УДК 517.983

МНОГОМЕРНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

М.В. Папкович, О.В. Скоромник
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

Настоящая работа посвящена изучению функциональных свойств шести классов многомерных интегральных преобразований с G-функцией Мейера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в пространствах измеримых комплекснозначных функций.

Цель – построение теории рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций.

Материал и методы. *Исследуются шесть классов многомерных интегральных преобразований с G-функцией Мейера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах интегрируемых функций в области* $R_+^n = R_+^1 \times R_+^1 \times ... \times R_+^1$. *При этом используются методы функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, методы теории интегральных преобразований и специальных функций, методы дробного интегродифференцирования.*

Результаты и их обсуждение. *Построена* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*-теория шести многомерных интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах: G-функцией и гипергеометрической функцией Гаусса. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов таких преобразований из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям. Для рассматриваемых преобразований установлены различные интегральные представления и выведены формулы обращения.*

Заключение. *Полученные результаты обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных и многомерных преобразований.*

Ключевые слова: *многомерные интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах, многомерное преобразование Меллина, G-функция Мейера, гипергеометрическая функция Гаусса, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

MULTI-DIMENSIONAL MODIFIED G-TRANSFORMATIONS AND INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH HYPERGEOMETRIC GAUSS FUNCTIONS IN KERNELS IN WEIGHT SPACES OF SUMMED FUNCTIONS

M.V. Papkopvich, O.V. Skoromnik
Education Establishment "Polotsk State University"

This paper is devoted to the study of the functional properties of six classes of multidimensional integral transforms with the Meyer G-function and the Gauss hypergeometric function in kernels in spaces of measurable complex-valued functions.

The goal is to construct a theory of the considered integral transformations in weight spaces of integrable functions.

Material and methods. *Six classes of multidimensional integral transformations with the Meyer G-function and the Gauss hypergeometric function in kernels in weight spaces of integrable functions in the domain* $R_+^n = R_+^1 \times R_+^1 \times ... \times R_+^1$ *are investigated. In this case, methods of functional analysis, theory of functions, complex analysis, methods of the theory of integral transformations and special functions, methods of fractional integral differentiation are used.*

Findings and their discussion. *The* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *-theory of six multidimensional integral transformations with special functions in the kernels: the G-function and the Gauss hypergeometric function has been constructed. Conditions are obtained for the boundedness and one-to-oneness of the operators of such transformations from one spaces of integrable functions to others, and analogs of the formula for integration by parts are proved. For the transformations under consideration, various integral representations are established and inversion formulas are derived.*

Conclusion. *The results obtained generalize those obtained earlier for the corresponding one-dimensional and multidimensional transformations.*

Key words: *multidimensional integral transforms with special functions in kernels, multidimensional Mellin transform, Meyer G-function, Gauss hypergeometric function, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*

Рассматриваются многомерные интегральные преобразования:

$$\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{0}^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\mathrm{t})\frac{d\,\mathrm{t}}{\mathrm{t}} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.1}$$

$$\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{0}^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\mathrm{t})\frac{d\,\mathrm{t}}{\mathrm{t}} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.2}$$

$$\left({}_1I^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{0}^{\mathrm{x}} \frac{\left(\mathrm{x}^{\delta}-\mathrm{t}^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\right)\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.3}$$

$$\left({}_2I^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{0}^{\mathrm{x}} \frac{\left(\mathrm{x}^{\delta}-\mathrm{t}^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\mathrm{t}^{\delta}}{\mathrm{x}^{\delta}}\right)\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.4}$$

$$\left({}_3I^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{\mathrm{x}}^{\infty} \frac{\left(\mathrm{t}^{\delta}-\mathrm{x}^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\right)\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.5}$$

$$\left({}_4I^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_{\mathrm{x}}^{\infty} \frac{\left(\mathrm{t}^{\delta}-\mathrm{x}^{\delta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}\, {}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\mathrm{t}^{\delta}}{\mathrm{x}^{\delta}}\right)\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}} f(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.6}$$

где [1, §28.4; 2; 3] $\mathrm{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$; $\mathrm{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in R^n$ – векторы; R^n – Евклидово n-мерное пространство; $\mathrm{x}\cdot\mathrm{t}=\sum_{k=1}^{n} x_k t_k$ – их скалярное произведение, в частности $\mathrm{x}\cdot 1=\sum_{k=1}^{n} x_k$ для $1=(1,1,...,1)$; $\mathrm{x}>\mathrm{t}$ означает $x_1>t_1, x_2>t_2,..., x_n>t_n$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int_{\mathbf{0}}^{\mathrm{x}} := \int_0^{x_1}\int_0^{x_2}...\int_0^{x_n}$; $\int_{\mathbf{0}}^{\infty} := \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}...\int_0^{\infty}$; $N=\{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $N_0=N\cup\{0\}$, $N_0^n=N_0\times N_0\times...\times N_0$, $R_+^n=\{\mathrm{x}\in R^n, \mathrm{x}>0\}$; C^n – n-мерное множество комплексных чисел $z=(z_1,...,z_n)$, $z_j\in C$, $j=1,2,...,n$; $\mathrm{m}=(m_1,m_2,...,m_n)\in N_0^n$ и $m_1=m_2=...=m_n$; $\mathrm{n}=(\bar{n}_1,\bar{n}_2,...,\bar{n}_n)\in N_0^n$ и $\bar{n}_1=\bar{n}_2=...=\bar{n}_n$; $\mathrm{p}=(p_1,p_2,...,p_n)\in N_0^n$ и $p_1=p_2=...=p_n$; $\mathrm{q}=(q_1,q_2,...,q_n)\in N_0^n$ и $q_1=q_2=...=q_n$; $(0\leq\mathrm{m}\leq\mathrm{q}, 0\leq\mathrm{n}\leq\mathrm{p})$;

$a=(a_1,a_2,...,a_n)\in C^n$; $b=(b_1,b_2,...,b_n)\in C^n$; $c=(c_1,c_2,...,c_n)\in C^n$;

$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in C^n$; $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\in C^n$; $\boldsymbol{\kappa}=(\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n)\in C^n$; $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in R_+^n$;

$\mathbf{a}_i=(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n})$, $1\leq i\leq\mathrm{p}$, $a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\in C$ $(1\leq i_1\leq p_1, 1\leq i_2\leq p_2, ..., 1\leq i_n\leq p_n)$;

$\mathbf{b}_j=(b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n})$, $1\leq j\leq\mathrm{q}$, $b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n}\in C$ $(1\leq j_1\leq q_1, 1\leq j_2\leq q_2,...,1\leq j_n\leq q_n)$;

$k=(k_1,k_2,...,k_n)\in N_0^n=N_0\times....\times N_0$, где $k_i\in N_0\,(i=1,2,...,n)$ – мультииндекс с $k!=k_1!k_2!\cdots k_n!$ и $|k|=k_1+k_2+...+k_n$; для $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in R_+^n$

