УДК

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К РАСЧЕТУ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА НЕСВЯЗНОМ ОСНОВАНИИ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗИ

Я.П. ПАЧКОВСКАЯ
(Представлено: канд. техн. наук, доц. В.Н. КИСЕЛЕВ)

Приведен расчет железобетонной фундаментной балки переменной жесткости на Винклеровском грунтовом основании при односторонней связи балки с основанием. Для решения задачи используется численный метод конечных разностей.

Дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид [2]:

$$EI[x]\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -M(x); \frac{d^2M}{dx^2} = q(x) - p(y,x), \tag{1}$$

или преобразуя:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[EI(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right] = q(x) - p(y,x), \tag{2}$$

где $p(y, x)$ – интенсивность реактивного давления основания на балку.

Дифференцируя, получим уравнение изогнутой оси балки переменной жесткости, лежащей на несвязном основании.

$$EI(x)\frac{d^4y(x)}{dx^4} + 2\frac{dEI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3y(x)}{dx^3} + \frac{d^2EI(x)}{dx^2}\cdot\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(y,x) = q(x). \tag{3}$$

В частном случае для балки, жесткость которой меняется по линейному закону

$$EI(x) = A + Bx; \ \frac{dEI(x)}{dx} = B; \frac{d^2EI(x)}{dx^2} = 0 .$$

Уравнение (3) будет представлять собой дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$(A + Bx)\frac{d^4y(x)}{dx^4} + 2B\frac{d^3y(x)}{dx^3} + P(x,y) = q(x) . \tag{4}$$

При постоянной жесткости балки дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$EI\,\frac{d^4y(x)}{dx^4} + P(x,y) = q(x) . \tag{5}$$

Условие односторонней связи балки с основанием реактивного давления $p(y,x)$ представляет собой кусочно-линейную функцию, ограниченную пределами:

$$\begin{aligned} &y(x) > 0 \to P(x,y) = ky(x) = k_0by(x), \\ &y(x) \le 0 \to P(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

или

$$P(x,y) = \frac{k}{2}[y(x) + by(x)],$$

где k – коэффициент постели основания; b – ширина балки.

После подстановки $P(x,y)$ в (3) дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэф-фициентами

$$EI(x)\frac{d^4y(x)}{dx^4}+2\frac{dEI(x)}{dx}\cdot\frac{d^3y(x)}{dx^3}+\frac{d^2EI(x)}{dx^2}+\frac{k}{2}[y(x)+by(x)]=q(x)$$

Ищем приближенное решение в центральных разностях методом итерации, разделив балку узловыми точками 0,1,2…,n на n частей одинаковой длины $\Delta x = l/n$. Производные некоторой функции φ(x) можно выразить через разностные отношения узловых ординат этой функции.

$$\phi'(x)\big|_{x=i\Delta x}=\frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{2(\Delta x)},$$

$$\phi''(x)\big|_{x=i\Delta x}=\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{(\Delta x)^2},$$

$$\phi'''(x)\big|_{x=i\Delta x}=\frac{\phi_{i+2}-2(\phi_{i+1}+\phi_{i-1})-\phi_{i-2}}{2(\Delta x)^3},$$

$$\phi^{iv}(x)\big|_{x=i\Delta x}=\frac{\phi_{i+2}-4\phi_{i+1}+6\phi_i-4\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{(\Delta x)^4}.$$

Поэтому уравнение (6) для произвольного узла i балки будет:

$$y_i>0\rightarrow EI_i\frac{\phi_{i+2}-4\phi_{i+1}+6\phi_i-4\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{(\Delta x)^4}+\frac{1}{2}\frac{EI_{i+1}-EI_{i-1}}{\Delta x}\times$$

$$\times\frac{\phi_{i+2}-2(\phi_{i+1}+\phi_{i-1})-\phi_{i-2}}{2(\Delta x)^3}+\frac{EI_{i+1}-2EI_i+EI_{i-1}}{(\Delta x)^2}\times\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}+ky_i=q_i.$$

$$y_i\le 0\rightarrow EI_i\frac{\phi_{i+2}-4\phi_{i+1}+6\phi_i-4\phi_{i-1}+\phi_{i-2}}{(\Delta x)^4}+\frac{1}{2}\frac{EI_{i+1}-EI_{i-1}}{\Delta x}\times$$

$$\times\frac{\phi_{i+2}-2(\phi_{i+1}+\phi_{i-1})-\phi_{i-2}}{2(\Delta x)^3}+\frac{EI_{i+1}-2EI_i+EI_{i-1}}{(\Delta x)^2}\cdot\frac{\phi_{i+1}-2\phi_i+\phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}=q_i.$$

