УДК 517.926+517.977

РАВНОМЕРНАЯ ПОЛНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ СТРУКТУРОЙ

А.А. Козлов*, Т.А. Александрович**
**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»*
***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

Одним из вопросов математической теории управления является задача управляемости асимптотических характеристик линейных динамических систем.

Цель статьи – введение для линейных дискретных управляемых систем переменной размерности фазового пространства свойства равномерной полной управляемости и получение необходимых и достаточных условий наличия у таких систем этого свойства.

Материал и методы. *Материалом исследования является линейная дискретная система с изменяющейся структурой. Использованы методы теории матриц, теории линейных дискретных систем.*

Результаты и их обсуждение. *В представленной работе для линейной дискретной динамической системы переменной размерности фазового пространства введено свойство и получен критерий равномерной полной управляемости в терминах матрицы Коши однородной линейной дискретной системы и матрицы при управлении.*

Заключение. *Установленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем переменной размерности фазового пространства.*

Ключевые слова: *линейная дискретная динамическая система переменной размерности фазового пространства, матрица управляемости (Калмана), равномерно вполне управляемая (по Тонкову) дискретная система.*

UNIFORM COMPLETE CONTROLLABILITY OF LINEAR DISCRETE SYSTEMS WITH VARYING STRUCTURE

A.A. Kozlov*, T.A. Aleksandrovich**
**Education Establishment “Polotsk State University”*
***Education Establishment “Vitebsk State P.M. Masherov University”*

One of the issues of the mathematical control theory is the problem of asymptotic characteristics controllability of linear dynamical systems.

The purpose of this article is to introduce the property of uniform complete controllability for linear discrete controllable systems of variable phase space dimension and to obtain necessary and sufficient conditions for such systems to have this property.

Material and methods. *The research material is a linear discrete system with a variable structure. The work uses the methods of matrix theory, linear discrete systems theory.*

Findings and their discussion. *In the presented paper, for a linear discrete dynamical system of variable phase space dimension, a property and a criterion for uniform complete controllability is obtained in the Cauchy matrix terms of a homogeneous linear discrete system and the matrix under control.*

Conclusion. *The established results will further make it possible to solve the problems of controlling the asymptotic characteristics of linear discrete dynamical systems of variable phase space dimension.*

Key words: *linear discrete dynamic system of variable phase space dimension, controllability matrix (Kalman matrix), uniformly controllable discrete system (according to Tonkov).*

Одним из вопросов математической теории управления является задача управляемости асимптотических характеристик линейных динамических систем. Для линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида Е.Л. Тонковым было предложено решать данную задачу в предположении наличия у последних свойства равномерной полной управляемости.

Этот подход впоследствии позволил получить для линейных дифференциальных систем хорошие результаты по решению вышеуказанной задачи [1]. Позже свойство равномерной полной управляемости было перенесено на линейные системы с дискретным временем, и на основании этого свойства были решены некоторые задачи управляемости асимптотических инвариантов таких систем [2]. В 1999 году И.В. Гайшун [3] ввел понятие линейных дискретных управляемых систем с изменяющейся структурой как обобщение линейных дискретных динамических систем постоянной размерности фазового пространства. На сегодняшний день для таких систем актуальным является исследование управляемости их асимптотических характеристик. Одним из исторически сложившихся подходов при решении этой задачи выступает корректное введение для линейных дискретных систем с изменяющейся структурой свойства равномерной полной управляемости и на основании последнего (так же, как для непрерывных и дискретных линейных динамических систем постоянной размерности фазового пространства) получение достаточных условий управляемости различных асимптотических инвариантов таких систем.

Цель статьи – введение для линейных дискретных управляемых систем переменной размерности фазового пространства свойства равномерной полной управляемости и получение необходимых и достаточных условий наличия у таких систем этого свойства.

Материал и методы. Материал исследования: линейная дискретная система переменной размерности фазового пространства. Использованы методы теории матриц, теории линейных дискретных систем.

