

**РАСЧЁТ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУКТУР
В РАМКАХ ОПЕРАТОРНОЙ ТЕОРИИ ЭФФЕКТИВНОЙ СРЕДЫ**

***М. Г. РОМАНОВИЧ, д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. НОВИЦКИЙ
(Белорусский государственный университет, Минск)***

В данной работе предлагается операторная теория эффективной среды для описания взаимодействия электромагнитных волн с цилиндрически симметричными слоистыми структурами. Результаты расчета дифференциального сечения рассеяния показывают, что полученные эффективные материальные параметры адекватно описывают отклик системы в некотором диапазоне параметров.

Ключевые слова: *рассеяние света, эффективные материальные параметры, метаматериалы.*

Введение. Конструирование метаматериалов позволяет создавать композитные материалы, обладающие исключительными электромагнитными (акустическими) свойствами, которые не встречаются в природе. Теория гомогенизации позволяет заменить неоднородную композитную структуру однородной эффективной средой, которая по своим рассеивающим свойствам не отличается от исходной композитной структуры. Конечно, метаматериалы могут иметь довольно сложную структуру, однако мы можем прибегнуть к простой игрушечной модели, которая отражает основные характеристики метаматериала. Так, в работе [1] в качестве такой модели используют периодическую планарную многослойную систему, составленную из немагнитных изотропных материалов. Применение операторного подхода, разработанного в работах [2–4], к построению теории эффективной среды позволяет увеличить точность такого приближения.

Для изучения оптического отклика неоднородных наночастиц на электромагнитное излучение предлагается использовать теорию эффективной среды для замены многослойной цилиндрической наночастицы на однородную. В данной работе операторный метод, разработанный в [2], применяется для цилиндрически симметричной многослойной системы, составленной из немагнитных изотропных материалов.

Волны в цилиндрически симметричных многослойных системах. Рассмотрим распространение монохроматической электромагнитной волны с частотой ω в некоторой бианизотропной среде, характеризующейся тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$, тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$, и псевдотензорами гирации $\hat{\alpha}$ и \hat{k} [2],

$$D(r, \omega) = \hat{\epsilon}(r, \omega)E(r, \omega) + \hat{\alpha}(r, \omega)H(r, \omega), \quad (1)$$

$$B(r, \omega) = \hat{k}(r, \omega)E(r, \omega) + \hat{\mu}(r, \omega)H(r, \omega), \quad (2)$$

где H, E, B и D – комплексные вектора напряжённости и индукции магнитных и электрических полей. Для описания электромагнитных полей используем базисные вектора цилиндрических координат (r, φ, z) : $e_r(\varphi), e_\varphi(\varphi), e_z$. Базисные вектора определяют векторную структуру полей. Тангенциальные компоненты электрического E и магнитного H полей лежат в плоскости, касательной к поверхности круглого цилиндра, непрерывны на цилиндрической границе раздела двух сред и представимы в виде $E_t = IE, H_t = IH$, где $I = \hat{1} - e_r \otimes e_r = -e_r^\times$ – оператор проецирования на плоскость, перпендикулярную вектору e_r , а \otimes – внешнее тензорное произведение (диада), определяющееся как $(u \otimes v)_{i,j} = u_i v_j, i, j = 1, 2, 3$.

С учетом трансляционной симметрии вдоль оси z и азимутальной симметрии по углу, уравнения Максвелла можно представить в виде системы из четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка или эквивалентного ей дифференциального уравнения для вектора тангенциальных магнитного и электрического полей W [2]:

$$\frac{dW(r)}{dr} = Ik_0 M(r)W(r) \quad (3)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} H_t \\ E_t \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\hat{A} = \frac{I}{k_0 r} e_\varphi \otimes e_\varphi + e_r \times \hat{\alpha} l + e_r \times \hat{\varepsilon} e_r \otimes v_3 + e_r \times (u + \hat{\alpha} e_r) \otimes v_1,$$

$$\hat{B} = e_r \times \hat{\varepsilon} l + e_r \times \hat{\varepsilon} e_r \otimes v_4 + e_r \times (u + \hat{\alpha} e_r) \otimes v_2,$$

$$\hat{C} = -e_r \times \hat{\mu} l + e_r \times \hat{\mu} e_r \otimes v_1 + e_r \times (u - \hat{k} e_r) \otimes v_3,$$

$$\hat{D} = \frac{I}{k_0 r} e_\varphi \otimes e_\varphi - e_r \times \hat{k} l - e_r \times \hat{\mu} e_r \otimes v_2 + e_r \times (u - \hat{k} e_r) \otimes v_4,$$