$D^l=\dfrac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}(\partial x_2)^{l_2}...(\partial x_n)^{l_n}}$; $\mathrm{dt}=dt_1\cdot dt_2\cdots dt_n$; $\mathrm{t}^l=t^{l_1}\cdot t^{l_2}\cdots t^{l_n}$;

$\mathrm{x}^\delta-\mathrm{t}^\delta=\left(x^{\delta_1}-t^{\delta_1}\right)\left(x^{\delta_2}-t^{\delta_2}\right)\cdots\left(x^{\delta_n}-t^{\delta_n}\right)$; $f(\mathbf{t})=(t_1,t_2,...,t_n)$; $G_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\dfrac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right]$ – функция вида [4; 5]:

$$G_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right]=\prod_{k=1}^{n}G_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[\frac{x_k^{\delta_k}}{t_k^{\delta_k}}\middle|\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right],\tag{1.7}$$

представляющая собой произведение *G-функций* $G_{p,q}^{m,n}[z]$ [6, гл. 1]. *G*-функцией Мейера порядка (m,n,p,q), где $0\le m\le q, 0\le n\le p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина–Барнса:

$$G_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{matrix}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{matrix}\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds, z\neq0,\tag{1.8}$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|s\right]=\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\middle|s\right]=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}.\tag{1.9}$$

Здесь *L* – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s=-b_j-k,\, j=1,2,...,m, k=0,1,2,...,$ слева, а полюса $s=1-a_j+k,\, j=1,2,...,n, k=0,1,2,...$ – справа, пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией *G*-функции (1.8) можно ознакомиться в [6, гл. 6].

Функция ${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)$ представляет собой произведение гипергеометрических функций Гаусса (см., например, [7]:

$${}_2\mathrm{F}_1(a,b;c;z)=\prod_{k=1}^{n}{}_2F_1(a_k,b_k;c_k;z_k).$$

Гипергеометрическая функция Гаусса ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ определяется при $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда [8, § 2.1]

$${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k}\frac{z^k}{k!}.\tag{1.10}$$

Его параметры $\alpha,\beta,\gamma\in C$, $\mathrm{Re}(\gamma)\neq0,-1,-2,...$, переменная $z\in C$, $(\alpha)_k$ – символ Похгаммера: $(\alpha)_0\equiv1$, $(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$ $(\alpha\in C; k\in N)$. Ряд (1.10) сходится при $|z|<1$ и при $|z|=1$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>-1$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Более подробно с теорией гипергеометрической функции Гаусса можно ознакомиться, например, в [8, гл. 2].

Настоящая работа посвящена изучению свойств преобразований (1.1)–(1.6) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in R^n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$, $\overline{2}=(2,2,...,2)$, интегрируемых функций $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ на R_+^n, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}<\infty$, где [2]

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}}=\left\{\int\limits_{R_+^1}x_n^{\nu_n\cdot 2-1}\left\{...\left\{\int\limits_{R_+^1}x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left\{\int\limits_{R_+^1}x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1,...,x_n)|^2\,dx_1\right\}dx_2\right\}...\right\}dx_n\right\}^{1/2}. \tag{1.11}$$

Результаты исследования для преобразований (1.1) и (1.2)–(1.6) обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных случаев [6, гл. 6.6] и [9].

Предварительные сведения. Множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства Λ в банахово пространство Ω, обозначим через $[\Lambda,\Omega]$.

Через $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in R^n$, $\overline{r}=(r_1,r_2,...,r_n)\in R^n$, $1<\overline{r}<\infty$, обозначим весовое пространство интегрируемых функций $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ на R_+^n, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}}<\infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}}=\left\{\int\limits_{R_+^1}x_n^{\nu_n\cdot r_n-1}\left\{...\left\{\int\limits_{R_+^1}x_2^{\nu_2\cdot r_2-1}\left\{\int\limits_{R_+^1}x_1^{\nu_1\cdot r_1-1}|f(x_1,x_2,...,x_n)|^{r_1}\,dx_1\right\}^{\frac{r_2}{r_1}}dx_2\right\}^{\frac{r_3}{r_2}}...\,dx_{n-1}\right\}^{\frac{r_n}{r_{n-1}}}dx_n\right\}^{\frac{1}{r_n}}.$$

Многомерное преобразование Меллина функции $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ $(\mathrm{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in R_+^n)$ определяется по формуле [10, формула 1.4.42]:

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})=f^*(\mathbf{s})=\int\limits_{R_+^n}f(\mathrm{t})\mathrm{t}^{\mathbf{s}-1}d\,\mathrm{t},\ \mathrm{Re}(\mathbf{s})=\boldsymbol{\nu}, \tag{2.1}$$

$$R_+^n=\left\{\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in R^n:t_j>0\,(j=1,2,...,n)\right\},\ \mathbf{s}=(s_1,s_2,...,s_n),\ s_j\in C\ (j=1,2,...,n).$$

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in R_+^n$ дается формулой [10, формула (1.4.43)]:

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathrm{x})=\mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{s})](\mathrm{x})\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\cdots\int\limits_{\gamma_n-i\infty}^{\gamma_n+i\infty}\mathrm{x}^{-\mathbf{s}}g(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ \gamma_j=\mathrm{Re}(s_j)\ (j=1,2,...,n). \tag{2.2}$$

Нам понадобятся элементарные операторы $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{N}_\xi$ [10, формулы (1.4.52), (1.4.53)]:

$$\left(\mathbf{M}_\xi f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^\xi f(\mathrm{x})\quad(\mathrm{x}\in R^n,\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in C^n), \tag{2.3}$$

$$\left(\mathbf{N}_\xi f\right)(\mathrm{x})=f\left(\mathrm{x}^\xi\right)\quad(\mathrm{x}\in R^n,\ \xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)\in R^n,\xi\neq 0). \tag{2.4}$$

Известно, что преобразование Меллина (2.1) от преобразований (2.3) $\mathbf{M}_\xi f$ и (2.4) $\mathbf{N}_\xi f$ соответственно равны [10, формулы (1.4.44), (1.4.46)]:

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s})=(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}+\xi),\quad \xi\in C^n,$$

$$(\mathfrak{M}\mathbf{N}_\xi f)(\mathbf{s})=\frac{1}{|\xi|}(\mathfrak{M}f)\left(\frac{\mathbf{s}}{\xi}\right),\quad \xi\in R^n,\xi\neq 0.$$

Нам понадобятся следующие свойства для операторов $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{N}_\xi$ [2, лемма 2.2], [3, лемма 1].