Результаты и их обсуждение. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{R}^n$ будем обозначать n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); $e_1, e_2, \ldots, e_m$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^m$; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $M_n := M_{nn}$. Обозначим через $E_{mn} = [e_1, \ldots, e_n] \in M_{mn}$ тождественное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Положим $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Пусть $n_0, \ldots, n_t, \ldots$ и $r_0, \ldots, r_t, \ldots$ – последовательности натуральных чисел. Рассмотрим уравнение вида

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \qquad t = 0,1,2,\ldots, \tag{1}$$

в котором $\{A_t\}$ и $\{B_t\}$, $t = 0,1,\ldots$, – последовательности действительных матриц размерностей соответственно $n_{t+1} \times n_t$ и $n_{t+1} \times r_t$, последовательность $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ в каждый момент времени t принимает значения в пространстве $\mathbb{R}^{r_t}$ и играет роль входного (управляющего) воздействия.

Определение 1. *Матричную функцию* $A_t \in M_{n_{t+1} n_t}$, $t = 0,1,\ldots$, *будем называть вполне ограниченной, если при любом* $t \in \mathbb{N}_0$ и $n_t \geq n_{t+1}$ $(n_{t+1} > n_t)$ *матрица* $A_t^T A_t$ $(A_t A_t^T)$ *невырождена и найдется такое* $a > 0$, *что при всех* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *справедливо неравенство*

$$\sup \|A_\tau\| + \sup_{n_\tau \geq n_{\tau+1}} \|(A_\tau A_\tau^T)^{-1}\| + \sup_{n_\tau < n_{\tau+1}} \|(A_\tau^T A_\tau)^{-1}\| \leq a. \tag{2}$$

З а м е ч а н и е 1. В неравенстве (2) спектральные нормы матриц $A_t \in M_{n_{t+1} n_t}$, $t \in \mathbb{N}_0$ вычисляются в соответствующих матричных пространствах.

З а м е ч а н и е 2. Определение 1 обобщает нижеприведенное определение, предложенное в [4], для последовательности квадратных матриц фиксированной размерности.

Определение 2 [4]. *Матричную функцию* $A_t : \mathbb{N}_0 \to M_n$ *называют вполне ограниченной, если она невырождена и найдется такое число* $l \geq 1$, *при котором справедливо соотношение* $\sup\limits_{t \in \mathbb{N}_0} (\|A(t) + A^{-1}(t)\|) \leq l$.

Действительно, пусть справедливо определение 1 и для всех $t \in \mathbb{N}_0$ имеет место равенство $n_t = n$. Тогда в силу невырожденности матрицы $A_t^T A_t$ квадратные матрицы-сомножители также невырождены, а значит, матрицы A_t^T и A_t обратимы при любом $t \in \mathbb{N}_0$. Ввиду элементарных свойств нормы матрицы, с учетом неравенства (2), для всех $t \in \mathbb{N}_0$ выполняются соотношения $\|A_t^{-1}\| = \|A_t^{-1}((A_t^T)^{-1} A_t^T)\| \le \|A_t^{-1}(A_t^T)^{-1}\| \cdot \|A_t^T\| = \|(A_t^T A_t)^{-1}\| \cdot \|A_t\| \le a^2$. Полагая $l := a + a^2$, получим требуемое.

Всюду далее считаем, что матрица-функция A_t, $t \in \mathbb{N}_0$, в уравнении (1) является вполне ограниченной. Зафиксируем для нее число a, определенное неравенством (2). Не ограничивая общности рассуждений, положим $a > 1$. Матричную функцию B_t, $t \in \mathbb{N}_0$, из уравнения (1) будем считать *ограниченной*. Последнее означает, что найдется число $b > 1$, что при каждом $t \in \mathbb{N}_0$ имеет место оценка $\|B_t\| \le b$.

Замечание 3. В последнем неравенстве спектральная норма матриц B_t (так же, как и матриц A_t), $t = 0,1,\ldots$, вычисляется в соответствующих пространствах.

Будем предполагать, что последовательности $\{n_t\}_{t=0}^{+\infty}$ и $\{r_t\}_{t=0}^{+\infty}$ ограничены, т.е. найдется такое число $N \ge 1$, что для любого $t \in \mathbb{N}_0$ выполняются неравенства $n_t \le N$ и $r_t \le N$.

