

УДК 539.4:624.046.3

## К ВОПРОСУ ОБ ОБЩЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФЕРМ

*Л.С. Турищев*

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Республика Беларусь  
e-mail: lst41@mail.ru

*Рассматривается влияние докритических деформаций при исследовании общей устойчивости ферм. Формулируется суть различия математических задач в случае не учета и учета таких деформаций. Анализ влияния докритических деформаций на величины критических нагрузок делается на примере фермы Мизеса.*

**Ключевые слова:** *устойчивость, фермы, докритические деформации, критическая нагрузка, ферма Мизеса.*

## ON THE QUESTION OF THE OVERALL STABILITY OF TRUSSES

*L. Turyshchau*

Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Republic of Belarus  
e-mail: lst41@mail.ru

*The influence of subcritical deformations in the study of the overall stability of trusses is considered. The essence of the difference between mathematical problems in the case of non-accounting and accounting for such deformations is formulated. The analysis of the influence of subcritical deformations on the values of critical loads is made on the example of the Mises truss.*

**Keywords:** *stability, trusses, subcritical deformations, critical load, Mises truss.*

**Введение.** Основы теории общей упругой устойчивости ферм согласно бифуркационному критерию были сформулированы Мизесом [1] и получили дальнейшее развитие в работах Корноухова Н.В. [2; 3], а также ряда других авторов. Согласно разработанной теории устойчивость ферм исследуется в деформированном состоянии, т.е. задача решается с учетом геометрической нелинейности. В практических расчетах при рассмотрении вопросов общей устойчивости ферм обычно принято не учитывать геометрическую нелинейность. Неявно подразумеваемым обоснованием допустимости этого считается малость не учитываемых докритических деформаций и практическая приемлемость получаемых результатов.

**Основная часть.** В случае не учёта геометрической нелинейности расчет фермы на устойчивость при статическом однопараметрическом узловом нагружении заключается в отыскании значения параметра нагрузки, при котором впервые появляется смежная форма равновесия по отношению к исходному недеформированному состоянию. Отыскание такого параметра сводится к математической задаче о собственных значениях и собственных векторах матрицы коэффициентов системы линейных однородных алгебраических уравнений:

$$A\bar{q} = \lambda\bar{q}, \quad (1)$$

где  $A$  – квадратная матрица  $n$ -го порядка;

$\lambda$  – параметр нагрузки;

$\bar{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  – вектор обобщенных перемещений, характеризующий смежную форму равновесия. В частном случае это может быть вектор узловых перемещений фермы.

Если же расчет на устойчивость фермы проводить с учетом докритических продольных деформаций, то качестве исследуемой формы равновесия необходимо рассматривать некоторое деформированное состояние и отыскивать значение параметра нагрузки, при котором впервые появляется смежная форма равновесия по отношению к этому неизвестному состоянию равновесия. Отыскание такого параметра сводится к более сложной математической задаче о ветвлении решений некоторой системы нелинейных уравнений (алгебраических или трансцендентных):

$$f_k(\bar{q}, \lambda) = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

При достижении параметром  $\lambda$  критического значения происходит разветвление решений системы (2). Математическая теории ветвления решений нелинейных уравнений (2) получила развитие в работах [4; 5]. Однако вопрос о допустимости перехода при решении некоторой прикладной задачи от уравнений (2) к уравнениям (1) не исследован.

Для получения системы (2) можно использовать общую систему уравнений строительной механики стержневых систем. Такая система уравнений характеризует три стороны задачи - статическую, геометрическую и физическую стороны.

Статическая сторона задачи связана с выполнением условий равновесия стержневой конструкции в целом, так и отдельных её частей. Эта сторона задачи описывается уравнениями равновесия. Геометрическая сторона задачи связана с соблюдением требования неизменности соединения стержней в узлах конструкции после её деформации. Эта сторона задачи описывается уравнениями совместности деформаций. Физическая сторона задачи связана с соблюдением соответствия деформаций элементов конструкции закону деформирования конструкционного материала. Эта сторона задачи описывается физическими уравнениями. Совместное рассмотрение этих уравнений и позволяет получить систему разрешающих уравнений, в которой их количество равно числу неизвестных величин. В качестве неизвестных величин могут выступать как перемещения, так и внутренние силы.