Лемма 2.1. *Для* $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in R^n$, $\nu_1=\nu_2=...=\nu_n$, *и* $1\le\overline{r}<\infty$

(a) $\mathbf{M}_\xi$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi),\overline{r}}$*; если* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1\le\overline{r}\le 2)$*, то*

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s})=(\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+\xi)\quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\xi))\,; \tag{2.5}$$

$\mathbf{M}_\xi^{-1}$ *– изометрический изоморфизм* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\xi),\overline{r}}$ *и*

$$\mathbf{M}_\xi^{-1}=\mathbf{M}_{-\xi}\,; \tag{2.6}$$

(b) $\mathbf{N}_\xi$ *является ограниченным изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\xi\overline{\nu},\overline{r}}$*; если* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1\le\overline{r}\le 2)$*, то*

$$(\mathfrak{M}\mathbf{N}_\xi f)(\mathbf{s})=\frac{1}{|\xi|}(\mathfrak{M} f)\left(\frac{\mathbf{s}}{\xi}\right)\quad (\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\xi\overline{\nu})\,; \tag{2.7}$$

$\mathbf{N}_\xi^{-1}$ *является ограниченным изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}/\xi,\overline{r}}$ *и*

$$\mathbf{N}_\xi^{-1}=\mathbf{N}_{1/\xi}\,. \tag{2.8}$$

Также нам понадобятся многомерные аналоги операторов дробного интегрирования $\mathrm{I}^\alpha_{0+;\boldsymbol{\sigma},\eta}$ и $\mathrm{I}^\alpha_{-;\boldsymbol{\sigma},\eta}$ типа Эрдейи–Кобера, которые определены для $\alpha\in C^n$ $(\mathrm{Re}(\alpha)>0)$; $\boldsymbol{\sigma}\in C^n$, $\mathrm{Re}(\boldsymbol{\sigma})>0$; $\eta\in C^n$; формулами [3]:

$$\left(\mathrm{I}^\alpha_{0+;\boldsymbol{\sigma},\eta} f\right)(\mathrm{x})=\frac{\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{x}^{-\boldsymbol{\sigma}(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\mathrm{x}}\left(\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}-\mathrm{t}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{\alpha-1}\mathrm{t}^{\boldsymbol{\sigma}\eta+\boldsymbol{\sigma}-1} f(\mathrm{t})\,d\mathrm{t}\quad (\mathrm{x}>0)\,, \tag{2.9}$$

$$\left(\mathrm{I}^\alpha_{-;\boldsymbol{\sigma},\eta} f\right)(\mathrm{x})=\frac{\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}\eta}}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathrm{x}}^{\infty}\left(\mathrm{t}^{\boldsymbol{\sigma}}-\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}\right)^{\alpha-1}\mathrm{t}^{\boldsymbol{\sigma}(1-\alpha-\eta)-1} f(\mathrm{t})\,d\mathrm{t}\quad (\mathrm{x}>0)\,. \tag{2.10}$$

$\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ **-теория и формулы обращения многомерного** $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$ **-преобразования (1.1).** Модифицированное $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразование (1.1) является частным случаем модифицированного $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования [3], когда выполняются условия $\boldsymbol{\alpha}_1=...=\boldsymbol{\alpha}_p=\boldsymbol{\beta}_1=...=\boldsymbol{\beta}_q=1$. Поэтому $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теория для $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования (1.1) следует из соответствующих результатов для модифицированного $\mathrm{H}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования [3, теоремы 1, 2].

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теорию и формулы обращения многомерного $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразования (1.1), нам понадобятся следующие многомерные постоянные [3], [4]:

$$\alpha_1=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\mathrm{Re}(b_{j_1})\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0,\end{cases}\qquad \beta_1=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_1\le \overline{n}_1}\left[\mathrm{Re}(a_{i_1})\right], & \overline{n}_1>0,\\ \infty, & \overline{n}_1=0,\end{cases}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\mathrm{Re}(b_{j_2})\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0,\end{cases}\qquad \beta_2=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_2\le \overline{n}_2}\left[\mathrm{Re}(a_{i_2})\right], & \overline{n}_2>0,\\ \infty, & \overline{n}_2=0\end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_n=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_n\le m_n}\left[\mathrm{Re}(b_{j_n})\right], & m_n>0,\\ -\infty, & m_n=0;\end{cases}\quad ...\ \beta_n=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_n\le \overline{n}_n}\left[\mathrm{Re}(a_{i_n})\right], & \overline{n}_n>0,\\ \infty, & \overline{n}_n=0;\end{cases} \tag{3.1}$$

$$a_1^*=2(m_1+n_1)-p_1-q_1,\ ...,\ a_2^*=2(m_2+n_2)-p_2-q_2,\ ...,\ a_n^*=2(m_n+\overline{n}_n)-p_n-q_n\,; \tag{3.2}$$

$$\Delta_1 = q_1 - p_1,\ \Delta_2 = q_2 - p_2, \ldots,\ \Delta_n = q_n - p_n; \tag{3.3}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2},\ \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_2} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \ldots, \mu_n = \sum_{j=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n - q_n}{2}; \tag{3.4}$$

$$\alpha_0^1 = \begin{cases} \max\limits_{m_1+1 \le j_1 \le q_1} \left[\mathrm{Re}(b_{j_1})\right], q_1 > m_1, \\ -\infty, q_1 = m_1, \end{cases} \quad \beta_0^1 = \begin{cases} 1 + \min\limits_{n_1+1 \le i_1 \le p_1} \left[\mathrm{Re}(a_{i_1})\right], p_1 > n_1, \\ \infty, \qquad p_1 = n_1, \end{cases}$$

$$\alpha_0^2 = \begin{cases} \max\limits_{m_2+1 \le j_2 \le q_2} \left[\mathrm{Re}(b_{j_2})\right], q_2 > m_2, \\ -\infty, q_2 = m_2, \end{cases} \quad \beta_0^2 = \begin{cases} 1 + \min\limits_{n_2+1 \le i_2 \le p_2} \left[\mathrm{Re}(a_{i_2})\right], p_2 > n_2, \\ \infty, \qquad p_2 = n_2 \end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_0^n = \begin{cases} \max\limits_{m_n+1 \le j_n \le q_n} \left[\mathrm{Re}(b_{j_n})\right], q_n > m_n, \\ -\infty, q_n = m_n, \end{cases} \quad \beta_0^n = \begin{cases} 1 + \min\limits_{\bar{n}_n+1 \le i_n \le p_n} \left[\mathrm{Re}(a_{i_n})\right], p_n > \bar{n}_n, \\ \infty, \qquad p_n = \bar{n}_n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$:

$$\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s}) \equiv \bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\middle|\mathbf{s}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathcal{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\middle|s_k\right] - \tag{3.6}$$

назовем множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n)$ таких, что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2, \ldots,$ $\alpha_n < 1 - \nu_n < \beta_n$, и функции вида (1.9) $\mathcal{G}_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}(s_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1) = 1 - \nu_1,\ \mathrm{Re}(s_2) = 1 - \nu_2, \ldots,\ \mathrm{Re}(s_n) = 1 - \nu_n$ соответственно.