где

$$v_1 = \delta_r (k_{rr} e_r \hat{\alpha} l - \varepsilon_{rr} e_r \hat{\mu} l - k_{rr} u),$$

$$v_2 = \delta_r (k_{rr} e_r \hat{\varepsilon} l - \varepsilon_{rr} e_r \hat{k} l - \varepsilon_{rr} u),$$

$$v_3 = \delta_r (\alpha_{rr} e_r \hat{\mu} l - \mu_{rr} e_r \hat{\alpha} l - \mu_{rr} u),$$

$$v_4 = \delta_r (\alpha_{rr} e_r \hat{k} l - \mu_{rr} e_r \hat{\varepsilon} l - \alpha_{rr} u),$$

$$\delta_r = (\varepsilon_{rr} \mu_{rr} - \alpha_{rr} k_{rr})^{-1}, \quad \xi_{rr} = e_r \hat{\xi} e_r, \quad \hat{\xi} \in \{\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}, \hat{\alpha}, \hat{k}\}.$$

Вектор $u = (\beta/k_0)e_\varphi - \nu/(k_0r)e_z$ включает в себя продольное волновое число β (в теории оптических волноводов постоянная распространения моды) и целое (азимутальное) число ν .

Фундаментальное решение уравнения (3) выражается эволюционным оператором Ω_α^r слоя, заключенного в интервале (α, r) :

$$W(r) = \Omega_\alpha^r [Ik_0M(r)]W(\alpha), \alpha \neq 0. \quad (5)$$

Эволюционный оператор позволяет определять тангенциальные компоненты полей в произвольной точке кольцевого слоя, когда известны поля в начальной точке a . Точка a не может быть выбрана в нуле, поскольку в центре круга напряжённости электромагнитных полей – вырождены. Только для бесконечно тонкого слоя матрица M является постоянной. Во всех остальных случаях оператор эволюции представляется мультипликативным интегралом (матрицантом):

$$\Omega_\alpha^r [Ik_0M] = \int_\alpha^r (E + Ik_0M(r)dr), E = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Операторный метод в приближении эффективной среды. Приближение эффективной среды обычно получают из квазистатического приближения Максвелла-Гарнета. Так, многослойная структура заменяется однородным эффективным слоем (рисунок 1). В общем случае эффективная среда бианизотропна и характеризуется следующими материальными параметрами: тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}_{eff}$, тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}_{eff}$, и псевдотензорами гирации $\hat{\alpha}_{eff}$ и \hat{k}_{eff} [1]. Обобщим операторный подход, разработанный в [1] для того, чтобы увеличить точность приближения эффективной среды.

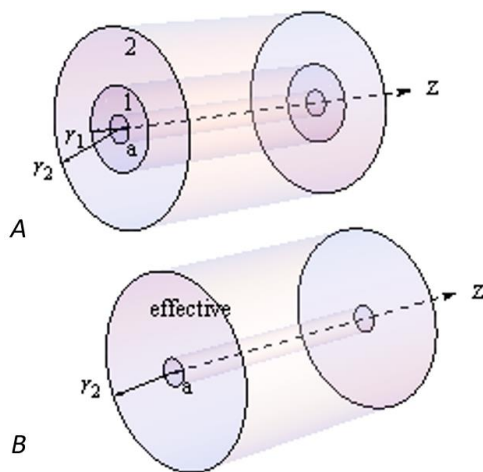


Рисунок 1. – А – Двухслойная элементарная ячейка многослойной диэлектрической структуры, слой 1 характеризуется $\hat{\epsilon}_1, \hat{\mu}_1, \hat{\alpha}_1, \hat{k}_1$, слой 2 – $\hat{\epsilon}_2, \hat{\mu}_2, \hat{\alpha}_2, \hat{k}_2$.

В – гомогенизированный аналог элементарной ячейки многослойной диэлектрической структуры

Точная замена исходной многослойной структуры эффективной средой приводит к тому, что обе эти структуры оказываются неотличимы друг от друга,

так как они создают одинаковое рассеянное электромагнитное поле. Это условие можно записать как равенство эволюционного оператора эффективной среды эволюционному оператору многослойной системы [1]:

$$\Omega_{eff} = \Omega_2 \Omega_1. \quad (7)$$

Эволюционный оператор представим в виде борновского приближения n -го порядка по малому параметру k_0 :

$$\begin{aligned} \Omega(r) = & \hat{1} + lk_0 \int_{\alpha}^R M(r) dr + (lk_0)^2 \int_{\alpha}^R M(R') \int_{\alpha}^R M(r) dr dR' + \\ & + (lk_0)^3 \int_{\alpha}^R M(R'') \int_{\alpha}^{R''} M(R') \int_{\alpha}^{R'} M(r) dr dR' dR'' + \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

тогда с учётом (7), (8) для нулевого приближения справедливо:

$$\int_{\alpha}^{r_2} M_{eff}(r) dr = \int_{\alpha}^{r_1} M_1(r) dr + \int_{r_1}^{r_2} M_2(r) dr. \quad (9)$$

