предположим, что свободный член последнего выражения равен $49/4$. Сравниваем его с выражением (4) и далее решаем квадратное уравнение $3a^2-6a+7-49/4=0$. Его корни $a_1=1+\sqrt{11}/2$, $a_2=1-\sqrt{11}/2$. Второй корень отбрасываем.

При подстановке a_1 во вторую скобку выражения (4) получаем полином восьмой степени, корни которого выражаются в радикалах. Применяя *Maple*, находим $x_{m1,2}=\pm x_m$, где $x_m=(1/2)\cdot\sqrt{2\sqrt{11}-6}$. Остальные корни нас сейчас не интересуют, так как не являются точками максимума L. При таком x_m $\langle\mu,g\rangle=\left(\sqrt{2}\left(6+\sqrt{11}\right)/50\right)\sum\limits_{1\le k\le 12}b_kQ_kg\left(z_k\right)$, $b_2=b_3=b_5=b_6=b_8=b_9=b_{11}=b_{12}=(6-\sqrt{11})/(2(41\sqrt{11}-121))$, $b_1,b_4,b_7,b_{10}=(5(9\sqrt{11}-29))/(4(41\sqrt{11}-121))$, что обеспечивает экстремальность полинома $P_7=z^7+(1+\sqrt{11}/2)z^3$.

Заключение. Таким образом, методологическое значение полученного результата состоит в том, что от приближенного значения параметра, которое найдено благодаря косвенным рассуждениям и численным методам, мы вышли на точное аналитическое значение этого параметра. Это, в свою очередь, позволило строго аналитически доказать экстремальность искомого полинома. Результаты работы превзошли поставленную цель.

1. Трубников, Ю.В. О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю.В. Трубников // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 2. – С. 45–56.
2. Трубников, Ю.В. Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – Москва: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.А. Шлапаков[1], О.В. Скоромник[2]
[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова
[2]Новополоцк, ПГУ

В работе объектом исследования является задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка, в качестве производной выступает дробная производная Адамара [2]. Естественно возникает проблема интегрирования такого уравнения с учётом начальных условий. Цель данного исследования состоит в отыскании решения интегрального уравнения второго рода, которое эквивалентно поставленной задаче.

Материал и методы. Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчислений.

Результаты и их обсуждение. В [1] рассматривалась задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля [1]. Здесь же приведены условия, при выполнении которых эта задача имеет единственное решение. В [2] рассматривалась дробная производная Адамара, которая при действительном $\alpha>0$ определяется соотношением

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\delta^n\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}g\right)(x),\quad \delta=x\frac{d}{dx},\ n=[\alpha]+1,$$

что можно понимать и так

$$\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\delta^n\left(\Im_{a+}^{n-\alpha}g\right)(x)=\delta^n\left(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-n}g\right)(x),$$

где конструкция

$$\left(\Im_{a+}^{\alpha}g\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{g(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}\frac{dt}{t},\quad \alpha>0,\quad 0\le a<x$$

является дробным интегралом Адамара порядка $\alpha > 0$. В [3] была рассмотрена задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида с дробной производной Адамара: найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\left(D_{a+}^{\alpha} y\right)(x) = f(x, y(x)),\ n-1 < \alpha \le n,\ n \in N,\ a > 0 \qquad (1)$$

при выполнении начальных условий

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = b_k,\ k = 1, 2, \ldots, n = -[-\alpha]. \qquad (2)$$

Левую часть в начальных условиях следует понимать как предел в правосторонней окрестности $(a, a+\varepsilon), \varepsilon > 0$ точки a:

$$\left(D_{a+}^{\alpha-k} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(D_{a+,\mu}^{\alpha-k} y\right)(x),\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha-n} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} \left(\Im_{a+}^{n-\alpha} y\right)(x),\ \alpha \ne n,$$

$$\left(D_{a+,\mu}^{0} y\right)(a+) = \lim_{x \to a+} y(x),\ \alpha = n.$$

Задача (1), (2) рассматривалась в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a,b) = \left\{ y \in L(a,b) \,\middle|\, D_{a+}^{\alpha} y \in L(a,b) \right\},\ 0 < a < b < +\infty, \qquad (3)$$

где

$$L(a,b) = \left\{ z(t) \,\middle|\, \int_a^b |z(t)|\,dt < +\infty \right\},\quad \left\| z_1 - z_2 \right\|_{L(a,b)} = \int_a^b |z_1(t) - z_2(t)|\,dt.$$

Было показано, что она равносильна уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t},\ x > a. \qquad (4)$$

Для отыскания решения этого уравнения можно применить принцип сжимающих отображений в пространстве (3). С этой целью запишем (4) в виде $y(x) = \left(Ay\right)(x)$, где

$$\left(Ay\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t, y(t)) \frac{dt}{t} + g(x),\quad g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} \left(\ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha-k}.$$

Тогда на основании этого представления можно построить рекуррентную функциональную последовательность $y_m(x) = (A^m y_0)(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, взяв за начальное приближение, например, $y_0(x) = g(x)$. В развёрнутой форме это запишется так

$$y^m(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha-1} f(t, (A^{m-1} y_0)(t)) \frac{dt}{t} + g(x),\ m = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Последовательность (5) в силу полноты пространства $L(a,b)$ будет сходиться к единственному решению $y^*(x)$ уравнения (4):

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \left(A^m y_0\right)(x) - y^*(x) \right\|_{L(a,b)} = 0,$$

а, значит, и задачи типа Коши (1), (2).

Заключение. В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе построено решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, которое эквивалентно задаче типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегродифференцирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI(63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011г.) – 2011. – Т. 1. – С. 71–73.
3. Шлапаков, С.А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 1 марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2020. С. 71–72.