Применяем многомерное преобразование Меллина (2.1) к $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$-преобразованию (1.1) и, учитывая [3, формула 62], получаем:

$$\left(\mathfrak{M}\,\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}\, f\right)(\mathbf{s}) = \bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\middle|\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma}\right](\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\kappa}), \tag{3.7}$$

где $\bar{\mathcal{G}}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}(\mathbf{s})$ дается (3.6).

Теорема 3.1. *Пусть*

$$\alpha_1 < \nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_1,\ \alpha_2 < \nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_2, \ldots,\ \alpha_n < \nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n) < \beta_n,\ \nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n; \tag{3.8}$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \ldots, a_n^* = 0;\ \Delta_1\left[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)\right] + \mathrm{Re}(\mu_1) \le 0,\ \Delta_2\left[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)\right] + \mathrm{Re}(\mu_2) \le 0, \ldots, \tag{3.9}$$
$$\Delta_n\left[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)\right] + \mathrm{Re}(\mu_n) \le 0.$$

Верны следующие утверждения:

а. Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\bar{2}}]$ *такое, что равенство* (3.7) *выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\sigma})$.

Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \ldots, a_n^* = 0$, $\Delta_1\left[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)\right] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2\left[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)\right] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0, \ldots,$ $\Delta_n\left[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)\right] + \mathrm{Re}(\mu_n) = 0$ *и* $1 - \bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}) \notin \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$, *то* $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\bar{2}}$.

b. Преобразование $\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют* (3.8)–(3.9) *и если преобразования* $\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}}$ *равенством* (3.7)`*, то* $\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f = \tilde{\mathrm{G}}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0$, $\Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0$, $\Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0, \dots,$ $\Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)] + \mathrm{Re}(\mu_n) < 0$*, то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *дается формулой* (1.1).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}) - 1$*, то* $\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$ *представимо в виде*

$$(\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}-\bar{\lambda}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}, \tag{3.10}$$

а при $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}) - 1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}-\bar{\lambda}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1} \int_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m+1,n}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}. \tag{3.11}$$

e. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\bar{2}}$*, то имеет место формула:*

$$\int_0^{\mathrm{x}} f(\mathrm{x}) \left(\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}\, g \right)(\mathrm{x}) d\,\mathrm{x} = \int_0^{\mathrm{x}} \left(\mathrm{G}^{2}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f \right)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x}) d\,\mathrm{x}, \tag{3.12}$$

где

$$\left(\mathrm{G}^{2}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f \right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}} \int_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}} \left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}} f(\mathrm{t}) \frac{d\,\mathrm{t}}{\mathrm{x}}. \tag{3.13}$$

Получены формулы обращения для преобразования $\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f$:

$$f(\mathrm{x}) = -\mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1-\boldsymbol{\kappa}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{-\bar{\lambda}-1} \int_0^{\infty} G^{\mathrm{q-m,p-n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, -\mathbf{a}_{\mathrm{n+1}}, \dots, -\mathbf{a}_{\mathrm{p}}, -\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_{\mathrm{n}} \\ -\mathbf{b}_{\mathrm{m+1}}, \dots, -\mathbf{b}_{\mathrm{q}}, -\mathbf{b}_1, \dots, -\mathbf{b}_{\mathrm{m}}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{-\boldsymbol{\sigma}} (\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t} \tag{3.14}$$

или

$$f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\bar{\lambda}+1-\boldsymbol{\kappa}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{-\bar{\lambda}-1} \int_0^{\infty} G^{q-\mathrm{m}+1,\mathrm{p-n}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{x}} \middle| \begin{matrix} -\mathbf{a}_{\mathrm{n+1}}, \dots, -\mathbf{a}_{\mathrm{p}}, -\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_{\mathrm{n}}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, -\mathbf{b}_{\mathrm{m+1}}, \dots, -\mathbf{b}_{\mathrm{q}}, -\mathbf{b}_1, \dots, -\mathbf{b}_{\mathrm{m}} \end{matrix} \right] \mathrm{t}^{-\boldsymbol{\sigma}} (\mathrm{G}^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}} f)(t) dt\,. \tag{3.15}$$

Условия справедливости этих формул дает утверждение, которое следует из [3, теорема 10].

Теорема 3.2. *Пусть*
$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0$, $\alpha_1 < \nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_1$, $\alpha_2 < \nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_2$, …, $\alpha_n < \nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n) < \beta_n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$, $\alpha_0^1 < 1 - \nu_1 + \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_0^1$, $\alpha_0^2 < 1 - \nu_2 + \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_0^2, \dots,$ $\alpha_0^n < 1 - \nu_n + \mathrm{Re}(\kappa_n) < \beta_0^n$, *и пусть* $\bar{\lambda} \in C^n$.

Если $\Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0$, $\Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)] + \mathrm{Re}(\mu_n) = 0$*, и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$*, то формулы обращения* (3.14) и (3.15) *справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa})$ *и* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa})$.

$\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория и формулы обращения многомерного $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}$-преобразования (1.2). $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}$-преобразование (1.2) представим как композицию $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma}/\delta,\boldsymbol{\kappa}/\delta}$-преобразования вида (1.1) и элементарных операторов $\mathbf{N}_{\xi}$ (2.4). Действительно, заменяя в (1.1) x^{δ} на $x^{1/\delta}$ и совершая замену переменных $t^{\delta}=\boldsymbol{\tau}$, имеем:

$$\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\,f\right)(x^{1/\delta})=x^{\sigma/\delta}\int_{0}^{x} G^{m,n}_{p,q}\left[\frac{x}{t^{\delta}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right]t^{\kappa}\,f(t)\frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{1}{\delta}x^{\sigma/\delta}\int_{0}^{x} G^{m,n}_{p,q}\left[\frac{x}{\boldsymbol{\tau}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right]\tau^{\kappa/\delta}f(\boldsymbol{\tau}^{1/\delta})\frac{d\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{\tau}}dt=\frac{1}{\delta}\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa}}\,N_{1/\delta}\,f\right)(x^{1/\delta}). \tag{4.1}$$

Применяем к последнему равенству оператор N_{δ}, получаем следующее представление для преобразования $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\,f$ (1.2):

$$\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\,f\right)(x)=\frac{1}{\delta}\left(N_{\delta}\,G^{1}_{\boldsymbol{\sigma}/\delta,\boldsymbol{\kappa}/\delta}\,N_{1/\delta}\,f\right)(x). \tag{4.2}$$

