

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»

Факультет информационных технологий

Кафедра геодезии и геоинформационных систем

СОГЛАСОВАНО

Заведующий кафедрой

Маркович К.И.

(подпись/расшифровка подписи)

2023 г.



М. П. СОГЛАСОВАНО

Декан факультета

О.А. Маркович

(подпись/расшифровка подписи)

2023 г.

**ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

Теория математической обработки геодезических измерений

(название учебной дисциплины)

для специальности 1-56 02 01 (6-05-0731-01) «Геодезия»

(код и наименование специальности)

Автор: Дегтярёв А. М.

Рекомендовано и утверждено на заседании методической комиссии факультета информационных технологий 30 июня 2022 г., протокол № 7

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой»

А. М. Дегтярёв

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Электронный конспект лекций
для студентов геодезических специальностей

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
2023

Об издании – [1](#), [2](#)

УДК 528.11 (075.8):519.2

ББК 22.17. я73

Рекомендовано к изданию
методической комиссией факультета информационных технологий
в качестве электронного конспекта лекций
(протокол № 7 от 30.06.2022 г.)

Кафедра геодезии и геоинформационных систем

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д.т.н., проф. зав. каф. высшей геодезии Московского государственного университета
геодезии и картографии О. В. ВШИВКОВА;

к.т.н., доц., доц. каф. геодезии и геоинформационных систем

Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой И. П. ШЕВЕЛЕВ

Дегтярёв, А. М.

Теория погрешностей и статистический анализ [Электронный ресурс]: электрон.
консп. лекций для студентов геодезических специальностей / А. М. Дегтярёв. –
Новополоцк: Полоц. гос. ун-т им. Евфросинии Полоцкой, 2023. – 1 эл. опт. диск (CD-R).
ISBN 978-985-531-832-4.

Конспект лекций составлен в соответствии с учебной программой по курсу «Теория математической обработки результатов измерений» для учреждений высшего образования. Рассмотрены основные вопросы теории погрешностей, оценки прямых и косвенных измерений и их статистического анализа. Приведены сведения из теории вероятностей и математической статистики, теории матриц, сведения для работы с пакетом Matlab, необходимые для успешного усвоения и практического использования представленного материала. Рассмотрен ряд нетрадиционных подходов к обработке и анализу результатов геодезических измерений.

Рекомендован для студентов геодезических специальностей. Может быть полезен для научных и инженерно-технических работников, занимающихся обработкой и анализом результатов геодезических измерений.

№ госрегистрации 3362230664

ISBN 978-985-531-832-4

© Дегтярев А. М., 2023

© Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, 2023

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Теория погрешностей и статистический анализ» А. М. Дегтярёва использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Материалы включены в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3362230664 от 25.11.2022 г.

Технические требования:

1 оптический диск.

Системные требования:

PC не ниже класса Pentium;

32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb;

Windows 95/98/Me/2000/XP/7;

Дисковод CD-ROM 2-скоростной и выше;

мышь

ДЕГТЯРЁВ Александр Михайлович

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Электронный конспект лекций
для студентов геодезических специальностей

Редактор *И. Н. Чапкевич*

Техническое редактирование, верстка *И. Н. Чапкевич*

Компьютерный дизайн *М. С. Мухоморовой*

Подписано к использованию 04.04.2023. Объем издания: 3,46 Мб. Заказ 150.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 27.05.2004.

211440, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк,

Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44

<http://www.psu.by>

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ	6
1.1. Измерения и погрешности	6
1.2. Вероятностные аспекты теории погрешностей измерений	15
1.3. Оценка точности функций.....	24
Глава 2 ОБРАБОТКА МНОГОКРАТНО ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН	48
2.1. Обработка многократно измеренной равноточной величины	48
2.2. Анализируемый классический случай обработки равноточных измерений.....	57
2.3. Дополнительные методы исследования структуры результатов измерений	66
2.4. Нетрадиционные методы оценивания многократно измеренной величины	72
2.5. Оценка многократно измеренной неравноточной величины.....	81
2.6. Дополнительные вопросы обработки неравноточных измерений	91
Глава 3 СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА	100
3.1. Дисперсионный анализ.....	100
3.2. Корреляционный анализ	100
3.3. Регрессионный анализ	109
3.4. Другие виды регрессии	117
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	125
Приложение 1	126
Приложение 2	174
Приложение 3	184
Приложение 4	193
Приложение 5	197

ВВЕДЕНИЕ

Представленные материалы содержат лекции первого семестра дисциплины «Теория математической обработки геодезических измерений» для студентов 2 курса геодезической специальности. Освещаются основные вопросы теории погрешностей и статистического анализа результатов измерений. Предполагается, что студент уже знаком с начальными положениями теории вероятностей и математической статистики, основные результаты которой в сокращенном виде содержит приложение 1.

Первая и вторая главы посвящены вопросам измерений, погрешностей и их классификации, вероятностному обоснованию теории погрешностей измерений, её целям и задачам, а также оценке результатов косвенных и прямых измерений. При этом, оценка косвенных результатов измерений рассматривается по трем направлениям:

- оценка одного косвенного измерения;
- оценка вектор-функции косвенных измерений;
- проектирование результатов измерений.

Оценка точности прямых измерений включает рассмотрение как классических формул, так и альтернативных, а также некоторых дополнительных возможностей.

Третья глава содержит элементы дисперсионного, корреляционного и регрессионного статистического анализа данных, полученных геодезическими методами. Особое внимание уделено процедуре статистической проверке гипотез, что в последнее время получило достаточно широкое распространение в геодезической практике.

Приведены многочисленные численные примеры с пояснением производимых действий.

Четыре приложения содержат краткий материал по теории вероятностей и математической статистике, теории матриц и использованию пакета MATLAB при обработке результатов измерений. В приложении 5 размещена Рабочая программа по дисциплине, на основе которой излагается лекционный материал.

Глава 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

1.1. Измерения и погрешности

[Эмпирическое познание.](#)

[Структура измерительной процедуры.](#)

[Классификация измерений.](#)

[Погрешности и их классификация.](#)

[Модели измерений и погрешностей.](#)

[Цели и задачи теории погрешностей измерений.](#)

[Историческая справка.](#)

Эмпирическое познание. В процессе познания объективной реальности для использования полученных данных с целью эффективного существования и развития человечеству необходимо было разрабатывать методы познания (*гносеология*). На современном этапе развития эти методы можно разбить на первичные (теоретические и эмпирические) и вторичные – «квантитативные» методы. К первичным теоретическим относят приемы анализа и синтеза, логические выводы, формулирование гипотез, образование научных понятий – абстрагирование, обобщение, идеализацию, конструктивизацию и др. К первичным эмпирическим относят способы наблюдений и измерений, эксперимент, моделирование, логические средства индукции, аналогии. По полученным на первом этапе данным делают умозаключение и логические выводы, используя вторичные методы. К ним, в основном, относят приемы формализации (математизации) описаний исследуемых объектов и явлений.

Измерение как объект познания должно иметь сложную структуру, а не сводиться к банальному сравнению эталона с определяемой величиной. Это также следует из сложности и многогранности процесса измерения, сводимого к схеме «цель – объект, субъект – средства, метод – окружающая среда», каждая составляющая которой взаимосвязана. Поэтому измерение должно формироваться как системная измерительная процедура со всеми перечисленными этапами познания.

Рассмотрим их подробнее.

Структура измерительной процедуры включает в себя ряд этапов:

1. *Постановка измерительной задачи и построение математической модели измерения.* Здесь следует учесть, что исследователь измеряет не реально существующее свойство, а некоторую его идеализированную модель или параметры этой модели, например, при измерении расстояния мы пытаемся измерить его абстракцию в виде горизонтированной прямой линии. Поэтому на этом этапе анализируется вся, накопленная до этого, информация (априорная информация), на ее основе формируется модель объекта исследования и основные уравнения измерения. Уравнения измерений зависят от вида измерений.

2. *Планирование эксперимента.* Весьма важная составляющая теоретического этапа, особенно в связи с увеличением требований качества и эффективности измерений, так как часто желательно иметь оптимальный или требуемый результат, а не то что получается. На этом этапе по структуре процесса измерения выбирают объект, субъект измерения, метод и средства измерений, производится предрасчет основных

параметров измерения, таких как точность, количество, состав для удовлетворения поставленных требований.

3. *Измерение*. Эмпирический этап состоит в процедуре выполнения измерения и получения экспериментальных данных в каком-либо виде (числа, графики). На этом этапе происходит непосредственное взаимодействие (в зависимости от вида измерения) средств измерений с объектом измерения, выбранными методами и субъектом в окружающей среде с последующей регистрацией результата.

4. *Обработка результатов измерений*. Этот этап (умозаключительный) заключается в анализе исходных данных и выборе алгоритма их обработки; вычислении результатов измерения и показателей точности; анализе и интерпретации полученных результатов.

Лишь корректное выполнение всех этапов делает возможным эффективную организацию и проведение измерения для получения результата с требуемой точностью.

Из эмпирических (опытных) методов следует отметить *наблюдение* – фиксация свойства без количественного определения; *измерение* – фиксация свойства (наблюдение) с количественным определением; *эксперимент* – наблюдение и измерение с целью получения желаемого результата.

Классификация измерений. Как отмечалось выше, на теоретическом этапе формируется уравнение измерения, которое напрямую связано с видом измерения по *физическому исполнению*. Традиционно в *метрологии* (науке об измерениях) выделяют прямые, косвенные, реже используют в геодезии совместные и совокупные измерения.

Прямые измерения – вид измерений, при которых средства измерений непосредственно взаимодействуют с объектом опыта. Тогда уравнение прямого измерения величины X будет иметь вид

$$Q = X. \quad (1.1.1)$$

На этапе планирования необходимо предрассчитать точность и количество измерений.

Косвенные измерения – вид измерений, при котором величину Q невозможно определить прямо, но можно связать её с другими измерениями X, Y, \dots , которые можно получить непосредственно. Уравнение косвенного измерения есть

$$Q = f(X, Y, \dots). \quad (1.1.2)$$

При планировании предрассчитывают количество параметров модели, число измерений, вид функции, точность измерений.

Совместные измерения – вид одновременных измерений двух или нескольких неоднородных величин для установления зависимости между ними, а *совокупные измерения* – вид измерений нескольких однородных величин в различных их сочетаниях, значения которых определяют путем решения системы уравнений.

Основные виды измерений в геодезии – это прямые и косвенные.

Кроме классификации по физическому исполнению измерения делят по количеству:
– необходимые k и избыточные $t = n - k$, где n – общее количество измерений.

По точности:

– равноточные (*гомоскедастичные*) и неравноточные (*гетероскедастичные*).

По степени влияния друг на друга:

– коррелированные (зависимые) и некоррелированные (независимые). Последнее деление весьма условно, так как все измерения хоть в малой мере, но зависимы.

По степени изменения свойств во времени:

– стационарные (статичные) – с неизменными характеристиками, динамичные – свойства (например, математическое ожидание или дисперсия) изменяются во времени.

В *метрологии* также выделяют технические (массовые) измерения и лабораторные – научные или высокоточные измерения.

Чтобы измерение в общем было выполнимо как физический процесс, необходимо соблюдение следующих постулатов:

– истинное значение измеряемой величины существует;
– истинное значение определить невозможно;
– значение измеряемой величины достаточное время постоянно (для стационарных наблюдений).

С другой стороны, результат измерения сформирован многообразием мира, возможности человека ограничены условиями измерений во всех их проявлениях, что позволяет считать процесс измерения случайным (стохастическим) процессом с результатом в виде случайной величины, выраженной в единицах измеряемой величины, который подчинен причинно-следственной связи. Основой этой связи является *вероятность*.

Погрешности и их классификация. Как показывает практика, в процессе измерения одной величины, как правило, получают близкие, но различные значения. Это еще раз подтверждает случайный характер измерения. Так как существует истинное значение a , измеренное n раз, то целесообразно ввести отклонения Δ_i результата измерения

$$\Delta_i = x_i - a, \quad (1.1.3)$$

которые будем называть *истинными погрешностями измерения*.

Погрешность измерения не может быть сведена к абсолютному минимуму (или быть нулевой). На начальных этапах разработки теории погрешностей измерений считалось, что она является некоторой случайной помехой на пути достижения доброкачественных результатов. Но современные достижения экспериментальных наук показывают, что погрешности измерения не просто практически неизбежны, а и теоретически закономерны. Они несут, наряду с результатами измерения, часть информации об изучаемом объекте. Совершенно естественно желание получить результаты измерений с возможно большей точностью, однако погрешности измерений всегда будут оставаться конечными величинами. Обосновать это предположение можно, например, сформулированным *В. Гейзенбергом принципом неопределенности*, согласно которому количественную и качественную стороны явления нельзя определить с одинаково высокой точностью, так как наблюдатель в процессе измерения физической величины, вносит возмущение в ее структуру. Таким образом, ставится предел точности экспериментальных наблюдений, на каком бы уровне они не проводились, с накоплением же измерительной информации неопределенность результатов не исчезает, а перераспределяется из-за коррелированности ее составляющей. При этом следует иметь в виду, что совершенствование методов оценивания погрешностей результатов измерений в основном ограничено состоянием математических методов. Примером может слу-

жить отсутствие в статистике методов определения влияния неисключенных систематических погрешностей, медленно изменяющихся погрешностей (*тренда*) результатов измерений на статистические оценки характеристик и т.д.

Понятие истинной погрешности результата измерения (1.1.3) является фундаментальным для теории погрешности измерений, но обычно расширяется исходя из практических нужд следующим образом:

$$\Delta_i = x_i - M(x) + M(x) - a = \theta_i + c. \quad (1.1.4)$$

Здесь c – систематическая составляющая истинной погрешности Δ_i (*систематическая погрешность*). Такого рода погрешности входят в каждый результат измерения строго по определенному функциональному закону. Условно делятся на *постоянные*, – неизменные по знаку и величине для каждого результата измерения, и *переменные*, – изменяющие свою величину от измерения к измерению по определенному закону. Эти погрешности должны быть обнаружены и изучены. Если они несут информацию об исследуемом объекте, то должны быть учтены; если являются мешающими факторами, то исключены из результатов измерений.

Величина θ_i в (1.1.4) является *случайной* составляющей истинной погрешности (*случайная погрешность*). Характер действия такого рода погрешностей, как следует из теории вероятностей, обнаруживается только при выполнении большого числа измерений (при массовых испытаниях). Для их исследования используют различные статистические методы с целью установить общие законы их действия и образования и таким образом уменьшить их влияние на результаты измерений.

Совершенно очевидно, что случайная погрешность и систематическая погрешность действуют одновременно, но в разной мере. Мера влияния каждого из них обусловлена условиями измерений. Изменяя условие можно качественно перераспределить их значения, то есть перевести источник систематических погрешностей в случайный, и наоборот. Кроме случайных и систематических погрешностей выделяют *промахи*, или *грубые ошибки*. Измерения не имеют грубых ошибок, то есть выполнены правильно, если их результаты по модулю не превышают некоторой допустимой величины. Результаты, превышающие эту величину, должны быть исключены или обработаны по определенным методикам в случае их неединичности.

Кроме приведенной классификации по физическому смыслу, погрешности разделяют по составляющим условий измерений, называемых *элементарными* погрешностями: *погрешности объекта, субъекта, метода, средств измерений и окружающей среды*. В теории погрешностей измерений такая классификация используется в рамках *аддитивной теории погрешностей* (Хаген, 1837 г.) и в настоящее время применяется на практике редко в связи с существенным усложнением процесса измерений и невозможностью достоверно выявить все составляющие (применение см. [11]).

Модели измерений и погрешностей. Первый этап измерительной процедуры – это построение модели измерения. Именно исходя из этой модели будет производиться процесс измерения и обработки результатов. В самом общем случае результат измерения есть функция от истинного значения a , разного рода погрешностей и каких-либо параметров:

$$x_i = f(a, \Delta_i, t_i). \quad (1.1.5)$$

Рассмотрим некоторые простые модели применительно к статичным и динамическим измерениям. При стационарных измерениях истинное значение величины постоянно и на основе (1.1.3) и (1.1.4) имеем

$$x_i = a + \Delta_i = a + (\theta_i + c). \quad (1.1.6)$$

Наложение разного рода условий на математическое ожидание, дисперсию и ковариацию составляющих (1.1.6) дает различные модели в рамках классических *линейных моделей*.

Если измерения динамические, то величины a и Δ_i зависят от параметров (например, номера или времени). В отличие от статических моделей, результаты в таких рядах не переставляются местами при обработке и анализе. Простейший (и достаточно распространенный) вид динамической модели имеет вид:

$$x_i = a \cdot i + b + \varepsilon_i. \quad (1.1.7)$$

Здесь i – номер измерения по порядку; a и b – коэффициенты линейной регрессии; ε_i – случайная составляющая динамического ряда (аналог Δ_i).

Модель такого рода называют *линейной трендовой* моделью. Если коэффициент a в модели равен нулю, то b в точности равен среднему арифметическому в случае принятия **нормального закона** распределения погрешностей.

Промежуточным между динамическими и статическими моделями будет класс, называемый моделями с *распределенными лагами порядка k* . Под *лагом* понимают переменные, влияние которых характеризуется *запаздыванием* на k величин.

Пусть имеется динамический ряд случайных величин $\delta(t)$ для которого выполняются следующие свойства:

$$\begin{cases} M(\delta(t)) = 0; \\ \text{cov}(\delta(t), \delta(t \pm \tau)) = \sigma_0^2, \end{cases}$$

при $\tau = 0$ и при $\tau \neq 0$. Ряд с такими свойствами называют *белым шумом*. Если вдобавок распределение его нормально, то это *гауссовский белый шум*. В моделях (1.1.5) – (1.1.7) случайная составляющая может быть белым шумом, но во многих случаях имеет более сложную структуру. Основные модели случайных составляющих ε_i можно свести к двум. В первой она является взвешенной суммой настоящего и прошлых значений белого шума, а во втором варианте случайные остатки представляют в виде классической линейной модели множественной регрессии. В ней независимые переменные – значения случайных составляющих во все **прошлые** моменты времени.

Модели типа первого вида называют моделями *скользящего среднего порядка k* – $СС(k)$, а второго – моделями *авторегрессии порядка k* , $АР(k)$. Наиболее распространенная и простая модель $АР(1)$

$$\varepsilon(t) = \alpha \varepsilon(t-1) + \delta(t) \quad (1.1.8)$$

называется *марковским процессом* и может использоваться при простейшей идентификации структуры погрешностей измерений. Здесь $\alpha = \rho$ – коэффициент *автокорреляции* между t и $t-1$ измерением ряда.

Цели и задачи теории погрешностей измерений. Так как результат измерения одной величины n раз дает неопределенность результата, возникает необходимость в получении однозначных количественных и качественных оценок этих результатов, оптимальных по какому-либо критерию. Очевидно, что критерий оптимальности связан с вероятностными характеристиками погрешностей измерений, которые как выяснено выше, носят случайный характер. Это относится ко всем видам измерений, но с разными индивидуальными особенностями. Таким образом, возникает ряд вычислительных задач в полной процедуре измерения, которые можно свести к следующим:

1. *Изучение закона возникновения распределения и связей погрешностей измерений.* Очевидно, что это необходимо для построения оптимальных количественных и качественных оценок разного рода измерений по критериям, основа которых зависит от вероятностных свойств погрешностей измерений.

2. *Построение и исследование моделей измерений, погрешностей и мешающих параметров.* Решение задач необходимо также для построения оптимальных оценок, но здесь вид оценок зависит от принятых моделей измерений и погрешностей, а также учета или не учета мешающих параметров (например, грубых ошибок или значимого систематического влияния).

3. *Отыскание вида и способа получения оптимальных количественных и качественных оценок по результатам измерений (на основе первых двух пунктов).* Изучение свойств позволяет построить более или менее достоверные модели, по которым и получают наилучшие оценки. Для стационарных измерений это статистическая теория оценивания, для динамических – теория фильтрация временных рядов.

4. *Решение задачи предрасчета условий измерений для получения оптимальной или заданной точности результата.* Варьируя условиями измерительного процесса, например, точностью измерений, составом, количеством, можно в достаточно широких пределах изменять точность полученных результатов. Поэтому и возникает задача спроектировать процедуру измерения для получения результатов заданного (или оптимального) качества – задача предрасчета точности.

Все перечисленные задачи решаются в рамках дисциплины, называемой теорией погрешностей измерений (ранее – теория ошибок наблюдений).

Историческая справка. Широкое введение в науку эксперимента с привлечением измерительных средств потребовало разработки и развития методов обработки результатов измерений. Поэтому неудивительно, что первые упоминания об элементах теории ошибок связаны с именами **Н. Коперника** (1473–1543) и **Г. Галилея** (1564–1642). Уже Н. Коперник производил подбор эмпирических кривых с учетом погрешностей измерений, а Галилей попытался сформулировать основные элементы теории ошибок исходя из требований практической астрономии.

После работ **И. Ньютона** (1643–1727) фундаментальной научной задачей явилась задача определения фигуры и размеров Земли по астрономо-геодезическим измерениям. Это привело к бурному развитию методов обработки результатов измерений. Основой методов уже была, модная в то время, теория вероятностей, математические основы которой были заложены **П. Ферма** (1601–1665), **Б. Паскалем** (1623–1662), **Х. Гюйгенсом** (1629–1695) и **Я. Бернулли** (1654–1705).

В 1722 г. **Р. Коутс** в своей работе «Оценка погрешностей в прикладной математике с помощью измерений плоского и сферического треугольника» рекомендо-

вал употреблять при обработке непосредственных измерений среднее арифметическое, дал определенное правило для учета *весов (масс измерений)*, которые ввел в 1700 г. Р. Коутс сравнивал общее среднее арифметическое (среднее взвешенное) с центром тяжести системы точек – результатов измерений. Рассуждения ученого носили, в основном, качественный характер.

В 1748 г. **Л. Эйлер** (1707–1783) впервые попытался построить *целесообразную комбинацию* результатов измерений для получения их оптимальной оценки. Кроме этого, в связи со своими астрономо-геодезическими вычислениями, **Эйлер** неоднократно решал переопределенную систему $a_i x + b_i y + l_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$ и предложил для этого первый из нескольких применявшихся в XVIII в. методов – метод минимакса $|v_{\max}| = \min$, где минимум берется относительно всех возможных решений системы.

В 1755 г. **Т. Симпсон** (1710–1761) в своей работе «*О преимуществе выбора среднего из некоторого числа наблюдений в практической астрономии*», принял для погрешностей измерений *дискретное треугольное распределение* вероятностей и доказал, что при таком распределении среднее арифметическое в вероятностном смысле предпочтительнее отдельного измерения. Это было *первой попыткой* обоснования широко используемого в астрономии среднего арифметического.

В этом же 1755 г. **Р. Боскович** (1711–1787), производя обработку градусных измерений для вывода параметров земного эллипсоида, предложил способ решения переопределенной системы уравнений под условием минимизации *суммы абсолютных уклонов поправок* v_i . Полагалось, что они подчинены некоторому закону распределения, независимы и не смещены. Подход описан в сочинении «*Астрономическое и географическое путешествие в Папскую область, 1770 г.*». Условия **Босковича**, в которых он видел теоретико-вероятностный смысл, оказались весьма целесообразными, были приняты многими учеными того времени, в том числе и **П. Лапласом**. Лишь в XIX в. от них временно отказались в пользу получившего универсальное применение и огромную популярность *метода наименьших квадратов*.

В своей работе «*Фотометрия*» в 1760 г. **И. Ламберт** (1728–1777) уже сформулировал *цели теории ошибок* (этот термин, по всей видимости, предложен тоже им) и впервые предложил *принцип максимального правдоподобия* для определения параметра сдвига одновершинной кривой распределения по результатам измерений. В своей работе 1765 г. «*Очерки о математике и ее применении*», Ламберт описал вероятностные свойства ошибок наблюдений, дал правило оценки их точности, уже различал случайные математические погрешности, подбирал параметры эмпирических кривых по точкам – наблюдениям, отягощенным погрешностями. Кроме этого, Ламберт в своей работе использует распределение, открытое в 1733 г. **А. Муавром** (1667–1754), названное в последствии *нормальным* и ставшее на долгие годы вероятностной основой классической теорией ошибок.

В 1774 г. **П. Лаплас** (1749–1827) в «*Мемуаре о вероятностях причин по событиям*», исходя из аналитического предположения (основанного лишь на «отсутствии причин» для противоположного предположения), принял для плотности распределения погрешностей измерений функцию вида $f(x) = \frac{m}{2} \cdot e^{-m|x|}$, $m > 0$. Функция впоследствии получила название *функции распределения Лапласа*, или *двухсторонней экспоненциальной*, была не заслуженно забыта и возрождена в середине XX в. в связи

с разработкой *робастных (помехоустойчивых)* методов оценивания. Лаплас предложил определять параметр t используя результаты опыта (астрономические наблюдения), исходя, по существу, из байесовской концепции (**Т. Байес** XVIII в.).

В 1775 г. **Ж. Лагранж** (1736–1813) в мемуаре «*О применении метода составления среднего из результатов большого числа наблюдений*» в полной мере анализирует случайные погрешности с использованием методов теории вероятностей. Им были решены ряд задач о вероятности погрешности в среднем арифметическом при *различных законах плотности* погрешностей измерений. При этом, **Лагранж** фактически пользовался *производящими функциями* (что делал ещё Муавр, а обосновал и разработал **А.М. Чебышев**).

Д. Бернулли в мемуаре «*Наиболее вероятное определение по нескольким расходящимся между собой наблюдениям и устанавливаемое отсюда наиболее правдоподобное заключение*» (1777 г.) вторично, после Ламберта, применил принцип максимального правдоподобия к отысканию абсциссы \bar{x} вершины кривой распределения погрешностей измерений. Автор начинает свой мемуар с сомнений в целесообразности применения «всеобщее принятой» арифметической середины, которая соответствует лишь случаю равной вероятности всех ошибок, т.е. «стрельбе вслепую». Для плотности вероятностей (у Бернулли – «шкалы вероятностей») был принят ряд условий, а в качестве кривой плотности принята верхняя полуокружность.

К 1795 г. относится детальное изучение **П. Лапласом** закона распределения, открытого **Муавром** (нормального закона), в 1802 г. он же развивает теорию обработки геодезических измерений на основе расширения подхода **Босковича**. Для исключения неоднозначности решения, кроме требования минимума суммы модулей поправок, требовалось также равенство нулю алгебраической суммы поправок – *метод наименьших модулей (МНМ)*.

В 1806 г. **А. Лежандр** (1752–1833) впервые опубликовал основы метода обработки результатов измерений под условием минимума *суммы квадратов поправок* в своей небольшой работе «*Новый метод определения орбит комет*». Ему же принадлежит и название *метод наименьших квадратов (МНК)*. Независимо от него, этим методом (без опубликования) пользовался с 1794 г. **К. Гаусс** (1777–1855) будучи студентом университета. Сооткрывателем метода наименьших квадратов есть все основания считать и американца **Адриана** (1808). Вероятностное обоснование МНК было дано Гауссом в 1809 г. в работе «*Теория движения небесных тел, вращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям*». Наиболее знаменитый труд Гаусса по обработке результатов измерений – «*Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам*» – вышел в 1821 г. Начиная с работ Гаусса, МНК получил необычайно широкую популярность и применение при обработке результатов измерений. Авторитет ученого был настолько высок, что это надолго затормозило развитие других методов обработки. И в настоящее время метод считается классическим, наиболее разработанным во всех аспектах и наиболее часто используемым.

Но уже во времена Гаусса в 1818 г. **Ф. Бессель** (1784–1846) заметил достаточно точно, что большие значения погрешностей измерений встречаются чаще, чем это требует нормальный закон распределения – вероятностная основа метода наименьших квадратов, но не «придал этому значения».

В 1886 г. астроном **С. Ньюкомб** (1835–1909) на основании анализа астрономических наблюдений опять приходит к выводу, что распределение реальных измерений

имеют *более тяжелые «хвосты»* по сравнению с нормальным. Для аппроксимации таких распределений он предложил использовать *смесь нескольких нормальных распределений* с различными дисперсиями и одинаковым средним. В качестве оценки сдвига использовалась линейная взвешенная оценка с весами вида $w_i = a / \max(|y_i - \bar{y}|, a)$. В этом же 1886 г. **Ф. Эджворт** (1845–1926) установил, что *выборочная медиана* может дать лучшую, по сравнению с выборочным средним, оценку в случае *коррелированных ошибок* измерений и, в сущности, возродил интерес к *МНМ-оценке Лапласа*.