В работе [5] И.В. Гайшуном было введено следующее

Определение 3 [5; 6, с. 314–315]. *Уравнение (1) при* $u_t \equiv 0$, $t = 0,1,2,\ldots$, *т.е. система*

$$x_{t+1} = A_t x_t, \quad t = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

связывающая неизвестную последовательность $x_t \in \mathbb{R}^{n_t}$ *в точках t и t + 1, называется линейной однородной системой с изменяющейся структурой.*

Замечание 4. Отметим, что, в свою очередь, уравнение вида (1) называют *линейным управляемым уравнением (или системой) с изменяющейся структурой* [7].

Определение 4 [5]. *Решением системы (3) будем называть любую функцию* φ_t *аргумента t, определенную на множестве* $\{\tau, \tau+1, \ldots\}$, $\tau \in \mathbb{N}_0$, *и принимающую значения в пространствах* $\mathbb{R}^t$ *(для каждого момента времени t свое векторное пространство* $\mathbb{R}^t$*) и удовлетворяющую соотношениям* $\varphi_{t+1} = A_t \varphi_t$, $t = \tau, \tau+1, \ldots$.

Следуя работе [5; 6, с. 314–315], матрицу $X_{t,\tau}$ размерности $n_t \times n_\tau$, для которой выполняются равенства

$$X_{\tau,\tau} = E \in M_{n_\tau} \text{ и } X_{t,\tau} = A_{t-1} A_{t-2} \cdot \ldots \cdot A_\tau \text{ при } t > \tau, \quad t, \tau \in \mathbb{N}_0, \tag{4}$$

будем называть *матрицей Коши* системы (3). Тогда, как легко заметить, любое решение $x_t = x_t(\tau, v)$ уравнения (3) с начальным условием $x_\tau = v$ можно записать в виде $x_t = X_{t,\tau} v$.

Замечание 5. При всяких $t, \tau \in \mathbb{N}_0$, $t \ge \tau$, матрица Коши $X_{t,\tau}$ ограничена и ввиду верного при каждом $t \in \mathbb{N}_0$ неравенства $\|A_t\| \le a$ для нее имеют место оценки

$$\|X_{t,\tau}\| = \|A_{t-1} A_{t-2} \cdot \ldots \cdot A_\tau\| \le \|A_{t-1}\| \cdot \|A_{t-2}\| \cdot \ldots \cdot \|A_\tau\| \le a^{t-1-\tau}. \tag{5}$$

Известно [6, с. 316–317; 7], что для решения системы (1) с начальным условием $x_\tau = v$ при $t > \tau$ $(t, \tau \in \mathbb{N}_0)$ справедлива формула Коши

$$x_t = X_{t,\tau} v + \sum_{j=\tau}^{t-1} X_{t,j+1} B_j u_j. \tag{6}$$

Зафиксируем некоторые числа $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и рассмотрим следующую матрицу размера $n_{\tau+\sigma} \times n_{\tau+\sigma}$ вида

$$W_{\tau,\tau+K} := \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+\sigma,j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K,j+1}^T. \tag{7}$$

В соответствии с работой [7] будем ее называть *матрицей управляемости* (или же *матрицей Калмана*).

З а м е ч а н и е 6 . Изначально матрица управляемости была введена для линейных управляемых нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений [3; 8–11]

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u\,,\ \ x \in \mathbb{R}^n\,,\ \ u \in \mathbb{R}^m\,,\ \ t \ge 0\,, \qquad (8)$$

в которых матричные функции $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ принадлежат некоторому заранее заданному допустимому функциональному классу, а также для дискретных управляемых систем [6]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)\,,\ \ x \in \mathbb{R}^n\,,\ \ u \in \mathbb{R}^m\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,, \qquad (9)$$

в которых $A(k)$, $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – последовательности вещественных $(n \times n)$- и $(n \times m)$-матриц соответственно.

