В момент τ от точки x отделяется другая точка, которая также управляется первым игроком (сохраним за ней это же обозначение):

$$\dot{x} = a(t)\dot{\phi}(t)u, \quad \|u\| \leqslant 1. \tag{6}$$

На выбор $\phi(t)$ накладывается импульсное ограничение (2). Второй игрок (убегающий) управляет точкой $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\dot{y} = b(t)v, \quad \|v\| \leqslant 1. \tag{7}$$

Преследователь стремится в заданный момент времени p осуществить поимку убегающего: $\|x(p) - y(p)\| \leqslant \varepsilon$. Цель убегающего противоположна. Учитывая (5)–(7), сделаем замену переменных $z = y - x$ и получим дифференциальную игру вида (1).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19–11–00105, https://rscf.ru/project/19-11-00105/.

1. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.

2. *Ухоботов В.И.* Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учебное пособие. Челябинск: Челябинский государственный университет, 2005.

Равномерная глобальная достижимость линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами

А. А. Козлов

Новополоцк, Полоцкий государственный университет

e-mail: kozlovaa@tut.by

Пусть дана линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Возьмем управление u в системе (1) в виде линейной обратной связи $u = U(t)x$, где U — некоторая кусочно-непрерывная и ограниченная ω-периодическая $(m \times n)$-матрица. В результате получим замкнутую однородную систему с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Определение 1. Будем говорить, что система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости* [1], если существует такое число $T > 0$, что для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такая величина $d = d(\alpha, \beta) > 0$, при которой для произвольной $(n \times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей неравенствам $\det H \geqslant \alpha$ и $\|H\| \leqslant \beta$, и всякого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует измеримое и ограниченное управление $U\colon [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^{m \times n}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant d(\alpha, \beta)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t, s)$ системы (3) выполнение равенства

$$X_U(t_0 + T, t_0) = \Lambda.$$

Замечание 1. Свойство равномерной глобальной достижимости системы (2) дает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временно́м отрезке фиксированной длины T, т. е. позволяет выбрать такое матричное управление U, при котором совокупность $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1, n}$, канонического ортономированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

Определение 2. Система (1) называется *равномерно вполне управляемой*(в смысле Калмана) [2], если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 4}$, что при всяком $t_0 \in \mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\alpha_1 E \leqslant W(t_0, t_0 + \sigma) \leqslant \alpha_2 E, \quad \alpha_3 E \leqslant \widehat{W}(t_0, t_0 + \sigma) \leqslant \alpha_4 E, \tag{3}$$

в которых *матрица управляемости* (*матрица Калмана*) $W(\cdot,\cdot)$ определяется равенством

$$W(t_0,t_0+\sigma):=\int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)\,ds,$$

где E — единичная матрица, $X(t,s)$ — матрица Коши линейной системы (1) с нулевым управлением,

$$\widehat{W}(t_0,t_0+\sigma):=X(t_0+\sigma,t_0)W(t_0,t_0+\sigma)X^*(t_0+\sigma,t_0).$$

Замечание 2. В определении 2 неравенства (3) понимаются в смысле квадратичных форм.

Основным результатом настоящей работы является нижеприведенная

Теорема 1. *Система* (1) *с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема (по Калману) тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Доказательство этой теоремы основано на доказательстве критерия глобальной ляпуновской приводимости периодической системы (3), представленном в статье [3] (см. также теорему 28.1 монографии [4]), и утверждении о представлении всякой квадратной матрицы с положительным определителем в виде произведения пяти квадратных матриц с отделенными от нуля положительными главными угловыми минорами [5, с. 30].