В случае использования в качестве неизвестных величин обобщенных перемещений фермы разрешающие уравнения принимают вид (2), а её решения, зависящие от параметра нагрузки  $\lambda$ , описывают кривую равновесных состояний процесса деформирования фермы при изменении этого параметра от нуля до некоторого значения. Существующие численные методы решения систем нелинейных уравнений (2) позволяют получать решения для конкретных числовых значений параметра  $\lambda$  и плохо применимы для проведения анализа допустимости перехода от уравнения (2) к уравнению (1) при исследовании общей устойчивости ферм.

Применим для решения системы (2) метод, предложенный в работе [6] и основанный на использовании методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В этом случае параметр  $\lambda$  считается независимой переменной, а перемещения фермы  $q_1, q_2, \dots, q_n$  функциями от этой переменной. Тогда, дифференцируя (2) по параметру  $\lambda$ , получим систему линейных уравнений относительно неизвестных производ-

ных  $\frac{dq_i}{d\lambda}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{d\lambda} = -\frac{\partial f_k}{\partial \lambda}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

Разрешая систему (3) относительно  $\frac{dq_i}{d\lambda}$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{d\lambda} = \frac{\Delta_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda)}{\Delta(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где  $\Delta(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda)$  - определитель системы (3);

$\Delta_i(q_1, q_2, \dots, q_n, \lambda)$  - определители, получающиеся из определителя системы (3) путем замены элементов  $i$  - го столбца столбцом свободных членов. Тогда интегральная кривая

$$q_1 = q_1(\lambda), \quad q_2 = q_2(\lambda), \dots, \quad q_n = q_n(\lambda),$$

определяемая системой (4), характеризует процесс деформирования и кривую равновесных состояний фермы при статическом нагружении однопараметрической узловой нагрузкой при изменении её параметра в заданном интервале. Переход к дифференциальным уравнениям позволяет исследовать точки ветвления решений системы (2), или, что тоже, критические состояния фермы, методом качественного анализа [7].

В качестве примера рассмотрим исследование общей устойчивости фермы Мизеса при произвольном однопараметрическом нагружении (рис.1)

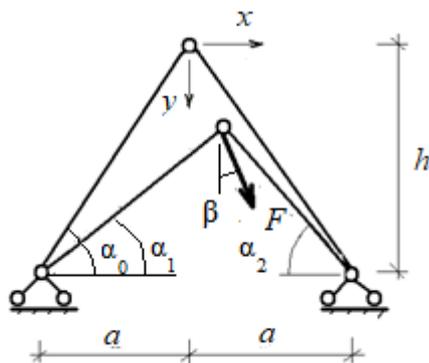


Рисунок 1. - Ферма Мизеса

Для описания процесса деформирования будут использоваться обобщенные перемещения  $\alpha_1, \alpha_2$ . Для получения разрешающих уравнений в форме (2) рассмотрим совместно три группы зависимостей:

– уравнения равновесия фермы в деформированном состоянии:

$$\begin{aligned} \sum y \dots \sum_{i=1}^2 \tilde{I} \quad \lambda \cos \beta &= 0; \\ \sum x \dots \sum_{i=1}^2 (-1)^i \tilde{I} \quad \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\tilde{I} = \frac{F}{EA}$  - записанные в безразмерной форме внутренние усилия и параметр нагрузки. Здесь  $E$  – модуль упругости конструкционного материала, а  $A$  – площадь поперечного сечения стержней фермы;

– уравнения совместности деформаций:

$$\begin{aligned} 2a \sin \alpha_2 &= l_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2); \\ 2a \sin \alpha_1 &= l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $l_i (i=1,2)$  – длины стержней фермы в деформированном состоянии;

- закон деформирования материала стержней фермы:

$$\tilde{l}_i = l_0 \cdot \cos \alpha_i; \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

где  $l_0$  – начальная длина стержней фермы.

Введем новые обобщенные перемещения:

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}; \quad \gamma = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}, \quad (8)$$