Практическое отклонение от нормальности привело к появлению в 1894 г. *кривых К. Пирсона* (1819), которые можно рассматривать как «супермодель» по отношению к нормальной, так как она имеет два дополнительных параметра.

В 1910 г. **А. Пуанкаре** (1854–1912) предложил использовать как альтернативу среднему арифметическому *усеченное среднее арифметическое*, которое использовалось во Франции, начиная с XVIII в. В 1912 г. русский математик **А.А. Марков** (1856–1922) доказал теорему об эффективности *МНК-оценок* в классе *линейных оценок не зависимо от закона распределения* – известная *теорема Гаусса – Маркова*.

Весьма примечательна полемика **Р. Фишера** (1890–1962) и **А. Эддингтона** (1882–1944) в 1920 г. о целесообразности использования в качестве оценки точности результатов измерений *среднюю квадратическую погрешность* или *среднюю абсолютную погрешность*. Было достоверно показано, что для чистого нормального закона распределения эффективнее средняя квадратическая погрешность. Но уже для *загрязнения* нормального закона другим законом на величину *порядка 0,18%* эффективнее становится средняя абсолютная погрешность (*среднее абсолютное отклонение*). В 1922 г. Р. Фишер уже уверенно отмечал, что среднее арифметическое и дисперсия становятся *неэффективными* в некоторой области вокруг нормального закона распределения, ограниченного кривыми **Пирсона**. Таким образом, вопреки теореме Гаусса – Маркова об оптимальности МНК, *линейные оценки все же плохи* везде, кроме небольшой области в окрестностях нормального закона распределения. Высокую чувствительность классической процедуры оценивания на основе нормального закона к малым нарушениям их условий оптимальности подтвердил в 1931 г. **К. Пирсон**.

В 1935 г. **А. Эйткен** доказал свою знаменитую теорему, ставшую основой *обобщенного метода наименьших квадратов (ОМНК)*. В этом подходе на основе знания *ковариационной матрицы* измерений получались доброкачественные оценки для *коррелированных неравноточных* нормально распределенных результатов измерений.

Дж. Тьюки в конце 1950-х гг. было установлено, что смесь распределений в результатах наблюдений – скорее закономерность, чем случайность. Это приводит к значительным отклонениям от нормальности и делает, в ряде случаев, *МНК-оценки*, по меньшей мере, неэффективными. Все эти факты подвинули ученых и практиков к развитию нового класса устойчивых к такого рода отклонениям оценок. Эти оценки получили название *робастных (помехоустойчивых)*. В книге «Вклад в теорию вероятностей и статистику» 1960 г. **Тьюки** возродил интерес к альтернативным оценкам типа *урезанного среднего, винзоризованного среднего* и др. на новой базе.

Робастные оценки можно условно разделить на *составные* и *адаптивные, квазипараметрические* (знание закона распределения в его наихудшем варианте) и *непараметрические* – т.е. полученные совсем без учета знания вида закона распределе-

ния. К непараметрическим оценкам можно отнести предложенные в 1920 г. *Даниелем* (и забытые до середины века) оценки на основе сумм *линейно взвешенных порядковых статистик* – так называемые *L-оценки* – и предложенные в 1963 г. *Ходжесом* и *Леманом* *ранговые робастные оценки*, или *R-оценки*. В 1964 г. появилась работа *П. Хьюбера*, в которой был предложен *минимаксный подход* к построению робастных оценок – начало бурного развития неклассических методов оценивания.

1.2. Вероятностные аспекты теории погрешностей измерений

[Гауссовский вывод закона распределения погрешностей измерений.](#)

[Дополнительные свойства погрешностей.](#)

[Меры точности результатов измерений.](#)

[Другие законы распределения погрешностей измерений.](#)

[Гауссовский вывод закона распределения погрешностей измерений.](#) В основе первичных выводов о свойствах погрешностей наблюдений лежали *эмпирические исследования* больших рядов измерений какой-либо величины. Очевидно, необходимо предположение о достаточной *случайности* результатов (то есть достаточной неизвестности порождающей причины), что подразумевает *независимость* и отсутствие *грубых ошибок*. Анализ больших рядов погрешностей ε_i (например, *невязок* в триангуляции или *разностей двойных измерений*) позволил сделать следующие выводы:

1. Число положительных погрешностей примерно равно числу отрицательных.
2. Число малых по абсолютной величине погрешностей намного превышает число больших.
3. Погрешности по абсолютной величине не превосходят какого-то известного предела.
4. Погрешности группируются около определенного значения, к которому стремится среднее. Исходя из первого свойства, это должен быть ноль.

Основной и наиболее общей характеристикой погрешностей как случайных величин должен выступать *закон распределения*, например, в виде *функции плотности* $\varphi(\varepsilon)$, как характеристики *вероятностей* погрешностей. Из свойств 1–4 можно сделать **предварительные выводы** о виде функции плотности: функция *симметрична* (свойство 1), функция имеет ярко выраженный *максимум* и симметрично *спадает* к краям (свойство 2), функция должна быть *усеченной* по некому уровню (свойство 3), в качестве *центра группировки* (оценки математического ожидания) будет *ноль* (свойство 4). Кроме этого на основе всех свойств можно сделать вывод, что *вероятность погрешности зависит от её величины*. Как показывают обширные практические исследования, эти условия имеют место почти для всех, более или менее, длинных рядов погрешностей измерений.

Исходя из этих предпосылок, Гаусс получил вид распределения погрешностей измерений:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}. \quad (1.2.1)$$

В функции (1.2.1) величина h названа Гауссом *мерой точности*. Мы выразим её через известную нам (принятую на современном этапе) *меру точности – дисперсию*, (см. Приложение 1)

$$D(\varepsilon) = m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Подставив значение (1.2.1), после преобразований будем иметь вид $m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2h^2} = \frac{1}{2h}$, откуда $h = \frac{1}{m\sqrt{2}}$ – *мера точности Гаусса*. Окончательно функция плотности распределения погрешностей при принятых условиях 1 – 4 и что наиболее надежное значение определяемой величины есть *среднее арифметическое*, будет иметь вид

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{m^2}}. \quad (1.2.2)$$

Полученная функция носит название *закона Муавра – Гаусса – Лапласа* (или просто *закона Гаусса*). К. Пирсон назвал (1.2.2) *нормальным законом распределения*. График функции называют *кривой ошибок* или *гауссианой*.

Другой вывод закона распределения погрешностей указал в 1837 г. *Гаген (Хаген)* на основе получившей достаточно широкое распространение *аддитивной теории погрешностей*. По этой теории каждая погрешность ε_i *слагается* из некоторого числа малых, в отдельности *неизвестных* элементарных погрешностей δ_i , *равных* по величине, но бывающих как положительными, так и отрицательными. Эта теория, совместно с *центральной предельной теоремой Ляпунова* и работами Гаусса, определила на долгие годы мысль о *достаточно хорошем* соответствии погрешностей измерений закону Гаусса, а в качестве основных характеристик – *среднее арифметическое* и *среднюю квадратическую погрешность* как меру рассеивания результатов измерений.

Дополнительные свойства погрешностей. К свойствам кривой Гаусса, (см. Приложение 1), таким как *четность* ($\varphi(+\varepsilon) = \varphi(-\varepsilon)$), *положительность* ($\varphi(\varepsilon) > 0$), *максимум* ($\varphi(0) = \max$), *ордината перегиба* ($\varphi(\varepsilon_{пер.}) = \pm m$), можно добавить расширенное свойство:

– *произведение абсциссы на подкасательную в любой точке кривой ошибок есть величина постоянная и равная дисперсии (квадрату средней квадратической погрешности)*.

На основании *причисления* погрешностей результатов измерений к *нормальному закону распределения* и введенных ранее свойств погрешностей, таких как *симметричность* (1), *униmodalность* (2), *ограниченность* (3), *компенсация* (4), можно добавить еще некоторые свойства. Это свойство *независимости* – *средняя сумма попарных произведений двух рядов ε_i' и ε_i'' равна нулю при $n \rightarrow \infty$* :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon_i' \cdot \varepsilon_i'']}{n} = 0 \text{ или}$$

ковариация равна нулю; свойство *рассеивания*: если ряд измерений производится

в **одних** условиях, то для их случайных погрешностей имеет место предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \bar{m}^2 = D(\varepsilon).$$

Рассмотрим свойства *систематических погрешностей* [10]. Для наглядности представим систематические погрешности результатов измерений как сумму *постоянной* и *переменной* части $\theta = \bar{\theta} + \tilde{\theta}$. Систематические погрешности, как и случайные погрешности, подчиняются *закону ограниченности*, $|\theta| < \theta_{пред.}$, где $\theta_{пред.}$ – положительная постоянная, обусловленная условиями измерений. Свойством *компенсации систематические погрешности не обладают*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\theta]}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\bar{\theta}]}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\tilde{\theta}]}{n} = \bar{\theta} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\tilde{\theta}]}{n}.$$

Даже если постоянная составляющая $\bar{\theta}$ **отсутствует**, второе слагаемое также может быть совсем **не равным** нулю. Все зависит от вида функции этой составляющей. Можно показать, что в этом случае на основании свойства *ограниченности*

$\left| \frac{[\theta]}{n} \right| \leq \theta_{пред.}$. Для систематических погрешностей **не выполняется** и свойство *независимости*

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\theta' \cdot \theta'']}{n} \neq 0$, но справедливо неравенство

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\theta' \cdot \theta'']}{n} \right| \leq \theta'_{пред.} \cdot \theta''_{пред.}$$

Нет основания утверждать, что систематические погрешности имеют свойства, подобные свойству *рассеивания* для случайных погрешностей, но можно показать, что существует неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\theta^2]}{n} \leq \theta_{пред.}^2.$$

Систематические погрешности, являясь закономерными и зависящими от условий измерений, **не подчиняется** свойствам *симметричности* и *уни-modalности* для случайных погрешностей. Случайные погрешности, подчиняясь статистическим закономерностям, невозможно устранить из единичных результатов наблюдений. Влияние этих погрешностей можно лишь ослабить оптимальной организацией измерений и обработки. Основные свойства случайных погрешностей отчетливо проступают при обработке лишь достаточно обширных рядов погрешностей.

Систематические погрешности, починяясь физическим закономерностям, выражаемым *аналитически*, могут быть устранены в единичных результатах измерений, путем введения соответствующих поправок (на основе исследования вида функции),

или путем такой организации процесса измерений, чтобы систематическая погрешность была в основном устранена.

Меры точности результатов измерений. Понятие точности измерений (погрешности измерений) как *оценка качества* должно основываться на понятии условий измерений и **не может быть описано** погрешностью единичного результата измерения. О качественной оценке результата измерений судят по тому, как далеко могут уклоняться при данных условиях измерений их результаты от действительного значения измеряемой величины. Причем наличие избыточных измерений, позволяя выполнить качественную оценку, требует *усреднения* результата, по какому-либо правилу. Это дает возможность, в общем, характеризовать *разброс (рассеивание)* результатов измерений, вокруг его наиболее надежного значения. Некоторые меры рассеивания, на основе «взвешивания» *функцией плотности*, из теории вероятности, были известны еще Гауссу:

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (1.2.3)$$

$$\tilde{I} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon| \varphi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.2.4)$$

Наибольшее распространение в классической теории погрешностей получила формула (1.2.3), которая, во-первых, для *нормального закона распределения*, есть чистая *дисперсия*, во-вторых, при замене математического ожидания на усреднение по теореме Чебышева переходит в известную *формулу средней квадратической погрешности Гаусса* для оценки меры рассеивания. При этом, требуется **отсутствие** значимого *систематического влияния*. Взяв математическое ожидание, раскрывая квадрат и используя свойства *математического ожидания* (см. Приложение 1) получаем

$$M(\theta + c)^2 = M(\theta^2 + 2\theta c + c^2) = M(\theta^2).$$

В формуле было учтено, что $M(\theta) = M(c^2) = 0$ – *отсутствие систематических погрешностей*. Тогда, замена математического ожидания на сумму дает *формулу Гаусса*:

$$m = \sqrt{\frac{\boxed{\varepsilon^2}}{n}}. \quad (1.2.5)$$

Замена математического ожидания на сумму и замена усреднения по бесконечному интервалу на усреднение по весьма **небольшому** интервалу, делают формулу (1.2.5) весьма **чувствительной** к числу n элементов в ряде, то есть *асимптотической*. Кроме того, очень существенна степень корректности предположения об **отсутствии** *закономерного сдвига (систематики)*. Задачу *надежности средней квадратической погрешности* (1.2.5) в некоторой степени решает формула *погрешности*, которая показывает *степень доверия* к оценке:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}. \quad (1.2.6)$$

Очевидно, что для использования (1.2.5) необходимо знать истинное значение определяемой величины (или *истинные погрешности*), что, чаще всего, невозможно. Поэтому возникает задача оценить величину m по результатам измерений, **не зная** истинного значения определяемой величины. Эта задача была решена **Бесселем**. Для этого запишем вид истинных погрешностей $\Delta_i = x_i - a$. Мету рассеивания будем искать относительно среднего арифметического, которое является оценкой математического ожидания для *нормального закона распределения*. Запишем отклонения результатов измерений от *среднего арифметического* $v_i = x_i - \bar{x}$. Выразим отсюда значения x_i и подставим в формулу *истинной погрешности*

$$\Delta_i = v_i + x_i - a = v_i + \delta.$$

Возведем обе части формулы в квадрат и **просуммируем**, то есть воспользуемся формулой (1.2.5) для оценки меры рассеивания

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = m^2 = \frac{[v^2]}{n} + 2 \cdot \frac{[v]}{n} \cdot \delta + \frac{n\delta^2}{n}. \quad (1.2.7)$$

Не сложно показать, что второе слагаемое равно нулю, так как по *лемме Гаусса* $[v] = 0$:

$$\begin{cases} v_1 = x_1 - \bar{x} \\ \dots\dots\dots \\ v_n = x_n - \bar{x} \end{cases} .$$

$$[v] = [x] - n\bar{x} = [x] - n \frac{[x]}{n} = 0$$

Кроме этого, величина δ как отклонение среднего арифметического от истинного значения, является *погрешностью среднего арифметического*, которую легко получить на основе свойства дисперсии:

$$D(\bar{x}) = m_{\bar{x}}^2 = D\left(\frac{x_1}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot D([x]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D(x) = \frac{m^2}{n}, \quad (1.2.8)$$

и тогда выражение (1.2.7) примет вид $m^2 = \frac{[v^2]}{n} + \frac{m^2}{n}$, откуда

$$m^2 - \frac{m^2}{n} = m^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{[v^2]}{n}.$$

Окончательно *средняя квадратическая погрешность через отклонения от среднего* описывается формулой

$$m = \sqrt{\frac{v^2}{n-1}}, \quad (1.2.9)$$

которая получила название «*формула Бесселя*». Мера надежности выражения (1.2.9) вычисляется по формуле

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \quad (1.2.10)$$

Если для оценивания *меры рассеивания* используется вид (1.2.4) с теми же заменами, то получим так называемую *среднюю абсолютную погрешность (средняя погрешность)*, достаточно часто используемую в геодезии:

$$\mathcal{G} = M(|\varepsilon|) \approx \frac{\Gamma_{1-\Gamma}}{\Gamma}. \quad (1.2.11)$$

Еще одна величина, используемая в качестве *меры точности* результатов измерений, – это *срединная (вероятная) погрешность r* – такая величина, **большие и меньшие** которой по модулю погрешности в ряде измерений **равновероятны**:

$$P(|\Delta| \leq r) = 0,5. \quad (1.2.12)$$

Для ее нахождения (из определения) строят *вариационный ряд абсолютных значений* величины, где **среднее** значение в ряду есть искомая погрешность r при **нечетном** числе элементов. Если число элементов **четное**, то в качестве r принимаем **среднее из двух значений** в середине абсолютного вариационного ряда. Графически эти значения для нормального закона распределения представлены на рисунке 1.2.1.

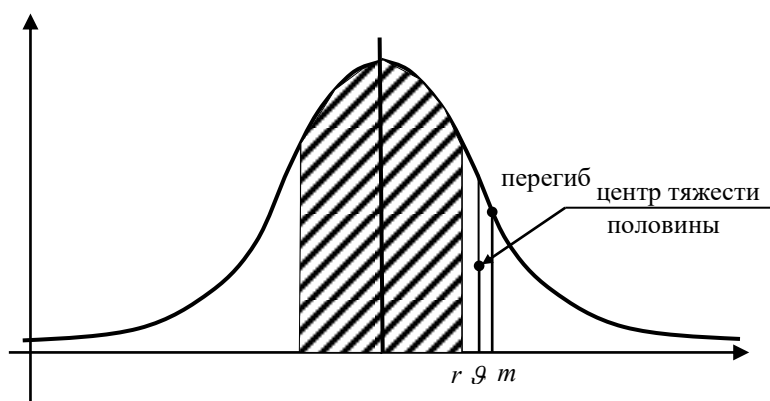


Рисунок 1.2.1. – Графическое представление мер точности

Здесь *средняя квадратическая погрешность m* – ордината точки перегиба закона распределения; *средняя абсолютная погрешность \mathcal{G}* – ордината центра тяжести под половиной кривой распределения; *вероятная погрешность r* – ордината полови-

ны симметричного отрезка, для которого полная площадь равна половине от функции плотности распределения.

Существует несложная связь между тремя видами погрешностей. Обозначим .

Тогда $m \frac{|\varepsilon|}{m} = t$ математическое ожидание от t для нормального закона распределения

$M(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$. Интеграл является **табличным**, и равен 1. Тогда на основе (1.2.11) имеем

$$M\left(\frac{|\varepsilon|}{m}\right) = \frac{M(|\varepsilon|)}{m} = \frac{\vartheta}{m} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Окончательно

$$m = \vartheta \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1,2533... \cdot \vartheta. \quad (1.2.13)$$

Для вероятной погрешности из (1.2.22) и с учетом нормального закона распределения, нормируя ее как и выше, имеем $\Phi\left(\frac{r}{m}\right) = 0,5$. Здесь $\Phi(*)$ – функция **Лапласа** (см. приложение 1). Для значения 0,5 (или *нормированной функции Лапласа* для значения 0,25) находим, что $\frac{r}{m} = 0,6745...$, а окончательно

$$m = 1,4825... \cdot r. \quad (1.2.14)$$

Все три меры достаточно часто используются при оценивании качества вероятностных процессов и известны со времен Гаусса. Но стоит иметь ввиду, что это чисто **теоретические** соотношения для точного нормального закона распределения. Это обстоятельство иногда используют для быстрого, но достаточно приближенного оценивания ряда погрешностей на степень **соответствия** нормальному закону распределения с этой стороны поведения результатов измерений.

Кроме перечисленных выше величин в качестве *меры точности* используют оценку *коэффициента вариации*

$$V = \frac{m}{\bar{x}} \cdot 100\%. \quad (1.2.15)$$

и значение *полуразмаха*

$$R = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}. \quad (1.2.16)$$

Все перечисленные выше погрешности носят название «*абсолютных*». Кроме них часто используют *относительные* погрешности для некоторой измеренной вели-

чины x . Это дробь с числителем 1, которая зависит от соответствующей абсолютной погрешности: $\left\{ \frac{m}{x}, \frac{r}{x}, \frac{g}{x}, \frac{R}{x}, \frac{\Delta}{x} \right\} = \frac{1}{N}$. Эти величины называют «средняя квадратическая относительная погрешность», «вероятная относительная погрешность» и т.д. Знаменатель N округляют **до двух значащих цифр**.

Кроме этих оценок, используют *предельные абсолютные* и *относительные* погрешности, в которых добавляется множитель в виде вероятностного коэффициента распределения Гаусса или Стьюдента. Наиболее часто используемые коэффициенты это 2, 2.5, 3 для вероятностей 0.95, 0.99 и 0.9973 применительно к нормальному закону распределения.

В последнее время средняя квадратическая погрешность m все чаще заменяется термином «стандартное отклонение» (англ. *standard division, SD*) и обозначается как $\hat{\sigma}$ (оценка стандарта).

Другие законы распределения погрешностей измерений. Еще с XIX в. было известно, что не всегда результаты измерений подчинены достаточно хорошо *нормальному закону распределения*. Так как в этом случае для *оптимальных* оценок (например, *методом максимального правдоподобия*) необходимо знать законы распределения, были введены некоторые другие модели распределений погрешностей измерений.

Очевидно, исторически первыми для этих целей были введены *кривые Пирсона* и *ряды Эджворта*. Для первых плотность широкого класса *непрерывных распределений вероятностей* определяется как решение дифференциального уравнения вида

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{x + a_1}{a_2 + a_3x + a_4x^2} \cdot \varphi(x) \quad (1.2.17)$$

или

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) = -\frac{x + a_1}{a_2 + a_3x + a_4x^2}, \quad (1.2.17a)$$

содержащего **4** параметра. Каждый параметр можно выразить через первые четыре *начальных* или *центральных момента*. Как частный случай выражение (1.2.17.а) **включает** и *нормальный закон распределения*. Целесообразно использовать для *асимметричных распределений*.

Ряды Эджворта вводились для *стандартизованной случайной величины* $z = \frac{x - M(x)}{\sigma_x}$, которая отличается от нормальной достаточно большой *асимметрией* и *эксцессом*, с помощью формулы

$$f(z) = \varphi_u(z) - \frac{1}{3!} \cdot A \cdot \varphi_u'''(z) + \frac{1}{4!} \cdot E \cdot \varphi_u^{(4)}(z) - \dots, \quad (1.2.18)$$

где $\varphi_u(z)$ – *плотность нормального закона распределения* для стандартизованной случайной величины;

A и E – *асимметрия* и *эксцесс* случайной величины.

Формула **дает поправочные члены**, связанные с A и E , при замене плотности $f(z)$ на плотность $\varphi_u(z)$. Почти такие же ряды были получены **Грамом** (1883 г.) и **Шарлье** (1914 г.). Поэтому их называют также рядами **Грама – Шарлье**.

Если из нормальной совокупности x со средним a и дисперсией σ^2 **исключить** все события, для которых $x < x_0$, то будем иметь **односторонне усеченное нормальное распределение**, где $\varphi(x) = \Phi(x) = 0$ при $x < x_0$ и

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot (1 - \tau)} \cdot \varphi_u\left(\frac{x - a}{\sigma}\right), \quad \Phi(x) = \frac{\Phi_u\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) - \tau}{(1 - \tau)}, \quad (x \geq x_0), \quad (1.2.19)$$

где $\tau = \Phi_u\left(\frac{x_0 - a}{\sigma}\right)$ – **степень усечения**, равная вероятности $P(x < x_0)$ в исходном распределении.

Ещё один достаточно **распространенный** класс моделей распределений погрешностей измерений – **экспоненциальный**, вида

$$P(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)} \cdot \exp\left(-\left|\frac{x - X_u}{\lambda\sigma}\right|^\alpha\right), \quad (1.2.20)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$;

σ – **стандарт рассеивания**;

X_u – **центр рассеивания**;

$\Gamma(z)$ – **гамма-функция Эйлера**;

α – некоторая характерная для данного распределения постоянная – его **показатель степени** (**В. Гентлеман**, 1965 г., **И.А. Назаров** 1965 г. [15]). При $\alpha = 1$ это **распределение Лапласа**, $\alpha = 2$ – **нормальное Гаусса**, при $\alpha = \infty$ – **равномерное**. При этом, показатель степени может быть **однозначно выражен**, например, через **эксцесс** из уравнения

$$E = \frac{\Gamma(1/\alpha)\Gamma(5/\alpha)}{|\Gamma(3/\alpha)|^2}. \quad (1.2.21)$$

Наряду с «чистыми» распределениями (как показал в 1960-х гг. **Тьюки**), достаточно часто в качестве моделей погрешностей измерений необходимо принимать разного рода **комбинации** стандартных законов. К первой такой комбинации можно отнести модель **Ньюкомба** из комбинации **двух нормальных законов с одинаковым центром распределения и разными дисперсиями**. Эта модель (а также некоторые её разновидности) была названа Тьюки моделью «**засорения**» **нормального закона** и благодаря работам его группы получила широкое распространение при моделировании

закона распределения погрешностей реальных процессов. Первичная модель имела вид

$$f(x) = (1 - \varepsilon) \cdot f(x; a, \sigma_x^2) + \varepsilon \cdot f(x; a, \sigma_z^2), \quad (1.2.22)$$

где ε – небольшая доля «загрязнения» исходного закона $f(x; a, \sigma_x^2)$ законом $f(x; a, \sigma_z^2)$, и $\sigma_x^2 < \sigma_z^2$.

Модель (1.2.22) с более слабыми условиями на функцию засорения известна как модель **Тьюки – Хьюбера** [1]:

$$f(x) = (1 - \varepsilon) \cdot f(x; a, \sigma^2) + \varepsilon \cdot h(x; a, \sigma^2), \quad (1.2.23)$$

где h – любая симметричная функция плотности распределения неизвестного вида.

Практически все рассмотренные **комбинации законов распределения** и многие другие можно получить из *общей модели смеси* распределений заданного типа

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \pi_j \cdot f_j(x; a_j, \theta_j), \quad (1.2.24)$$

где f – функция плотности с соответствующими характеристиками;

π_j – априорная вероятность появления в случайной выборке измерения с законом распределения f_j .

Достаточно часто на практике для описания модели погрешностей измерений используют *композиции основных законов распределения* для более гибкого и адекватного описания. К наиболее распространенным композициям можно отнести композицию *нормального и равномерного законов, равномерного и Лапласа* и некоторые другие.

1.3. Оценка точности функций

Основные задачи.

Определение математического ожидания функции.

Прямая задача теории погрешностей измерений.

Совместный учет случайных и систематических погрешностей. Примеры.

Некоторые методы численного оценивания погрешности функции.

Оценка точности вектор-функции. Примеры.

Основные задачи. Математический аппарат теории вероятностей – *аппарат числовых характеристик*, весьма удобен для нахождения основных числовых характеристик функций случайных величин. В первую очередь по числовым характеристикам аргументов отыскиваются оценки математического ожидания и дисперсии, оставляя при этом в стороне вопрос закона распределения погрешностей измерений (см. первое свойство математического ожидания и второе свойство дисперсии). Но такие методы непосредственного определения числовых характеристик применимы главным образом к **линейной** или **почти линейной** функции. Если какая-либо функция не-

линейная на всем диапазоне аргументов, то ее **возможно линеаризовать** (заменить линейной) в некоторой узкой области изменения аргументов. При этом функция должна быть *непрерывна* и *дифференцируема*. Очевидно, что определение математического ожидания функции не обязательно требует линеаризации, но есть ряд задач, связанных с *исследованием погрешностей функции*, которые могут быть решены только через линеаризацию.

В теории погрешности измерений выделяют следующие задачи, связанные с оценкой точности функций:

1. Оценка точности функций по погрешностям аргументов.
2. Оценка точности вектор-функции по погрешностям аргументов.
3. Предрасчет точности аргументов функции при заданном значении погрешности функции.
4. Предрасчет точности аргументов вектор-функции при заданном значении погрешностей (и связей) вектор-функции.

Задачи 1 и 2 называют *прямой простой* и *прямой сложной* задачами теории погрешностей измерений, а задачи 3 и 4 – задачами *обратной простой* и *обратной сложной* задачей теории погрешностей измерений, или задачами *проектирования*.

Определение математического ожидания функции. Задача определения математического ожидания любой нелинейной функции достаточно хорошо может быть решена на основе десятого свойства математического ожидания (см. приложение 1)

$$MO(f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \approx f(MO(x_1), MO(x_2), \dots, MO(x_n)).$$

При этом существуют формулы **уточнения** оценки математического ожидания нелинейных функций, на основе **разложения** функции в ряд Тейлора до k -го порядка малости (см. приложение 1), но используются достаточно редко.