Применим преобразование Меллини к (4.2), учитывая равенство (4.1), лемму (2.1), имеем:

$$(\mathfrak{M}G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\,f)(\mathbf{s})=\left(\mathfrak{M}\left(\frac{1}{\delta}N_{\delta}\,G^{1}_{\boldsymbol{\sigma}/\delta,\boldsymbol{\kappa}/\delta}\,N_{1/\delta}f\right)\right)(\mathbf{s})=\frac{1}{\delta^{2}}\left(\mathfrak{M}\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma}/\delta,\boldsymbol{\kappa}/\delta}\,N_{1/\delta}f\right)\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{\delta}\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta^{2}}\left(\mathfrak{M}\left(G^{1}_{\boldsymbol{\sigma}/\delta,\boldsymbol{\kappa}/\delta}\,N_{1/\delta}f\right)\right)\left(\frac{\mathbf{s}}{\delta}\right)=\frac{1}{\delta^{2}}\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|\frac{\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}}{\delta}\right](\mathfrak{M}N_{1/\delta}f)\left(\frac{\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\kappa}}{\delta}\right)=$$

$$=\frac{1}{\delta}\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|\frac{\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}}{\delta}\right](\mathfrak{M}f)\left(\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\kappa}\right).$$

Таким образом,

$$(\mathfrak{M}G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\,f)(\mathbf{s})=\frac{1}{\delta}\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|\frac{\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}}{\delta}\right](\mathfrak{M}f)\left(\mathbf{s}+\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\kappa}\right). \tag{4.3}$$

Следующая теорема дает $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теорию преобразования (1.2), которая следует из соответствующих утверждений теоремы 3.1 и представлений (4.1)–(4.2).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$\alpha_1<\frac{\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)}{\delta_1}<\beta_1,\ \alpha_2<\frac{\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)}{\delta_2}<\beta_2,\ \dots,\ \alpha_n<\frac{\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)}{\delta_n}<\beta_n,\ \nu_1=\nu_2=\dots=\nu_n; \tag{4.4}$$

$$a_1^{*}=0,a_2^{*}=0,\dots,a_n^{*}=0;\ \Delta_1\left[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)\right]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)\le 0,\ \Delta_2\left[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)\right]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_2)\le 0,\dots,$$

$$\Delta_n\left[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)\right]/\delta_n+\mathrm{Re}(\mu_n)\le 0. \tag{4.5}$$

Тогда верны следующие утверждения:

a. Существует взаимно однозначное преобразование $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\overline{2}}]$ *такое, что равенство* (4.3) *выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma})$.

Если $a_1^{*}=0,a_2^{*}=0,\dots,a_n^{*}=0$, $\Delta_1\left[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)\right]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)=0$, $\Delta_2\left[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)\right]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_2)=0,\dots,$ $\Delta_n\left[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)\right]/\delta_n+\mathrm{Re}(\mu_n)=0$ *и* $1-\frac{\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa})}{\delta}\notin\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{G}}}$, *то* $G^{1}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}$*-преобразование биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\overline{2}}$.

b. Преобразование $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\bar{\nu}}$ *удовлетворяют* условиям (4.4)–(4.5) *и если преобразования* $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\bar{\bar{\nu}},\bar{2}}$ *равенством* (4.3)`, *то* $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f = \tilde{\mathrm{G}}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\bar{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \ldots, a_n^* = 0$, $\Delta_1\left[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)\right]/\delta_1 + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0$, $\Delta_2\left[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)\right]/\delta_2 + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0, \ldots,$ $\Delta_n\left[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)\right]/\delta_n + \mathrm{Re}(\mu_n) < 0$, *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *дается формулой* (1.2).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))/\delta - 1$, *то* $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f$ *представимо в виде*

$$(\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\delta}\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\left|\begin{matrix} -\bar{\lambda}, (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}, \qquad (4.6)$$

а при $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))/\delta - 1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f)(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\delta}\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m+1,n}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\left|\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\kappa}-1} f(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}. \qquad (4.7)$$

e. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}+\boldsymbol{\sigma}),\bar{2}}$, *то имеет место формула:*

$$\int\limits_0^{\mathrm{x}} f(\mathrm{x})\left(\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}\, g\right)(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x} = \int\limits_0^{\mathrm{x}}\left(\mathrm{G}^2_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\sigma};\delta} f\right)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{d\,x}, \qquad (4.8)$$

где

$$\left(\mathrm{G}^2_{\boldsymbol{\kappa},\boldsymbol{\sigma};\delta}\right)(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^{\boldsymbol{\kappa}} \int\limits_0^{\mathrm{x}} G^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\left|\begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\sigma}} f(\mathrm{t})\frac{\mathrm{d\,t}}{\mathrm{x}}. \qquad (4.9)$$

Получены формулы обращения для $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}$-преобразования:

$$f(\mathrm{x}) = \delta\,\mathrm{x}^{\delta-(\boldsymbol{\kappa}-1)-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} \mathrm{x}^{-\delta(\bar{\lambda}+1)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} G^{\mathrm{q-m,p-n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\left|\begin{matrix} -\bar{\lambda}, -\mathbf{a}_{\mathrm{n+1}}, \ldots, -\mathbf{a}_{\mathrm{p}}, -\mathbf{a}_1, \ldots, -\mathbf{a}_{\mathrm{n}} \\ -\mathbf{b}_{\mathrm{m+1}}, \ldots, -\mathbf{b}_{\mathrm{q}}, -\mathbf{b}_1, \ldots, -\mathbf{b}_{\mathrm{m}}, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1}(\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f)(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t} \qquad (4.10)$$

или

$$f(\mathrm{x}) = -\delta\,\mathrm{x}^{\delta-(\boldsymbol{\kappa}-1)-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} G^{q-\mathrm{m+1,p-n}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\left|\begin{matrix} -\mathbf{a}_{\mathrm{n+1}}, \ldots, -\mathbf{a}_{\mathrm{p}}, -\mathbf{a}_1, \ldots, -\mathbf{a}_{\mathrm{n}}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, -\mathbf{b}_{\mathrm{m+1}}, \ldots, -\mathbf{b}_{\mathrm{q}}, -\mathbf{b}_1, \ldots, -\mathbf{b}_{\mathrm{m}} \end{matrix}\right.\right]\mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1}(\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta} f)(\mathrm{t})\,\mathrm{d\,t}. \qquad (4.11)$$

Условия справедливости этих формул дает утверждение, которое следует из теоремы 3.2 и [3, теорема 10].

Теорема 4.2. *Пусть* $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0, \ldots, a_n^* = 0$, $\alpha_1 < (\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < (\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_2$, …, $\alpha_n < (\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_n$, $\nu_1 = \nu_2 = \ldots = \nu_n$, $\alpha_0^1 < 1 - (\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_0^1$, $\alpha_0^2 < 1 - (\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_0^2$, …, $\alpha_0^n < 1 - (\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_0^n$, *и пусть* $\bar{\lambda} \in C^n$.

Если $\Delta_1\left[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)\right]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)=0$, $\Delta_2\left[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)\right]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_2)=0$,..., $\Delta_n\left[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)\right]/\delta_n+\mathrm{Re}(\mu_n)=0$, *и* $f\in\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то формулы обращения* (4.9) *и* (4.10) *справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda})>(-\bar{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))/\delta$ *и* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda})<(-\bar{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\kappa}))/\delta$.

