

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УРАВНИВАНИЯ СВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРЯМЫМ СПОСОБОМ

*А.М. ДЕГТЯРЕВ, кандидат технических наук, доцент,  
Е.В. ДЕГТЯРЕВА, старший преподаватель,  
И.П. ШЕВЕЛЕВ, кандидат технических наук, доцент  
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой,  
Беларусь)*

При обработке геодезических измерений обычно рассматриваются геодезические сети, в которых положение определяемых точек вычисляются в системе, задаваемой положением исходных пунктов. Однако существует много задач, в которых привязка к исходным пунктам не требуется. Например, при построении локальных сетей для создания геодезического обоснования при строительстве различных инженерных сооружений, при наблюдении за деформациями инженерных сооружений, уравнивании больших геодезических сетей, разделённых на блоки, в которых может не оказаться исходных пунктов и др. Сети такого рода получили название свободные сети. Следует отметить, что свободные сети с точки зрения системного подхода представляют собой более целостное построение, тогда как несвободные сети являются их частным случаем. Особенно привлекательна «неискажённость» сетей такого рода возможными большими ошибками исходных данных. Поэтому целесообразно любые геодезические сети уравнивать как свободные, а затем превращать их в несвободные, фиксируя каким-либо способом положение исходных точек [1].

Традиционно при уравнивании свободных сетей в подавляющем большинстве случаев используют решение на основе получения обобщённой обратной матрицы. Прямой метод получения решения практически не используется из-за его теоретической и практической неразработанности. Метод на основе обобщённой обратной матрицы в геодезии является наиболее распространённым и развивается более 70 лет начиная с работ Вje hammar [2], Mittermayer [3], Pelzer [4] и др.

Некоторые пути получения прямого решения в какой-то мере были указаны в работах [3] с использованием дополнительных условий на систему уравнений и [4], который вводил для получения решения вектор фиктивных измерений. Wolf [5] утверждает, что решение этой проблемы по существу было получено еще Гельмертом классическим методом наименьших квадратов. На основе классического метода наименьших квадратов были сделаны

попытки получить прямое решение задачи уравнивания свободной геодезической сети [6]. В частности, им доказано одно утверждение, которое мы в дальнейшем использовали для получения своего решения поставленной задачи.

В предлагаемом способе решения матрица системы уравнений поправок делится на две части: ранговую (линейно-независимую) и дефектную (линейно зависимую с матрицей коэффициентов  $C$ ).

В процессе применения к разделенной таким образом системе поправок обычного метода наименьших поправок получаем прямое решение вырожденной системы нормальных уравнений в виде двух частей  $x_1$  (ранговая часть решения) и  $x_2$  (дефектная часть решения).

$$x_1 = -\left(N_{11} \cdot (E + CC^T)\right)^{-1} \cdot b_1 = -(E + CC^T)^{-1} \cdot N_{11}^{-1} b_1$$

$$x_2 = C^T \cdot x_1$$

или полное решение  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ C^T x_1 \end{bmatrix}$ .

Выполнен численный пример уравнивания свободной спутниковой сети, состоящей из четырех пунктов и шести измеренных базовых векторов. Решения были получены дважды: на основе предложенных формул и с использованием обратной матрицы Мура-Пенроуза. Результаты были получены совершенно идентичные, что доказывает оптимальность полученного решения по критерию минимума следа ковариационной матрицы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: Справ. пособие / Е.Г. Бойко, В.В. Голубев, Ю.И. Маркузе – М.: Картгеоцентр: Геодезиздат, 1994. – 431 с.
2. Bjerhammar, A. Theory of Errors and Generalized Matrix Inverses / A. Bjerhammar – Amsterdam- London- New York, 1973. 420 p.
3. Mittermayer, E. A Generalization of the Least Squares Method for the Adjustment of Free Networks / E. Mittermayer // Bulletin Geodesique, No. 104, 1972. P. 3–15
4. Pelzer, H. Zur Behandlung singularer Ausgleichungsaufgaben / H. Pelzer // I. Unvollständige Beobachtungen / Z. Vermessungsw, 99, № 5, 1974. – P. 181–194.
5. Wolf, H. Helmerts Lösung zum Problem der freien Netze mit singularer Normal-Gleichungsmatrix / H. Wolf // Z. f. V., Nr. 97, Heft. 5, – 1972. – P. 101 – 109.
6. Papo, H. Free net analysis of storage tank calibration. / Haim Papo, Avraam Perelmuter //14th International Congress of the ISP / Commission No. V Non Topographic Photogrammetry., – Hamburg, 1980. – P. 593–601.