В работах [1; 3; 8–12] были изучены некоторые свойства матрицы Калмана, обеспечивающие решение различных задач управляемости как самими такими системами ((8) или (9)), так и их внутренними характеристиками (о последних задачах см. подробнее, напр., в работе [1]).

Нижеприведенные леммы 1–3 устанавливают отдельные свойства матрицы (7), аналогичные свойствам матрицы Калмана систем (8) с непрерывным временем (см., напр., [1, с. 80–90]).

Лемма 1. *При любых $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$ матрица Калмана $W_{\tau,\tau+K}$ симметрическая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$ и рассмотрим матрицу управляемости (7). В силу элементарных свойств операций транспонирования, суммы, а также произведения матриц выполняются равенства

$$W^T_{\tau,\tau+K} = (\sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X^T_{\tau+K,j+1})^T =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} (X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X^T_{\tau+K,j+1})^T =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} (X^T_{\tau+K,j+1})^T (X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T)^T =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} (B_j^T)^T (X_{\tau+K,j+1} B_j)^T =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} = W_{\tau,\tau+K}$$

и, значит, справедливо соотношение $W^T_{\tau,\tau+K} = W_{\tau,\tau+K}$, которое с учетом произвольности $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$ означает симметричность матрицы Калмана $W_{\tau,\tau+K}$ при всяких $K \in \mathbb{N}$ *и* $\tau \in \mathbb{N}_0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При любых $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$ матрица $W_{\tau,\tau+K}$ неотрицательно определена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторые числа $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$, а также произвольный вектор $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$. Умножим на последний слева и справа матрицу управляемости (7). Тогда имеют место очевидные равенства

$$\xi^T W_{\tau,\tau+K} \xi = \xi^T (\sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X^T_{\tau+K,j+1}) \xi =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} (\xi^T X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi) =$$
$$= \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} (B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi)^T \cdot (B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi).$$

Поскольку для любого числа $p \in \mathbb{N}$ и вектора $v \in \mathbb{R}^p$ выполняется соотношение $v^T v = \|v\|^2$, то имеет место равенство

$$\sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} (B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi)^T (B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi) = \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} \left\| B_j^T X^T_{\tau+K,j+1} \xi \right\|^2 \ge 0\,,$$

и, значит, $\xi^T W_{\tau,\tau+K} \xi \ge 0$. Отсюда и из леммы 1 с учетом произвольности $K \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{N}_0$ получим требуемое. Лемма 2 доказана.

В [8] на основании определения матрицы Калмана для линейных нестационарных систем (8) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами впервые было введено свойство равномерной полной управляемости.

Определение 5 [8; 9]. *Система (8) называется равномерно вполне управляемой (в смысле Калмана), если существуют такие числа* $\sigma > 0$ *и* $\delta > 0$, *что при всяком* $t_0 \ge 0$ *и* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *выполняется неравенство*

$$\xi^T W(t_0, t_0 + \sigma)\xi \ge \delta \|\xi\|^2, \tag{10}$$

в котором матрица управляемости $W(t_0, t_0 + \sigma)$ *системы (8) имеет вид*

$$W(t_0, t_0 + \sigma) := \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0, s)B(s)B^T(s)X^T(t_0, s)ds,$$

где $X(t, s)$ *– матрица Коши линейной нестационарной системы (8) с нулевым управлением* u.

В дальнейшем это свойство было перенесено (см., напр., монографию [12]) на случай линейных систем с дискретным временем (8)

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m,\ t \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Определение 6 [2]. *Система (11) называется равномерно вполне управляемой (в смысле Калмана), если существуют такие числа* $K \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha > 0$, *что при всяком* $\tau \in \mathbb{Z}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ *имеет место неравенство*

$$\xi^T \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+\sigma, j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K, j+1}^T \xi \ge \delta \|\xi\|^2. \tag{12}$$

В настоящей работе условие равномерной полной управляемости переносится на дискретные управляемые системы (1) с изменяющейся структурой.