Прямая задача теории погрешностей измерений. Рассмотрим прямую простую задачу теории погрешностей измерений, которая ставится следующим образом: пусть задана функция произвольного вида $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Необходимо найти степень рассеивания значений функции при заданных значениях степени рассеивания аргументов x_i . Для этого, как отмечалось выше, в первую очередь необходимо привести функцию к более простому виду, разложив, например, на слагаемые в ряд Тейлора в окрестностях набора каких-либо точек $MO(x_1), MO(x_2), \dots, MO(x_n)$

$$\begin{aligned} Y &\approx f(MO(x_1), MO(x_2), \dots, MO(x_n)) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot (x_i - MO(x_i)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \cdot (x_i - MO(x_i))^2 + \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \cdot (x_i - MO(x_i))(x_j - MO(x_j)) = \\ &= f(MO(x_1), \dots, MO(x_n)) + \sum_{i=1}^n f_i \cdot \overset{0}{X}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_{ii} \cdot \left(\overset{0}{X}_i \right)^2 + \sum_{i < j} f_{ij} \cdot \overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(MO(x_1), \dots, MO(x_n)) + \\
&+ (f_1 \dots f_n) \cdot \begin{bmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_1 \end{smallmatrix} \right) \\ \vdots \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_1 \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \right] (f_1) \\ \vdots \\ \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \right] (f_n) \end{bmatrix} \\
MO(y) &\approx f(MO(x_1), \dots, MO(x_n)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right) \cdot D(x_i) = \\
&= f(MO(x_1), \dots, MO(x_n)) + \tag{1.3.1} \\
&+ (f_1 \dots f_n) \cdot \begin{bmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_1 \end{smallmatrix} \right) \\ \vdots \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_1 \end{smallmatrix} \right) \dots \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \right] (f_1) \\ \vdots \\ \left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ X_n \end{smallmatrix} \right) \right] (f_n) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Взяв для начала в ряде (1.3.1) первые два члена (то есть заменив функцию $f(X)$ ее линейной частью в некоторой окрестности n -мерной точки $(MO(x_1), MO(x_2), \dots, MO(x_n))$), применим к ней 1, 3 и 8 свойства дисперсии (см. приложение 1):

$$\begin{aligned}
D(c) &= 0, \quad D\left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot D(X_i), \\
D(X + Y) &= D(X) + D(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y).
\end{aligned}$$

Тогда для оценки меры рассеивания функции в виде дисперсии имеем:

$$\begin{aligned}
\hat{D}_y &= \hat{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot D(x_i) + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \cdot K_{ij} = \\
&= \sum_{i=1}^n (f_i)^2 \cdot D(x_i) + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot K_{ij} = \tag{1.3.2} \\
&= (f_1 \dots f_n) \cdot \begin{bmatrix} D(x_1) & \dots & \vdots, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \dots & x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (f_1) \\ \vdots \\ (f_n) \end{bmatrix} = f^T
\end{aligned}$$

Формула (1.3.2) носит название закона переноса ошибок (фундаментальная теорема переноса ошибок, англ. *law error propagation*) и является основной при расчете точности косвенных измерений (функций от измерений).

Если результаты измерений не коррелированы, ковариационная матрица K_x имеет диагональный вид, а вторая часть формулы (1.3.2) пропадает.

Возможно уточнение формул, оставляя *квадратичный* член для оценки *математического ожидания* функции и *уточненной* дисперсии некоррелированных результатов измерений [13].

Совместный учет случайных и систематических погрешностей. Пусть необходимо учесть одновременно и случайную, и систематическую составляющие при оценке точности функции общего вида $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если известны оценки меры случайного разброса аргументов в виде средней квадратической погрешности m_i и систематические погрешности аргументов θ_i . В этом случае от функции берут *полный дифференциал*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n, \quad (1.3.3)$$

и **заменяют** дифференциалы df и dx_i на соответствующие *малые приращения* ε_y и ε_i . Из математического анализа известно, что для линейной (почти линейной) функции отличие между ними небольшое. Учитывая, что приращение функции имеет *случайную* Δ_i и *систематическую* θ_i составляющие $\varepsilon_y = \Delta_y + \theta_y$, для (1.3.3) имеем [10]:

$$(\theta_y + \Delta_y) = f_1 \cdot (\theta_1 + \Delta_1) + \dots + f_n \cdot (\theta_n + \Delta_n). \quad (1.3.4)$$

Разделив в (1.3.4) *случайные* и *систематические* составляющие, получим

$$\begin{cases} \theta_y = f_1 \cdot \theta_1 + \dots + f_n \cdot \theta_n; \\ \Delta_y = f_1 \cdot \Delta_1 + \dots + f_n \cdot \Delta_n. \end{cases} \quad (1.3.5)$$

Первая формула в (1.3.5) учитывает *систематическую составляющую*, а во второй для учета *случайной составляющей* необходимо знать случайные погрешности Δ_i , что редко когда практически возможно. В этом случае переходят от конечных приращений Δ_i к *средним квадратическим погрешностям* m_i следующим образом.

Считаем, что каждый из аргументов x_i **измерен много раз**. В результате этого имеем много различных значений Δ_{y_i} . Тогда, **возводим в квадрат** левую и правую части второго уравнения (1.3.5) и суммируем. Используя свойство *рассеивания* случайных величин для функции и аргументов,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[\Delta_y^2]}{n} \right) \rightarrow m_y^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[\Delta_i^2]}{n} \right) \rightarrow m_i^2 \quad \text{и}$$

свойство *независимости* $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[\Delta_i \Delta_j]}{n} \right) \rightarrow \text{cov}(\Delta_i, \Delta_j)$, получаем формулу (1.3.5) для

некоррелированных результатов измерений.

Таким образом, при **одновременном** влиянии случайных и систематических погрешностей для оценки точности имеем:

$$m_{\text{общ.}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[(\theta + \Delta)^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n} + 2\frac{[\theta\Delta]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\sigma^2 + m^2}.$$

Здесь по свойствам случайной величины $\frac{[\theta\Delta]}{n} \rightarrow 0$, $\sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}} = \sigma$ – средняя квадратическая систематическая погрешность, **но не стандарт**, так как для систематических погрешностей **не существует** свойства рассеивания; $m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$ – случайная средняя квадратическая погрешность. Несложно показать, что этот же вид будет иметь и оценка точности функции, отягощенная случайными Δ_i и систематическими погрешностями θ_i . Тогда для средних квадратических погрешностей также получим

$$m_f = \sqrt{m_{\Delta}^2 + m_{\theta}^2}, \quad (1.3.6)$$

где m_{Δ} – случайная средняя квадратическая погрешность функции из (1.3.2),
 m_{θ} – систематическая погрешность функции из (1.3.5).

Считается, что если $m_{\Delta} > 3m_{\theta}$ (или $m_{\Delta}/m_{\theta} > 3$), то систематической составляющей **можно пренебречь** (это равносильно тому, что произведено 171 измерение и искажение точности составляет не более 5%) [10].

Метод взятия полного дифференциала функции (1.3.3) и переход от дифференциалов к средним квадратическим погрешностям используется достаточно часто для поиска погрешностей неявных некоррелированных функций.

Пример 1. Пусть имеем функцию вида $f = S = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, с погрешностями элементов $x \pm m_x$, $y \pm m_y$, x_0, y_0 – исходные безошибочные координаты. По (1.3.5) имеем

$$m_f^2 = \frac{(x - x_0)^2}{S^2} \cdot m_x^2 + \frac{(y - y_0)^2}{S^2} \cdot m_y^2.$$

Для функции $S^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ полный дифференциал есть

$$2S \cdot dS = 2(x - x_0)dx + 2(y - y_0)dy.$$

Переход к средним квадратическим погрешностям дает

$$(2S)^2 \cdot m_s^2 = (2(x - x_0))^2 \cdot m_x^2 + (2(y - y_0))^2 \cdot m_y^2$$

или, после элементарных преобразований, полученную выше формулу.

Пример 2. Если функция представлена как произведение, то возможно, прологарифмировав её и взяв полный дифференциал, перейти к средним квадратическим погрешностям. Пусть есть функция вида $V = a \cdot b \cdot c$, тогда

$$\ln(V) = \ln(a) + \ln(b) + \ln(c), \quad \frac{dV}{V} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} + \frac{dc}{c},$$

а переход имеет вид $\frac{m_V^2}{V^2} = \frac{m_a^2}{a^2} + \frac{m_b^2}{b^2} + \frac{m_c^2}{c^2}$. Таким образом, получаем относительную среднюю квадратическую погрешность функции V . Отсюда легко получить, при необходимости, формулу абсолютной средней квадратической погрешности m_V .

Из наиболее частых стандартных примеров использования процедуры определения точности косвенных измерений рассмотрим следующие. Пусть требуется определить точность величины x , измеренной n приемами. Наиболее надежное значение такой величины есть среднее арифметическое $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$. Тогда используя (1.3.2) имеем

$$m_f^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m_1^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot m_n^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} r_{ij} m_i m_j =$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left([m^2] + 2 \sum_{i < j} r_{ij} m_i m_j \right) = f K_x f^T \quad (1.3.7)$$

где f – вектор-строка из частных производных по аргументам x_i от функции $f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}$;

K_x – оценка ковариационной матрицы измерений, где по диагонали оценки дисперсий измерений m_i^2 , а не диагональные элементы – оценки ковариаций $\text{cov}(x_i, x_j) = r_{ij} \cdot m_i \cdot m_j$, r_{ij} – коэффициент корреляции между i -м и j -м измерениями.

Если результаты измерений **независимы**, то матрица K_x приобретает **диагональный вид** и пропадает вторая часть в (1.3.7), так как $r_{ij} = 0$. Тогда имеем

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot [m^2]. \quad (1.3.7a)$$

Если все погрешности m_i^2 **одинаковы** и равны m , то из (1.3.7a) имеем

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot m^2 = \frac{m^2}{n} \quad (1.3.7b)$$

известную формулу оценки величины в виде дисперсии из n измерений (или, что одно и то же, оценку среднего арифметического) при классических предположениях однородности и независимости.

Следует учесть, что обычно используют корень из дисперсии – среднюю квадратическую погрешность. Рассматриваются также варианты равенства всех коэффициентов корреляции r_{ij} , равенства m_i при разных r_{ij} и другие, которые легко получаются из (1.3.7).

Если для задачи **оценки** среднего арифметического, результаты измерения отягощены как *случайными*, так и *систематическими* погрешностями, то, исходя из (1.3.5), (1.3.6) и (1.3.7), имеем

$$m_{\bar{x}}^2 = \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot \left([m^2] + 2 \sum_{i<j} r_{ij} \cdot m_j \cdot m_i \right) \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot [\theta]^2 \right\} = , \quad (1.3.8)$$

$$= fK_x f^T + fK_\theta f^T = fK f^T$$

где K_θ – матрица (**не ковариационная!**), полученная как $K_\theta = \theta^T \cdot \theta$, где θ – вектор-строка, состоящая из θ_i в (3.3.5);

$K = K_x + K_\theta$ – **суммарная** ковариационная матрица.

Если в (1.3.8) все m_i^2 примерно равны, r_{ij} равны нулю, и все θ_i также примерно равны, то

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{m^2}{n} + \left(\frac{1}{n} \right)^2 \cdot n^2 \cdot \theta^2 = \frac{m^2}{n} + \theta^2 . \quad (1.3.8a)$$

Формула (1.3.8a) также является **классической** и используется достаточно широко. Для этой формулы *принцип ничтожных влияний* предполагает **пренебрежимо малое** влияние систематической составляющей, если [5]

$$\theta < \frac{1}{5} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad \frac{m_{\bar{x}}}{\theta} > 5. \quad (1.3.9)$$

Найдем среднюю квадратическую погрешность суммы углов в n -угольнике. В этом случае функция $f = \beta_1 + \dots + \beta_n$. Из (1.3.2) имеем

$$m_f^2 = (1)^2 \cdot m_1^2 + \dots + (1)^2 \cdot m_n^2 + 2 \sum_{i<j} 1 \cdot 1 \cdot r_{ij} \cdot m_i \cdot m_j =$$

$$[m^2] + 2 \sum_{i<j} r_{ij} \cdot m_i \cdot m_j = fK_x f^T \quad (1.3.10)$$

Здесь $f = (1 \ 1 \ \dots \ 1)$.

Если все погрешности измерений углов примерно **одинаковы** и **равны m** , то

$$m_f^2 = n \cdot m^2 + 2 \cdot m^2 \cdot \sum_{i<j} r_{ij} = m^2 \cdot \left(n + 2 \sum_{i<j} r_{ij} \right). \quad (1.3.10a)$$

При некоррелированных измерениях из (1.3.10a) имеем **классическую формулу** средней квадратической погрешности суммы углов в n -угольнике:

$$m_{f=\Sigma} = m \cdot \sqrt{n} . \quad (1.3.10б)$$

Если в (1.3.10а) все коэффициенты корреляции r_{ij} **примерно одинаковы** и равны r , то

$$m_f^2 = m^2 \left(n + 2 \cdot r \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right) = m^2 \cdot n \cdot (1 + r \cdot (n+1)) = \hat{D}_f \cdot (1 + r \cdot (n+1)). \quad (1.3.10в)$$

Здесь \hat{D}_f – дисперсия функции из (1.3.10б). При учете **одновременного** влияния случайных и систематических погрешностей из (1.3.5), (1.3.6) и (1.3.10) имеем (см. (1.3.8))

$$m_f^2 = \left([m^2] + 2 \cdot \sum_{i < j} r_{ij} m_i m_j \right) + [\theta]^2 = fK_x f^T + fK_\theta f^T = fKf^T. \quad (1.3.11)$$

При **равенстве** между собой m_i и θ_i соответственно, получим

$$m_f^2 = m^2 \left(n + 2 \cdot \sum_{i < j} r_{ij} \right) + n^2 \theta^2, \quad (1.3.11а)$$

а при всех $r_{ij} = 0$

$$m_f^2 = nm^2 + n^2 \theta^2 = n^2 \left(\frac{m^2}{n} + \theta^2 \right). \quad (1.3.11б)$$

Как видим, погрешность функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ в самом общем виде может быть определена как

$$m_f^2 = fKf^T, \quad (1.3.12)$$

где f – вектор-строка частных производных от функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$,

K – ковариационная матрица, в общем случае имеющая **сложную структуру**.

Если оценивается влияние только случайных погрешностей, то $K = K_x$ – ковариационной матрице **измерений** известной структуры. Причем на основании **теоремы Айткена** (см. ниже) оценка будет эффективней даже при неравноточности и коррелированности результатов измерений (при условии, что эти величины достаточно хорошо **известны** и **учтены** в ковариационной матрице K_x). Если учитываются случайные и систематические влияния, то матрица $K = K_x + K_\theta$ (см. (1.3.8)). Если исходные данные также не безошибочны, то, дисперсия (или ковариационная матрица) суммарно входит в общую оценку.

Пример 3. При вычислении погрешности k -ого дирекционного угла по углам поворота с погрешностью исходного дирекционного угла m_{α_0} , полная формула (1.3.6) будет

$$m_f = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \theta^2 + m_y^2},$$

или без значимого систематического влияния

$$m_f = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + m_y^2},$$

где m_y – средняя квадратическая погрешность k -го дирекционного угла без учета дополнительных влияний.

Некоторые методы численного оценивания погрешности функции. Во всех формулах оценки точности функции необходимо получать значения частных производных

$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. При этом в некоторых случаях из-за громоздкости аналитических вычислений

или не слишком высоких требований к точности возможно заменить аналитические вычисления производных на их численный аналог. Для этого можно использовать обычные формулы численного дифференцирования, например, вида [3]

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}, \quad (1.3.13)$$

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x + \Delta) - f(x - \Delta)}{2\Delta}, \quad (1.3.14a)$$

и другие, известные из численных методов математического анализа. На этой основе формулы численного дифференцирования для **многомерной** функции будут иметь вид:

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta}, \quad (1.3.14б)$$

или

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i - \Delta, \dots, x_n)}{2\Delta}. \quad (1.3.14в)$$

Теперь, например, формула (1.3.12) на основе (1.3.14б) может быть представлена как

$$m_f^2 = fKf^T = \begin{bmatrix} \frac{f_{\Delta_1} - f}{\Delta} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \frac{f_{\Delta_n} - f}{\Delta} & & & \end{bmatrix} \quad (1.3.15)$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \cdot \begin{bmatrix} [f_{\Delta_1}] & \dots & [f] \\ [f_{\Delta_1}] & \dots & [f] \\ \vdots & & \vdots \\ [f_{\Delta_n}] & \dots & [f] \\ [f_{\Delta_n}] & \dots & [f] \end{bmatrix}$$

или в любом другом преобразовании. Здесь две функции имеют вид $f_{\Delta_i} = f(x_1, \dots, x_n)$ и $f = y = f(x_1, \dots, x_n)$. Если верны классические предположения об однородности (примерное равенство между собой средних квадратических погрешностей m_i) и некоррелированности ($r_{ij} < \alpha$, где α – некоторое достаточно малое число), то (1.3.15) будет

$$m_f^2 = \frac{m^2}{\Delta^2} \cdot ([f_{\Delta}^2] - n f^2). \quad (1.3.15a)$$

Оценка точности вектор-функции. Очень многие геодезические задачи не могут быть описаны одной функцией общего вида, а, как минимум, двумя и более. В этом случае все они объединяются в *вектор-функцию* вида

$$Y = f(X) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) \end{cases}. \quad (1.3.16)$$

Такого рода структуры, очевидно, не могут быть оценены числом, – только набором чисел. Не сложно понять, что это должен быть набор оценок математических ожиданий (вектор оценок математического ожидания) для **каждой** функции:

$$\hat{M}(Y) = \begin{cases} \hat{M}(f_1(x_1, \dots, x_n)) \\ \dots \\ \hat{M}(f_k(x_1, \dots, x_n)) \end{cases} \quad (1.3.17)$$

и набор мер рассеивания для функций $f_i(x_1, \dots, x_n)$, а также меры тесноты связи между ними (если они существуют). Для этого, используя характеристику рассеивания многомерного закона распределения в виде ковариационной матрицы K_Y и расширяя формулу (1.3.2) на k функций (то есть производные берут от каждой из k функций по всем n аргументам), получают **обобщенную формулу** оценки точности вектор-функции (**фундаментальная теорема переноса погрешностей**):

$$K_Y = F \cdot K_x \cdot F^T, \quad (1.3.18)$$

где F – матрица Якоби J вида:

$$J = F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & \dots \\ \vdots & \ddots \\ f_{k1} & \dots \end{bmatrix}, \quad (1.3.19)$$

а K_x – обычная ковариационная матрица измерений.

Формула носит универсальный характер и применима для оценки практически любой вектор-функции вида (1.3.17). При этом, можно показать, что для линейной вектор-функции $Y = Ax + b$ (где b как постоянная не влияет на меру рассеивания)

$$K_Y = M(Y \cdot Y^T) = M(Ax \cdot x^T A^T) = A(M(x \cdot x^T))A^T = AK_x A^T,$$

а $M(Y) = A \cdot M(x) + b$.

Значит (1.3.18) – оценка **линеаризованного** варианта вектор-функции общего вида, и чем больше меры рассеивания аргументов (элементы ковариационной матрицы), тем хуже будет оценка, которую иногда можно улучшить.

Пример 4. Пусть надо оценить среднюю квадратическую погрешность пункта P , полученного из полярной засечки с небезошибочными исходными координатами. В этом случае имеем вектор-функцию Y :

$$Y = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 + S \cdot \cos(\alpha) \\ Y_0 + S \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

и матрицу Якоби F размера 2×4 (две функции X_P, Y_P и четыре аргумента по которым берут производные – X_0, Y_0, S и α):

$$F = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \end{bmatrix} \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{cccc} X_0 & Y_0 & S & \alpha \\ \hline 1 & 0 & \cos(\alpha) & -S \cdot \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & \sin(\alpha) & +S \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right. \end{array} .$$

Ковариационная матрица для вектор-функции Y

$$\begin{aligned} F \cdot K_x \cdot F^T &= \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{ucx} & K_{ucx, x} \\ K_{x, ucx} & K_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F \\ F_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} \cos(\alpha) & -S \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{array} \right. \end{array} \cdot \begin{bmatrix} K_{ucx} & K_{ucx, x} \\ K_{x, ucx} & K_x \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hline \begin{array}{cc} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -S \cdot \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{array} \end{array} \end{array} , \end{aligned}$$

где K_{ucx} – ковариационная матрица погрешностей исходных данных. Если они считаются по отношению к измерениям достаточно малыми, то $K_{ucx} = 0$ и в матрице F не будет производных по исходным координатам (X_0, Y_0). Если нет, то эта матрица может

быть задана в виде полной матрицы обычного вида $K_{ucx} = \begin{bmatrix} m_x^2 & \text{cov}(x, y) \\ \text{cov}(y, x) & m_y^2 \end{bmatrix}$, из-

вестной из предыдущих вычислений в сети, или неполной $K_{ucx} = \begin{bmatrix} m_x^2 & 0 \\ 0 & m_y^2 \end{bmatrix}$, известной

из оценки точности при уравнивании опорной сети.

Недиагональные блоки матрицы исходных данных $K_{исх, x}$ или известны из вычислений, или (что чаще всего) **равны нулю**. K_x – обычная ковариационная матрица измерений. Если исходные данные заданы неполной ковариационной матрицей $K_{исх}$, K_x – диагональная матрица измерений, блоки $K_{исх, x}$ нулевые, то ковариационная матрица вектор-функции будет

$$K_Y = \begin{bmatrix} K_{исх} & F_2 \cdot K_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ F_2 \end{bmatrix} = K_{исх} + F_2 \cdot K_x \cdot F_2^T = \\ = \begin{bmatrix} m_{x_0}^2 & 0 \\ 0 & m_{y_0}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -S \cdot \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_s^2 & 0 \\ 0 & \frac{m_a^2}{\rho^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -S \cdot \sin(\alpha) & S \cdot \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Погрешность определения положения пункта вычисляют с использованием **круговой погрешности Гельмерта** вида

$$m_p = \sqrt{e \cdot K_Y \cdot e^T}, \quad (1.3.20)$$

где e – вектор-строка из единиц, $e = [1 \ 1 \ \dots]$.

Тогда для нашей задачи имеем

$$m_p = \sqrt{e \cdot K_Y \cdot e^T} = \\ = \sqrt{m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2 + m_s^2 \cos^2(\alpha) + S^2 \sin^2(\alpha) \frac{m_a^2}{\rho^2} + m_s^2 \sin^2(\alpha) + S^2 \cos^2(\alpha) \frac{m_a^2}{\rho^2}} = \\ = \sqrt{m_{x_0}^2 + m_{y_0}^2 + m_s^2 + S^2 \frac{m_a^2}{\rho^2}}.$$

Следует иметь ввиду, что в ковариационной матрице измерений K_x , при **разнородных** измерениях (например, линии и углы) погрешность измерения углов обязательно переводят в радианы: $\frac{m_\beta''}{\rho''}$, чтобы все размерности слагаемых совпадали (ρ'' – число секунд в радиане, равная $206264.8062'' \approx 206265''$).

Частный случай формулы Гельмерта (и наиболее известный) при **безошибочных** исходных данных и диагональной ковариационной матрице через погрешности приращений есть

$$m_p = \sqrt{e \cdot K_Y \cdot e^T} = \sqrt{m_{\Delta x}^2 + m_{\Delta y}^2}. \quad (1.3.20a)$$

Для полярной засечки это полученная выше формула с диагональными элементами ковариационной матрицы измерений K_x : $K_{11} = m_{\Delta x}^2$, $K_{22} = m_{\Delta y}^2$.

Пример 5. Формула (1.3.18) оценки точности вектор-функции часто используется для получения **ковариационной матрицы процесса**, по элементам которого вычисляется какая-либо величина. Пусть требуется оценить среднюю квадратическую погрешность суммы дирекционных углов m_Σ висячем ходе на три стороны (рисунок 1.3.1) при левых измеренных углах поворота с одинаковыми погрешностями m_β .

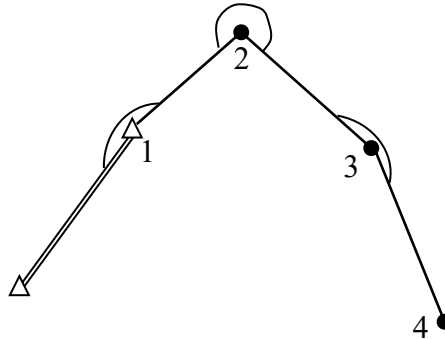


Рисунок 1.3.1. – Висячий угловой ход

Тогда составляем вектор-функцию вида

$$Y = \begin{bmatrix} f_1 = \alpha_{1-2} \\ f_2 = \alpha_{2-3} \\ f_3 = \alpha_{3-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{исх} + \beta_1 - 180 \\ \alpha_{исх} + \beta_1 + \beta_2 - 2 \cdot 180 \\ \alpha_{исх} + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 3 \cdot 180 \end{bmatrix}.$$

Необходимость составления вектор-функции очевидна, так как все последующие дирекционные углы включают в себя предыдущие, соответственно измеренные, углы β_i . Наличие общих частей функции говорит об их коррелированности и, следовательно, необходимости в оценивании её численно. Находим матрицу **Якоби** F , беря производные от трех функций по четырем параметрам $\alpha_{исх}$, β_1 , β_2 , β_3 :

$$F = \begin{array}{c|cccc} & \alpha_{исх} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ f_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ f_2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ f_3 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Тогда ковариационная матрица вектор-функции

$$K_Y = FK_x F^T = \begin{bmatrix} m_\alpha^2 + m_1^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 \\ m_\alpha^2 + m_1^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 + m_2^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 + m_2^2 \\ m_\alpha^2 + m_1^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 + m_2^2 & m_\alpha^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \end{bmatrix},$$

где K_x – диагональная матрица, состоящая из погрешности исходных данных (m_α^2) и оценки дисперсий измеренных углов m_β^2 . Сама оцениваемая функция есть

$f = \alpha_{1-2} + \alpha_{2-3} + \alpha_{3-4}$. Матрица частных производных по её элементам $f = [1 \ 1 \ 1]$, а средняя квадратическая погрешность функции суммы дирекционных углов f есть

$$m_f = \sqrt{f \cdot K_Y \cdot f^T} = \sqrt{9m_\alpha^2 + 9m_1^2 + 4m_2^2 + m_3^2}.$$

Эти же результаты можно получить, составив **функцию суммы** с учетом значений дирекционных углов и используя формулу (1.3.2). Но поэтапное решение более целесообразно, так как для достаточно сложных функций прямое решение часто просто **не приемлемо** из-за чрезмерной громоздкости вычислений.

1.4. Проектирование условий измерений

Обратная задача теории погрешностей измерений.

Предельное проектирование точности одной функции. Примеры.

Предрасчет точности вектор-функции. Примеры.

Обратная задача теории погрешности измерений. Наряду с прямой задачей теории погрешности измерений – оценкой точности функции по погрешностям аргументов, очень большое значение имеет задача *предрасчета условий измерений* таким образом, чтобы оценка функции (вектор-функции) была или в **заданных пределах** или **оптимальной** по какому-либо критерию. Такого рода задачи называют задачами *проектирования измерений* или априорного *предрасчета* точности. При этом первый вариант – получения заданных значений – называют *предельным (лимитированным) проектированием*, а проектирование с получением наилучших значений – *оптимальным проектированием*. Из условий измерений, подлежащих регулировке, можно выделить следующие факторы: точность измерений, состав измерений, количество измерений, внутренняя геометрия измерений, наличие или отсутствие систематической погрешности (крайне редко), то есть, в основном, только **средства и методы измерения**.

Предельное проектирование точности одной функции. Рассмотрим задачу предельного проектирования точности одной функции, которая ставится следующим образом: пусть задана функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ (или результат косвенного измерения) и задана её погрешность m_f . Предрасчитать (спроектировать) условия измерений так, чтобы при их реализации мы получили именно **заданную** величину погрешности функции. Для этого запишем формулу оценки точности функции (1.3.2) и проанализируем её:

$$\begin{aligned} m_f^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \cdot K_{ij} = \\ &= f_1^2 \cdot m_1^2 + \dots + f_i^2 \cdot m_i^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot m_i \cdot m_j = f \cdot K_x \cdot f^T. \end{aligned}$$

Очевидно, что в одном уравнении **более одного** неизвестного (например, n погрешностей m_i при проектировании по точности) и решение задачи невозможно без привлечения **дополнительной информации** об условиях измерений. Из всех возможных

вариантов такого рода дополнительной информации наибольшее распространение получил *принцип равных влияний*. По нему недостаток информации компенсируется предположением о равном влиянии на конечный результат каких-либо частей в выражении (1.3.2) или введением *коэффициентов влияния (весов)* этих слагаемых.