Принимая жесткость EI_r узла r за исходную и разделив последнее соотношение на $EI_r/(\Delta x)^r$ получим дифференциальное уравнение в центральных разностях.

$$y_i>0\rightarrow[\chi_i+\frac{1}{2}(\chi_{i+1}-\chi_{i-1})]y_{i+2}-(6\chi_i-2\chi_{i-1})y_{i+1}+[t-2(\chi_{i-1}-5\chi_i+\chi_{i+1})]y_i-$$

$$-[6\chi_i-2\chi_{i-1}]y_{i-1}+[\chi_i-\frac{1}{2}(\chi_{i+1}-\chi_{i-1})]y_{i-2}=\frac{P_i\Delta x^3}{EI_r}.$$

$$y_i\le 0\rightarrow[\chi_i+\frac{1}{2}(\chi_{i+1}-\chi_{i-1})]y_{i+2}-(6\chi_i-2\chi_{i-1})y_{i+1}-2(\chi_{i-1}-5\chi_i+\chi_{i+1})y_i-$$

$$-[6\chi_i-2\chi_{i-1}]y_{i-1}+[\chi_i-\frac{1}{2}(\chi_{i+1}-\chi_{i-1})]y_{i-2}=\frac{P_i\Delta x^3}{EI_r}$$

$$\phi_i=\phi(x)\big|\qquad \varphi_i=\varphi(x)\big|_{x=i\Delta x}=\frac{dy(x)}{dx}\bigg|_{x=i\Delta x}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2(\Delta x)}\qquad \chi_i=\frac{EI_i}{EI_r};\ t=\frac{k(\Delta x)^4}{EI_r};\ P_i=q_i\Delta x$$

$$M_i=M(x)\big|_{x=i\Delta x}=EI(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}\bigg|_{x=i\Delta x}=EI_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{(\Delta x)^2}=EI_r\chi_i\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$Q_i = Q(x)\big|_{x=i\Delta x} = \frac{dM(x)}{dx}\bigg|_{x=i\Delta x} = \frac{d}{dx}\left[-EI(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right] = -\left[\left[\frac{dEI(x)}{dx}\frac{d^2y(x)}{dx^2} + EI(x)\frac{d^3y(x)}{dx^3}\right]\right]_{x=i\Delta x} =$$

$$= -\frac{EI_r}{2(\Delta x)^3}[\chi_i y_{i+2} + (\chi_{i+1} - 2\chi_i + \chi_{i\text{-}1})y_{i+1} - 2(\chi_{i+1} - \chi_{i\text{-}1})y_i + (\chi_{i+1} + 2\chi_i - \chi_{i\text{-}1})y_{i\text{-}1} - \chi_i y_{i\text{-}2}]$$

Дифференциальное уравнение представлено в виде системы n+4 линейных уравнений с n+4 неизвестными прогибами узловых точек y_i, совместным решением которых определим искомые ординаты прогибов.

В качестве иллюстрации рассмотрим расчет симметричной фундаментной балки длиной 2*l*, лежащей на несвязном основании kl^4/EI_r= 800, загруженной посередине мосредоточеной силой 2*P* (рис. 1).