Определение 7. *Систему (1) будем называть равномерно вполне управляемой (в смысле Калмана), если существуют числа* $K \in \mathbb{N}$ *и* $\alpha > 0$, *что при любом числе* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *и всяком векторе* $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$ *выполняется неравенство*

$$\xi^T W_{\tau,\tau+K}\xi = \xi^T \left(\sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K, j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K, j+1}^T\right)\xi \ge \alpha \|\xi\|^2. \tag{13}$$

В таком случае будем говорить, что система (1) является K-равномерно вполне управляемой.

Для равномерно вполне управляемых систем (1) имеет место свойство, аналогичное указанному в предложении 5.1 работы [1] для линейных нестационарных управляемых систем (8).

Лемма 3. *Если система (1) является K-равномерно вполне управляемой, то при любом* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *матрица Калмана* $W_{\tau,\tau+K}$ *обратима, причем выполняется неравенство* $\det W_{\tau,\tau+K} \ge M$, *где* $M = \min\{\alpha^N, 1\}$, *а величина* α *взята из определения 2*.

Д о к а з а т е л ь с т в о будем проводить в соответствии с [1, с. 94]. Пусть система (1) является *K*-равномерно вполне управляемой. Возьмем произвольное число $\tau \in \mathbb{N}_0$. В силу леммы 1 матрица $W_{\tau,\tau+K}$ симметрическая и все ее собственные значения вещественные числа [13, с. 53]. Пусть $\lambda_j := \lambda_j(W_{\tau,\tau+K}) \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n_{\tau+K}}$ – произвольное собственное значение матрицы $W_{\tau,\tau+K}$, а $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$; $\|\xi\| = 1$ – соответствующий собственный вектор. Тогда, очевидно, имеют место равенства $\lambda_j = \lambda_j \xi^T \xi = \xi^T W_{\tau,\tau+K}\xi$. Поскольку уравнение (1) *K*-равномерно вполне управляемо, то справедливо соотношение $\xi^T W_{\tau,\tau+K}\xi \ge \alpha > 0$. Отсюда следуют неравенства $\lambda_j \ge \alpha$, верные для любого $j \in \{1, \ldots, n_{\tau+K}\}$. Так как определитель матрицы равен произведению всех собственных значений этой матрицы [13, с. 56], то с учетом последних неравенств, ограниченности последовательности $\{n_t\}$ и определения числа *N* выполняются соотношения $\det W_{\tau,\tau+K} = \prod_{j=1}^{n_{\tau+K}} \lambda_j(W_{\tau,\tau+K}) \ge \alpha^{n_{\tau+K}} \ge \min\{\alpha^N, 1\} := M > 0$, означающие ввиду оценки $K > 0$, что матрица $W_{\tau,\tau+K}$ обратима для любого $\tau \in \mathbb{N}_0$. Лемма 3 доказана.

В работе [2] для линейных управляемых систем с дискретным временем (11) было показано, что определение 6 эквивалентно следующему нижеприведенному определению.

Определение 7 [13]. *Система (11) обладает свойством равномерной полной управляемости (в смысле Тонкова), если существуют такие числа* $\alpha > 0$ *и* $K \in \mathbb{N}$*, что при любом числе* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *и векторе* $x_1 \in \mathbb{R}^n$ *найдется управление* $u(k)$, $k = k_0, k_0+1, ..., k_0+K-1$*, удовлетворяющее оценке* $\|u(k)\| \le \alpha \|x_1\|$*, при котором для решения* $x(k)$ *системы (1) с этим управлением* u *и начальным условием* $x(k_0) = 0$ *обеспечивается равенство* $x(k_0+K) = x_1$.

По аналогии с вышеуказанной дефиницией для линейных дискретных управляемых систем (1) с изменяющейся структурой введем следующее.

Определение 8. *Систему (1) будем называть K-равномерно вполне управляемой (по Тонкову), если существуют числа* $K \in \mathbb{N}$ и $\gamma > 0$*, что для любого начального момента времени* $\tau \in \mathbb{N}_0$ *и всякого вектора* $v \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$ *найдется управление* $u = u_t$, $t = \tau, \tau+1, ..., \tau+K-1$*, удовлетворяющее неравенству* $\|u_t\| \le \gamma \|v\|$ *при всех* $t = \overline{\tau, \tau+K-1}$*, и такое, что решение системы (1) с этим управлением и начальным условием* $x_\tau = 0$ *удовлетворяет равенству* $x_\sigma = v \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$.