Пример 6. Пусть (1.3.2) имеет вид уравнения с тремя неизвестными

$$m_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \cdot m_3^2.$$

Тогда недостаток информации (две единицы) можно компенсировать введением степени влияния каждого из трех слагаемых в виде чисел w_1, w_2, w_3 , сумма которых равна единице и, обязательно, предположением, что, например, каждое слагаемое или его часть вносит примерно одинаковый вклад в формирование значения величины погрешности m_f . Теперь для заданной погрешности функции из

$$m_f^2 = w_1 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot m_1^2 \right) + w_2 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \cdot m_2^2 \right) + w_3 \cdot \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)^2 \cdot m_3^2 \right)$$

и, например, предположения, что $w_1 \cdot m_1^2 \approx w_2 \cdot m_2^2 \approx w_3 \cdot m_3^2$, имеем

$$m_i^2 = \frac{m_f^2}{[f^2] \cdot w_i}.$$

Очевидно, что возможно взвешивание приемлемых различных частей слагаемых. Если примерно известны коэффициенты корреляции, то на этой основе также возможно решение задачи, но оно будет более трудоемким. Основная проблема в этой постановке – это поиск соответствующих *чисел влияния* w_i . В принципе, они могут быть назначены **достаточно произвольно**, сообразуясь с постановкой задачи, но в этом случае существует реальная угроза того, что предрассчитанные погрешности m_i будет **невозможно** реализовать существующими средствами измерений. Очень часто в процессе проектирования числа влияния игнорируются, а используется только второе предположение о равенстве, или назначают **равные** числа влияния, не используя второе предположение. Последний подход получил название «**принцип равных влияний**» и применяется чаще, чем другие.

При этом для (1.3.2) возможны следующие варианты равного влияния частей слагаемых:

1. Пусть предполагается, что *все погрешности измерений* примерно одинаковы $m_1 \approx m_2 \approx \dots = m$. Тогда

$$\begin{aligned} m_f^2 &= f_1^2 \cdot m^2 + \dots + f_i^2 \cdot m^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot m \cdot m = \\ &= m^2 \cdot \left([f^2] + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$m = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left([f^2] + 2 \cdot \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij}\right)}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{(f \cdot R_x \cdot f^T)}}, \quad (1.4.1)$$

где R_x – корреляционная матрица результатов измерений, полученная из ковариационной матрицы K_x .

Приравнять между собой можно и элементы структуры f_i при известных погрешностях измерений m_i . Такого рода проектирование называют *проектированием геометрии оцениваемого процесса*. Тогда по аналогии имеем

$$m_f^2 = f^2 \cdot \left([m^2] + 2 \sum_{i < j} m_i \cdot m_j \cdot r_{ij} \right),$$

откуда

$$f = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\left([m^2] + 2 \cdot \sum_{i < j} m_i \cdot m_j \cdot r_{ij}\right)}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{(m \cdot R_x \cdot m^T)}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{(e \cdot K_x \cdot e^T)}}, \quad (1.4.2)$$

где m – вектор-строка погрешностей измерений;

K_x – ковариационная матрица измерений;

e – вектор-строка из n единиц (сумматор).

Здесь учтено, что $R_x = D \cdot K_x \cdot D$, где D – диагональная матрица с элементами $1/m_i$ (масштабатор). Тогда $K_x = D^{-1} \cdot R_x \cdot D^{-1}$.

Следует учесть, что f – численное значение частной производной. Таким образом, проектирование здесь возможно только по **количественному значению** измеренных величин.

Пример 7. Пусть при погрешности измерения сторон в квадрате $m_a = m_b = 0,1$ м и сторонах $a = b = 10$ м имеем погрешность определения площади

$$m_p = \sqrt{b^2 \cdot m_a^2 + a^2 \cdot m_b^2} \quad \text{и} \quad m_p = \sqrt{2}.$$

Какие длины должен иметь квадрат, чтобы погрешность площади теперь была $m_p = m_y = 1$. По (1.4.2) имеем

$$f = b = a = m_y \cdot \sqrt{\frac{1}{2m^2}} = \frac{m_y}{\sqrt{2}m}; \quad f = \frac{10}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, при уменьшении стороны в $\sqrt{2}$ раз, погрешность будет заданной величины. Такого рода проектирование целесообразно для примерно одинаковых точностных и геометрических условий.

2. Предположим, что в (1.3.2) одинаковое влияние оказывает произведение вида $f_1 \cdot m_1 \approx f_2 \cdot m_2 \approx \dots \approx f_n \cdot m_n$. Тогда

$$m_f^2 = n(f_i^2 \cdot m_i^2) + 2 \sum_{i < j} (f_i^2 \cdot m_i^2) \cdot r_{ij} = n(f_i^2 \cdot m_i^2) + 2(f_i^2 \cdot m_i^2) \sum_{i < j} r_{ij} =$$

$$= (f_i^2 \cdot m_i^2) \cdot \left(n + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \right), \quad \frac{m_f^2}{n + 2 \sum_{i < j} r_{ij}} = f_i^2 \cdot m_i^2,$$

откуда значения погрешностей измерений

$$m_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i^2 \cdot eR_x e^T}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{f}_i R_x \bar{f}_i^T}}. \quad (1.4.3)$$

Здесь \bar{f}_i – вектор-строка из n одинаковых частных производных f_i .

Если и m_i известны, то из (1.4.3) проектирование по *количественному значению* (геометрии) будет

$$f_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{m_i^2 \cdot \left(n + 2 \sum_{i < j} r_{ij} \right)}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{m_i^2 \cdot eR_x e^T}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{m}_i \cdot R_x \cdot \bar{m}_i^T}}, \quad (1.4.4)$$

где \bar{m}_i – вектор-строка из n одинаковых погрешностей m_i .

Эта формула более гибкая, чем (1.4.2), так как позволяет проектировать, в какой-то мере, «индивидуальную» геометрию, как и (1.4.3) – «индивидуальные» точности, в **зависимости** от геометрии.

Пример 8. В рассмотренном выше примере: $a = 10$ м, $b = 20$ м и $m_i = 4$ м², найти m_a и m_b . По (1.4.3) имеем

$$m_b = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{100 \cdot 2}} = \frac{4}{10 \cdot \sqrt{2}}; \quad m_a = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{400 \cdot 2}} = \frac{4}{10 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2}{10 \cdot \sqrt{2}}.$$

Как должны измениться длины, чтобы при этих же точностях измерений погрешность площади была равна $m_p = 3$ м²? Из (1.4.4) получаем

$$f_a = b = 3 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 2}{4 \cdot 2}} = 15 \text{ м}, \quad f_b = a = 3 \cdot \sqrt{\frac{100 \cdot 2}{2 \cdot 16}} = 7,5 \text{ м}.$$

Ответ тривиален, но подход может быть использован и в более сложных задачах, например, при оценивании алгоритмов координатоопределения.

3. Пусть теперь приравняются части вида $f_1 \cdot m_1^2 \approx f_2 \cdot m_2^2 \approx \dots f_i \cdot m_i^2$. Тогда (1.3.2) примет вид

$$m_f^2 = f_1 \cdot (f_1 m_1^2) + \dots + f_n \cdot (f_n m_n^2) + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot m_i \cdot m_j \cdot r_{ij}.$$

Очевидно, что последние суммы нельзя привести к рассматриваемому допущению 3 без дополнительных условий. Поэтому будем рассматривать *некоррелированный* случай. Исходя из этого, имеем

$$m_f^2 = (f_1 + f_2 + \dots + f_n) \cdot f_i m_i^2 = [f] \cdot f_i m_i^2. \quad (1.4.5)$$

Отсюда искомые значения погрешностей

$$m_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot [f]}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f_i \cdot f R_x e^T}} = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f R_x \bar{f}_i^T}}, \quad (1.4.6)$$

где f – вектор-строка из частных производных f_i ;

\bar{f}_i – вектор-строка из n одинаковых элементов f_i (см. (1.4.3)).

При проектировании геометрии весьма затруднительно использовать (1.3.2) с третьим условием для выражения значения f_i . Но на основе аналогии с формулами первого и второго условий, формулы (1.4.2), (1.4.4) можно записать

$$f_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{m R_x \bar{m}_i^T}}. \quad (1.4.7)$$

Анализ формул показывает, что другие комбинации на основе равных влияний слагаемых или их частей невозможны. Результаты проектирования сведем в общую таблицу (таблица 1.4.1), из анализа которой также можно сделать этот вывод.

Таблица 1.4.1. – Проектирование условий измерений

Условия	Проектирование m_i	Проектирование f_i
1	$m = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f R_x f^T}}$	$f_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{m R_x m^T}}$
2	$m_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{f}_i R_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{\bar{m}_i R_x \bar{m}_i^T}}$
3	$m_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{f R_x \bar{f}_i^T}}$	$f_i = m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{m R_x \bar{m}_i^T}}$

В 2000 г. М.Ю. Маркузе [19] был предложен метод степенного взвешивания для проектирования, вида

$$m_i^2 = \frac{m_f^2}{(f_i^{h_i+2}) \cdot ([f^{-h_i}])}. \quad (1.4.8)$$

Не сложно показать, что при подстановке в (1.3.2) мы имеем тождество, при $h = 0$ мы имеем случай (1.4.3), $h = -1$ – случай (1.4.6), а при $h = -2$ – случай (1.4.1). Общий вид проектирования при наличии корреляции по предложенному алгоритму весьма затруднителен, что, впрочем, не снижает его ценности для практики.

При оценивании точности функции при наличие *случайных* и *систематических* погрешностей (1.3.6), (1.3.8)

$$m_f^2 = fK_x f^T + fK_\theta f^T.$$

При заданной погрешности функции необходимо накладывать условия как на случайные, так и на систематические составляющие, что приводит к большим трудностям. Есть несколько простых задач этого класса, которые сводятся к **априорному заданию** погрешности функции и случайной погрешности или систематических погрешностей с **предвычислением** точности других. В этом случае задача сводится к первому, второму или третьему виду условий при проектировании.

Пример 9. При *предрасчете среднего арифметического с требуемой точностью по условиям формулы (1.3.8а) требуют знания значения случайных погрешностей. Тогда, чтобы получить достаточно приближенную к требуемому значению погрешность среднего m_x^2 , надо, чтобы $\theta^2 \approx m_x^2 - \frac{m^2}{n}$, и т.д.*

Очевидно, что в реальности выполнения условий 1, 2 или 3 задачи проектирования может быть достаточно проблематично. Но если мы предрассчитали условия, современное развитие измерительной техники и методы **позволяют** их выполнить, мы получим достаточно хорошее соответствие, не взирая на принятые условия.

Предрасчет точности вектор-функции – более трудоемкая задача, так как в общем случае требует отыскания значений той или иной **матрицы**. Так как из формулы (1.3.18) $K_Y = F K_x F^T$, где ковариационная матрица желаемых результатов вектор-функции Y из (1.3.17) K_Y задана, то задача проектирования сводится к нахождению или значений матрицы F (*проектирование геометрии*) или матрицы K_x (*проектирование точности и, очень редко, связей*).

Пусть при заданной ковариационной матрице результатов K_Y задана матрица геометрии F . Необходимо предрассчитать точностные параметры процесса без учета тесноты связи, то есть элементы **диагональной** матрицы измерений K_x . Запишем формулу (1.3.18) с учетом размерностей, предполагая, что процесс описан k вектор-функциями и n измерениями в каждой

$$\begin{matrix} K_Y = F \cdot K_x \cdot F^T \\ (k \times k) & (k \times n) & (n \times n) & (n \times k) \end{matrix}.$$

Таким образом, из этой системы необходимо отыскать n элементов, находящихся **по диагонали** в матрице K_x . Наиболее **простой** вариант, когда число измерений n

равно числу функций k (минимум избыточных измерений в системе). Чаще встречается вариант, когда $n < k$. В обоих случаях система решается под условием *метода наименьших квадратов* (условие разрешения информационной переопределенности), так как число уравнений здесь **больше** числа неизвестных. Если $n > k$ – число неизвестных больше числа уравнений, необходимы **дополнительные** условия (смотри, например, *принцип равных влияний*) или более сложный математический аппарат, например, *псевдообратных матриц*. Если $n = k$, то имеем на основе (1.3.19) и (1.3.18)

$$\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (1.4.9)$$

Здесь для определения n неизвестных имеем (в силу **симметричности** матрицы K_y) $t = \frac{n(n+1)}{2}$ уравнений вида

$$\begin{aligned} k_{11} &= f_{11}^2 \cdot k_1 + f_{12}^2 \cdot k_2 + \dots & n \\ k_{12} &= f_{11}f_{21} \cdot k_1 + f_{12}f_{22} \cdot k_2 + \dots & \cdot k_n, \\ & \dots \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

полученных из матричного перемножения (1.4.9). Получаем только элементы **верхней треугольной** матрицы K_y , так как она симметрична. Таким образом, из системы удаляется $n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ уравнений. Система (1.4.10) в матричном виде с размерами будет

$$\underset{(t \times 1)}{k_y} = \underset{(t \times n)}{A} \cdot \underset{(n \times 1)}{k_x}, \quad (1.4.11)$$

где k_y – вектор-столбец из n элементов первой строки матрицы K_y , $n - 1$ элементов второй строки и т.д. – то есть **разложенная по строкам** в один столбец верхняя треугольная матрица из элементов K_y ;

A – матрица из **комбинаций** частных производных f_{ij} ;

k_x – столбец из диагональных элементов определяемой матрицы K_x .

Переопределенная система (1.4.11) решается по *методу наименьших квадратов*. Вычислительную схему метода можно свести к *левой трансформации Гаусса*: домножить (1.4.11) на A^T :

$$A^T \cdot A \cdot k_x = A^T \cdot k_y. \quad (1.4.12)$$

Решая эту систему относительно k_x , получаем искомые диагональные элементы ковариационной матрицы K_x . В 1977 г. немецкие геодезисты **Графаренд** и **Шифрин** предложили использовать для получения матриц в алгоритме, кроме *матричного произведения Келли*, упрощенное *тензорное произведение Кампу – Рао*. Произведе-

Произведение Кронекера для матриц $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, есть матрица $C = A \otimes B$ размера $(n_1 \cdot n_2) \times k$ (число столбцов у обеих матриц должно быть **одинаково**), со следующей структурой $\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_1 & a_{11} \cdot b_2 & \dots & a_{11} \cdot b_k \\ a_{21} \cdot b_1 & a_{21} \cdot b_2 & \dots & a_{21} \cdot b_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{22} \cdot b_1 & a_{22} \cdot b_2 & \dots & a_{22} \cdot b_k \end{bmatrix}$, где b_i – i -й столбец матрицы B . То есть первый столбец матрицы C – это столбец из столбцов b_1 , умноженный на a_{11} , a_{21} , \dots . Это же можно записать проще, используя *тензорное произведение Кронекера*:

$$C = A \otimes B \quad (1.4.13)$$

где a_i, b_i – вектор-столбцы матриц A и B ;

\otimes – символ *тензорного произведения Кронекера (прямое произведение)* состоящее из блоков $a_{ij} \cdot B$ размера $(n_1 \cdot n_2) \times k \cdot k$ для произведения матриц A и B определенных выше размеров.

Пример 10. Пусть имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произведение Кронекера $A \otimes B = C$:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot B & a_{12} \cdot B \\ a_{21} \cdot B & a_{22} \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & 3 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Произведение Кэри – Рао $A \odot B = C$:

$$C = [a_1 \otimes b_1 \quad a_2 \otimes b_2] = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

На основе введенных произведений решение задачи проектирования по точности вектор-функции (1.4.9) можно произвести по следующей схеме: получаем матрицу $A = F \odot$; из этой матрицы получаем матрицу нормальных уравнений $N = A^T A = (F \odot \quad \odot \quad \odot$ и вектор свободных членов $b = A^T k_y = (F \odot$. Теперь имеем совместную систему нормальных уравнений $N k_x = b$, или

$$(F \odot \quad \odot \quad \odot), \quad (1.4.14)$$

решая которую получают **диагональные** элементы ковариационной матрица K_x в виде вектора k_x .

Пример 11. Рассмотрим вставку в угол (рисунок 1.4.1).

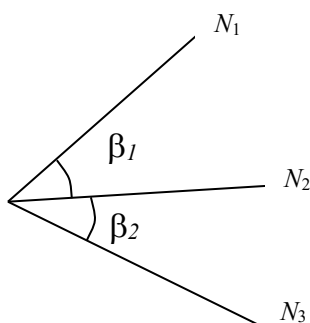


Рисунок 1.4.1. – Вставка в угол

Пусть необходимо предрассчитать точность измерения направлений N_i при вставке в угол (см. рисунок 1.4.1), чтобы получить нужную, но различную точность определяемых углов β_j . Из (1.3.18) $K_y = F \cdot K_x \cdot F^T$.

$$K_x = \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь m_i – точность N_i направления.

$$K_y = \begin{bmatrix} m_{y_1}^2 & \text{cov}(y_1, y_2) \\ \text{cov}(y_1, y_2) & m_{y_2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

где – $m_{y_i}^2$ точность β_i угла.

Определяем матрицу F

$$\begin{array}{l} \beta_1 = N_2 - N_1 \\ \beta_2 = N_3 - N_2 \end{array} \begin{array}{c|ccc} & N_1 & N_2 & N_3 \\ \hline & -1 & 1 & 0 \\ & 0 & -1 & 1 \end{array} = F.$$

Матрица A имеет вид

$$A = F \odot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f_1 & f_2 & f_3 \\ \hline \end{array} \\ \odot \\ \begin{array}{ccc} \end{array} \\ \odot \\ \begin{array}{ccc} \end{array} \\ \odot \\ \begin{array}{ccc} \end{array} \end{array} [f_1 \otimes f_1 | f_2 \otimes f_2 | f_3 \otimes f_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Определения требуют три элемента матрицы K_x . Но так как матрица K_y симметрична, то есть $K_{12} = K_{21}$, то из матрицы A удаляют второе или третье уравнение, так как они одинаковы. Теперь система (1.4.11) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

и может быть решена непосредственно без привлечения МНК:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_{11} + k_{12} \\ k_2 &= -k_{12} \\ k_3 &= k_{22} + k_{12} \end{aligned}$$

Если использовать МНК с вычислительной схемой левой трансформации Гаусса, то

$$N = A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

свободный член

$$B = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{11} - k_{12} + k_{22} \\ k_{22} \end{bmatrix},$$

обратная матрица

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

а решение

$$k_x = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{11} - k_{12} + k_{22} \\ k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} + k_{12} \\ -k_{12} \\ k_{22} + k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix},$$

при заданной ковариационной матрице K_y

$$K_y = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix}.$$

При наличии мощной вычислительной техники возможно проектирование с использованием техники *случайного поиска (перебора)*. Такого рода проектирование называют проектированием *сеточным методом* вектор-функции. Выполняется оно на основе численного *пересчета* значения функции с изменением аргументов через некоторый **шаг** Δ . По результатам составляются n -мерные (по числу аргументов) **сетки**, по которым и производится **подбор** значений параметров из сетки по заданному значению погрешности функции и в зависимости от имеющихся в наличии средств измерений.

Пример 12. Пусть имеем $m_p^2 = m_s^2 + S^2 \cdot \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}$ – погрешность определения пункта

полярной засечкой. Пусть заданы длина $S = 100$ м и погрешность пункта $m_p = 5$ см. Найти значение погрешностей измерений длины и угла m_s и m_α . По формуле оценки точности, с шагом для m_s через 1 см, начиная с 2 см, например, до 7 см, m_α – с 10" через 10" до 60"; получаем таблицу погрешностей m_p при разных точностях. В таблице выбираем значение m_s и m_α , на пересечении которых находится значение наиболее близкое к требуемой точности m_p . Решение может быть неоднозначным, что расширяет диапазон применимости алгоритма проектирования.

Кроме лимитированного проектирования, может быть использовано *оптимальное*, когда решая задачу оптимизации получают **наилучшую** точность из всех возможных. Для одномерных задач в проектировании такого рода задача часто **не решается**, так как приводит, в основном, к **нулевым** решениям, т.е. минимальная точность функции будет при **нулевой** точности измерений. Для решения этой проблемы используют *условную оптимизацию (минимизацию) Лагранжа*, в которой результаты измерений ещё связаны каким-либо (например, *геометрическим*) условием.

Глава 2 ОБРАБОТКА МНОГОКРАТНО ИЗМЕРЕННЫХ ВЕЛИЧИН

2.1. Обработка многократно измеренной равноточной величины

Постановка задачи.

Описательная статистика.

Классическая задача оценивания.

Интервальные оценки основных характеристик.

Задача эталонирования.

Постановка задачи. Наличие избыточных ($n - 1$) измерений при многократных измерениях одной величины приводит к неоднозначным результатам, с одной стороны, а с другой – позволяет провести контроль и выполнить оценку точности на основе статистических методов. Таким образом, задача оценивания результатов многократно измеренной величины сводится к оценке **количественной стороны** (оценка математического ожидания) и **качественной** (оценка меры разброса). При этом обычно используют как точечные, так и интервальные оценки. Следует иметь в виду, что по сути задачи – наличие **неопределенности** в результатах измерений – предпочтительнее *интервальная оценка*, но её качество очень зависит от знания закона распределения погрешностей измерений и числа измерений.

Выделим следующие подходы к решению задачи оценивания результатов многократного измерения одной величины:

1. *Классический случай.* Здесь предполагается, что закон распределения погрешностей измерений достаточно нормальный, чтобы использовать основные характеристики, соответствующие этому закону. Кроме того, предполагается отсутствие значимых мешающих параметров – грубых и систематических погрешностей.

2. *Анализируемый классический случай.* В этом случае, по мере возможности, проводится **исследование** на соответствие нормальному закону распределения погрешностей измерений. Проводится анализ на наличие грубых и значимых систематических влияний. Только после этого выносится суждение об использовании формул оценивания.

3. *Неклассические методы оценивания.* Если результаты исследований (см. п. 2) дали наличие группы «сомнительных» измерений (не грубые, но уже не нормальные, причем не одно), наличие в каком-либо виде значимого *систематического* влияния или заметное отличие от *нормального закона*, то используют разного рода неклассические алгоритмы обработки. К ним, для перечисленных случаев, можно отнести:

– *обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК)*, учитывающий неравноточность (гетероскедастичность) и коррелированность (автокорреляцию) результатов измерений в виде ковариационной матрицы, но в рамках нормального закона распределения. Частный случай его, при наличии только неравноточности, – *взвешенный метод наименьших квадратов (ВМНК)* с диагональной ковариационной матрицей предложен ещё Гауссом;

– *робастные (помехоустойчивые)* процедуры, позволяющие, при наличии «сомнительных» измерений и незнании точного закона распределения, а только его класса, получать достаточно устойчивые и асимптотически эффективные оценки;

– *параметрические неклассические оценки*, в которых производится исследование на соответствие какому-либо закону распределения, а затем по методу макси-

мального правдоподобия или методу моментов, или какому-либо другому методу, получают вид оценок, оптимальный для выявленного вида распределения;

– *непараметрические методы оценивания*, позволяющие получать оценки, совсем не зная закона распределения. При этом ставится условие, чтобы они были не сильно хуже параметрических, когда закон распределения известен, и асимптотически эффективные в противном случае.

– *адаптивные оценки* – оценки на основе индикаторов. В качестве индикатора может использоваться какая-либо характеристика результата измерений, по значению которого делается вывод об использовании того или иного вида оценок – **разветвление**. Часто в этом классе используется простой перебор оценок с изменением каких-либо параметров процедуры оценивания, и по какому-либо критерию выбирают оптимальную.

Описательная статистика. Традиционно, но не обязательно, перед началом детальной обработки результатов измерений представляется *описательная статистика*. В неё обычно включают следующие пункты: число наблюдений, минимальное и максимальное значения, среднее и медиану, смещенную и несмещенную оценку дисперсии, смещенную и несмещенную средние квадратические погрешности, асимметрию и эксцесс, коэффициент вариации, сумму всех элементов, сумму квадратов отклонений от среднего, сумму квадратов значений, иногда автокорреляцию 1-го порядка и некоторые другие. Где возможно, получают *уровень значимости* величины.

Описательная статистика призвана давать первое представление о ряде измерений и поведении его основных характеристик, а также служить основой для дальнейших, более детальных вычислений и исследований.

Классическая задача оценивания. Для этого случая априорно закон распределения результатов измерений предполагается достаточно нормальным, а также отсутствие значимых грубых и систематических влияний:

$$N(\Delta; m^2, \bar{x}), \quad \text{cov}(\Delta_i, \Delta_j) \approx 0, \quad D(\Delta_i) = m^2.$$

В теории оценивания для этого случая ([Приложение 1](#)) было показано, что оценка математического ожидания есть обычное *среднее арифметическое* \bar{x} , а оценка стандарта как меры рассеивания есть *средняя квадратическая погрешность* m по Бесселю или по Гауссу. Рассматривая подход Хьюбера для получения *M-оценок* (см. [Приложение 1](#)) было показано, что *целевая функция* для результатов измерений с нормальным законом распределения погрешностей имеет вид $\rho(x) = \frac{x^2}{2}$.

Метод максимального правдоподобия для получения эффективных оценок, требует **минимизации** этой функции. Таким образом, если имеется n результатов измерений величины, о которой известно, что погрешности её измерений распределены нормально, то для получения «наилучшей» оценки наиболее надежного значения, необходимо минимизировать следующую целевую функцию (*функцию потерь*):

$$\rho(v) = \Phi(v) = \frac{1}{2} \cdot \left[(x - \hat{x})^2 \right] = \frac{[v^2]}{2} = \min, \quad (2.1.1)$$

где \hat{x} – неизвестная оценка *сдвига* (математического ожидания).

Коэффициент $\frac{1}{2}$ не играет никакой роли и поэтому может быть удален.

Поиск минимума дает уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{dv}{d\hat{x}} = 2 \cdot \frac{1}{2} [(x - \hat{x}) \cdot (-1)] = 0.$$

Удаляя постоянную в однородном уравнении (которое не влияет на результат) и раскрывая сумму, имеем

$$[x] - n \cdot \hat{x} = e^T \cdot x - (e^T \cdot e) \cdot \hat{x} = 0,$$

или

$$\frac{[x]}{n} = \frac{e^T \cdot x}{e^T \cdot e} = \hat{x} = \bar{x}, \quad (2.1.2)$$

где e – вектор-сумматор в виде столбца из n единиц.

То есть, мы опять получили для оценки математического ожидания при нормальном законе распределения погрешностей результатов измерений обычное *среднее арифметическое*.

Таким образом, на первом этапе обработки одной многократно измеренной равноточной величины получаем в качестве основных точечных характеристик *среднее арифметическое* \bar{x} и *среднюю квадратическую погрешность* m .

Следующий этап – оценка **качества** полученных величин. Для этого в первую очередь получаем *среднюю квадратическую погрешность среднего арифметического* $m_{\bar{x}}$. Мы получали его и используя свойства дисперсии, и как среднюю квадратическую погрешность функции \bar{x} :

$$m_{\bar{x}} = \frac{\sqrt{[m^2]}}{n} = \frac{\sqrt{m^T \cdot m}}{e^T \cdot e} \quad (2.1.3)$$

или

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}} = \frac{m_0}{\sqrt{e^T \cdot e}}, \quad (2.1.3a)$$

где m – вектор-столбец погрешностей измерений;

m_0 – средняя квадратическая погрешность одного измерения, в случае, если они все примерно одинаковы.

Таким образом, погрешность одного измерения в \sqrt{n} раз **больше** чем погрешность среднего арифметического. Погрешность определения средней квадратической погрешности m_m также описана ранее, как

$$m_m \approx \frac{m_0}{\sqrt{2 \cdot k}}, \quad (2.1.4)$$

где k – число степеней свободы, равное n , если средняя квадратическая погрешность одного измерения определялась по формуле Гаусса, и $k = n - 1$, если погрешность m определялась по формуле Бесселя.

Следует учесть, что в качестве *меры рассеивания* получают дисперсию с неудобной квадратической размерностью, но переход от неё к *стандарту* $\sigma = \sqrt{D(x)}$ происходит путем извлечения корня. Операция нелинейная и приводит к **смещению** оценки меры рассеивания в виде *стандарта*.