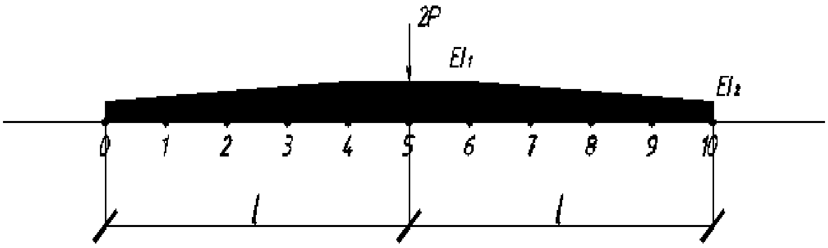

Рис. 1

Ввиду симметрии задачи расчет будем вести левой половины балки, разделив ее на пять частей одинаковой длины с соответствующими условиями закрепления ее концов.

Тогда уравнение прогибов рассматриваемой половины и изгибающих моментов можно представить в следующем виде:

$$y_i = \alpha_i \frac{Pl^3}{EI_r}10^{-3}; M_i = \beta_i Pl.$$

Характер изменения коэффициентов α_i и β_i по длине балки представлен на эпюрах (рис. 2), где сплошными линиями показаны эпюры для рассматриваемой балки с учетом односторонней связи с основанием, а пунктирными – для балки с двухсторонней связью.

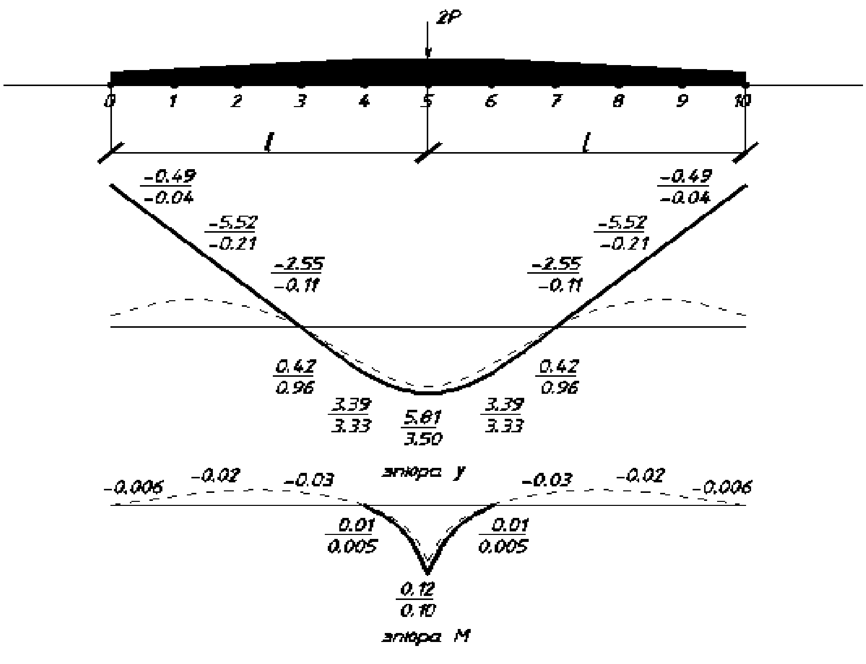

Рис. 2

С помощью полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1.Односторонние связи конструкции с основанием показывают, что изгибающие моменты в опасном сечении в реальных конструкциях на 20% выше, чем в конструкциях, рассчитанных по формулам существующих СНиП. Следовательно, арматура в таких балках перегружена.

2.Прогибы под грузом в реальных конструкциях выше на 40%, чем полученные решением дифференциального уравнения (3).

До сих пор остаются актуальными проблемы анализа напряжённо-деформированного состояния в названных типах конструкций даже без учёта односторонних связей в многочисленных вариантах моделей грунтовых и других типов оснований, не говоря уже о расчётах таких конструкций с учётом односторонних связей. Это говорит о важности и необходимости детального изучения конструкций лежащих на Винклеровском основании. Данное исследование может найти применение как в научно-исследовательской и учебной деятельности, так и при проектировании реального объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. ТКП 45-05.01-254-2012 «Основания и фундаменты сооружений».
2. Александров А.В. Сопротивление материалов. Учеб. Для вузов/А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова.- 3-е изд. Испр.- М: Высш. Шк., 2003.-560 с.
3. И.С. Березин, Н.П. Жидков. Методы вычислений. – Изд.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.-620с.