Найдём в нулевом приближении материальные параметры эффективной среды из выражения (9). Считаем, что изотропные диэлектрические слои обладают параметрами $\hat{\varepsilon}_{1,2} = \varepsilon_{1,2} \hat{1}$, $\hat{\mu}_{1,2} = \hat{1}$, $\hat{\alpha}_{1,2} = \hat{k}_{1,2} = \hat{0}$. При подстановке их в (4) получаем:

$$M_{1,2}(r) = \begin{pmatrix} \frac{l}{k_0 r} e_{\varphi} \otimes e_{\varphi} & \varepsilon_{1,2} e_r^{\times} - e_r^{\times} u \otimes u \\ -e_r^{\times} + \frac{1}{\varepsilon_{1,2}} e_r^{\times} u \otimes u, & \frac{l}{k_0 r} e_{\varphi} \otimes e_{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Используя (4) для эффективной среды и (10), из (9) получим следующую систему уравнений:

$$\int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\alpha}_{eff} l dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\varepsilon}_{eff} e_r \otimes v_3 dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} (u + \hat{\alpha}_{eff} e_r) \otimes v_1 dr = 0, \quad (11.1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\varepsilon}_{eff} l dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\varepsilon}_{eff} e_r \otimes v_4 dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} (u + \hat{\alpha}_{eff} e_r) \otimes v_2 dr = \\ & = \int_{\alpha}^{r_1} \varepsilon_1 e_r^{\times} dr + \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon_2 e_r^{\times} dr - \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} u \otimes u dr, \end{aligned} \quad (11.2)$$

$$\begin{aligned}
& -\int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\mu}_{eff} l dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} \hat{\mu}_{eff} e_r \otimes v_1 dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} (u - \hat{k}_{eff} e_r) \otimes v_3 dr = \\
& = \int_{\alpha}^{r_2} e_r^{\times} dr + \int_{\alpha}^{r_1} \frac{1}{\varepsilon_1} e_r^{\times} u \otimes u dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\varepsilon_2} e_r^{\times} u \otimes u dr, \tag{11.3}
\end{aligned}$$

$$-\int_{\alpha}^{r_2} e_r \times \hat{k}_{eff} l dr - \int_{\alpha}^{r_2} e_r \times \hat{\mu}_{eff} e_r \otimes v_2 dr + \int_{\alpha}^{r_2} e_r \times (u - \hat{k}_{eff} e_r) \otimes v_4 dr = 0. \tag{11.4}$$

При расчётах, в данной работе, мы ограничились следующим видом тензора диэлектрической проницаемости эффективной среды:

$$\hat{\varepsilon}_{eff} = \varepsilon_{rr} e_r \otimes e_r + \varepsilon_{\varphi\varphi} e_{\varphi} \otimes e_{\varphi} + \varepsilon_{zz} e_z \otimes e_z. \tag{12}$$

Решением системы уравнений (12.1)–(12.4) является набор материальных параметров негиротропной ($\hat{\alpha}_{eff} = \hat{k}_{eff} = \hat{0}$) немагнитной ($\hat{\mu}_{eff} = \hat{1}$) анизотропной эффективной среды, который можно использовать в качестве нулевого приближения для цилиндрически симметричных многослойных структур. Выделим два случая:

1. Волны распространяются вдоль образующей цилиндра ($\beta \neq 0, \nu = 0$):

$$\varepsilon_{rr}^{(0)} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 Q_1 + \varepsilon_1 Q_2}, \tag{13.1.1}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} = \varepsilon_{zz}^{(0)} = Q_1 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_2; \tag{13.1.2}$$

2. Волны распространяются в поперечном сечении цилиндра ($\beta = 0, \nu \neq 0$):

$$\varepsilon_{rr}^{(0)} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 r_1}{\varepsilon_2 Q_1 r_2 + \varepsilon_1 Q_2 \alpha}, \tag{13.2.1}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} = \varepsilon_{zz}^{(0)} = Q_1 \varepsilon_1 + Q_2 \varepsilon_2, \tag{13.2.2}$$

где $Q_1 = \frac{r_1 - \alpha}{r_2 - \alpha}, Q_2 = \frac{r_2 - r_1}{r_2 - \alpha}$.

На рисунке 2 приведено сравнение зависимостей дифференциального сечения рассеяния [5] для волн в поперечном сечении цилиндра в случае слоистой среды и в приближении эффективной среды, когда пара слоев заменяется одним однородным слоем. Отметим, что теория эффективной среды близка к точному решению при равных толщинах слоев.