Прежде чем сформулировать такое утверждение, введем обозначение. Для всяких числа $l=\overline{1,n}$ и $(n\times n)$-матрицы $H=\{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$ через $(H)_l$ будем обозначать ее *ведущую главную подматрицу* [5, с. 30] *порядка* l:

$$(H)_1=h_{11},\quad (H)_2=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad (H)_n=H.$$

Теорема 2. *При всяких числа $\alpha > 0$ и $(n \times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей оценке $\det \Lambda \geqslant \alpha$, найдутся такие величина $\rho = \rho(\alpha) > 0$ и $(n \times n)$-матрицы $H_1, \dots H_5$, для которых при любых $k = \overline{1,5}$ и $i = \overline{1,n}$ справедливы оценки $\det(H_k)_i \geqslant \rho$, что выполняется равенство $\Lambda = \prod_{k=1}^{5} H_k$.*

Отметим, что последняя теорема вытекает из следующей цепочки лемм.

Лемма 1. *Для любых числа $\alpha > 0$ и $(n \times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей оценке $\det \Lambda \geqslant \alpha$, найдутся такие матрица перестановок $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и величина $\rho = \rho(\alpha) > 0$, при которых для всех $i = \overline{1,n}$ выполняются неравенства $|\det(P\Lambda)_i| \geqslant \rho$.*

Лемма 2. *При всякой матрице перестановок $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ найдется такая верхнетреугольная $(n \times n)$-матрица U с единицами на главной диагонали, что для каждого $i = \overline{1,n}$ имеют место соотношения $|\det(UP)_i \geqslant 1$.*

Лемма 3. *Для любых числа $\alpha > 0$ и $(n \times n)$-матрицы Λ, удовлетворяющей оценке $\det \Lambda \geqslant \alpha$, найдутся такие величина $\rho = \rho(\alpha) > 0$ и верхнетреугольная матрица $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с единицами на главной диагонали, что матрица-произведение $U\Lambda$ представляется в виде $U\Lambda = H_1 \widetilde{E} H_2$, в котором для матриц $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $k = 1, 2$, имеют место оценки $\det(H_k)_i \geqslant \rho$ при всех $i = \overline{1,n}$, а матрица $\widetilde{E} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ получена из единичной матрицы заменой некоторого четного количества диагональных элементов на -1.*

Лемма 4. *Для квадратной матрицы $\widetilde{E}$ порядка n, указанной в лемме 3, найдутся такие квадратные $(n \times n)$-матрицы S_1 и S_2, что при всех $k = 1, 2$ и $i = \overline{1,n}$ справедливы оценки $\det(S_k)_i \geqslant 1$ и равенство $\widetilde{E} = S_1 \cdot S_2$.*

Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2025» (подпрограмма 1, задание 1.2.01, №ГР 20211316 от 15.05.2021).

1. *Зайцев В.А., Тонков Е.Л.* Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45–56.

2. *Kalman R.E.* Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. Vol. 5, no. 1, pp. 102–119.

3. *Попова С.Н.* Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 12. С. 1627–1636.

4. *Макаров Е.К., Попова С.Н.* Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.

5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Устойчивость существования глобальных решений первой краевой задачи для управляемого полулинейного параболического уравнения

М. С. Коржавина
Нижний Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского
e-mail: maryasha_f@mail.ru

Данная публикация примыкает к публикации [1], посвященной условиям *устойчивости* (по возмущению управления) *существования глобальных решений* (УСГР) первой *начально-краевой задачи* (НКЗ) для полулинейного параболического уравнения с управляемой нелинейной правой частью, содержащей производные решения по пространственным переменным. Пусть заданы $n, r \in \mathbb{N}$, $T > 0$, $\alpha \in (0,1)$ и ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(\partial\Omega \in C_2)$, элементы которой обозначаем $x = \left\{x^1, \ldots, x^n\right\}$. На цилиндре $Q_T \equiv \Omega \times (0,T)$ с боковой поверхностью $S_T \equiv \partial\Omega \times (0,T)$ рассмотрим НКЗ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y] \equiv y'_t - \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} y'_{x^j}\right)'_{x^i} = \\ = g\left(\{x,t\}, y, y'_x, u(x,t)\right),\ \{x,t\} \in Q_T; \end{aligned} \tag{1}$$