Представления преобразований ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f$ $(j=1,2,3,4)$ **в виде обобщенных** $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\kappa};\delta}$**-преобразований.** Находим формулы многомерного преобразования Меллина (2.1) от преобразований ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f$ $(j=1,2,3,4)$, рассуждая аналогично соответствующим одномерным случаям, изложенным в [9, пункт 3]. Получаем

$$\left(\mathfrak{M}\ {}_1\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathbf{s})=\mathcal{G}^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\middle|\frac{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathfrak{M}f)(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}+\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)+1);\qquad(5.1)$$

$$\left(\mathfrak{M}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathbf{s})=\mathcal{G}^{0,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\middle|\frac{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathfrak{M}f)(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}+\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)+1);\qquad(5.2)$$

$$\left(\mathfrak{M}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathbf{s})=\mathcal{G}^{2,0}_{2,2}\left[\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\middle|\frac{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathfrak{M}f)(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}+\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)+1);\qquad(5.3)$$

$$\left(\mathfrak{M}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathbf{s})=\mathcal{G}^{2,0}_{2,2}\left[\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\middle|\frac{\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}}{\delta}\right]\frac{1}{\delta}(\mathfrak{M}f)(\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{s}+\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)+1).\qquad(5.4)$$

Из (5.1)–(5.2) с учетом (4.3) получаем представления ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f$ $(j=1,2,3,4)$ в виде $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}$-преобразований вида (1.2):

$$\left({}_1\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}\int_0^\infty G^{0,2}_{2,2}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\right]t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t};\qquad(5.5)$$

$$\left({}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}\int_0^\infty G^{0,2}_{2,2}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t};\qquad(5.6)$$

$$\left({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}\int_0^\infty G^{2,0}_{2,2}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}c-a & c-b\\ 0 & c-a-b\end{matrix}\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t};\qquad(5.7)$$

$$\left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f\right)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}}\int_0^\infty G^{2,0}_{2,2}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle|\begin{matrix}a+b & c\\ a & b\end{matrix}\right]\mathrm{t}^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)}f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}.\qquad(5.8)$$

$\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$**-теория преобразований** ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta}f$ $(j=1,2,3,4)$. На основании (5.5)–(5.8) и (1.2) $\mathrm{p}=(2,2,...,2)$, $\mathrm{q}=(2,2,...,2)$, параметры (3.2)–(3.4) имеют следующие значения:

$$a_1^*=a_2^*=...=a_n^*=0;\ \Delta_1=\Delta_2=...=\Delta_n=0;\ \mu_1=-c_1,\ \mu_2=-c_2,...,\mu_n=-c_n.\qquad(6.1)$$

Для удобства введем обозначения:

$$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)=\delta^{-1}\left[-\bar{\nu}-\mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega})-1\right]+1,\quad \bar{\eta}=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)=\bar{\nu}+\mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\sigma})+1.\qquad(6.2)$$

Параметры m,n и $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in C^n$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in C^n$ в (3.1) для преобразований (5.5)–(5.8) принимают следующие значения соответственно:

$$\mathrm{m}=(0,0,...,0),\ \mathrm{n}=(2,2,...,2),\ \alpha=-\infty,\ \beta=1-\max[\mathrm{Re}(c-a),\mathrm{Re}(c-b)],\qquad(6.3)$$

$$\mathrm{m}=(0,0,...,0),\ \mathrm{n}=(2,2,...,2),\ \alpha=-\infty,\ \beta=1-\max[\mathrm{Re}(c),\mathrm{Re}(a+b)],\qquad(6.4)$$

$$\mathrm{m}=(2,2,...,2),\ \mathrm{n}=(0,0,...,0),\ \alpha=-\min[0,\mathrm{Re}(c-a-b],\beta=\infty,\qquad(6.5)$$

$$\mathrm{m}=(2,2,...,2),\ \mathrm{n}=(0,0,...,0),\ \alpha=-\min[\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b)],\ \beta=\infty.\qquad(6.6)$$

На основании (5.1) $\boldsymbol{\theta}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ $\bar{\mathcal{G}}^{0,2}_{2,2}$-функции в правой части (5.1), если

$$\mathbf{s} \neq m+1, \quad \mathbf{s} \neq l+1+a+b-c \quad (l=(l_1,l_2,...,l_n), m=(\bar{m}_1,\bar{m}_2,...,\bar{m}_n) \in \mathrm{N}_0^n)\,, \tag{6.7}$$

для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\boldsymbol{\theta}$.

На основании (5.2) $\boldsymbol{\theta}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ $\bar{\mathcal{G}}^{0,2}_{2,2}$-функции в правой части (5.2), если

$$\mathbf{s} \neq m+1-a, \quad \mathbf{s} \neq l+1-b \quad (l=(l_1,l_2,...,l_n), m=(\bar{m}_1,\bar{m}_2,...,\bar{m}_n) \in \mathrm{N}_0^n), \tag{6.8}$$

для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\boldsymbol{\theta}$.

На основании (5.3) $\boldsymbol{\theta}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ $\bar{\mathcal{G}}^{2,0}_{2,2}$-функции в правой части (5.3), если

$$\mathbf{s} \neq m+1, \quad \mathbf{s} \neq l+1+a+b-c \quad (l=(l_1,l_2,...,l_n), m=(\bar{m}_1,\bar{m}_2,...,\bar{m}_n) \in \mathrm{N}_0^n)\,, \tag{6.9}$$

для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\boldsymbol{\theta}$.

На основании (5.4) $\boldsymbol{\theta}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ $\bar{\mathcal{G}}^{2,0}_{2,2}$-функции в правой части (5.4), если

$$\mathbf{s} \neq m+1-a, \quad \mathbf{s} \neq l+1-b \quad (l=(l_1,l_2,...,l_n), m=(\bar{m}_1,\bar{m}_2,...,\bar{m}_n) \in \mathrm{N}_0^n), \tag{6.10}$$

для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\boldsymbol{\theta}$.

$\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$-теория преобразований (1.3)–(1.6) следует из (5.5)–(5.8) и теоремы 4.1 для $\mathrm{G}^1_{\boldsymbol{\sigma},\kappa;\delta} f$ -преобразования.

Теорема 6.1. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} > \max[\mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b)]\,; \mathrm{Re}(c) \geq 0\,. \tag{6.11}$$

Верны следующие утверждения:

a. Существует взаимно однозначное преобразование ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}]$*, такое, что равенство (5.1) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\eta}$.

