

УДК 51:62(035.3)

**ПОЛУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН
ИЗ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ЭНТРОПИИ**

Ю. А. ЛЕВША

(Представлено: д-р техн. наук, проф. С. Г. ЕХИЛЕВСКИЙ)

С помощью второго начала термодинамики (законы возрастания энтропии) установлен вид и смысл параметров наиболее популярных в статистике законов распределения непрерывных случайных величин, описывающих равновесные состояния в окружающем нас материальном мире.

Согласно [1] мера неопределенности исхода опыта по измерению непрерывной случайной величины x (энтропия):

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x)$ – дифференциальная функция распределения.

В связи с законом возрастания энтропии (см. 2-ое начало термодинамики) [2] выясним какая $f(x)$ обеспечивает экстремум функционала (1). Так как $f(x)$ – плотность вероятности, максимум S будет искать при дополнительных условиях:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = m, \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \sigma^2, \quad (4)$$

где (2) - условие нормировки, (3) и (4) - требования конечности матожидания и дисперсии.

Домножим (2) – (4) соответственно на α , β , γ и прибавим к (1):

$$S + \alpha + \beta m + \gamma \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, f(x)) dx, \quad (5)$$

где

$$F(x, f) = -f \ln f + \alpha f + \beta x f + \gamma (x - m)^2 f. \quad (6)$$

Так как слева в (5) все (кроме S) есть константа, то экстремальность интеграла справа в (5) будет означать условный экстремум S . Чтобы интеграл (5) был максимальным, нужно каждому x поставить такое значение $f(x)$, чтобы функция $F(x, f)$ была максимальной. Из необходимого условия экстремума:

$$F'_f = -\ln f - 1 + \alpha + \beta x + \gamma (x - m)^2 = 0, \quad (7)$$

найдем

$$f = c * e^{\beta x + \gamma (x - m)^2} = f(x). \quad (8)$$

Подставив (8) в (2) – (4), получим, что $\beta = 0$ и выразим $c = e^{\alpha - 1}$ и γ через m и σ . Если (2) умножим на m и вычтем из (3), получим, что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m) f(x) dx = 0,$$

то есть имеет место свойство

$$f(m - x) = f(m + x).$$

Согласно (8) это означает, что $\beta = 0$. В результате, после замены $\xi = \frac{(x - m)}{\sigma}$, равенство (4) с учетом (8) примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 c \sigma e^{\xi^2 \gamma \sigma^2} d\xi = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} d\xi, \quad (9)$$

Чтобы убедиться в справедливости (9), рассмотрим зависящую от параметра α интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2/2} dx$$

Для вычисления $I(1)^2$ перейдем в полярную систему координат:

$$I(1)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = 1 * \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

То есть $I(1) = 1$. При этом $I(\alpha) = 1/\sqrt{\alpha}$, после чего дифференцированием $I(\alpha)$ по параметру получим:

$$I(\alpha)' = -\alpha^{-3/2}/2 = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2/2} dx$$

или, полагая в последнем равенстве $\alpha = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = 1$$

Аналогично, вычислив производную n -го порядка $I(\alpha)^{(n)}$, можно получить:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2} dx = 1 * 3 * \dots * (2n - 1), \quad (10)$$

С учетом изложенного (см. (9))

$$\gamma = -1/2\sigma^2, \quad c = 1/\sqrt{2\pi\sigma}$$

то есть

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad (11)$$

В отличие от стандартного подхода [1], нормальное распределение (11) возникло не по определению, а в следствие закона возрастания энтропии. При этом смысл параметров m , σ не нужно устанавливать отдельно. Он понятен из соотношений (3) и (4).

Если случайная величина положительно определена, из конечности матожидания следует конечность дисперсии, так как слева от m интервал конечен ($x > 0$), а справа – бесконечен. Бесконечность дисперсии означала бы бесконечное смещение m вправо по числовой оси. Поэтому от условия (4) следует отказаться, а соотношения (2), (3), (8) примут вид:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1, \quad (2')$$

$$\int_0^{\infty} x f(x) dx = m, \quad (3')$$

$$f(x) = c e^{\beta x}, \quad (8')$$

Соответственно подставив (8') в (2'), выразим c через β :

$$1 = \int_0^{\infty} c e^{\beta x} dx = \frac{c}{\beta} e^{\beta x} \Big|_0^{\infty} \Rightarrow \beta < 0; \quad 1 = -\frac{c}{\beta} \Rightarrow f(x) = c e^{-\beta x}.$$

Подставив последнее выражение в (3'), найдем c и завершим получение экспоненциального распределения:

$$\begin{aligned} c \int_0^{\infty} \frac{x e^{-\beta x}}{u} \frac{dx}{du} &= \left| \frac{du = dx}{v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x}} \right| = c \left[-\frac{x}{\beta} e^{-\beta x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx \right] = \\ &= -\frac{1}{\beta} e^{-\beta x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\beta} = m \Rightarrow f(x) = \frac{1}{m} e^{-\frac{x}{m}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Если возможные значения случайной величины принадлежат отрезку $[a, b]$, ее матожидание не может не быть конечным. Отбросив в этом случае условие (3'), получим

$$\int_a^b f(x) dx = 1, \quad (2'')$$

$$f(x) = c, \quad (8'')$$

откуда

$$c = \frac{1}{b-a},$$

т.е. максимуму энтропии на отрезке отвечает равномерное распределение

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad (13)$$

Полученные распределения давно открыты и изучены, так как повсеместно распространены в окружающем нас мире, в соответствии с законом возрастания энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман, И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – 1979 г. – 408 с.
2. Курс физики / Б. М. Яворский [и др.]. - М. : Высш. шк., 1965. – Т. 1 – 376 с.