УДК 51:62(035.3)

ТРАНСФОРМАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ В РАВНОМЕРНОЕ ПРИ ЗАМЕНЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА ЕЕ ВОЗМОЖНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНЫМ

Ю. А. ЛЕВША
(Представлено: д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ)

На примере процесса растворения чернильной капли в заполненной водой трубке отслежена трансформация нормального закона распределения случайной координаты чернильной молекулы в равномерное по мере роста энтропии, связанного с увеличением среднеквадратичного разброса координат молекул чернил, обусловленного их броуновским движением.

Нормальный, экспоненциальный и равномерный законы распределения случайных величин формируются в результате растворения капли чернил в бесконечной, полубесконечной (начальное положение капли у ее края) и конечной трубке с водой [1]. При этом, под f(x) следует понимать отношение числа чернильных молекул на участке (x,x + dx) к их общему числу в трубке.

Очевидно, растворение означает рост σ в результате броуновского движения молекул, что согласуется с законом возрастания энтропии S. Чтобы убедится в этом непосредственно, вычислим S нормально распределенной величины.

$$S = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\right)dx = \ln(\sqrt{2\pi}\sigma)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx,$$

где m - математическое ожидание случайной координаты чернильной молекулы x.

С учетом того, что для f(x) выполняется условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \tag{1}$$

а также определения среднеквадратического отклонения случайной величины x

$$\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 f(x)dx = \sigma^2, \tag{2}$$

получим результат

$$S = \ln\sigma + \ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Согласно (3) обусловленный броуновским движением молекул рост сигмы приводит к увеличению энтропии процесса [2].

Свернув координатную плоскость OXY с нарисованной на ней Гауссовой кривой в цилиндр радиуса r и образующей, параллельной оси OY, можно непосредственно проследить как нормальное распределение по мере увеличения σ (обусловленного ростом S) трансформируется в равномерное.

Пусть m = 0. Считая поворот на угол 2π возвратом в исходную точку и, применив теорему сложения вероятностей, получим

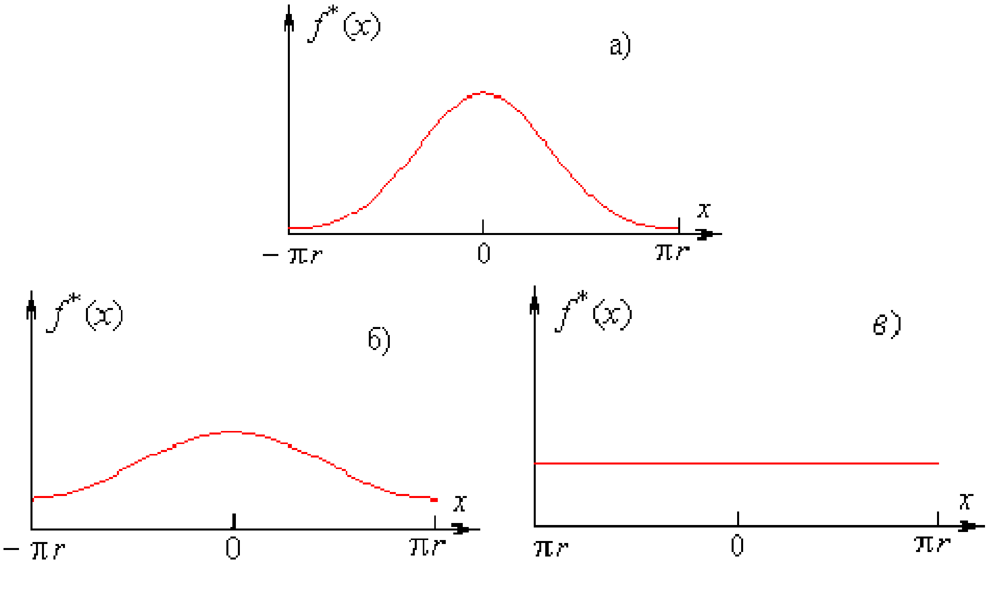
$$f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+2\pi r k)^2}{2\sigma^2}} \qquad (-\pi r \le x \le \pi r), \tag{4}$$

где длина интервала равна длине окружности.

Вначале, когда чернильные молекулы локализованы не далеко от места падения капли чернил ($\sigma \ll \pi r$), в соответствии с правилом трех сигм, в сумме (4) можно пренебречь слагаемыми со всеми номерами, кроме $k = 0$, и $f^*(x)$ на отрезке $[-\pi r, \pi r]$ будет аппроксимироваться нормальным законом.

Затем, по мере растворения чернил, начнет выполняться неравенство $\sigma \ge \pi r$. Т.е. разброс случайной величины станет сравнимым с длиной отрезка, на котором определена $f^*(x)$. Это не позволяет при составлении прогноза одно возможное значение x предпочесть другому. Т.е. $f^*(x)$ в такой ситуации должна описывать равномерное распределение.

Меняя отношение $a = {}^{\pi r}/_{\sigma}$ от бесконечности до нуля, с помощью формулы (4) можно непосредственно проследить трансформацию нормального распределения в равномерное. В частности, графики $f^*(x)$ (рисунок 1 а, б, в), построенные в среде пакета MathCAD [3] для $a = 5, 3, 1$, полностью подтверждают предсказанную эволюцию функции распределения случайной координаты чернильной молекулы в свернутой в кольцо трубке конечной длины. При этом $x = 0$ соответствует начальному положению чернильной капли.



а **– a = 5;** ***б*** **– a = 3;** ***в*** **– a = 1**

Рисунок 1. – Эволюция нормального распределения в равномерное

Чтобы обозначить масштаб осей ординат, заметим, что высота первого максимума почти как у нормального закона и, в соответствии с изложенным, примерно равна ${}^{5}/_{\sqrt{2\pi}\pi r}$. При этом площади под всеми графиками одинаковы и равны единице независимо от величины r. По этой причине высота прямой на рисунке в равна ${}^{1}/_{2\pi r} \ll {}^{5}/_{\sqrt{2\pi}\pi r}$.

В заключение заметим, что в силу симметрии задачи (m = 0, ибо чернильная капля в начале процесса растворения локализована в середине трубки), полученные результаты никак не изменятся, если рассматривать отрезок прямой трубки с начальным положением чернильной капли в ее центре. При этом слагаемые с $k \neq 0$ в (4) появятся вследствие отражения диффундирующих молекул чернил от торцов трубки.

Рассмотренная задача является непосредственной иллюстрацией того, что при математическом моделировании процессов молекулярной природы (в том числе и решении соответствующих уравнений математической физики) целесообразно использовать мощный дополнительный ресурс в виде основных положений и методов теории вероятностей и математической статистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левша Ю. А. Получение законов распределения случайных величин из условия экстремальности энтропии / Сборник трудов молодых специалистов ПГУ
2. Пытьев, Ю. П. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков / Ю. П. Пытьев, И. А. Шишмарев. – М. : Изд-во Московского ун-та, 1983 г. – 252 с.
3. Аладьев, В.З. Вычислительные задачи на персональном компьютере / В.З. Аладьев, Н.А. Гершгорн. - Киев: Техника, 1991 г. - 248 с.