Основным результатом данной работы является доказательство эквивалентности определений 2 и 3 равномерной полной управляемости линейных дискретных систем с изменяющейся структурой, установленное в следующей теореме.

Теорема. *Система (1) K-равномерно вполне управляема (по Тонкову) тогда и только тогда, когда она K-равномерно вполне управляема (в смысле Калмана).*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим дискретную систему (1) с изменяющейся структурой. Будем считать, что эта система *K*-равномерно вполне управляема в смысле определения 7. Зафиксируем любой начальный момент времени $\tau \in \mathbb{N}_0$ и произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$. Ввиду равномерной полной управляемости по Калману системы (1) для матрицы управляемости существует такое число $\alpha > 0$, что при любом векторе $\xi \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$ выполняется неравенство (13). В силу леммы 2 матрица $W_{\tau,\tau+K}$ обратима, причем справедливо неравенство $\det W_{\tau,\tau+K} \ge M$, где $M = \min\{\alpha^N, 1\}$, а число *N* ограничивает сверху последовательность натуральных чисел $\{n_t\}$, $t = 0, 1, ...$. Оценим сверху норму матрицы управляемости $\|W_{\tau,\tau+K}\|$. Ввиду элементарных свойств нормы матриц с учетом оценок $\|B_t\| \le b$, $t = \{0, 1, ...\}$, и $a > 1$, а также формулы (4) имеем соотношения

$$
\begin{aligned}
\|W_{\tau,\tau+K}\| &= \left\| \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K,j+1}^T \right\| \le \\
&\le \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} \left\| X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K,j+1}^T \right\| \le \\
&\le \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} \left\| X_{\tau+K,j+1} \right\| \cdot \|B_j\| \cdot \|B_j^T\| \cdot \left\| X_{\tau+K,j+1}^T \right\| \le \\
&\le \sum_{j=\tau}^{\tau+K-1} a^{\tau+K-j} \cdot b \cdot b \cdot a^{\tau+K-j} \le K b^2 a^{2K}.
\end{aligned}
$$

Тогда для обратной $n_{\tau+K} \times n_{\tau+K}$-матрицы $\|W_{\tau,\tau+K}^{-1}\|$ выполняются оценки

$$
\|W_{\tau,\tau+K}^{-1}\| \le \frac{\|W_{\tau,\tau+K}\|^{n_{\tau+K}-1}}{\det W_{\tau,\tau+K}} \le \frac{(Kb^2 a^{2K})^{n_{\tau+K}-1}}{M} \le \frac{(Kb^2 a^{2K})^{N-1}}{M}.
$$

Для зафиксированных начального момента времени $\tau \in \mathbb{N}_0$ и вектора $v \in \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$ выберем в качестве искомого управления $u_t : \{\tau, \tau+1, ..., \tau+K\} \to \mathbb{R}^{n_{\tau+K}}$ функцию

$$
u_t = B_t^T X_{\tau+K,t+1}^T W_{\tau,\tau+K^v}^{-1}, \; t = \tau, \tau+1, ..., \tau+K-1.
$$

Тогда для выбранного управления при всяком $t = \tau, \tau+1, ..., \tau+K-1$ справедливы не зависящие от начального момента времени $\tau \in \mathbb{N}_0$ оценки

$$\begin{aligned} \|u_t\| &= \left\|B_t^T X_{\tau+K,t+1}^T W_{\tau,\tau+K^v}^{-1}\right\| \le \\ &\le \left\|B_t^T\right\| \cdot \left\|X_{\tau+K,t+1}^T\right\| \cdot \left\|W_{\tau,\tau+K}^{-1}\right\| \cdot \|v\| \le \\ &\le b \cdot a^{\tau+K-t} \cdot \frac{(Kb^2a^{2K})^{N-1}}{M} \cdot \|v\| \le \\ &\le b \cdot a^K \cdot \frac{(Kb^2a^{2K})^{N-1}}{M} \cdot \|v\|. \end{aligned} \tag{14}$$