При получении основных характеристик выделяют следующие случаи: известно математическое ожидание – *задача эталонирования*, неизвестно математическое ожидание – *задача оценивания*; известна дисперсия, неизвестна дисперсия.

Если известна дисперсия, то

$$\hat{M}(x) = \bar{x}.$$

Известно математическое ожидание, то искомая оценка дисперсии есть

$$m_{\Gamma}^2 = \frac{1}{n} \left[(x_i - M(x))^2 \right].$$

Неизвестно математическое ожидание, тогда оценка дисперсии есть

$$m_B^2 = \frac{1}{n-1} \left[(x_i - \bar{x})^2 \right].$$

Дисперсии этих оценок будут, соответственно,

$$D(\bar{x}) = \frac{m^2}{n}; \quad D(m_{\Gamma}^2) = \frac{2}{n} \sigma^4; \quad D(m_B^2) = \frac{2}{n-1} \sigma^4.$$

Интервальные оценки основных характеристик (см., например, [18]). При построении *доверительного интервала* для оценки математического ожидания при нормальном законе распределения погрешностей измерений выделяют два случая: стандарт σ известен и стандарт σ оценен $\sigma \approx m$.

В первом случае известно, что *доброкачественная* (несмещенная, состоятельная и эффективная) оценка математического ожидания есть среднее арифметическое \bar{x} с параметрами $M(\bar{x}) = \mu$, $D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Нормированное отношение $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ рас-

пределено также нормально с параметрами $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Поэтому вероятность любого отклонения $|\bar{x} - \mu|$ можно вычислить по формуле

$$P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{n}\right| < z_P\right) = \Phi(z). \quad (2.1.5)$$

Задавая *доверительную вероятность* $P = 1 - q = \Phi(z)$ по таблицам определяем значение *квантиля* z_P распределения Гаусса ([Приложение 3](#)). Для оценки μ преобразуем формулу (2.1.5):

$$P\left(|\bar{x} - \mu| < z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(z)$$

или

$$P\left(-z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < |\bar{x} - \mu| < z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(z),$$

откуда получим

$$P\left(\bar{x} - z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(z). \quad (2.1.6)$$

Таким образом, с вероятностью (*надежностью*) $\Phi(z) = 1 - q = P$ можно утверждать, что интервал $\left(\bar{x} - z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ является *доверительным* для оценки μ .

Обозначим $\Delta = z_P \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. При фиксированном значении z_P с **возрастанием** n Δ уменьшается и точность интервальной оценки **увеличивается**. Увеличение же надежности оценки $P = 1 - q = \Phi(z)$ ведет к увеличению z_P ($\Phi(z)$ – функция возрастающая), поэтому при фиксированном объеме n величина Δ также возрастает, что ведет к увеличению доверительного интервала и **уменьшению** точности оценки.

Если выбрана доверительная вероятность P , произведено достаточно большое количество выборок из генеральной совокупности, то $P\%$ из них определяют такие доверительные границы, внутри которых будет находиться оцениваемый параметр μ , и лишь $1 - P\%$ интервалов его не содержит. Поэтому, было бы **ошибкой** толковать равенство $P(a < \mu < b) = \beta$ как вероятность того, что математическое ожидание заключено в интервале $[a, b]$. Математическое ожидание может лишь **попасть** в этот интервал (вероятность этого события равна единице), либо не попасть, тогда вероятность события ноль. Следовательно, доверительную вероятность не следует связывать с оцениваемым параметром – она связана лишь с **границами интервала**, определяемыми случайностью выборки.

Если при доверительном оценивании стандарт **не известен**, а есть его оценка в виде средней квадратической погрешности m , то для построения интервала для неизвестного математического ожидания μ используют случайную величину

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{m} \cdot \sqrt{n}. \quad (2.1.7)$$

Эта величина, как показано выше, распределена по закону Стьюдента. Поэтому, выбрав вероятность $P = 1 - q$ и зная объем выборки n , находят квантиль $t_{n,P}$ распределения Стьюдента (см. [Приложение 3](#)), такой, что

$$P\left(\frac{|\bar{x} - \mu|}{m} \cdot \sqrt{n} < t_{n,P}\right) = 1 - q. \quad (2.1.8)$$

Преобразуя формулу для оценки μ , имеем

$$P\left(|\bar{x} - \mu| < t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right) = 1 - q$$

или

$$P\left(-t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}} < |\bar{x} - \mu| < t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right) = 1 - q.$$

Откуда

$$P\left(\bar{x} - t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}} < |\bar{x} - \mu| < \bar{x} + t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}\right) = 1 - q, \quad (2.1.9)$$

а интервал

$$\left[\bar{x} - t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}}; \bar{x} + t_{n,P} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.1.10)$$

с надежностью (вероятностью) P является доверительным для оценки μ .

Заметим, что в этом случае для построения доверительного интервала коэффициент $t_{n,P}$ зависит как от доверительной вероятности, так и от **объема** выборки n . Обычно при малом n интервал на основе закона Стьюдента для оценки математического ожидания более широкий, чем при использовании нормального закона распределения. Это не говорит о недостатке распределения Стьюдента, а скорее о его преимуществе, так как при использовании t -распределения учитывается, что никакой дополнительной информации о неизвестной дисперсии σ^2 , кроме той, которую дает выборка, нет. Использование же при малом n и неизвестной дисперсии для интервальной оценки математического ожидания нормального закона распределения привело бы к неоправданному сужению доверительного интервала.

Рассмотрим построение доверительного интервала для дисперсии σ^2 по *выборочной дисперсии* m^2 , полученной по n измерениям с нормальным распределением погрешностей. Выбираем доверительную вероятность $P = 1 - q$. Ранее было показано, что величина $(n \cdot m^2) / \sigma^2$ имеет распределение χ^2 с $k = n - 1$ степенями свободы. Тогда можно записать

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{n \cdot m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 1 - q. \quad (2.1.11)$$

Используя χ^2 – распределение нужно получить такие два значения χ_1^2 и χ_2^2 , чтобы площадь, заключенная под дифференциальной функцией распределения χ^2 между χ_1^2 и χ_2^2 была равна $1 - q$.

Из рисунка 2.1.1 очевидно, что значениями χ_1^2 и χ_2^2 можно варьировать так, чтобы значение заштрихованной площади (вероятности) оставалось постоянной ($S_1 = S_2$) и равной $P = 1 - q$, но обычно χ_1^2 и χ_2^2 выбирают так, чтобы

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{q}{2},$$

то есть площади не заштрихованные (краевые) (см. рисунок 2.1.1) были **равны**.

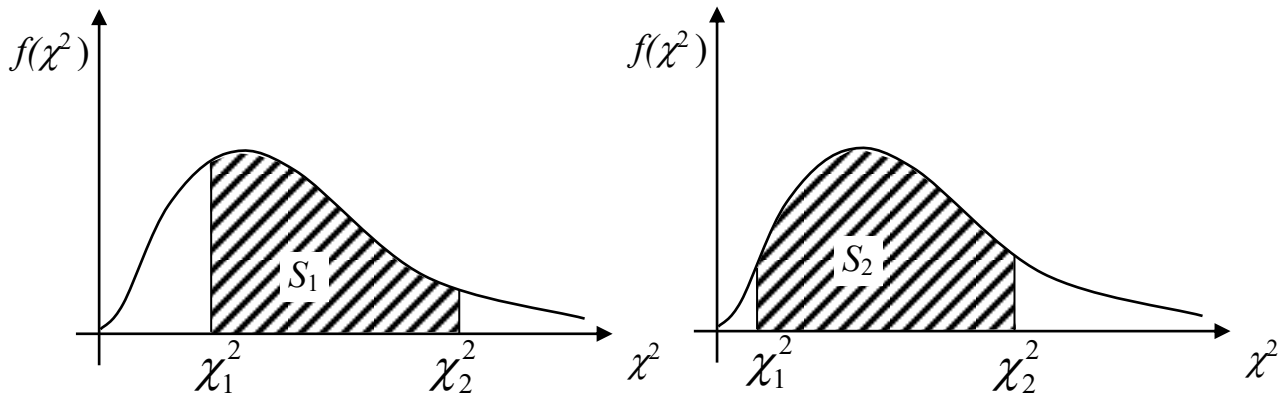


Рисунок 2.1.1. – Доверительная область для χ^2 -распределения

Тогда имеем

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{n m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = 1 - \frac{q}{2} - \frac{q}{2} = 1 - P(\chi^2 < \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2). \quad (2.1.12)$$

Для вычисления левой границы используем тождество

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = 1 - P(\chi^2 > \chi_1^2),$$

так как таких вероятностей в таблице распределения χ^2 нет. Поэтому

$$\begin{aligned} P\left(\chi_1^2 < \frac{n m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) &= 1 - \left(1 - P(\chi^2 > \chi_1^2)\right) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = \\ &= 1 - 1 + P(\chi^2 > \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = P(\chi^2 > \chi_1^2) - P(\chi^2 > \chi_2^2) = 1 - q \end{aligned}$$

Итак,

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = (1 - q) + P(\chi^2 > \chi_2^2) = 1 - q + \frac{q}{2} = 1 - \frac{q}{2}. \quad (2.1.13)$$

Преобразуем двойное неравенство $\chi_1^2 < \frac{n m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ так, чтобы можно было оценить

σ^2 . Рассмотрим два эквивалентных ему неравенства $\chi_1^2 < \frac{n m^2}{\sigma^2}$ и $\frac{n m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$, отку-

да находим границы $\frac{n m^2}{\chi_2^2} < \sigma^2$ и $\sigma^2 < \frac{n m^2}{\chi_1^2}$. Обобщая результаты можно записать

$$\frac{n m^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{n m^2}{\chi_1^2}, \quad (2.1.14)$$

или

$$P\left(\chi_1^2 < \frac{n m^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = P\left(\frac{n m^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{n m^2}{\chi_1^2}\right) = 1 - q. \quad (2.1.14a)$$

Таким образом, доверительный интервал для дисперсии σ^2 имеет вид

$$\left[\frac{n m^2}{\chi_2^2}; \frac{n m^2}{\chi_1^2} \right]. \quad (2.1.146)$$

Здесь определены интервалы для оценки дисперсии по формуле Гаусса. Если используется формула Бесселя (что в практике встречается чаще), применяют $(n - 1)$ степень свободы.

При оценивании стандарта $\sigma = \sqrt{D(x)}$, интервал примет вид:

– для оценки *средней квадратической погрешности* по формуле Бесселя:

$$\left[m \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_2^2}}; m \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi_1^2}} \right] = [m \cdot \gamma_1; m \cdot \gamma_2]; \quad (2.1.15)$$

– для оценки *средней квадратической погрешности* по формуле Гаусса:

$$\left[m \cdot \sqrt{\frac{n}{\chi_2^2}}; m \cdot \sqrt{\frac{n}{\chi_1^2}} \right] = [m \cdot \gamma_1; m \cdot \gamma_2]. \quad (2.1.15a)$$

Практически поступают следующим образом. Задают доверительную вероятность $P = 1 - q$. Так как $P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{q}{2}$, а $P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{q}{2}$, находят $P_1 = 1 - \frac{q}{2}$ и $P_2 = \frac{q}{2}$. По этим значениям вероятности и распределению χ^2 с $n - 1$ (или n) степенями свободы находят квантили для χ_1^2 и χ_2^2 , по которым и строят доверительные интервалы.

Если необходимо произвести *доверительное оценивание* средней квадратической погрешности *среднего арифметического* $m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$, то границы интервалов, полученных ранее, **делят** на \sqrt{n} , и доверительный интервал для оценки $\sigma_{\bar{x}}$ будет

$$[m_{\bar{x}} \cdot \gamma_1; m_{\bar{x}} \cdot \gamma_2]. \quad (2.1.156)$$

Таким образом, последовательность обработки одной многократно измеренной равноточной величины можно свести к следующему:

1. Вычисление точечной оценки математического ожидания как *среднего арифметического* и погрешности одного измерения по формуле Бесселя

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n}, \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \quad v_i = x_i - \bar{x}.$$

Контролем служит равенство нулю суммы квадратов отклонений от среднего $[v] = 0$ в пределах вычислительной ошибки.

2. Оценка **качества** точечных оценок в виде погрешности среднего арифметического и погрешности одного измерения:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

3. Построение *интервальных оценок* (формулы (2.1.10), (2.1.14), (2.1.15)) для \bar{x} , m , $m_{\bar{x}}$, с *доверительной вероятностью* P (как оценок *теоретических значений* μ , σ , $\sigma_{\mu} = \sigma_{\bar{x}}$):

$$\bar{x} - k_n \cdot m_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + k_n \cdot m_{\bar{x}},$$

где $k_n = z_p$ – при известном стандарте и $k_n = t_{n-1,p}$ – при неизвестном;

$$\gamma_1 m < \sigma < \gamma_2 m,$$

где γ_1 и γ_2 зависят от вида формулы оценивания стандарта;

$$\gamma_1 m_{\bar{x}} < \sigma_{\bar{x}} < \gamma_2 m_{\bar{x}}.$$

Задача эталонирования. Еще одна задача, решаемая в рамках классического алгоритма оценивания, ставится следующим образом. Пусть имеется эталонное значение какой-либо величины (длина, угол, превышение и т.д.) и прибор, характеристики которого неизвестны. Предполагая, что влияние внешних условий измерений на результаты **мало** и что для данного прибора эталонное значение является **достаточным** приближением к истинному, оценим точностные характеристики прибора и выявим, если они есть, *мешающие параметры* прибора. Для решения этой задачи производят прибором n измерений эталонной величины $X_{эм}$, по которым вычисляют истинные погрешности $\Delta_i = x_i - X_{эм}$. Оценивают *точность измерений* по формуле Гаусса

$m = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}$, которая и должна являться характеристикой прибора в случае отсутствия в нем значимых мешающих влияний.

Рассмотрим в этих условиях простое правило *отбраковки грубых измерений* и выявления **постоянной систематической погрешности**. В первом случае ни одна погрешность Δ_i не должна выходить за пределы $\pm 3m$ (правило 3σ – «*трех сигм*»), что при достаточном n и хорошем соответствии погрешностей результатов измерений нормальному закону распределения обеспечивает отбраковку грубых погрешностей с вероятностью 0,9973 (для выборок $n = 100$ и меньше – с вероятностью **единица**). Для выявления значимости постоянной систематической погрешности находим среднее из

истинных погрешностей $\bar{\Delta} = \frac{[\Delta]}{n}$, среднюю квадратическую погрешность среднего

арифметического $m_{\bar{\Delta}} = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{[\Delta^2]}}{n}$ и строим доверительный интервал для математического ожидания истинной погрешности:

$$\bar{\Delta} - t_{\beta} m_{\bar{\Delta}} \leq M(\Delta) \leq \bar{\Delta} + t_{\beta} m_{\bar{\Delta}}$$

Если **справедлива** гипотеза $M(\Delta) = 0$, то с вероятностью P должно выполняться неравенство

$$|\bar{\Delta} - t_{\beta} m_{\bar{\Delta}}| \leq 0,$$

полученное из объединения двух $\bar{\Delta} - t_{\beta} m_{\bar{\Delta}} \leq 0$ и $\bar{\Delta} + t_{\beta} m_{\bar{\Delta}} \geq 0$. Так как $t_{\beta} m_{\bar{\Delta}} > 0$, то имеем критерий

$$|\bar{\Delta}| \leq t_{\beta} m_{\bar{\Delta}}, \quad (2.1.16)$$

выполнение которого говорит о **незначимости** систематического влияния в виде **постоянной** погрешности. Здесь t_{β} – квантиль t -распределения Стьюдента по вероятности P и $n - 1$ степени свободы. Если условие не выполняется, то погрешность среднего арифметического будет

$$m_{\bar{\Delta}} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \theta^2} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \bar{\Delta}^2} = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n^2} + \frac{[\Delta]^2}{n^2}} = \sqrt{\frac{[\Delta^2] + [\Delta]^2}{n}}. \quad (2.1.17)$$

Таким образом, задача эталонирования прибора сводится к следующим шагам:

1. Вычисление истинных погрешностей Δ_i , их среднего арифметического $\bar{\Delta}$ и средней квадратической погрешности среднего арифметического $m_{\bar{\Delta}}$.
2. Проверка на наличие грубых погрешностей, например по правилу 3σ , выявление значимости постоянного систематического влияния по правилу (2.1.16) и корректировка погрешности среднего арифметического, если это необходимо, по формуле (2.1.17).
3. Выводы по результатам исследований и рекомендации к использованию прибора.

2.2. Анализируемый классический случай обработки равноточных измерений

[Постановка задачи.](#)

[Выявление грубых ошибок.](#)

[Значимость систематического влияния.](#)

[Исследование на независимость и стационарность.](#)

[Выявление неравноточности.](#)

Постановка задачи. При этом подходе достаточно скрупулезно выявляется значимость мешающих параметров и степень соответствия погрешностей результатов измерений нормальному закону распределения. Только после этого делается вывод о возможности использования того или иного вида оценок, например, оценок раздела 2.1.

Выявление грубых ошибок. Рассмотрим некоторые процедуры выявления значимости грубых и систематических влияний. Статистические процедуры выделения резко отличающихся наблюдений основаны на предположении *однородности данных*. При этом выбросы рассматриваются как наблюдения, нетипично далеко удаляющиеся от центра распределения. Наиболее удачным методом такого рода можно считать алгоритм на основе *статистики*:

$$z = \frac{|x_{\text{экт.}} - \bar{x}|}{m}, \text{ или } \left\{ z_{\text{max}} = \frac{x_{\text{max}} - \bar{x}}{m}; \quad z_{\text{min}} = \frac{\bar{x} - x_{\text{min}}}{m} \right\}. \quad (2.2.1)$$

Распределение и процентные точки статистики z изучались К. Пирсоном (1936 г.), Н.В. Смирновым (1941 г.), Ф. Граббсом (1950 г.). Таблицы контрольных точек составлены Граббсом. Тест получил название «*критерия Смирнова – Граббса*». Таким образом, если одно из вычисленных $z > z_{q,n}$, то **гипотеза о наличии выброса** с вероятностью $P = 1 - q$ принимается. Здесь n – число степеней свободы. Но неустойчивость оценок \bar{x} и m к отклонениям от нормальности снижает практическую ценность критерия. Это возможно исправить, используя *устойчивые оценки параметров сдвига и масштаба*.

Если не имеется таблиц статистики критерия Смирнова – Граббса, то её можно достаточно точно получить на основе формулы

$$G_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{t_{\alpha/2n, n-2}^2}{t_{\alpha/2n, n-2}^2 + n - 2}},$$

где $t_{\alpha/2n, n-2}$ – квантиль t -распределения Стьюдента с уровнем значимости α и $n - 2$ степенями свободы для двухстороннего интервала.

Если в выборке подозревают несколько экстремальных значений, критерий Смирнова – Граббса применять не рекомендуется. Для этого можно использовать похожий *критерий Роснера* (или *правило Томсона*) для всех измерений. Тогда, если крайнее значение признано выбросом, то его **удаляют** и критерий применяют к следующему и т.д. Табличная статистика для правила Томсона может быть получена аналитически как

$$T = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot t_{1-\alpha/2, n-2}^2}{t_{1-\alpha/2, n-2}^2 + n - 2}}.$$

Есть варианты похожих критериев для отбраковки сразу нескольких крайних значений, например, *критерий Титъена – Мура* и др.

Для цели отбраковки можно использовать достаточно строгий *критерий Романовского*, который предусматривает вычисление выборочного среднего \bar{x}' и выборочной средней квадратической погрешности m' без учета сомнительного члена вариационного ряда, $x_{(1)}$ – минимального, $x_{(n)}$ – максимального.

Если выполняются условия [18]

$$\frac{\bar{x}' - x_{(1)}}{m'} > t_q, \text{ или } \frac{x_{(n)} - \bar{x}'}{m'} > t_q, \quad (2.2.2)$$

можно утверждать, что с вероятностью $P = 1 - q$ экстремальные члены ряда не принадлежат рассматриваемой совокупности результатов измерений и их необходимо отбросить. Здесь t_q – табличные коэффициенты, зависящие от уровня значимости q и числа членов «усеченного» вариационного ряда n' .

При надежном знании средней квадратической погрешности для решения вопроса о принятии или исключении сомнительных результатов измерений, целесообразно использовать *критерий Ирвина*. Для этого вычисляют для резко выделяющегося последнего члена вариационного ряда $x_{(n)}$

$$\lambda = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{m}, \text{ или } \lambda = \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{m} \quad (2.2.3)$$

для сомнительного первого члена вариационного ряда $x_{(1)}$. Если $\lambda \leq \lambda_P$, то отклонение величины следует считать **случайным**, то есть вызванным проявлением неоднородности свойств результатов измерений. Если $\lambda > \lambda_P$, то отмеченный выброс $x_{(1)}$ или $x_{(n)}$ **не случаен**, нехарактерен рассматриваемой выборке, то есть является грубой ошибкой. Здесь λ_P – критическое значение из таблиц критерия Ирвина. Это значение получается по доверительной вероятности $P = 1 - q$ и объему выборки n .

Значимость систематического влияния. Анализ значимости систематического влияния можно разделить на следующие этапы (условно):

1. Выявление значимого систематического влияния *неизвестной природы* (например, совокупно независимости и стационарности).
2. Анализ *равноточности* измерений (*гетероскедастичность*).
3. Анализ *коррелированности* (*автокорреляции*) результатов измерений.

Рассмотрим некоторые из них. Если есть возможность провести две независимые серии измерений x' и x'' одной величины x в **разных** условиях (в n_1 и n_2 приема), значимость систематического влияния неопределенной природы выявляют следующим образом.

Вычисляют два средних арифметических из рядов $\bar{x}_1 = \frac{[x']}{n}$ и $\bar{x}_2 = \frac{[x'']}{n}$, вычисляют величину $\bar{\Delta} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ и средние квадратические погрешности по Бесселю m_1 и m_2 , а также величину

$$m = \sqrt{\frac{m_1^2}{n_1} + \frac{m_2^2}{n_2}}. \quad (2.2.4)$$

Критерием проверки значимости служит статистика:

$$z = \frac{|\bar{\Delta}|}{m}, \quad (2.2.5)$$

с *критической областью* $z > z_q$ (**отвергание гипотезы** о незначительном систематическом влиянии с *вероятностью погрешности* q). Здесь z_q получают по *уровню значимости* q как квантиль распределения Гаусса (см. [Приложение 3](#)). Если число измерений не велико ($n < 30$), то критерием служит статистика

$$z = \frac{\bar{\Delta}}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot m_1^2 + (n_2 - 1) \cdot m_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (2.2.5a)$$

с той же критической областью, но z_q получают на основе распределения Стьюдента с $k = n_1 + n_2$ степенями свободы. Как показывает практика, эти критерии наиболее целесообразны для выявления *значимой постоянной систематической погрешности* и при достаточно хорошем соответствии результатов нормальному закону распределения.

Исследование на независимость и стационарность (см., например, [1]). Для проверки одновременно на *независимость* и *стационарность* ряда измерений (действительно ли те образуют *случайный ряд* без значимых влияний различной природы), можно использовать или *критерий серий*, основанный на *медиане*, или *критерий «восходящих» и «нисходящих» серий*.

В *критерии серий* находят из ряда измерений выборочную медиану $med(x)$. Затем строят знаковый ряд из **плюсов** и **минусов** для i -го значения исходного (*не вариационного*) ряда по правилам: на месте x_i ставится плюс, если $x_i > med(x)$, и минус, если $x_i < med(x)$. Члены равные $med(x)$ **опускаются**. Полученная последовательность плюсов и минусов характеризуется общим *числом серий* $\nu(n)$ и протяженностью *самой большой серии* $\tau(n)$, причем *один элемент тоже образует серию*.

Под **серией** будем понимать *последовательность подряд идущих одинаковых знаков*. Если наблюдения *стохастически не зависимы* (выборка случайна), то чередование плюсов и минусов тоже должно быть более или менее случайным, т.е. последовательность не должна содержать слишком длинных серий. Тогда приходим к следующему правилу. Если хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} \tau(n) > \left(\frac{1}{n} (n + 1 - 1.96\sqrt{n-1}) \right), \\ \tau(n) < (3.3 \cdot \log_{10}(n + 1)) \end{cases}, \quad (2.2.6)$$

не выполняется, то гипотеза о стохастической независимости исходных измерений отвергается с вероятностью ошибки, заключенной в пределах между 0,05 и 0,0975.

Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий «улавливает» постепенное смещение среднего значения не только монотонного характера (*сдвиг* или *тренд*), как предыдущий критерий, но и более общего, например, *периодического* характера. В нем также исследуется последовательность знаков, но закон её построения следующий. На месте значения x_i исходного ряда ставится **плюс**, если $x_{i+1} - x_i > 0$ (или $x_{i+1} > x_i$), и **минус**, если $x_{i+1} - x_i < 0$ (или $x_{i+1} < x_i$). Если несколько рядом стоящих измерений равны, то используется только одно из них. Тогда последовательность подряд идущих плюсов соответствует возрастанию результатов измерений (*восходящая серия*), а последовательность минусов – их убыванию (*нисходящая серия*). Критерий основан на том же соображении, что и предыдущий: число серий $\nu(n)$ не должно быть *очень малым*, а их длина – *слишком большой*, в случае случайного ряда. Тогда, если не выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\begin{cases} v(n) > \left(\frac{1}{3}(2n-1) - 1.96\sqrt{\frac{16n-29}{90}} \right), \\ \tau(n) < \tau_0(n) \end{cases} \quad (2.2.7)$$

то гипотеза о **случайности** выборки **отвергается** с уровнем значимости (вероятностью ошибки первого рода) $0,05 < q < 0,0975$. Здесь величина $\tau_0(n)$ определяется по таблице 2.2.1.

Таблица 2.2.1 – Значения $\tau_0(n)$

n	$n \leq 26$	$26 < n \leq 153$	$153 < n \leq 1170$
$\tau_0(n)$	5	6	7

Если о выборке x_i достаточно хорошо известно, что она имеет нормальный закон распределения, то для выявления вопроса о её случайности (альтернатива – *возможные смещения среднего*) целесообразнее использовать *критерий квадратов последовательных разностей*, который мощнее предыдущего (то есть у него меньше вероятность принять гипотезу о независимости в то время, как она является ошибочной). Этот критерий также известен под именем **критерия Аббе**. Для проверки по этому критерию вычисляют величину

$$\delta = \frac{q^2}{m^2}, \quad (2.2.8)$$

где $q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$,

m – средняя квадратическая погрешность по Бесселю.

Если $\delta \leq \delta_q$, то гипотеза о стохастической независимости результатов измерений **отвергается**. Величина δ_q для $n > 60$ подсчитывается по формуле

$$\delta_q = 1 + \frac{u_q}{\sqrt{n + 0.5(1 + u_q^2)}}, \quad (2.2.9)$$

где u_q – q -квантиль нормированного нормального распределения.

При $n < 60$, если требуется 2-3 верных знака, – используют (2.2.9), в противном случае необходимо использовать таблицы критерия Аббе.

Выявление неравноточности. Анализ *равноточности* измерений (*гетероскидастичности*) можно провести в самом простом случае на основе **F-критерия Фишера**. Для этого, достаточно большая выборка (хотя бы $n > 30$), разбивается на 2 (**равные** или **неравные**) с n_1 и n_2 числом элементов ($n = n_1 + n_2$). Для них вычисляют выборочные дисперсии m_1^2 и m_2^2 и составляют *дисперсионное отношение*

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2}, \quad (2.2.10)$$

а m_1^2 и m_2^2 выбирают так, чтобы $m_1^2 > m_2^2$. Измерения не считают равноточными, если F попадает в критическую область $F > F_q$. Здесь F_q – квантиль *распределения Фишера* по уровню значимости q и числом степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ (см. [Приложение 3](#)).

В геодезической практике часто для оценки равноточности измерений используют критерий Романовского

$$R = \frac{|\theta - 1|}{\sigma(\theta)}, \quad (2.2.11)$$

где $\theta = \frac{k_2 - 2}{k_1} \cdot F$, а $\sigma(\theta) = \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 4)}}$, $k_2 > 4$, F – по формуле (2.2.10).

Критическая область $R \geq 3$ (отвергается гипотеза о равноточности при выполнении неравенства с вероятностью ошибки q).