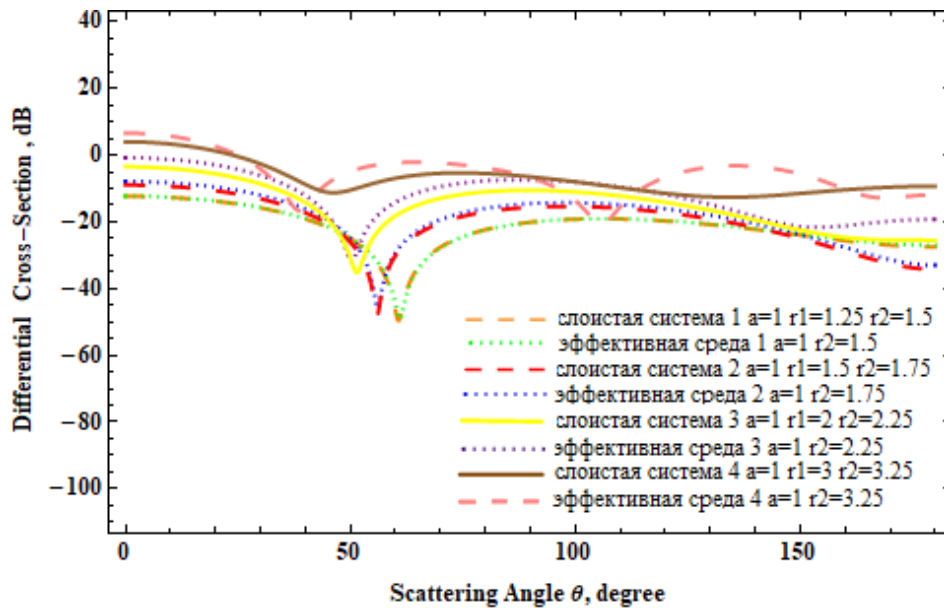


Рисунок 2. – Дифференциальное сечение рассеяния в зависимости от угла рассеяния для слоёв разных толщин. Параметры: $\hat{\epsilon}_1 = 2.1$, $\hat{\epsilon}_2 = 2.3$, $\beta = 0$, $\nu \neq 0$

На рисунке 3 дается сравнение нулевого приближения, выведенного в данной работе, приближения эффективной среды для плоскостойкой среды (его обычно применяют и для криволинейных слоёв) и точного решения для слоистой среды. Видно, что наше приближение немного точнее описывает данную многослойную систему.

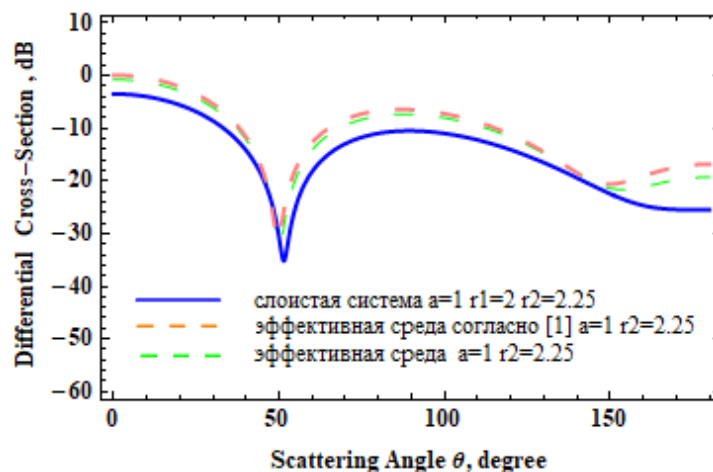


Рисунок 3. – Дифференциальное сечение рассеяния в зависимости от угла рассеяния. Параметры: $\hat{\epsilon}_1 = 2.1$, $\hat{\epsilon}_2 = 2.3$, $\beta = 0$, $\nu \neq 0$

Таким образом, диэлектрическая цилиндрически симметричная многослойная система, составленная из немагнитных изотропных слоёв, в нулевом приближении операторного подхода в теории эффективной среды является однородным анизотропным диэлектриком.

Заключение. В работе были найдены материальные параметры эффективной среды благодаря разложению эволюционного оператора в борновский ряд по малому параметру k_0 . Рассчитаны материальные параметры эффективной среды в нулевом приближении. Проведен анализ полей, рассеянных на исходном слоистом цилиндре и на гомогенизированном цилиндре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Popov V., Lavrinenko A. V., Novitsky A. Operator approach to effective medium theory to overcome a breakdown of Maxwell Garnett approximation //Physical Review B. – 2016. – Т. 94. – №. 8. – С. 085428.
2. Novitsky A. V., Barkovsky L. M. Operator matrices for describing guiding propagation in circular bianisotropic fibres //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2004. – Т. 38. – №. 2. – С. 391.
3. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. – Наука и техника, 1976.
4. Барковский Л. М., Фурс А. Н. Операторные методы описания оптических полей в сложных средах. – Беларуская навука, 2003.
5. Novitsky A. V. Matrix approach for light scattering by bianisotropic cylindrical particles // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2007. – Т. 19. – №. 8. – С. 086213.