Для решения же системы (1) с начальным условием $x_\tau = 0$ и выбранным управлением u_t на основании формулы Коши в точке $\tau + K$ имеем равенства

$$\begin{aligned} x_{\tau+K} &= X_{\tau+K,\tau} \cdot 0 + \sum\nolimits_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j u_j = \\ &= \sum\nolimits_{j=\tau}^{\tau+K-1} ((X_{\tau+K,j+1}B_j) \cdot (B_j^T \cdot X_{\tau+K,j+1}^T \cdot W_{\tau,\tau+K}^{-1} \cdot v)) = \\ &= (\sum\nolimits_{j=\tau}^{\tau+K-1} X_{\tau+K,j+1} B_j B_j^T X_{\tau+K,j+1}) \cdot W_{\tau,\tau+K}^{-1} \cdot v = \\ &= W_{\tau,\tau+K} \cdot W_{\tau,\tau+K}^{-1} \cdot v = v, \end{aligned}$$

означающие с учетом оценок (14) выполнимость определения 8.

Достаточность будем доказывать в соответствии с работой [2]. Предположим противное, пусть система (1) не является *K*-равномерно вполне управляемой (по Калману). Тогда для каждого $s \in \mathbb{N}$ найдутся момент времени $m_s \in \mathbb{N}$ и вектор $\xi_s \in \mathbb{R}^{n_{m_s+K}}$, $\|\xi_s\| = 1$, такие, что $\xi_s^T W_{m_s,m_s+K}\xi_s < 1/s$. Поскольку система (1) является *K*-равномерно вполне управляемой (по Тонкову), то существует $\gamma > 0$ такое, что для вектора $\xi_s \in \mathbb{R}^{n_{m_s+K}}$ на отрезке $\Delta_k = [m_s, m_s + K]$ найдется управление u_t, $t = m_s, m_s+1, \ldots, m_s+K$, которое переводит систему (1) из состояния $x_{m_s} = 0 \in \mathbb{R}^{n_{m_s}}$ в состояние $x_{m_s+K} = \xi_s \in \mathbb{R}^{n_{m_s+K}}$ и удовлетворяет неравенству $\|u_t\| \le \gamma\|\xi_s\| = \gamma$. Тогда для этого уравнения выполнено равенство

$$\sum\nolimits_{j=m_s}^{m_s+K-1} X_{m_s+K,j+1} B_j u_j = \xi_s .$$

Умножая последнее равенство слева на вектор $\xi_s^T \in \mathbb{R}^{n_{m_s+K}}$, получим соотношения

$$\begin{aligned} 1 &= \xi_s^T \xi_s = \|\xi_s\|^2 = \xi_s^T \sum\nolimits_{j=m_k}^{m_k+K-1} X_{m_k+K,j+1} B_j u_j \le \\ &\le \left|\xi_s^T \sum\nolimits_{j=m_k}^{m_k+K-1} X_{m_k+K,j+1} B_j u_j\right| \le \\ &\le \sum\nolimits_{j=m_k}^{m_k+K-1} \left\|\xi_s^T X_{m_k+K,j+1} B_j\right\| \cdot \|u_j\| \le \\ &\le \gamma \sum\nolimits_{j=m_k}^{m_k+K-1} \left\|\xi_s^T X_{m_k+\sigma,j+1} B_j\right\| \le \\ &\le \gamma (K \sum\nolimits_{j=m_k}^{m_k+K-1} \left\|\xi_s^T X_{m_k+\sigma,j+1} B_j\right\|^2)^{1/2} = \\ &= \gamma (K \xi_s^T W_{\tau+K,\tau} \xi_s)^{1/2} \le \gamma \sqrt{K/s}. \end{aligned}$$

При $s \ge [K\gamma^2] + 1$ имеем противоречие. Таким образом, из определения 8 следует определение 7. Теорема доказана.