Для проверки неравноточности **более двух** рядов измерений чаще всего используют *критерий Бартлетта*. В нем для каждого ряда получают *эмпирические дисперсии* m_i^2 в n_i измерений. Общая **не смещенная** дисперсия находится как

$$m^2 = \frac{1}{N - n} \sum_{i=1}^n (n_i - 1) \cdot m_i^2, \quad (2.2.12)$$

где n – количество рядов;

$N = \sum_{i=1}^n n_i$ – общее количество измерений.

Получаем статистику

$$Q = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n (n_i - 1) \cdot \ln \frac{m_i^2}{m^2}; \quad (2.2.13)$$

$$c = 1 + \frac{1}{3(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - n} \right). \quad (2.2.13a)$$

Если $n_i > 3$, то статистика Q обладает приблизительно χ^2 -распределением с числом степеней свободы $k = n - 1$. Измерения считают не равноточными, если

$$Q > \chi_q^2, \quad (2.2.13b)$$

где χ_q^2 есть квантиль χ^2 -распределения по уровню значимости q и числу степеней свободы $k = n - 1$. Статистику Q можно вычислить и по формуле

$$Q = \frac{2,3026}{c} \left((N - n) \cdot \ln m^2 - \sum_{i=1}^n (n_i - 1) \cdot \ln m_i^2 \right). \quad (2.2.13b)$$

Подход к определению **значимости** гетероскедастичности на основе деления ряда измерений на части используется и в *критерии Голдфелда – Квандта* (1965 г.) [1]. При этом предполагается, что стандарт i -го измерения σ_i пропорционален значению x_i , отсутствует автокорреляция остатков и они имеют нормальный закон распределения. *Тест Голдфелда – Квандта* состоит из следующих шагов:

1. Построение вариационного ряда измерений и разбиение их на три подвыборки размера k , $(n - 2k)$ и k соответственно.

2. Оцениваются отдельные регрессии для первой и последней подвыборок. Если предположение о пропорциональности дисперсии отклонений значениям x (номеру в вариационном ряду) верно, то дисперсия регрессии по первой подвыборке (или

сумма квадратов отклонений $S_1 = \sum_{i=1}^k e_i^2$) будет существенно меньше дисперсии ре-

грессии по третьей подвыборке (суммы квадратов отклонений $S_3 = \sum_{i=n-k+1}^n e_i^2$).

3. Для сравнения соответствующих дисперсий строится следующая F -статистика:

$$F = \frac{S_3 / (k - m - 1)}{S_1 / (k - m - 1)} = \frac{S_3}{S_1}. \quad (2.2.14)$$

Здесь $(k - m - 1)$ – число степеней свободы соответствующих выборочных дисперсий, m – количество объясняющих переменных в уравнении регрессии. При сделанных предположениях F -статистика имеет распределение Фишера с числами степеней свободы $v_1 = v_2 = k - m - 1$ (см. [Приложение 1](#)).

4. Если $F = \frac{S_3}{S_1} > F_{кр} = F_{q; v_1; v_2}$, то гипотеза об отсутствии гетероскедастичности (неравноточности) **отклоняется** с вероятностью ошибки q .

Величина интервала k должна быть больше чем $m + 1$ и обычно примерно равна $1/3n$. При предположении об обратной пропорциональности между σ_i и x_i (номером в ряду) статистика имеет вид $F = \frac{S_1}{S_3}$.

При более общем предположении, что дисперсия отклонения либо увеличивается, либо уменьшается с увеличением значения x (номера в вариационном ряду) в регрессии, построенной по *методу наименьших квадратов*, абсолютные величины отклонений e_i и значения x_i случайной величины X будут максимально *коррелированы*. В этом случае можно использовать при проверке на наличие значимых эффектов гетероскедастичности тест *ранговой корреляции Спирмена* (см., например, [2]).

На первом этапе критерия значение x_i и e_i ранжируются (т.е. строится вариационный ряд) и по ним определяют *ранговый коэффициент корреляции Спирмена*

$$r_{x,e} = 1 - 6 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n d_i^2}{n \cdot (n^2 - 1)}, \quad (2.2.15)$$

где d_i – разность рангов $d_i = R_{(x_i)} - R_{(e_i)}$ для рядов x_i и e_i .

Доказано, что если коэффициент корреляции $\rho_{x,e}$ для генеральной совокупности равен нулю, то статистика

$$t = \frac{r_{x,e}}{\hat{\sigma}_r} = \frac{r_{x,e} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,e}^2}} \quad (2.2.16)$$

имеет *распределение Стьюдента* с числом степеней свободы $\nu = n - 2$. Значит, если наблюдаемое значение t -статистики, вычисленное по этой формуле, превышает критическое $t > t_{кр.} = t_{\frac{q}{2}, n-2}$, то необходимо **отклонить** гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции $\rho_{x,e}$ (и, следовательно, об **отсутствии** гетероскедастичности)

с вероятностью ошибки q . Здесь величина $t_{кр.}$ – квантиль распределения Стьюдента по вероятности $P = 1 - q$ и числу степеней свободы $n - 2$ (см. [Приложение 3](#)). Если $t < t_{кр.}$, то гипотез об отсутствии неравноточности **принимается** с доверительной вероятностью P .

Систематическое влияние в виде коррелированности i -го и j -го остатков $\text{cov}(e_i, e_j) \neq 0$, если они упорядочены по времени, номеру или в пространстве, называют *автокорреляцией (последовательной корреляцией)*. Выделяют **положительную** автокорреляцию $\text{cov}(e_i, e_j) > 0$, которая чаще всего вызывается направленным постоянным воздействием некоторых неучтенных в модели факторов. **Отрицательная** автокорреляция фактически означает, что за положительным отклонением следует отрицательное, и наоборот, причем очень часто.

Основные причины автокорреляции – ошибки спецификации модели, т.е. не учет какой-либо важной объясняющей переменной (или неправильный выбор формы зависимости в регрессии); наличие *лаговых* переменных, т.е. **влияние** одной переменной на другую **с запаздыванием** в k величин (*лаг* порядка k); сглаживание данных, т.е. усреднение их по интервалам.

Наиболее простой способ обнаружить автокорреляцию – это *метод рядов*. В нем определяют знаки отклонений e_i и строится обычный знаковый ряд. Из n элементов ряда считают n_1 – общее число знаков плюс и n_2 – общее число знаков минус, а также k – количество рядов из одинаковых, подряд идущих знаков. **При достаточно большом** числе наблюдений ($n_1 > 10, n_2 > 10$) и **отсутствии** автокорреляции, случайная величина k имеет асимптотически нормальное распределение с характеристиками

$$\begin{cases} M(k) = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1; \\ D(k) = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)}. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Тогда, если

$$M(k) - u_{q/2} \cdot D(k) < k < M(k) + u_{q/2} \cdot D(k), \quad (2.2.18)$$

то гипотеза об отсутствии автокорреляции **не отклоняется** с вероятностью ошибки q .

Для небольшого числа измерений ($n_1 < 10, n_2 < 10$) Свед и Эйзенхарт разработали таблицы ([Приложение 4](#)). В них на пересечении строки n_1 и столбца n_2 определяют нижние k_1 и верхние значения критерия при уровне значимости $q = 0.05$. Если $k_1 < k < k_2$, то говорят об **отсутствии** автокорреляции. Если $k \leq k_1$, то говорят о **положительной** автокорреляции остатков, а при $k \geq k_2$ – об **отрицательной** автокорреляции.

Если исследуется автокорреляция 1-го порядка ($\text{cov}(e_i, e_{i+1}) \neq 0$), то наиболее известным и часто используемым является критерий Дарбина – Уотсона. Суть его в том, что по вычисленной статистике DW Дарбина – Уотсона делается вывод о виде и значимости автокорреляции, т.к. эта статистика вида

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}, \quad (2.2.19)$$

тесно связана с выборочным коэффициентом корреляции $r_{e_i, e_{i-1}}$:

$$DW \approx 2 \cdot (1 - r_{e_i, e_{i-1}}). \quad (2.2.20)$$

Таким образом $0 \leq DW \leq 4$, и её значения могут указать на значимость и вид автокорреляции. Действительно, если $r_{e_i, e_{i-1}} \approx 0$ (отсутствие автокорреляции), то $DW \approx 2$. Если $r_{e_i, e_{i-1}} \approx 1$ (положительная автокорреляция), то $DW \approx 0$. Если $r_{e_i, e_{i-1}} \approx -1$ (отрицательная автокорреляция), то $DW \approx 4$ (см. формулу (2.2.20)).

Для более точного определения построены таблицы критических точек *распределения Дарбина – Уотсона* (см. [Приложение 4](#)) с уровнем значимости q , числом измерений n , количеством объясняющих переменных m . В них определяются d_l – нижняя и d_u – верхняя границы критерия.

Общая схема критерия Дарбина – Уотсона следующая:

1. Строят эмпирическое уравнение регрессии, например, x_i от i , или другое, и находят остатки $e_i = x_i - \hat{x}_i$.

2. Рассчитывают по формуле (2.2.19) статистику DW и, при приближенном оценивании, по изложенному выше правилу смотрят к какому числу (0, 2 или 4) находится ближе вычисленное значение статистики. Исходя из этого, делают приближенный вывод о возможности того или иного исхода.

Можно считать (но грубо), что если $1,5 < DW < 2,5$, то автокорреляция отсутствует. Результаты тем надежней, чем ближе статистика к ключевым точкам.

Если используют таблицы критических точек DW , то:

- существует положительная автокорреляция если $0 \leq DW \leq d_l$;
- вывод о наличии автокорреляции не определен, если $d_l \leq DW \leq d_u$;
- автокорреляция отсутствует, если $4 - d_u \leq DW \leq 4 - d_l$;
- существует отрицательная автокорреляция если $4 - d_l \leq DW \leq 4$.

2.3. Дополнительные методы исследования структуры результатов измерений

Процедуры исследования на соответствие нормальному закону распределения.

Графические методы исследований.

Выявление эффектов автокорреляции.

Выявление эффектов гетероскедастичности.

Выявление линейного тренда по МНК.

Процедуры исследования на соответствие нормальному закону распределения.

При исследовании на соответствие нормальному закону погрешностей результатов измерений выделяют следующие случаи:

1. *Число измерений больше 8.* Вроде бы ни о каком статистическом исследовании речи идти не может, основываясь на том, что при таком значении n , вероятности попадания в интервалы широчайшего диапазона классов распределений практически неотличимы между собой. Отсюда следует, что любые ММП-оценки в этих условиях совершенно случайны и одинаково неопределенны. В такой ситуации целесообразнее использовать простейшие оценки количества-качества типа «среднее арифметическое» – средняя квадратическая погрешность или «медиана» – средняя абсолютная погрешность. В последнее время для этого диапазона числа измерений при проверке на нормальность результатов начали использовать *критерий Шапиро – Уилка*, который оказался на удивление мощным и работоспособным уже при $n \sim 10$.

2. *Число измерений $15 < n < 50$.* В этом случае что-то уже можно сказать о соответствии погрешностей результатов измерений нормальному закону распределения. Один из достаточно известных критериев исследования носит название *двухступенчатый*, или *составной* и помещен в ГОСТ 8.207-76. В нем, если не выполняются хотя бы один из двух критериев, нормальность результатов измерений отвергается.

Критерий 1. Вычисляют отношение \tilde{c} :

$$\tilde{c} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{nS^*}, \quad (2.3.1)$$

где S^* – смещенная оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n}}. \quad (2.3.1a)$$

Результаты наблюдений можно считать распределенными *нормально*, если

$$d_{1-q_1/2} < \tilde{c} < d_{q_1/2}, \quad (2.3.16)$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ – *квантили распределения*, получаемые по значениям n таблицы 2.3.1, причем q_1 – заранее выбранный *уровень значимости* критерия.

Таблица 2.3.1. – Статистика d

n	$q_1/2$ 100%		$(1 - q_1/2)$ 100%	
	1%	5%	95%	99%
16	0.9137	0.8884	0.7236	0.6829
21	9001	8768	7304	6950
26	8901	8686	7360	7040
31	8826	8625	7404	7110
36	8769	8578	7440	7167
41	8722	8540	7470	7216
47	8682	8508	7496	7256
51	8648	8481	7518	7691

Критерий 2. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более m разностей $(x_i - \tilde{x})$ превзошли значение $z_{P/2} \cdot S$, где S – оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{x})^2}{n-1}}; \quad (2.3.2)$$

$z_{P/2}$ – верхняя квантиль распределения *нормированной функции Лапласа*, отвечающая вероятности $P/2$.

Значения P определяются из таблицы 2.3.2 по выбранному уровню значимости q_2 и числу результатов измерений n . При уровне значимости, отличном от предусмотренных в таблице 2.3.2, значение P находят путем *линейной интерполяции*. В случае, если хотя бы один из критериев не соблюдается, считают, что распределение результатов измерений не соответствуют нормальному.

Таблица 2.3.2. – Значения P для вычисления $z_{P/2}$

n	m	$q_2 \cdot 100\%$		
		1%	2%	5%
10	1	0.98	0.98	0.96
11–14	1	0.99	0.98	0.97
15–20	1	0.99	0.99	0.98
21–22	2	0.98	0.97	0.96
23	2	0.98	0.98	0.96
24–27	2	0.98	0.98	0.97
28–32	2	0.99	0.98	0.98
33–35	2	0.99	0.98	0.98
36–49	2	0.99	0.99	0.98

3. Число измерений больше 50, но не на много. В этом случае обычно используют критерии типа ω^2 . Эти критерии не требуют группировки измерений в интервалы и таким образом не теряют часть информации, но приводят к значительному объему вычислений, что, впрочем, не важно с развитием вычислительной техники. Самый простой из них – *критерий Мизеса – Крамера – Смирнова* (см, например, [1]). Проверая гипотезу о нормальности распределения с помощью этого критерия вычисляют

$$n \cdot \omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n (P(x) - W(x))^2 \quad (2.3.3)$$

и проверяют неравенство $n \cdot \omega^2 \leq z_q$. Здесь n – число измерений, $P(x)$ – значение функции нормального распределения:

$$P(X < x) = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

или обычная функция закона распределения

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

где $z = \frac{x - a}{\sigma}$ – нормализованное значение x .

$W(x)$ – накопленная частота данных, определяемая как

$$W(x) = \frac{(i) - 0,5}{n} = \frac{2 \cdot (i) - 1}{2n}, \quad (2.3.4)$$

где (i) – номер измерения в вариационном ряду;

z_q – критическое значение критерия ω^2 для уровня значимости q (см. Приложение 4 с.196).

Выполнение неравенства критерия говорит о **принятии** гипотезы соответствия исследуемого ряда нормальному закону с доверительной вероятностью $P = 1 - q$.

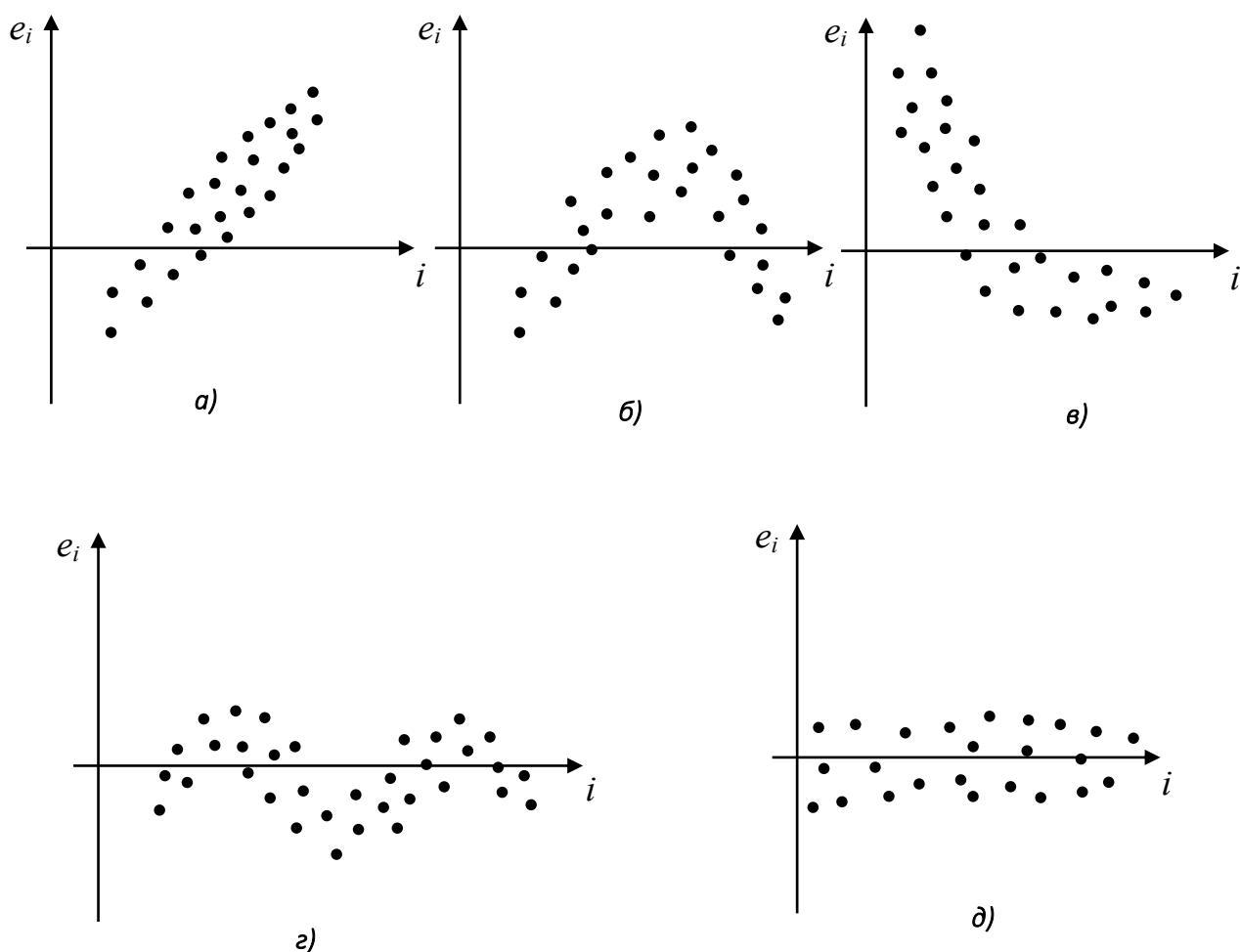
4. *Количество измерений больше 100.* Здесь используют известные критерии типа χ^2 -Пирсона (но предпочтительнее, если данные сгруппированы естественно), **Колмогорова** и некоторые другие. При $n > 200$ можно использовать критерии типа *Жарка – Берры*, совместно исследующих асимметрию и эксцесс распределения на основе статистики χ^2 -Пирсона и т.п.

Графические методы исследований. Вроде бы примитивные графические методы достаточно часто просто и наглядно позволяют решать практически все задачи анализа структуры результатов измерений.

Для исследования на соответствие нормальному закону погрешностей результатов измерений кроме *гистограммы, многоугольника (полигона) распределения или кумулянты*, достаточно хорошо может быть использована так называемая *вероятностная бумага*.

Выявление эффектов автокорреляции. Достаточно неплохо графический метод может быть использован и для выявления эффектов *автокорреляции*. Здесь существует ряд способов:

1. Построение и анализ графика зависимости отклонения v_i (остатков e_i) от номера (или от времени t) – так называемые *последовательно-временные* графики. Здесь по оси абсцисс откладывают номер (время), по оси ординат – теоретические отклонения ε_i или их оценки e_i (v_i) (рисунок 2.3.1).

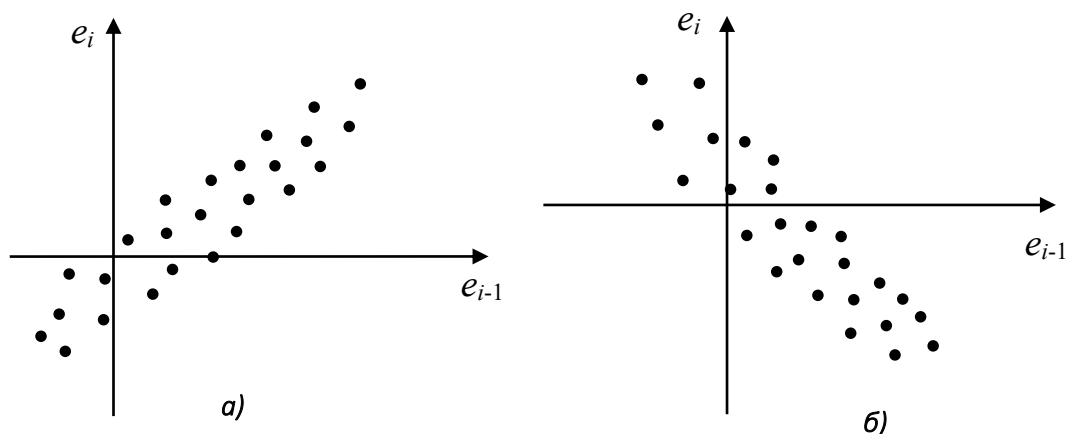


а) – г) – автокорреляция присутствует; д) автокорреляция отсутствует
 Рисунок 2.3.1. – Виды зависимостей исходных данных

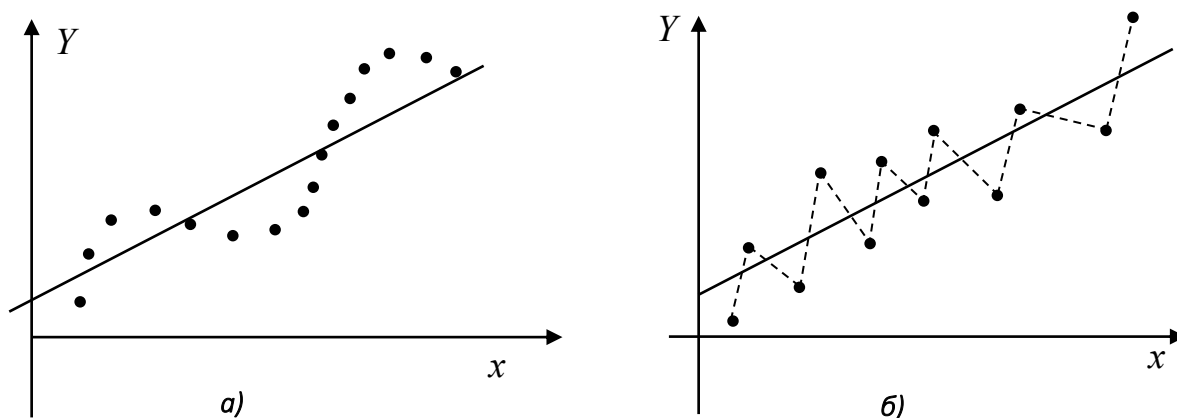
Очевидно, что на рисунке 2.3.1 (а – г) имеются определенные связи между отклонениями, то есть *автокорреляция имеет место*. Отсутствие зависимости на рисунке 2.3.1, д) скорее всего свидетельствует об *отсутствии автокорреляции*. Напомним, что *положительная автокорреляция* вызывается направленным постоянным воздействием некоторых неучтенных в модели факторов. Таким образом, на графике линейной зависимости (влечения, *тренда*) при такой автокорреляции должна явно проступать долговременная тенденция к увеличению, затем снижению и т.д. (рисунок 2.3.1, а). Это также графики типа в) и г) на рисунке 2.3.1.

Утверждение о положительной (отрицательной) автокорреляции становится совершенно наглядным если представленные графики дополнить графиками зависимости e_i от e_{i-1} (рисунок 2.3.2).

На рисунке 2.3.2, а) данные вытянуты слева направо и вверх, что говорит о *положительной автокорреляции* (**возрастание** одной величины влечет **возрастание** другой). *Отрицательная автокорреляция* фактически означает, что за положительным отклонением следует отрицательное и наоборот. Это хорошо видно при наложении тренда на исходные данные (рисунок 2.3.3), а еще лучше – на графике зависимости e_i от e_{i-1} (рисунок 2.3.2, б). Здесь *поле точек* явно вытянуто слева направо вниз, что и говорит об *отрицательной автокорреляции*.

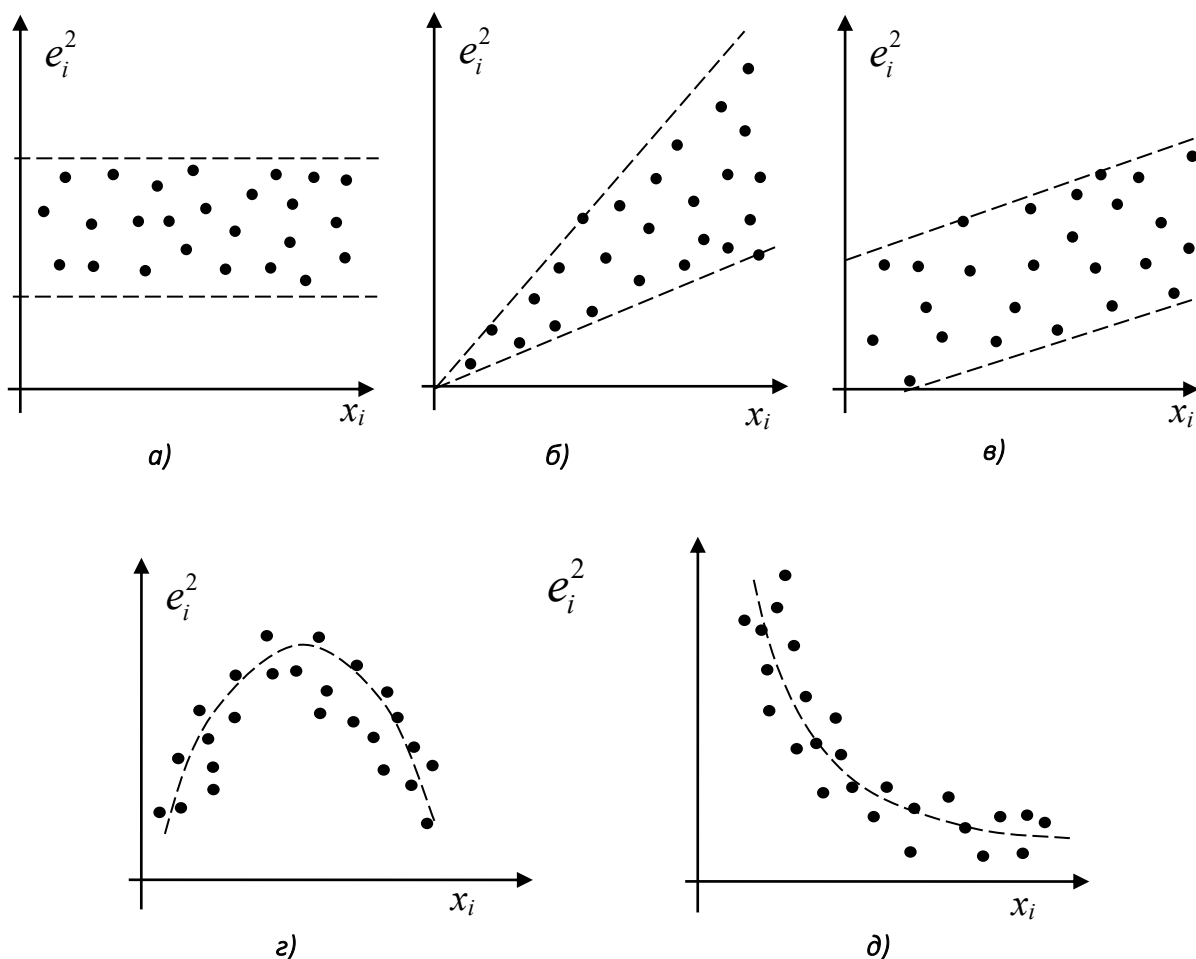


а) –положительная автокорреляция; б) – отрицательная автокорреляция
 Рисунок 2.3.2. – Графики автокорреляционных зависимостей e_i от e_{i-1}



а) –положительная автокорреляция; б) – отрицательная автокорреляция
 Рисунок 2.3.3. – Виды автокорреляции в исходных данных

Выявление эффектов гетероскедастичности. Использование графического представления позволяет определиться и с наличием *гетероскедастичности*. В этом случае обычно по оси абсцисс откладывают значение результата измерения x_i (или его *погрешности*), а по оси ординат – либо отклонение e_i , либо их квадраты e_i^2 (рисунок 2.3.4). Рисунок 2.3.4 а) говорит о **независимости** оценок дисперсий e_i^2 от значений результатов измерений x_i и их **постоянстве**, так как все результаты измерений находятся внутри полосы постоянной ширины и параллельны оси абсцисс. На рисунке 2.3.4 (б – д) наблюдаются некоторые **систематические изменения** в соотношениях между x_i и e_i^2 : в) – линейное, г) – квадратичное, д) – гиперболическая зависимости, которые могут быть полезны при идентификации вида элементов весовой матрицы W .