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* (6.7) *имеет место, то преобразование* ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}$.

b. Преобразование ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют условиям* (6.11)*, и если преобразования* ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *и* ${}_1\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *определены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и пространстве* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *равенством* (5.1)*, то* ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f = {}_1\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $\mathrm{Re}(c) > 1,$ *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *задается равенством* (1.3).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}$*, то для преобразования* ${}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *справедливо представление*

$$({}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\delta}\mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, & c-a, & c-b \\ 0, & c-a-b, & -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,. \tag{6.12}$$

Если $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}$*, то*

$$({}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\delta} x^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{1,2}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle| \begin{matrix} c-a, & c-b, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & 0, c-a-b \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,. \tag{6.13}$$

e. Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{k}^*,\bar{2}}$*, где* $\bar{k}^* = -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma})$*, верно равенство:*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x})\Big({}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} g\Big)(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int\limits_0^\infty \Big({}_1\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma};\delta} f\Big)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\,. \tag{6.13´}$$

Теорема 6.2. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} > \max[\mathrm{Re}(c), \mathrm{Re}(a+b)]; \mathrm{Re}(c) \ge 0. \quad (6.14)$$

Верны следующие утверждения:

a. Существует взаимно однозначное преобразование ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}]$*, такое, что равенство* (5.2) *выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\eta}$.

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* (6.8) *имеет место, то преобразование* ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}$.

b. Преобразование ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют условиям* (6.14), *и если преобразования* ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *и* ${}_2\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *определены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и пространстве* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *равенством* (5.2)*, то* ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f = {}_2\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $\mathrm{Re}(c) > 1$, *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *задается равенством* (1.4).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}$*, то для преобразования* ${}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *справедливо представление*

$$({}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\delta} \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, a+b, & c \\ a, & b, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}. \quad (6.15)$$

Если $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}$*, то*

$$({}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\delta} x^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{1,2}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle| \begin{matrix} a+b, & c, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & a, b \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}. \quad (6.16)$$

e. Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{k}^*,\bar{2}}$*, где* $\bar{k}^* = -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma})$*, верно равенство:*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathrm{x}) \left({}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} g\right)(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int\limits_0^\infty \left({}_2\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma};\delta} f\right)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}. \quad (6.17)$$

Теорема 6.3. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} < 1 + \min[0, \mathrm{Re}(c-a-b)]; \mathrm{Re}(c) \ge 0. \quad (6.18)$$

Верны следующие утверждения:

a. Существует взаимно однозначное преобразование ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}]$*, такое, что равенство* (5.3) *выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\eta}$.

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* (6.9) *имеет место, то преобразование* ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}$.

b. Преобразование ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют условиям* (6.18) *и если преобразования* ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *и* ${}_3\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *определены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и пространстве* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *равенством* (5.3)*, то* ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f = {}_3\tilde{\mathrm{I}}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $\mathrm{Re}(c) > 1$, *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *задается равенством* (1.5).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}$*, то для преобразования* ${}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *справедливо представление*

$$({}_3\mathrm{I}^c_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\delta} \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{2,1}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^\delta}{\mathrm{t}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, c-a, & c-b \\ 0, & c-a-b, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}. \quad (6.19)$$

Если $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}$, *то*

$$({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\delta} x^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^{\infty} G^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\middle| \begin{matrix} c-a, & c-b,-\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & 0, c-a-b \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}\,. \quad (6.20)$$

e. Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{k}^*,\bar{2}}$, *где* $\bar{k}^* = -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma})$, *верно равенство:*

$$\int\limits_0^{\infty} f(\mathrm{x})\left({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} g\right)(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int\limits_0^{\infty}\left({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma};\delta} f\right)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\,. \quad (6.21)$$

Теорема 6.4. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} < 1 + \min[\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)]\,;\, \mathrm{Re}(c) \ge 0\,. \quad (6.22)$$

Верны следующие утверждения:

a. Существует взаимно однозначное преобразование ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}]$, *такое, что равенство (5.4) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\eta}$.

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* (6.10) *имеет место, то преобразование* ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}$.

b. Преобразование ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют условиям* (6.22) *и если преобразования* ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *и* ${}_4\tilde{\mathrm{I}}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *определены в пространстве* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и пространстве* $\mathfrak{L}_{\nu,2}$ *равенством* (5.4), *то* ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f = {}_4\tilde{\mathrm{I}}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

c. Если $\mathrm{Re}(c) > 1$, *то для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *задается равенством* (1.6).

d. Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in C^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}$, *то для преобразования* ${}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ *справедливо представление*

$$({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = \frac{1}{\delta} \mathrm{x}^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^{\infty} G^{2,1}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, a+b, & c \\ a, & b, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}\,. \quad (6.23)$$

Если $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}$, *то*

$$({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f)(\mathrm{x}) = -\frac{1}{\delta} x^{\boldsymbol{\sigma}+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^{\infty} G^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{x}^{\delta}}{\mathrm{t}^{\delta}}\middle| \begin{matrix} a+b, & c,-\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & a,b \end{matrix}\right] t^{\boldsymbol{\omega}+\delta(c-1)} f(\mathrm{t}) d\,\mathrm{t}\,. \quad (6.25)$$

e. Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\bar{k}^*,\bar{2}}$, *где* $\bar{k}^* = -\bar{\nu} + \mathrm{Re}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\sigma})$, *верно равенство:*

$$\int\limits_0^{\infty} f(\mathrm{x})\left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} g\right)(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \int\limits_0^{\infty}\left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\sigma};\delta} f\right)(\mathrm{x}) g(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}\,. \quad (6.26)$$

Формулы обращения преобразований ${}_j\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ $(j = 1,2,3,4)$. На основании (5.5)–(5.8) параметры (3.5) принимают вид

$$\alpha_0^i = \max\left[0, \mathrm{Re}(c-a-b)\right], \beta_0^i = \infty\,,\ i = \overline{1,n}\,; \quad (7.1)$$

$$\alpha_0^i = \max\left[\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b)\right],\ \beta_0^i = \infty\,,\ i = \overline{1,n}\,; \quad (7.2)$$

$$\alpha_0^i = -\infty\,,\ \beta_0^i = \min\left[\mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b)\right] + 1\,,\ i = \overline{1,n}\,; \quad (7.3)$$

$$\alpha_0^i = -\infty\,, \beta_0^i = \min\left[\mathrm{Re}(a+b), \mathrm{Re}(c)\right] + 1\,,\ i = \overline{1,n}\,; \quad (7.4)$$

соответственно для операторов (1.3)–(1.6).

На основании (7.1) формулы обращения (4.10) и (4.11) для ${}_1\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ -преобразования (5.5) принимают вид:

$$f(\mathrm{x}) = \delta x^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{2,1}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_1\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} \quad (7.5)$$

или

$$f(\mathrm{x}) = -\delta\, \mathrm{x}^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_1\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\,. \quad (7.6)$$

Условия справедливости формул (7.5) и (7.6) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 7.1. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} > \max[0, \mathrm{Re}(c-a-b), \mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b)],\ \bar{\lambda} \in C^n\,.$$

Если $\mathrm{Re}(c)=0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.5), *а при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.6).