описывающие, соответственно, симметричную и антисимметричную составляющие деформированного положения фермы. Рассматривая совместно (5) – (8), получим систему разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \gamma) - \lambda \cos \beta &= 0; \\ f_2(\alpha, \gamma) - \lambda \sin \beta &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \gamma) &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \gamma - 4 \cos \alpha_0 \frac{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}{\sin 2\alpha}; \\ f_2(\alpha, \gamma) &= -2 \sin \alpha \cdot \sin \gamma + 2 \cos \alpha_0 \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (9) по параметру  $\lambda$ , получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\lambda} &= \frac{f_{2\gamma} \cos \beta - f_{1\gamma} \sin \beta}{f_{1\alpha} f_{2\gamma} - f_{2\alpha} f_{1\gamma}}; \\ \frac{d\gamma}{d\lambda} &= \frac{f_{1\alpha} \sin \beta - f_{2\alpha} \cos \beta}{f_{1\alpha} f_{2\gamma} - f_{2\alpha} f_{1\gamma}} \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f_{1\alpha} &= 2(\cos \alpha \cdot \cos \gamma - 4 \cos \alpha_0 \frac{\cos^2 \gamma}{\sin 2\alpha}); \\ f_{1\gamma} &= -2(\sin \alpha \cdot \cos \gamma - 2 \cos \alpha_0 \frac{\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha}); \\ f_{2\alpha} &= -2(\cos \alpha \cdot \sin \gamma + 2 \cos \alpha_0 \frac{\cos 2\alpha \cdot \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}); \\ f_{2\gamma} &= -2(\sin \alpha \cdot \sin \gamma - 2 \cos \alpha_0 \frac{\cos 2\gamma}{\sin 2\alpha}). \end{aligned}$$

$f_{i\alpha}, f_{i\gamma}$  ( $i = 1, 2$ ) – частные производные функций  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) по обобщенным перемещениям  $\alpha$  и  $\gamma$ .

Рассмотрим случай нагружения фермы вертикальной нагрузкой ( $\beta=0$ ). В этом случае  $\gamma = 0$  и процесс деформирования фермы будет описываться одним дифференциальным уравнением

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha})}{2(\sin \alpha - \frac{\cos \alpha_0}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha})(\cos \alpha - \frac{\cos \alpha_0}{\cos^2 \alpha})}. \quad (11)$$

Согласно [7] особым точкам процесса деформирования могут соответствовать два вида критических состояний. При одновременном обращении в ноль числителя и знаменателя в

(11) достигается точка бифуркации на кривой равновесных состояний фермы, а при обращении в ноль только знаменателя в (11) - предельная точка на этой кривой.

Обращение в ноль числителя и знаменателя в правой части (11) позволяет получить уравнение, определяющее положение точек бифуркации форм равновесия фермы Мизеса

$$\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \cos \alpha_0 \quad (12)$$

а обращение в ноль знаменателя в правой части (11) позволяет получить уравнение, определяющее положение предельных точек состояний равновесия

$$\cos^3 \alpha = \cos \alpha_0 \quad (13)$$

Приведя уравнение (12) к виду  $\cos^3 \alpha - \cos \alpha + \cos \alpha_0 = 0$  найдем значение  $\cos \alpha$ , при котором происходит бифуркация форм равновесия фермы Мизеса

$$(\cos \alpha)_1 = \sqrt[3]{-\frac{\cos \alpha_0}{2} + \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_0}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\cos \alpha_0}{2} - \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha_0}{4} - \frac{1}{27}}} \quad (14)$$

Графическое решение уравнения (12), приведенное на рис.2

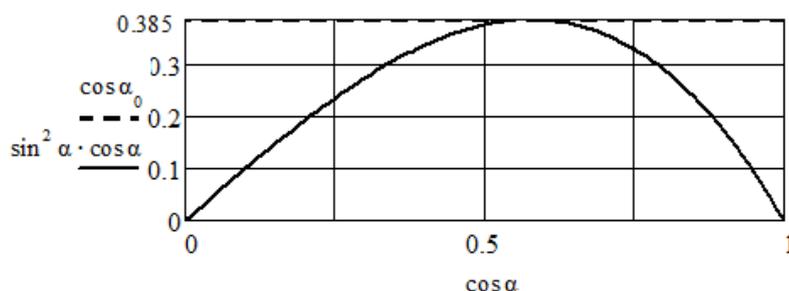


Рисунок 2. - Графическое решение уравнения (12)

позволяет найти, что впервые бифуркация форм равновесия происходит при значении  $\cos \alpha_0 = 0.385$ , что соответствует значению  $\alpha_0 = 67^\circ$ . Решая уравнение (13), найдем значение  $\cos \alpha$ , соответствующее предельной точке фермы Мизеса

$$(\cos \alpha)_2 = \sqrt[3]{\cos \alpha_0} \quad (15)$$

Используем первое уравнение системы (9) и получим уравнение кривой равновесных состояний

$$\lambda = 2 \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha}\right) \quad (16)$$

Подставляя в (16) корни уравнений (14), (15), найдем, соответственно, значения бифуркационной ( $\lambda_1$ ) и предельной ( $\lambda_2$ ) нагрузок фермы с учетом влияния геометрической нелинейности, порождаемой докритическими деформациями.