а) –отсутствие гетероскедастичности; б)–д) –возможные виды гетероскедастичности
Рисунок 2.3.4. – Графическое представление эффекта гетероскедастичности

Выявление линейного тренда по МНК [6]. Достаточно хорошим методом графического анализа на наличие некоторого *тренда* (*влечения*) является аппроксимация результатов измерений x_i линейным уравнением в зависимости от номера i : $\hat{x}_i = a \cdot i + b$. Тогда уравнения поправок есть $v_i = \hat{x}_i - x_i = a \cdot i + b - x_i$. Целевая функция будет $\Phi = [v^2] = [(a \cdot i + b - x_i)^2]$, минимизация которой по МНК дает

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2 \cdot [(a \cdot i + b - x) \cdot i] \Rightarrow [i^2] a + [i] b - [x \cdot i] = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2 \cdot [(a \cdot i + b - x) \cdot 1] \Rightarrow [i] a + n \cdot b - [x] = 0 \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Учтем очевидные равенства

$$[i] = \frac{n(n+1)}{2}; \quad [i^2] = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = [i] \frac{(2n+1)}{3}. \quad (2.3.7)$$

Тогда система нормальных уравнений $N \cdot y = c$, с матрицей $N = \begin{bmatrix} [i^2] & [i] \\ [i] & n \end{bmatrix}$, вектором свободных членов $c = \begin{bmatrix} [x \cdot i] \\ [x] \end{bmatrix}$, будет иметь решение

$$y = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = Q \cdot c = \begin{bmatrix} n & -[i] \\ -[i] & [i^2] \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{[i^2] \cdot n - [i]^2} \cdot \begin{bmatrix} [x \cdot i] \\ [x] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{[i^2] \cdot n - [i]^2} \cdot \begin{bmatrix} n \cdot [x \cdot i] - [i] \cdot [x] \\ -[i] \cdot [x \cdot i] + [i^2] \cdot [x] \end{bmatrix}. \quad (2.3.8)$$

Рассматривая регрессию по *методу средних* имеем:

$$x_j = \bar{x} + \frac{m_x}{m_i} \cdot r_{x,i} (i_j - \bar{i}) = \left\{ \frac{m_x}{m_i} \cdot r_{x,i} \right\} \cdot i_j + \left\{ \bar{x} - \frac{m_x}{m_i} \cdot r_{x,i} \cdot \bar{i} \right\} = a \cdot i_j + (\bar{x} - a \cdot \bar{i}). \quad (2.3.9)$$

Отсюда следует, что, если $r_{x,i} \approx 0$, то $a \rightarrow 0$, а $x_j \rightarrow \bar{x}$.

Таким образом, **незначимое** отклонение от нуля коэффициента a говорит об **отсутствии** значимого систематического влияния в виде *линейного тренда* (зависимости от номера i). В этом случае линия регрессии практически горизонтальна по уровню \bar{x} .

Проверку значимости коэффициента a можно провести по критерию Стьюдента:

$t = \frac{a}{m_a}$, $t_{кр.} = t_{q/2, (n-2)}$. Если $t > t_{кр.}$ – критерий попадает в *критическую область*, то гипотеза $a = 0$ **отвергается** с вероятностью ошибки q .

2.4. Нетрадиционные методы оценивания многократно измеренной величины

[Модификации МНК.](#)

[L_p-оценки.](#)

[Адаптивные оценки.](#)

[Непараметрический анализ структуры.](#)

[Последовательность обработки многократно измеренной величины в общем случае.](#)

[Задача проектирования точности многократных измерений.](#)

Модификации МНК. При наличии как гетероскедастичности (неравноточности) так и автокорреляции (зависимости) оценки, оставаясь несмещенными, перестают быть эффективными, а дисперсии оценок являются смещенными (обычно заниженными). Любые выводы в этом случае как по t -, так и по F -статистикам вероятнее всего будут **неверными**.

Для устранения гетероскедастичности возможно преобразовать модель, в которой данный недостаток будет устранен. Для этого в наиболее общей форме использу-

ется метод взвешенных наименьших квадратов (ВМНК). Если записать оценку в виде среднего арифметического как

$$\bar{x} = \frac{[x]}{n} = \frac{e^T \cdot x}{e^T \cdot e}, \quad (2.4.1)$$

где e – вектор-строка из единиц $e = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$, а затем добавить в нее диагональную матрицу структуры измерений (весовую) W , то имеем

$$\bar{x} = \frac{e^T \cdot W \cdot x}{e^T \cdot W \cdot e}. \quad (2.4.2)$$

Если $W = E$ (единичной матрице), то (2.4.2) переходит в (2.4.1). Можно показать, что если измерения *равноточные* с погрешностью m (эффект *гомоскедастичности*), то $W = m^2 \cdot E$ и оценка (2.4.2)

$$\bar{x} = \frac{e^T \cdot (m^2 \cdot E) x}{e^T \cdot (m^2 \cdot E) e} = \frac{m^2 \cdot e^T \cdot x}{m^2 \cdot e^T \cdot e} = \frac{e^T \cdot x}{e^T \cdot e}$$

не зависит от величины погрешности измерения (*масштаба*). Если в (2.4.2) точность измерений *разная*, (эффект *гетероскедастичности*), то это требует учета, так как приводит к искажению количественной (2.4.1) и качественной оценок. Качество в этом случае оценивается в виде *взвешенных средних квадратических погрешностей*, которые будут получены ниже:

$$m = \mu = \sqrt{\frac{[W \cdot (x - \bar{x})^2]}{n - 1}} = \left(\frac{v^T \cdot W \cdot v}{n - 1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[W]}} = \left(\frac{1}{(n - 1)} \cdot \frac{v^T \cdot W \cdot v}{e^T \cdot W \cdot e} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если дисперсии измерений **неизвестны**, то для определенности может пригодиться любая информация об их поведении. Это может быть *вид зависимости* значения дисперсии от номера в ряду измерений, зависимость от величины измерений или квадрата величины измерений и т.д. В двух последних случаях весовые матрицы могут иметь вид, например:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_1}} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{x_n}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{x_1} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_n} \end{bmatrix}$$

Здесь подразумевается наиболее часто встречающаяся обратно пропорциональная зависимость. Если наиболее ярко проявляется зависимость дисперсии от номера, то есть $\sigma_i^2 = \sigma_0^2 \cdot i$, то весовая матрица может иметь вид

$$W = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Несложно показать, что весовая матрица может быть выражена через *ковариационную* как

$$W = \sigma_0^2 \cdot K_x^{-1}, \quad (2.4.3)$$

где σ_0^2 – дисперсия единицы веса;

K_x^{-1} – обратная к обычной ковариационной матрице измерений, что тоже может помочь выявить структуру матрицы W .

Для учета эффекта автокорреляции и гетероскедастичности используют *обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК)*, когда весовая матрица W имеет **полную симметричную структуру**. Теорему о возможности такого рода обработки доказал **А. Эйткен** (1935 г.). В основу доказательства положена *инвариантность* (неизменность) уравнения оценивания при домножении его слева и справа на одну и ту же невырожденную матрицу. Для оценивания многократно измеренной одной величины x_i в виде \hat{x} , составляют модель

$$x_i = \hat{x} + v_i,$$

по которой строят *уравнения поправок* вида

$$v_i = x_i - \hat{x}, \quad (2.4.4)$$

или в **матричном** виде

$$v = x - e^T \cdot \hat{x}. \quad (2.4.4a)$$

Минимизируя целевую функцию $\Phi = [v^2] = v^T v$, мы приходим к оценке в виде *среднего арифметического*. Но если уравнение (2.4.4) или (2.4.4a) **домножить** слева и справа на матрицу C , то имеем

$$C \cdot v = C \cdot x - C \cdot \hat{x}, \quad \sim \quad \sim \quad \sim.$$

Тогда условие МНК будет

$$\sim \quad \sim \quad \left(e^T \cdot C \right) \cdot v = v^T W v, \quad (2.4.5)$$

которое является условием *обобщенного метода наименьших квадратов* (см. параграф об оценке *неравноточных измерений*).

Если соотношение между весами w_i и результатами измерений x_i до начала расчетов неизвестны, то используют **неодношаговые процедуры**. Например, для *двухшаговой* процедуры расчета по *ВМНК* на первом шаге по обычному *МНК* находят оценку в виде среднего арифметического \bar{x} и модули отклонений $|v_i| = |x_i - \bar{x}|$. Эти отклонения **выравнивают** подходящей моделью по *МНК*, в зависимости от x_i . Тогда квадраты выровненных значений \hat{v}_i являются *несмещенными оценками* m_i^2 дисперсий измерений σ_i^2 . Из полученных значений $\hat{v}_i^2 = m_i^2$ формируется *диагональная матрица весов* W с элементами $w_i = 1/\hat{v}_i^2$. На втором шаге, с помощью процедуры *ВМНК* получаем новую, откорректированную *ВМНК-оценку* искомой величины.

Чтобы использовать *ОМНК*, после выявления значимых эффектов гетероскедастичности и автокорреляции, необходим еще и учет в матрице W *эффектов связи* между результатами измерений. Если известно, что автокорреляция наиболее значима только между рядом стоящими значениями, то из связи статистики Дарбина – Уотсона с этим коэффициентом корреляции $\rho_{v_i, v_{i-1}}$, имеем

$$\rho_{v_i, v_{i-1}} \approx 1 - \frac{DW}{2}, \quad (2.4.6)$$

но метод весьма неплох лишь при большом числе измерений.

Можно показать, что ковариационная матрица измерений в данной *модели автокорреляции* будет

$$K_x = \frac{1}{1-\rho^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \dots \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \dots \\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

при дисперсии одного измерения $\frac{1}{1-\rho^2}$ (может быть $\frac{\sigma_0^2}{1-\rho^2}$, $\frac{1}{1-\rho^2} \cdot \Omega$, где Ω – диагональная матрица дисперсий измерений при *неравноточности*), а

$$K_x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & & \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & & \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 &) \end{pmatrix} \quad \text{– трехдиагональная матрица. (2.4.8)}$$

Так как корреляционная матрица измерений $R_x = D \cdot K_x \cdot D$, то ковариационная матрица $K_x = D^{-1} \cdot R_x \cdot D^{-1}$. Здесь D – **диагональная матрица** с элементами $1/m_i$, или их оценками, которые были получены выше. Также, $K_x = \sigma_0^2 \cdot Q_x = \sigma_0^2 \cdot W_x^{-1}$, откуда $W = \sigma_0^2 \cdot K_x^{-1}$ как в (2.4.3), а σ_0^2 может равняться **единице**. Таким образом, используя оценки дисперсий измерений и оценки автокорреляции, получают оценку ковариационной матрицы измерений K_x , а из неё – весовую матрицу из (2.4.8) для проведения процедуры оценивания по *ВМНК*.

L_p-оценки (см., например, [12]). В рамках параметрического неклассического способа оценивания достаточно неплохие результаты можно получить, используя так называемые *L_p-оценки*, на основе *метода максимального правдоподобия*. Основное уязвимое место параметрического способа оценивания – это необходимость достаточно хорошего знания *закона распределения* погрешностей результатов измерений. В *L_p-оценках* закон распределения представлен формулой семейства *экспоненциальных распределений* (см. (1.2.20)), зависящих от *показателя степени* α . Также было показано, что показатель может быть однозначно выражен через эксцесс распределения (1.2.21). Эта связь может быть учтена и приближенно, но достаточно неплохо [1; 15]:

$$\alpha = \frac{6}{E'}, \quad (2.4.9)$$

где E' – неприведенный эксцесс $E' = E + 3$.

Таким образом, для *нормального закона распределения* погрешностей результатов измерений $E = 0$, имеем $E' = 3$, а показатель в семействе экспоненциальных законов распределений $\alpha = 2$; для *закона распределения Лапласа* вместо $E = 3$ имеем $E' = 6$ и $\alpha = 1$. Все другие, наиболее часто встречающиеся в практике геодезических измерений показатели размещены, в основном, между 1 и 2. Иногда – чуть больше 2, крайне редко – меньше 1, поэтому формула (2.4.7) **достаточно хорошо** применима. При $E \approx -3$, $E' \rightarrow 0$, а $\alpha \rightarrow \infty$. Определив показатель степени α , используют *метод максимального правдоподобия* для определения **вида** оценок. Несложно показать, что вес w_i в *средневесовом* для *M-оценок* в этом случае будет

$$w_i = \sigma_0^\alpha \cdot |v_i|^{\alpha-2}, \quad (2.4.10)$$

где v_i – отклонение от вычисленной оценки $v_i = x_i - \hat{x}$.

При $\alpha = 2$ функциональные веса $w_i = 1$ (или σ_0^2), а при $\alpha = 1$ – $w_i = \frac{\sigma_0}{|v_i|}$ и т.д.

Очевидно, что, если $v_i = 0$, то вместо него берут какую-то малую величину, чтобы не получить переполнение памяти используемых вычислительных средств. Таким образом имеем следующую **итеративную процедуру**:

1. Получение первой оценки $\hat{x}^{(1)}$ каким либо устойчивым методом, нахождение эксцесса и показателя степени α .
2. Вычисление среднего взвешенного в качестве новой оценки и новых функциональных весов w_i , и т.д.

3. Итерации заканчиваются, если полученные соседние оценки отличаются на заданную величину δ .

При $1 < \alpha < 2$, L_p -оценки имеют *робастные (помехоустойчивые) свойства*. То есть, метод максимального правдоподобия дает наилучшие оценки при точном знании закона распределения погрешностей результатов измерений, что в большинстве случаев практически трудно осуществимо (из-за незнания класса распределения, малого числа измерений, наличия невыявленных мешающих параметров и т.д.). В таких ситуациях, бывает выгоднее искать не оценку, являющуюся наилучшей для конкретного закона распределения, которая резко теряет свои хорошие свойства при отклонении реального закона распределения от предполагаемого, а оценку, хотя и не лучшую для данного закона распределения, но **достаточно устойчивую** в более широком классе законов распределений, в который данный закон входит как частный случай. Эти оценки и называют *робастными*.

Адаптивные оценки. Оценку считают *адаптивной*, если в зависимости от величины индикатора выбирается тот или иной путь их вычисления. К этому же классу можно отнести *адаптивную оценку Хогга* (1974 г):

$$c_n = \begin{cases} S_n(0.25; n), & t_n > 2; \\ C_n(0.25; n), & 2 \leq t_n \leq 4; \\ C_n(0; n), & 4 < t_n \leq 5.5; \\ C_n(0.5; n), & 5.5 < t_n. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

Здесь в качестве индикатора выступает оценка *неприведенного эксцесса*

$$t_n = \frac{[v^4]}{(n-1) \cdot m^4};$$

$C(0.25; n)$ – среднее по 25% максимальных и 25% минимальных значений **упорядоченной** выборки;

$C_n(\alpha; n)$ – оценка α -усеченного среднего арифметического.

Хогг показывает эффективность этих оценок уже для $n = 7$ в широком классе распределений. Для оценки индикатора (длины «хвостов» у Хогга) более лучшей является *статистика*:

$$t_n = \frac{(a_n(0,05) - b_n(0,05))}{(a_n(0,5) - b_n(0,5))}, \quad (2.4.12)$$

где $a_n(\beta)$ – среднее по $100\beta\%$ наибольших порядковых статистик (элементов ряда по возрастанию);

$b_n(\beta)$ – среднее по $100\beta\%$ наименьших порядковых статистик, которая является робастной.

Такого рода оценки вплотную примыкают к *непараметрическим оценкам*. При этом виде оценивания не требуется знания закона распределения.

Непараметрический анализ структуры (см., например, [1]). Для отбраковки *грубых измерений* на основе робастных процедур, Хоглин – Иглевич предложили следующий алгоритм, позволяющий из ряда измерений получать *медиану*, а на ее основе – *абсолютное медианное отклонение Хампела*

$$MAD = \text{med}_i (|x_i - \text{med}(x)|). \quad (2.4.13)$$

Тогда, все что **выходит** за пределы

$$\text{med}_i(x) \pm 5,2 \cdot MAD, \quad (2.4.13a)$$

отбрасывается как грубое. В американском критерии качества процедура носит название правило Х84, у нас – *правило Хампела*. Процедура достаточно устойчива и не требует (что очень важно) знания закона распределения погрешностей результатов измерений.

Еще одно свойство результатов измерений, которое требует проверки, это *однородность*, т.е. закон распределения подвыборки из n_1 элементов **такой же**, как и у подвыборки объема n_2 , $n = n_1 + n_2$. *Альтернативной гипотезой* может быть наличие *сдвига* центра распределений относительно друг друга. В этом случае используют самый простой *критерий Вилкоксона – Манна – Уитни*. Если сдвиг в выборках отсутствует, оценивание равенства дисперсий против альтернативной гипотезы о различии дисперсий можно произвести *непараметрическим критерием Клотца* (1962 г).

Непараметрическая проверка *симметричности* распределения может быть выполнена на основе *одновыборочного критерия Вилкоксона* (1945 г).

Необходимость в непараметрических критериях анализа следует из того, что при параметрическом исследовании требуется знание закона распределения (или меры соответствия закону распределения), чтобы исследовать на *значимость мешающих параметров*. Но наличие мешающих параметров при исследовании на соответствие закону распределения может значительно исказить результаты. Таким образом, имеем замкнутый круг: чтобы исследовать параметрическими способами на соответствие нормальному закону распределений, надо знать значимость мешающих параметров, которые в этом подходе выявляются только на основе знания закона распределения. Один из выходов – использование непараметрических статистик.

Последовательность обработки многократно измеренной величины в общем случае. Исходя из всего, сказанного выше, процедура обработки одной многократно измеренной равноточной величины можно разделить на следующие пункты:

1. *Число измерений $n < 8$* . Исследование на закон распределения **не возможно**, и используются *простейшие оценки* количества и качества результатов измерений. При этом стоит учитывать, что возможно *значимое систематическое влияние*, которое при таком n также эффективно не выявляется. Один из возможных вариантов обработки – **получить 2 пары**: *среднее арифметическое – средняя квадратическая погрешность* и *медиана – среднее абсолютное отклонение*. Если медиана и среднее арифметическое незначительно отличаются друг от друга, то можно говорить об отсутствии *выбросов* и (следуя Эджворту) *смещенности*. Тогда в качестве основных характеристик выбирают *среднее арифметическое* и *среднюю квадратическую погрешность*. При **значительном** отличии (есть явное засорение) используют в качестве характеристик *медиану* и *среднее абсолютное отклонение*. Неплохо было бы провести

аппроксимацию данных x_i в зависимости от номера i и выявить наличие и значимость *линейного тренда*.

Другой подход в этих условиях – сразу использовать адаптивные или не параметрические оценки.

2. При числе измерений $8 < n < 50$ исследование на соответствие нормальному закону распределения проводится по критерию Шапиро – Уилка, а при $n > 15$, например, по *двухступенчатому критерию*. В случае **положительного** результата для оценки основных характеристик используются традиционные формулы с анализом мешающих параметров параметрическими методами. В случае **отрицательного** вывода используют или *адаптивные оценки*, или *L_p-оценки*, или *робастные процедуры*. При этом метод оценивания выбирается в зависимости от анализа мешающих параметров на основе *непараметрических методов*.

3. При числе измерений $n > 50$ процедура аналогична п. 2, но критерий соответствия нормальному закону распределения – ω^2 Мизеса или χ^2 Пирсона **при группированных данных**.

Следует помнить, что в отличие от *задачи идентификации* вида зависимости по экспериментальным данным, в *задаче оценивания* результатов измерений **значимое систематическое влияние** должно быть устранено *поправками*. Очевидно, что это исправление **не уничтожает** систематическую погрешность полностью, а только до уровня незначимых *остаточных систематических погрешностей* (при правильной идентификации и учете).

Задача проектирования точности многократных измерений. При обработке одной многократно измеренной равноточной величины, как и при оценивании функции также выделяют, наряду с прямой задачей оценивания, *обратную задачу проектирования (предрасчета)* точности результатов измерений. В самом простом случае задача может быть решена на основе формулы оценки точности среднего арифметического:

$$m_{\bar{x}} = \frac{m_0}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \frac{m_0^2}{m_{\bar{x}}^2}, \quad m_0 = m_{\bar{x}} \cdot \sqrt{n}, \quad (2.4.14)$$

в зависимости от того, что задано и что требуется получить. В этом же случае возможно проектирование на основе *сеточного метода*, когда перебираются все возможные значения n и m_0 , строится таблица, из которой выбираются приемлемые условия измерений при заданной погрешности.

Проектирование по точности при различных условиях рассмотрено в главе посвященной проектированию по точности функций. Там же, рассматривая *проектирование по структуре f_i* , можно получить различные формулы для оценки числа приемов n (см. таблицу 1.4.1). При этом, все формулы таблицы при *проектировании по точности* дают (2.4.14), а при *проектировании по геометрии* $f_i = \frac{m_{\bar{x}}}{m_0 \cdot \sqrt{n}}$ или

$$f_i = \frac{1}{n}.$$

При наличии *систематических погрешностей* увеличение числа приемов **не уменьшают** её, а только *случайную* составляющую общей погрешности. В этом случае

необходимо знать примерное соотношение между *случайной* и *систематической погрешностями*, при выполнении которого одной из них можно пренебречь. Пусть это соотношение задано примерно как $\frac{m}{\theta} = k$. Тогда для погрешности среднего арифметического имеем

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{m^2}{n} + \theta^2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{(\theta k)^2}{n} + \theta^2} = \theta \cdot \sqrt{\frac{k^2 + n}{n}}; \\ \sqrt{\frac{m^2}{n} + \frac{m^2}{k^2}} = m \cdot \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{k^2}}. \end{cases} \quad (2.4.15)$$

или при $\frac{m}{\theta} > k$ *систематической составляющей пренебрегают*, а при $\frac{\theta}{m} > k$ – наоборот. Таким образом, если необходимо рассчитать число приемов n , такое, при котором *случайной составляющей* по малости можно пренебречь (т.е. $\frac{\theta}{m} > k$), то имеем

$$m_{\bar{x}}^2 = \frac{m_0^2}{n} + m_0^2 \cdot k \rightarrow n = \frac{m_0^2}{m_{\bar{x}}^2 - m_0^2 \cdot k}. \quad (2.4.15a)$$

Теперь, при известной погрешности $m_{\bar{x}}$, погрешности одного измерения m_0 и соотношении k , можно рассчитать *число приемов*, при котором систематическая составляющая будет **преобладать**, а случайная будет **незначительна** относительно систематической.

Другой подход расчета числа приемов для проектирования заданного значения *среднего арифметического* основан на *интервальной оценке* математического ожидания μ при нормальном законе распределения погрешностей результатов измерений:

$$P\left(\bar{x} - u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \Phi(u_P),$$

где *доверительная вероятность* $1 - q = \Phi(u_P)$ выбирают исходя из конкретных потребностей решаемой задачи на основе *функции Лапласа*, (обычно от 0,90 до 0,95).

Длина интервала, равная

$$\left(\left(\bar{x} + u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right) = 2 \cdot u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (2.4.16)$$

определяет *точность* оцениваемого параметра. Обозначив $u_P \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \Delta$ (*половина доверительного интервала*), можно по заданной точности Δ и найденному значению u_P вычислить *число повторений* n :

$$u_P^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} = \Delta^2 \rightarrow n = \left(\frac{\sigma \cdot u_P}{\Delta} \right)^2. \quad (2.4.17)$$

Если вычисленный объем n выборки слишком велик по сравнению с практически имеющимися возможностями, то его можно снизить либо **уменьшив доверительную вероятность**, либо **увеличив доверительный интервал**.

Если средняя квадратическая погрешность σ результатов измерений, подчиняющихся *нормальному закону*, **неизвестна** (наиболее часто встречающийся в практике случай), то его оценивают по **пробной** выборке (или задают исходя из каких-либо предпосылок) и эту величину подставляют в формулу (2.4.17), которая примет вид [14]

$$N = \left(\frac{t_{n,P} \cdot m}{\Delta} \right)^2, \quad (2.4.18)$$

где m – *выборочная средняя квадратическая погрешность*; $t_{n,P}$ – число из таблицы *распределения Стьюдента*, соответствующее *вероятности* результатов измерений и *числу наблюдений* при **получении** *пробной средней квадратической погрешности* m .

2.5. Оценка многократно измеренной неравноточной величины

[Понятие веса измерения.](#)

[Среднее весовое из результатов неравноточных измерений.](#)

[Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса.](#)

[Определение весов функций.](#)

[Порядок обработки одной неравноточно измеренной величины.](#)

Понятие веса измерения. Разного рода погрешности являются *абсолютными мерами точности* результатов измерений и их функций. Однако часто в практике оказывается нужным знать во сколько раз один из результатов измерений точнее какого-либо другого. В качестве такой меры *относительной точности* в теории погрешностей измерений принята величина, называемая *весом* (***P. Коутс***, 1700 г).

Таким образом, *веса* – специальные характеристики *относительной точности* результатов измерений и их функций, получаемые как величины, **обратно пропорциональные абсолютным мерам точности**. Для *нормального закона распределения* эти величины обратно пропорциональны *квадрату средней квадратической погрешности* (оценке *дисперсии*). Исходя из этого, *веса* показывают степень *неравноточности* результатов измерений или степень **неодинаковости** условий измерений и являются *степенью доверия* к i -му измерению. Так, если имеется ряд результатов измерений x_1, x_2, \dots, x_n с соответствующими погрешностями результатов измерений в виде m_1, m_2, \dots, m_n , то *веса*, характеризующие их *относительную точность* есть

$$p_1 = \frac{k}{m_1^2}, \quad \dots, \quad \frac{k}{m_n^2}, \quad (2.5.1)$$

где k – общий коэффициент пропорциональности, который может быть произвольным. Очевидно, что произвольность k приводит к условности понятия веса измерения, но только для его **абсолютной** формы (2.5.1). В **относительной** форме (например, при соотношении весов измерений и т.д.), этот коэффициент не влияет на результаты и понятие *веса* оказывается весьма полезным и удобным.

Не сложно заметить, что выбор коэффициента k равным **квадрату** средней квадратической погрешности некоторого i -го результата измерения, равносильно принятию веса этого результата **за единицу**. Тогда все остальные веса будут пропорциональны погрешностям i -го измерения.

Пример 15. Пусть $k = m_1^2$. Тогда $p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{m_1^2}{m_2^2}, \quad \dots \quad \frac{m_1^2}{m_n^2}$.

Если известны коэффициенты пропорциональности между погрешностями первого и i -го измерения $m_i = t_i \cdot m_1$, то веса в этом случае будут

$$p_1 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{t_2^2}, \quad \dots \quad \frac{1}{t_n^2}.$$

Это возможно произвести по отношению не только первого, но и любого i -го измерения.

Из (2.5.1), приняв вес равный единице, получим, что $k = m_i^2$. Обозначив через μ среднюю квадратическую погрешность результата измерения, вес которого равен **единице**, вид веса представляют как

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2}, \quad \dots \quad \frac{\mu^2}{m_n^2}. \quad (2.5.1a)$$

Величину μ условно называют **стандартом единицы веса**, а ее оценку – **средней квадратической погрешностью единицы веса**, так как она соответствует погрешности, вес которой равен **единице**.

Одним из главных достоинств весов как показателей точности результатов измерений – очень часто их можно вычислить, даже если **неизвестны стандарты** результатов измерений или их **оценки** в виде средней квадратической погрешности. Это приводит к некоторому искажению, **приближенности** весов.

Пример 16. Пусть измерен угол в n приемов. Тогда его средняя квадратическая погрешность есть $m_n = \frac{m_0}{\sqrt{n}}$, а вес по (2.5.1) – $p_n = \frac{\mu^2 \cdot n}{m_0^2}$.