Заключение. В работе для линейной дискретной динамической системы (1) переменной размерности фазового пространства введено свойство и получен критерий равномерной полной управляемости в терминах матрицы Коши однородной линейной дискретной системы, соответствующей (1), и матрицы при управлении. Установленные результаты в дальнейшем позволят решать задачи управления асимптотическими характеристиками линейных дискретных динамических систем переменной размерности фазового пространства.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», задание 1.2.01 «Управление асимптотической структурой линейной нестационарной системы обыкновенных дифференциальных уравнений»).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.
2. Зайцев, В.А. О свойстве равномерной полной управляемости линейной управляемой системы с дискретным временем / В.А. Зайцев, С.Н. Попова, Е.Л. Тонков // Вестник Удмуртского университета. Сер., Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – Т. 24, № 4. – С. 53–63.
3. Гайшун, И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем / И.В. Гайшун. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 1999. – 408 с.
4. Демидович, В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений / В.Б. Демидович // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 7. – С. 1247–1255.
5. Гайшун, И.В. Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 12. – С. 1607–1614.
6. Гайшун, И.В. Системы с дискретным временем / И.В. Гайшун. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. – 400 с.
7. Гайшун, И.В. Дискретные уравнения с изменяющейся структурой. Управляемость и наблюдаемость / И.В. Гайшун // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 11. – С. 1544–1549.
8. Kalman, R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960. – Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
9. Тонков, Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы / Е.Л. Тонков // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, № 10. – С. 1804–1813.
10. Уонэм, М. Линейные многомерные системы управления / М. Уонэм. – М.: Наука, 1980. – 375 с.
11. Смирнов, Е.Я. Некоторые задачи математической теории управления / Е.Я. Смирнов. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1981. – 196 с.
12. Halanay, A. Time-varying Discrete Linear Systems: Input-output Operators, Riccati Equations, Disturbance Attenuation. Operator theory / A. Halanay,V. Ionescu. – Springer, 1994.
13. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

R E F E R E N C E S

1. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravliayemost asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sisyem* [Controllability of Asymptotic Invariants of Non-stationary Linear Systems], Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
2. Zaitsev V.A., Popova S.N, Tonkov E.L. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompyuterniye nauki* [Vestnik of Udmurt University. Maths. Mechanics. Computer Science], 2014, 24(4), pp. 53–63.
3. Gaishun I.V. *Vvedeniye v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh system* [Introduction to the Theory of Linear Non-stationary Systems], Minsk: Inst. Matemat. AN Belarusi, 1999, 408 p.
4. Demidovich V.B. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 1969, 5(7), pp. 1247–1255.
5. Gaishun I.V. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 1997, 33(12), pp. 1607–1614.
6. Gaishun I.V. *Sistemy s diskretnym vremenem* [Discrete-Time Systems], Minsk: Inst. Matemat. AN Belarusi, 2001, 400 p.
7. Gaishun I.V. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 2000, 36(11), pp. 1544–1549.
8. Kalman, R.E. Contribution to the theory of optimal control / R.E. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. – 1960.– Vol. 5, № 1. – P. 102–119.
9. Tonkov E.L. *Differentsialniye uravneniya* [Differential Equations], 1979, 15(10), pp. 1804–1813.
10. Wanham M. *Lineiniye mnogomerniye sustemy upravleniya* [Linear Multidimensional Control Systems], M: Nauka, 1980, 375 p.
11. Smirnov E.Ya. *Nekotoriye zadachi matematicheskoi teorii upravleniya* [Some Problems of Mathematical Control Theory], L .: Leningrad University Publishing House, 1981,196 p.
12. Halanay, A. Time-varying Discrete Linear Systems: Input-output Operators, Riccati Equations, Disturbance Attenuation. Operator theory / A. Halanay,V. Ionescu. – Springer, 1994.
13. Chorn R., Johnson, Ch. *Matrichny analiz* [Matrix Analysis], Moscow: Mir, 1989, 656 p.

Поступила в редакцию 06.10.2020

Адрес для корреспонденции: e-mail: kozlovaa@tut.by – Козлов А.А.