредоточенных нагрузках, приложенных в узлах, усилия, возникающие в шарнирной ферме, мало отличаются от усилий в ферме с жесткими узлами (в случае, когда стержни имеют достаточно большую длину) [1].

Реальная ферма представляет собой геометрически неизменяемую стержневую конструкцию с жестким соединением прямолинейных стержней в узлах. Особенностью фермы является то, что она остается геометрически неизменяемой при условной замене жестких узлов шарнирами. У рамных и других реальных стержневых конструкций такой особенности нет. Полученная при замене жестких узлов шарнирами система является расчетной схемой фермы.