Аналогичные нагрузки при линейной постановке задачи определяются выражениями [8]:

– бифуркационные нагрузки

$$\lambda_{1\text{лин}} = 2 \frac{\cos^2 \alpha_0}{\sin \alpha_0} \quad (17)$$

– предельные нагрузки

$$\lambda_{2\text{лин}} = 2 \frac{\sin^3 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \quad (18)$$

Сравнивая полученные результаты, прежде всего следует отметить, что линейная постановка задачи может приводить к качественно неверным результатам. Согласно (17) при решении задачи в нелинейной постановке бифуркация форм равновесия фермы Мизеса происходит только при значениях  $67^{\circ}25' \leq \alpha_0 < 90^{\circ}$ , а в случае линейной постановки задачи она возможна при любых значениях  $\alpha_0$ .

На графиках рисунке 3 приведено сравнение численных значений бифуркационных (рисунок 3, а) и предельных (рисунок 3, б) нагрузок в линейной и нелинейной постановках.

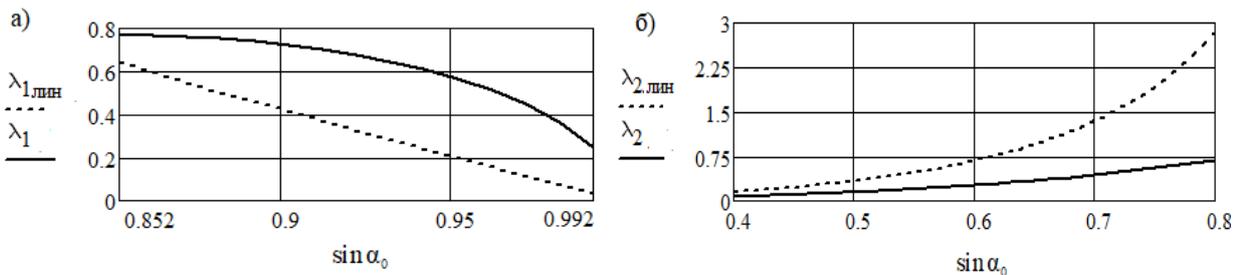


Рисунок 3. - Сравнение численных значений бифуркационных и предельных нагрузок

Сплошными линиями на графиках показаны результаты, соответствующие нелинейной постановке. Из приведенных графиков очевидны следующие соотношения для критических нагрузок в линейной и нелинейной постановках:

$$\lambda_{1\text{лин}} < \lambda_1; \quad \lambda_{2\text{лин}} > \lambda_2. \quad (19)$$

Полученные соотношения (19) имеют простое физическое объяснение. Не учет докритических деформаций при определении параметра нагрузки, соответствующего точке бифуркации, эквивалентен завышению податливости фермы Мизеса боковым отклонениям, а при определении параметра нагрузки, соответствующего предельной точке, - занижению её податливости вертикальным перемещениям.

**Заключение.** Таким образом, не учет докритических деформаций при исследовании общей устойчивости ферм может приводить как к качественным, так и количественным ошибкам при определении критических нагрузок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mises, R. Uber die Stabilitatsprobleme der Elastizitatstheorie / R. Mises // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. – 1923.- №3.- С.15-23.
2. Корноухов, Н.В. Прочность и устойчивость стержневых систем / Н.В. Корноухов. – Москва: Стройиздат, 1949. – 376 с.
3. Корноухов, Н.В. Особый случай потери устойчивости / Н.В. Корноухов // Сборник трудов института строительной механики АН УССР. – 1952. - №17.- С.5-17.
4. Вайнберг, М.М. Теория ветвлений решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
5. Красносельский, М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский. - Москва: Наука, 1969. – 465 с.
6. Давыденко, Д.Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений / Д.Ф. Давыденко // Украинский математический журнал. – 1953. - т.5, №2.- С.196-206.
7. Возлинский, В.И. О связи бифуркаций равновесия консервативных систем с распределением устойчивости на кривой равновесия / В.И. Возлинский // Прикладная математика и механика. – 1967. - вып.2.- С.384-392.
8. Михайличенко, К.А. О расчете на устойчивость шарнирно-стержневых систем / К.А. Михайличенко // Известия АН СССР. Серия Отделение технических наук. – 1958.- №12.- С.120-123.