На основании (7.2) формулы обращения (4.10) и (4.11) для ${}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ -преобразования (5.6) принимают вид:

$$f(\mathrm{x}) = \delta x^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{2,1}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, & -a-b, & -c \\ -a, & -b, & -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\,, \quad (7.7)$$

$$f(\mathrm{x}) = -\delta\, \mathrm{x}^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -c, & -a-b, & -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & -b, & -a \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_2\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}\,. \quad (7.8)$$

Условия справедливости формул (7.7) и (7.8) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 7.2. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} > \max[\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b), \mathrm{Re}(c), \mathrm{Re}(a+b)],\ \bar{\lambda} \in C^n\,.$$

Если $\mathrm{Re}(c)=0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.7), *а при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.8).

На основании (7.3) формулы обращения (4.10) и (4.11) для ${}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ -преобразования (5.7) принимают вид:

$$f(\mathrm{x}) = \delta x^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, & -c+a, & -c+b \\ 0, & -c+a+b, & -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t}\,. \quad (7.9)$$

$$f(\mathrm{x}) = -\delta\, \mathrm{x}^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{1,2}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -c+a, & -c+b, & -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & 0, & -c+a+b \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_3\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\,d\,\mathrm{t}\,. \quad (7.10)$$

Условия справедливости формул (7.9) и (7.10) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 7.3. *Пусть*

$$\boldsymbol{\theta} < \min[0, \mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b), \mathrm{Re}(c-a-b]+1,\ \bar{\lambda} \in C^n\,.$$

Если $\mathrm{Re}(c)=0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.9), *а при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta}-1$ *верно равенство* (7.10).

На основании (7.4) формулы обращения (4.10) и (4.11) для ${}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f$ -преобразования (5.7) принимают вид:

$$f(\mathrm{x}) = \delta x^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int\limits_0^\infty G^{0,3}_{3,3}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, & -a-b, & -c \\ -a, & -b, & -\bar{\lambda}-1 \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\boldsymbol{\sigma}-1} \left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(t)\,dt\,, \quad (7.11)$$

$$f(\mathrm{x}) = -\delta\, \mathrm{x}^{\delta-\boldsymbol{\omega}-\delta(\bar{\lambda}+1)-\delta(c-1)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2}\left[\frac{\mathrm{t}^\delta}{\mathrm{x}^\delta}\middle| \begin{matrix} -c, & -a-b, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, & -b, \quad -a \end{matrix}\right] \mathrm{t}^{\delta-\sigma-1} \left({}_4\mathrm{I}^{c}_{\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\omega};\delta} f\right)(\mathrm{t})\, \mathrm{dt}\,. \quad (7.12)$$

Условия справедливости формул (7.11) и (7.12) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 7.4. *Пусть*

$$\theta < \min\left[\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b), \mathrm{Re}(a+b), \mathrm{Re}(c)\right] + 1,\ \bar{\lambda} \in C^n\,.$$

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, *то при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \boldsymbol{\theta} - 1$ *верно равенство* (7.11), *а при* $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \boldsymbol{\theta} - 1$ *верно равенство* (7.12).

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция–2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Ситник, С.М. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре / С.М. Ситник, О.В. Скоромник, С.А. Шлапаков // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
3. Sitnik, S.M. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels / S.M. Sitnik, O.V. Skoromnik // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
4. Скоромник, О.В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций / О.В. Скоромник, М.В. Папкович // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 131–137.
5. Папкович, М.В. Многомерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в весовых пространствах суммируемых функций / М.В. Папкович, О.В. Скоромник // Междунар. мат. конф. «Уфимская осенняя математическая школа–2020»: сб. тез., Уфа, 11–14 нояб. 2020 г. / М-во науки и высшего образования Рос. Федер., Башкирс. гос. ун-т, Ин-т математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Научно-образовательный математический центр Приволжского федерального округа; отв. ред. З.Ю. Фазуллин. – Уфа, 2020. – С. 142–144.
6. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
7. Skoromnik, O.V. Multidimensional integral transforms with the Gauss hypergeometric function in the kernels in the weighted space of summable functions / O.V. Skoromnik, M.V. Papkovich // Еругинские чтения–2019: тез. докл. XIX Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г. / Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: Е.К. Макаров [и др.]. – Могилев, 2019. – С. 61.
8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
9. Килбас, А.А. $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ -теория интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах / А.А. Килбас, О.В. Скоромник // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундаментальные науки. – 2007. – № 3. – С. 42–50.
10. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
11. Скоромник, О.В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода / О.В. Скоромник. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.

R E F E R E N C E S

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marishev O.I. *Integraly i proizvodniye drobnogo poriadka i nekotoriye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Share Order and Some of their Applications], Ninsk: Nauka i tekhnika, 1987, 688 p.
2. Sitnik S.M., Skoromnik O.V., Shlapakov S.A. *Vesnik Vitsebskaga dziarzh. un-ta* [Bulletin of Vitebsk State University], 2019, 3(104), p. 18–27.
3. Sitnik, S.M. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels / S.M. Sitnik, O.V. Skoromnik // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
4. Skoromnik O.V. Papkovich M.V. *Vestnik Polotskogo gos. un-ta.* Ser. C. Fundamentalniye nauki [Bulletin of Polotsk State University. Fundamental Sciences C], 2019, 4, p. 131–137.
5. Papkovich M.V., Skoromnik O.V. *Mezhdunar. mat. konf. “Ufimskaya osenniaya matematicheskaya shkola–2020”: sb. tez., Ufa, 11–14 noyab. 2020 g., Bashkirs. gos. un-t, In-t matematiki s vychislitelnym tsentrom RAN* [International Mathematic Conference “Ufa Autumn Mathematical School–2020”: Proceedings, Ufa, November 11–14, 2020, Bashkir State University, Institute of Mathematics with RASc Calculation Center], Ufa, 2020, p. 142–144.
6. Kilbas, A.A. H-Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. – London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
7. Skoromnik O.V., Papkovich M.V. *Yeruginskiye chteniya–2019: tez. dokl. XIX Mezhdunar. nauch.-konf. po differentsialnym uravneniyam < Mogilev, 14–17 maya 2019 g.* [Yerugin Readings–2019: Proceedings of the 19th International Conference on Differential Equations, Mogilev, May 14–17, 2019], Mogilev, 2019, 61 p.

8.Beitmen G., Erdein A. Vysshiye transtsendentniye funktsii [Higher Transcendent Functions], M.: Nauka, 1973, 1, 294 p.

9. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. *Vestnik Polotskogo gos. un-ta.* Ser. C. Fundamentalniye nauki [Bulletin of Polotsk State University. Fundamental Sciences C], 2007, 3, p. 42–50.
10. Kilbas, A.A. Theory and applications of fractional differential equations / A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
11. Skoromnik O.V. *Integralniye preobrazovaniya s funktsiyami Gaussa i Lezhandra v yadrakh i integralniye uravneniya pervogo roda* [Integral Transformations with Gauss and Lejandre Functions in Nuclei and Integral Equations of the First Type], Novopolotsk: PGU, 2019, 180 p.

Поступила в редакцию 21.09.2021

Адрес для корреспонденции: e-mail: skoromnik@gmail.com – Скоромник О.В.