Полагая за погрешность единицы веса погрешность одного измерения $\mu = m_0$, имеем $p_n = n$. Очень часто без видимого ущерба для точности принимают, что $\frac{\mu^2}{m_1^2} = k$. Тогда вес будет $p_n = k \cdot n$, где k – произвольно.

Средняя квадратическая погрешность нивелирного хода длиной в L километров есть $m_L = m_{1 \text{ км}} \cdot \sqrt{L_{\text{км}}}$, а его вес из (2.5.1) есть $p_L = \frac{\mu^2}{m_{1 \text{ км}}^2 \cdot L_{\text{км}}}$. Приняв

$\mu = m_{1 \text{ км}}$, имеем значение веса $p_L = \frac{1}{L_{\text{км}}}$. Если опять определить, что $\frac{\mu^2}{m_{1 \text{ км}}^2} = k$,

то имеем $p_L = \frac{k}{L_{\text{км}}}$, где k – произвольно и т.д.

При вычислении веса достаточно удерживать две значащие цифры.

Если результаты измерений умножить на корень квадратный из его веса, то полученный результат будет иметь вес, равный **единице**. На этом основано приведение неравноточных измерений к равноточным.

Пример 17. Угол β измерен n раз с погрешностями m_i . Вес i -го измерения есть $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$ (см. формулу (4.5.1a)). Если результаты измерений домножить на

$\sqrt{p_i}$: $\beta'_i = \beta_i \cdot \sqrt{p_i}$, то их веса будут равны $p'_i = \frac{\mu^2}{m_i'^2} = \frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu^2}{m_i^2}\right) \cdot m_i^2} = 1$, что и тре-

бовалось доказать.

Следует иметь в виду, что приближенные веса в два раза менее надежные, чем соответствующие средние квадратические погрешности. Если известен вес измерения, то из формулы (2.5.1) его погрешность будет

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \mu \cdot \sqrt{\frac{1}{p_i}} = \mu \cdot \sqrt{q_i}. \quad (2.5.3)$$

Здесь величины q_i называют *обратными весами* измерений.

Среднее весовое из результатов неравноточных измерений. Различие точностей измерений естественно предполагает учет этих измерений, при их использовании для определения наиболее надежного значения из ряда неравноточных измерений с разными весами, так как результаты измерений получены в разных условиях (например, имеют разные средние квадратические погрешности m_i). Получим вид формулы наиболее надежного значения исходя из *принципа Лагранжа*. Пусть наиболее надежное значение будет представлено в виде *линейной комбинации* результатов измерений x_i с коэффициентами k_i :

$$\hat{x} = k_1 \cdot x_1 + k_2 \cdot x_2 + \dots \quad (2.5.4)$$

Наложим условие на коэффициенты k_i : *сумма коэффициентов равна 1*: $[k] = 1$. Это следует из того, что при **одинаковых** значениях x_i должно быть $\hat{x} = x_i$, что будет только

при наложенном выше условии. С другой стороны, если все коэффициенты k_i **равны** между собой, то $k_i = 1/n$ и $\hat{x} = \bar{x}$, что и должно быть на самом деле.

Найдем оценку дисперсии функции (2.5.4):

$$m_{\hat{x}}^2 = k_1^2 \cdot m_1^2 + k_2^2 \cdot m_2^2 + \dots + \frac{2}{n}. \quad (2.5.4a)$$

Теперь поставим задачу, что хотим найти минимум (2.5.4a) при наложенном условии, что совершенно очевидно, и найдем вид коэффициентов k_i , приводящих к **наилучшим** оценкам (*наименьшей дисперсии*) наиболее надежного результата. Для этого используем метод *неопределенных множителей Лагранжа* поиска *условного экстремума* для целевой функции вида

$$\Phi = m_{\hat{x}}^2 - 2 \cdot \lambda ([k] - 1) = \min. \quad (2.5.5)$$

Здесь λ – неопределенный множитель Лагранжа, принадлежащий условию $[k] = 1$, которое должно быть **обнулено**. Так как ищется вид коэффициентов k_i , то производные от целевой функции (2.5.5) берутся по ним и полученные выражения приравниваются к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial k_1} = 2 \cdot k_1 \cdot m_1^2 - 2 \cdot \lambda = 0; \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial k_n} = 2 \cdot k_n \cdot m_n^2 - 2 \cdot \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.5.6)$$

откуда

$$\begin{cases} k_1 \cdot m_1^2 = \lambda; \\ \dots\dots\dots, \\ k_n \cdot m_n^2 = \lambda \end{cases} \quad (2.5.6a)$$

а

$$\begin{cases} k_1 = \lambda \cdot \frac{1}{m_1^2}; \\ \dots\dots\dots, \\ k_n = \lambda \cdot \frac{1}{m_n^2} \end{cases} \quad (2.5.6b)$$

Теперь необходимо найти коэффициент λ . Для этого воспользуемся условием $[k] = 1$ и сложим левую и правую части (2.5.6б):

$$[k] = 1 = \lambda \cdot \left[\frac{1}{m^2} \right], \quad (2.5.7)$$

откуда

$$\lambda = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2} \right]}, \quad (2.5.7a)$$

а

$$k_i = \frac{\left(\frac{1}{m_i^2} \right)}{\left[\frac{1}{m^2} \right]}. \quad (2.5.7b)$$

Обозначив $\frac{1}{m_i^2} = p_i$ (см. (2.5.1)) формула (2.5.4) примет вид

$$\hat{x} = \frac{p_1}{[p]} \cdot x_1 + \frac{p_2}{[p]} \cdot x_2 + \dots \quad \text{или} \quad x_n = \frac{[p \cdot x]}{[p]}, \quad (2.5.8)$$

или в матричном виде [10]:

$$\hat{x} = \frac{e^T \cdot P \cdot x}{e^T \cdot P \cdot e} = \left(e^T \cdot P \cdot e \right)^{-1} \cdot \left(e^T \cdot P \cdot x \right), \quad (2.5.8a)$$

где e – вектор-столбец (сумматор) из единиц.

Этот же вид можно найти минимизируя целевую функцию из нормированных результатов измерений $\Phi = \left[\left(\frac{x - \hat{x}}{m} \right)^2 \right]$ обычным методом Эйлера.

Формулы (2.5.8) и (2.5.8a) называются *формулами средних взвешенных* (старое название «*общая арифметическая середина*»). Из условия ее получения следует, что она обладает и минимальной дисперсией, а следовательно – *максимальным весом*, который может быть получен из вида $m_{\bar{x}}^2$ (2.5.4a) с подстановкой значений k_i из (2.5.7b), и отнесения полученной величины к постоянной μ^2 . Тогда *средняя квадратическая погрешность среднего взвешенного* есть

$$m_{\bar{x}}^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \right)^2 \cdot m_1^2 + \dots + \left(\frac{p_n}{[p]} \right)^2 \cdot m_n^2 = \frac{\mu^2}{[p]}, \quad (2.5.9)$$

так как $p_i \cdot m_i^2 = \left(\frac{\mu^2}{m_i^2} \right)^2 \cdot m_i^2 = \mu^2 \cdot \frac{\mu^2}{m_i^2} = \mu^2 \cdot p_i$. Формулу (2.5.9) также можно получить, используя формулу погрешности функции вида (2.5.8). Формула (2.5.9) в матричном виде для самого общего вида будет иметь вид

$$M^2 = m_{\bar{x}}^2 = \mu^2 \cdot \left(e^T \cdot P \cdot e \right)^{-1}, \quad (2.5.9a)$$

где P – матрица весов измерений (может быть полная). Обратную матрицу весов $P^{-1} = Q$ часто называют матрицей кофакторов.

Отнеся погрешность к постоянной μ^2 , получим

$$\frac{m_x^2}{\mu^2} = \frac{1}{p_x} = q_x = \frac{1}{[p]}; \quad p_x = [p]. \quad (2.5.10)$$

Таким образом, средняя квадратическая погрешность среднего весового получают из вида (2.5.9), а его вес (обратный вес) – из (2.5.10).

Для среднего взвешенного (2.5.8) выполняется свойство, аналогичное лемме Гаусса $[pv] = 0$, где $v_i = x_i - \bar{x}_2$, \bar{x}_2 – среднее взвешенное (второе среднее по Ю.В. Кемнецу (см. [10], [11]), \bar{x}_1 – его первое или обычное среднее арифметическое). Для доказательства леммы домножим левую и правую части для v_i на p_i и сложим:

$$\begin{array}{l} v_1 \cdot p_1 = x_1 \cdot p_1 - \bar{x}_2 \cdot p_1 \\ \dots\dots\dots \\ v_n \cdot p_n = x_n \cdot p_n - \bar{x}_2 \cdot p_n \\ \hline [p \cdot v] = [x \cdot p] - \bar{x}_2 \cdot [p] = 0 \end{array}$$

из (2.5.8). Рассмотрим, как искажается среднее взвешенное систематическими погрешностями результатов измерений. Для этого запишем представление результата измерения как

$$x_i = X + \delta_i + \theta + \tilde{\tau},$$

где δ_i – случайная составляющая погрешности измерения;

θ и $\tilde{\tau}$ – систематические постоянные и переменные составляющие.

Найдем для этого представления среднее весовое, умножив i -е измерение на вес p_i , разделив на сумму весов и все сложив

$$\bar{x}_2 = X + \frac{[p \cdot \delta]}{[p]} + \theta + \frac{[p \cdot \tilde{\tau}]}{[p]}. \quad (2.5.11)$$

Отсюда следует, что постоянная систематическая погрешность полностью войдет в среднее взвешенное, а переменная систематическая погрешность есть среднее взвешенное переменной систематической погрешности результатов измерений.

Вычисление средней квадратической погрешности единицы веса. Для получения характеристик по формулам (2.5.9) и (2.5.10) необходимо, кроме всего прочего, иметь и погрешность единицы веса μ , которая, если известны m_i и p_i , может быть получена как

$$\mu = m_i \cdot \sqrt{p_i}, \quad (2.5.12)$$

или в обобщении по всем погрешностям и весам:

$$\mu = \sqrt{\frac{m^2 \cdot p}{n}}. \quad (2.5.12a)$$

Чаще всего этот случай **неприемлем**. Тогда можно рассмотреть две ситуации:

1. Вычисление *средней квадратической погрешности единицы веса по истинным погрешностям* неравноточных измерений. Здесь даны результаты измерений x_i , *истинные погрешности* Δ_i и их *веса* p_i . По известному правилу переведем неравноточные погрешности в равноточные путем **домножения** их на корень из *веса*:

$$\Delta_1 \cdot \sqrt{p_1}, \quad \Delta_2 \cdot \sqrt{p_2}, \quad \dots \quad \sqrt{p_n},$$

или

$$\Delta_i \cdot \sqrt{p_i} = \Delta_i \cdot \sqrt{\frac{\mu^2}{m_i^2}} = \mu \cdot \frac{\Delta_i}{m_i} = \mu \cdot t_i.$$

Значение t_i для **любых** рядов измерений подчинены одному *закону распределения*. Тогда, пользуясь приведенным к равноточному виду рядом, и тем, что все величины одинаково распределены, для оценки *средней квадратической погрешности единицы веса* используем *формулу Гаусса*

$$m^2 = \mu^2 = \frac{(\Delta_1 \cdot \sqrt{p_1})^2 + \dots + (\Delta_n \cdot \sqrt{p_n})^2}{n},$$

откуда

$$\mu = \sqrt{\frac{p \cdot \Delta^2}{n}}. \quad (2.5.13)$$

Формула теоретически **корректна**, но применима в редких случаях геодезии, так как *истинное значение (истинные погрешности)*, в большинстве случаев, не известны. Исключение составляют *невязки и двойные измерения*.

2. Вычисление *средней квадратической погрешности единицы веса* по отклонениям результатов неравноточных измерений от *среднего взвешенного*. Здесь, как и при выводе *формулы Бесселя*, выразим *истинные погрешности* неравноточных измерений через их отклонения от среднего весового:

$$\left. \begin{array}{l} p_i \\ p_i \\ p_i \end{array} \right| \begin{array}{l} \Delta_i = x_i - X, \\ v_i = x_i - \bar{x}_2, \\ \Delta_i = \bar{x}_2 - X + v_i \end{array}.$$

Их разность

$$\Delta_i - v_i = \bar{x}_2 - X = \eta,$$

есть *истинная погрешность среднего взвешенного*. Но

$$\eta = \bar{x}_2 - X = \frac{[x \cdot p]}{[p]} - X \cdot \frac{[p]}{[p]} = \frac{[x \cdot p] - X \cdot [p]}{[p]} = \frac{[(x - X) \cdot p]}{[p]} = \frac{[\Delta \cdot p]}{[p]}.$$

Тогда для n наблюдений запишем

$$\begin{aligned} p_1 \quad \Delta_1 &= v_1 + \eta \\ p_2 \quad \Delta_2 &= v_2 + \eta \\ \dots & \quad \dots \\ p_n \quad \Delta_n &= v_n + \eta \end{aligned}$$

Для перехода из этой системы к μ^2 возведем в квадрат обе её части, умножим на соответствующие веса, суммируем и поделим на n :

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} p_1 \cdot \Delta_1^2 &= p_1 \cdot v_1^2 + p_1 \cdot \eta^2 + 2p_1 \cdot v_1 \cdot \eta, \\ & \dots \dots \dots \\ p_n \cdot \Delta_n^2 &= p_n \cdot v_n^2 + p_n \cdot \eta^2 + 2p_n \cdot v_n \cdot \eta, \end{aligned} \right\} \\ & \frac{[p \cdot \Delta^2]}{n} = \frac{[p \cdot v^2]}{n} + \frac{\eta^2 \cdot [p]}{n} + \frac{2\eta \cdot [p \cdot v]}{n} \end{aligned}$$

По свойству отклонения от *среднего взвешенного* $\frac{2\eta \cdot [p \cdot v]}{n} = 0$, так как $[pv] = 0$, а η –

погрешность *среднего взвешенного*, может быть оценена как $\eta = m_{\bar{x}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$

(см. (2.5.9)). Тогда из последней системы имеем

$$\frac{[p \cdot \Delta^2]}{n} = \mu^2 = \frac{[p \cdot v^2]}{n} + \frac{\mu^2}{[p]} \cdot \frac{[p]}{n},$$

или

$$\mu^2 - \frac{\mu^2}{n} = \frac{[p \cdot v^2]}{n}; \quad \mu^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{[p \cdot v^2]}{n}.$$

Откуда погрешность единицы веса будет

$$\mu = \sqrt{\frac{[p \cdot v^2]}{n-1}}. \tag{2.5.14}$$

Эта формула носит название *неравноточной формулы Бесселя* и позволяет решить задачу оценки точности результатов измерений по **отклонениям** их от среднего взвешенного.

Надежность этой *средней квадратической погрешности единицы веса* (2.5.14) будет определяться формулой

$$m_{\mu} \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{[p \cdot v^2]}{2}}, \quad (2.5.15)$$

а надежность *средней квадратической погрешности среднего взвешенного* – как

$$m_M \approx \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1) \cdot [p]}} = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sqrt{\frac{[p \cdot v^2]}{2 \cdot [p]}}. \quad (2.5.16)$$

Доверительные границы для истинного значения измеренной неравноточной величины и её *средней квадратической погрешности* устанавливаются так же, как и при равноточных измерениях, с учетом «взвешивания» погрешностей измерений и результатов измерений при вычислении составляющих.

Определение весов функций. Очень часто при оценивании косвенных измерений (средней квадратической погрешности функции) проще определить вес (или обратный вес) этого измерения и затем рассчитать точность. Для определения весов функций используем формулу оценки дисперсии функции

$$m_f^2 = f_1^2 \cdot m_1^2 + \dots + f_n^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot m_i \cdot m_j = f \cdot K_x \cdot f^T.$$

Разделим правую и левую части формулы на постоянную величину μ^2

$$\frac{m_f^2}{\mu^2} = f_1^2 \cdot \frac{m_1^2}{\mu^2} + \dots + \frac{f_n^2}{\mu^2} + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\mu \cdot \mu} = f \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot K_x \cdot f^T. \quad (2.5.17)$$

Введем обозначение исходя из (2.5.1а):

$$\frac{m_i^2}{\mu^2} = \frac{1}{p_i} = q_i, \quad \frac{m_f^2}{\mu^2} = \frac{1}{p_f} = q_f,$$

и для матриц

$$P_x^{-1} = Q_x = \frac{1}{\mu^2} \cdot K_x = \begin{bmatrix} q_1 & r_{12} \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} & \dots \\ r_{12} \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} & q_2 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad R_x \cdot P_x^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь Q_x – матрица обратных весов измерений (матрица кофакторов). Тогда формула для оценки веса функции (2.5.17) примет вид

$$Q_f = f_1^2 \cdot q_1 + \dots + f_n^2 + 2 \sum_{i < j} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sqrt{q_j \cdot q_j} = f \cdot Q_x \cdot f^T = \tilde{f} \cdot \tilde{f}^T \quad (2.5.17a)$$

Здесь \tilde{f} – приведенные к «равноточным» значения вектора-строки f частных производных. Очевидно, что матрица весов измерений (или функции) тогда $P = \mu^2 \cdot K^{-1}$, а ковариационная матрица измерений (функции) через матрицу кофакторов (обратных весов) будет $K = \mu^2 \cdot Q$. Эти формулы очень важны для целей оценки точности результатов косвенных измерений.

На основе формулы (2.5.4a) найдем, как измениться вес измерения по отношению к весу среднего арифметического. Имеем вес одного измерения $p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$, вес

среднего арифметического $p_{\bar{x}} = \frac{\mu^2 \cdot n}{m_0^2}$, а среднего взвешенного – $p_{\bar{x}_2} = [p]$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{p_{\bar{x}}}{p_i} = \frac{\mu^2 \cdot n \cdot m_0^2}{m_0^2 \cdot \mu^2} = n, \\ \frac{p_{\bar{x}_2}}{p_i} = \frac{[p] \cdot m_0^2}{\mu^2} = \frac{m_0^2}{m_{\bar{x}_2}^2} \end{cases} \quad (2.5.18)$$

Таким образом мы получили известное *правило Ансерметта*, что вес среднего арифметического в n раз **больше**, чем вес одного измерения для равноточных измерений.

Порядок обработки одной неравноточно измеренной величины. Как и при обработке равноточных измерений получают *количественные* и *качественные* характеристики многократно измеренной неравноточной величины в виде *точечных* и *интервальных оценок*. Последовательность обработки в этом случае такая:

1. Получают значения весов измерений p_i .

2. Вычисляют среднее взвешенное $\bar{x}_2 = \frac{[px]}{[p]}$ и среднюю квадратическую по-

грешность единицы веса $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$. Проводят контроль вычислений как $[pv] \approx 0$.

3. Вычисляют среднюю квадратическую погрешность среднего весового как $m_{\bar{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}$ и погрешности, характеризующие надежность среднего весового

и средней квадратической погрешности единицы веса как

$$m_{\mu} \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}, \quad m_M \approx \frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}} = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1) \cdot [p]}}.$$

4. Строят *доверительные интервалы* для истинного значения X и *дисперсии единицы веса (стандарта единицы веса)* и *стандарта среднего взвешенного*

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 - t_{\beta} \cdot m_{\bar{x}_2} &< X < \bar{x}_2 + t_{\beta} \cdot m_{\bar{x}_2} \\ \gamma_1^2 \cdot \mu^2 &\leq \sigma_0^2 \leq \gamma_2^2 \cdot \mu^2 \\ \gamma_1 \cdot \mu^2 &\leq \sigma_0 \leq \gamma_2 \cdot \mu^2 \\ \gamma_1 \cdot M &\leq \sigma_{\bar{x}} \leq \gamma_2 \cdot M \end{aligned}$$

Следует иметь ввиду, что значения μ (или k), **назначенные** для вычисления веса измерения и вычисленные, например, по *формуле Бесселя* (2.5.14), должны **совпадать** в пределах погрешностей m_{μ} : $|\mu - \sqrt{k}| < m_{\mu}$. Невыполнение неравенства говорит о **наличии значимых систематических влияний** θ , которые необходимо выявить и учесть как

$$M = m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{[p]} + \theta^2}.$$

2.6. Дополнительные вопросы обработки неравноточных измерений

[Проектирование результатов измерений на основе веса.](#)

[Оценка точности измерений по невязкам.](#)

[Оценка точности по разностям двойных измерений.](#)

Проектирование результатов измерений на основе веса. Следует вспомнить, что при проектировании результатов измерений можно использовать понятие веса в формулах *предрасчета* (см., например, таблицу 1.4.1). С этой точки зрения интересно найти такой вид веса в функции, чтобы он был **максимальным** (или обратный вес – **минимальным**) из всех возможных, и таким образом *погрешность функции* была **минимальной**. Для этих целей рассмотрим случай *некоррелированных* измерений.

Тогда *условную минимизацию функции Лагранжа* Φ можно свести к следующим шагам:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{p_F} + \lambda \cdot ([p] - 1) = f_1^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \dots + f_n^2 \cdot \frac{1}{p_n} + \lambda \cdot ([p] - 1) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} &= -f_i^2 \cdot \frac{1}{p_i^2} + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{f_i^2}{p_i^2} \Rightarrow p_i = \frac{f_i}{[f]} \\ [p] &= 1 = \frac{[f]}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \lambda = [f]^2, \quad a \quad p_i = \frac{f_i}{[f]}. \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

где λ – *неопределенный множитель Лагранжа* при введенном условии $[p] = 1$, которое учитывается в третьей строке для получения вида множителя.

Вид минимального обратного веса функции отсюда есть

$$\frac{1}{p_F} = f_1^2 \cdot \frac{[f]}{f_1} + \dots + f_n^2 \cdot \frac{[f]}{f_n} = [f]^2 = \lambda. \quad (2.6.2)$$

Вспомним, что $m_F = m_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{p_F}}$, откуда

$$m_0 = \frac{m_F}{\sqrt{1/p_F}} = \frac{m_F}{[f]}. \quad (2.6.3)$$

Тогда погрешности спроектированных измерений есть

$$m_i = m_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{p_i}} = \frac{m_F}{[f]} \cdot \sqrt{\frac{[f]}{f_i}} = m_F \cdot \sqrt{\frac{1}{[f] \cdot f_i}}. \quad (2.6.4)$$

Такая формула проектирования точности результатов измерений была получена при предположении 3: $f_1 \cdot m_1^2 \approx f_2 \cdot m_2^2 \approx \dots$ (см. §1.4).

Таким образом, это предположение дает вид весов измерений такой, что обратный вес функции будет **минимальным** (прямой – **максимальным**), а точность **наилучшей**. Вместе с другими предположениями можно составить таблицу 2.6.1.

Таблица 2.6.1. – Веса, обратные веса и погрешности при проектировании измерений

№	Величины		Обратный вес функции $1/p_f$	Погрешность ед. веса m_0	Погрешность измерения m_i
	Для измерений p_i	$1/p_i$			
1. $m_1 \approx m_2 \approx$	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{[f^2]}{n}$	$m_f \cdot \sqrt{\frac{n}{[f^2]}}$	$\frac{m_f \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{[f^2]}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{m_f}{\sqrt{[f^2]}}$
2. $f_1 m_1 \approx f_2 m_2 \approx$	$\frac{f_i^2}{[f^2]}$	$\frac{[f^2]}{f_i^2}$	$[f^2] \cdot n$	$m_f \cdot \sqrt{\frac{1}{[f^2] \cdot n}}$	$\frac{m_f}{\sqrt{[f^2] \cdot n}} \cdot \sqrt{\frac{[f^2]}{f_i^2}} = \frac{m_f}{\sqrt{f_i^2 \cdot n}}$
3. $f_1 m_1^2 \approx f_2 m_2^2 \approx$	$\frac{f_i}{[f]}$	$\frac{[f]}{f_i}$	$[f]^2$	$\frac{m_f}{[f]}$	$\frac{m_f}{\sqrt{[f]}} \cdot \sqrt{\frac{[f]}{f_i}} = \frac{m_f}{\sqrt{f_i \cdot [f]}}$

Оценка точности измерений по невязкам. Использование формулы (2.5.13) для оценки точности результатов неравноточных измерений требует знания *истинных погрешностей* и играет исключительно важное значение в практике геодезических работ, так как позволяет **наиболее надежно** характеризовать точность измерений. В геодезии, по определению, в качестве *истинных погрешностей* Δ_i можно использовать невязки w_i – истинные погрешности функций, теоретическое значение которых

известно. По ним с использованием (1.5.13) можно определить *среднюю квадратическую погрешность единицы веса* как

$$\mu = \sqrt{\frac{[pw^2]}{n}}. \quad (2.6.5)$$

В качестве функций для *невязок* надо брать такие, которые **не содержат** исходных данных, чтобы не переносить *погрешности* исходных данных в невязки.

Наибольшее распространение получила формула оценки точности по *невязкам* в *треугольниках* итальянского геодезиста **Ферреро** (1887 г). Для получения формулы необходимо найти вес невязки в треугольнике:

$$w_i = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - 180$$

$$\frac{1}{p_w} = 1^2 \cdot \frac{1}{p_1} + 1^2 \cdot \frac{1}{p_2} + 1^2 \cdot \frac{1}{p_3}.$$

Считая углы *равноточными*, имеем $\frac{1}{p_w} = \frac{3}{p}$, а задав *погрешность единица веса равной* погрешности измеренного угла $\mu = m$, имеем *вес невязки* в треугольнике как $p_{w_i} = \frac{1}{3}$. Отсюда, в частности, следует, что *вес любой суммы* в k -угольнике есть

$$p_{w_n} = \frac{1}{k}. \quad (2.6.6)$$

Тогда окончательно для оценки точности по невязкам треугольников имеем

$$\mu = \sqrt{\frac{[pw^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}[w^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}} = m_\beta. \quad (2.6.7)$$

Формулу оценки точности (4.6.7) и называют *формулой Ферреро*. Для k -угольников из (4.6.6) формула оценки точности будет

$$\sqrt{\frac{[pw^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{k}[w^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[w^2]}{k \cdot n}} = m_\beta. \quad (2.6.7a)$$

Если в оцениваемом построении «разноугольники» с числом углов k_i , то из (4.6.6) веса будут обратно пропорциональны числу углов в i -м построении, а формула оценки точности будет иметь вид

$$m_\beta = \sqrt{\frac{[pw^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{[w^2]}{k_i}}{n}}. \quad (2.6.7.6)$$

Таким же образом можно оценить точность *нивелирных построений* по их *невязкам*. Исходя из формулы *веса нивелирного хода* в $L_{км}$ (см. пример при определении веса функции), можно заметить, что этот же вес определяет и *вес невязки*:

$$p_{L_i} = p_{w_i} = \frac{k}{L_i}.$$

Тогда формула для оценки точности по невязкам нивелирных ходов имеет вид:

$$m_h = \sqrt{\frac{[pw^2]}{n}} = \sqrt{\frac{\left[\frac{w^2}{L_i}\right]}{n}}. \quad (2.6.7в)$$

Существует ряд предложений (например, **Ю.В. Кемнец** [10]), для **выявления** и **учета систематических влияний** на основе *невязок геодезических построений*. В этом случае рассчитывают *среднюю систематическую погрешность* результатов измерений

$$\bar{\Theta} = \frac{[w]}{\left[\frac{1}{p_w}\right]}, \quad (2.6.8)$$

эмпирическую среднюю квадратическую погрешность единицы веса

$$m_0 = \sqrt{\frac{\left[p_w \cdot w^2\right] - \left[\frac{1}{p_w}\right] \cdot \bar{\Theta}^2}{n-1}}, \quad (2.6.9)$$

и критерий значимости систематического влияния

$$|\bar{\Theta}| > \frac{2m_0}{\sqrt{\left[\frac{1}{p_w}\right]}}. \quad (2.6.10)$$

Выполнение неравенства говорит о значимости систематического влияния непостоянного характера. Постоянные систематические погрешности предложенный алгоритм не выявляет.

Пример 18. Для оценки точности по невязкам треугольников формула (2.6.8)

будет иметь вид $\bar{\Theta}_\beta = \frac{[w]}{3n}$, эмпирическая погрешность единицы веса (2.6.9) –

$m_0 = \sqrt{\frac{\left[w^2\right] - [w]^2}{3n \cdot (n-1)}}$, а критерий значимости систематического влияния (2.6.10) по-

сле элементарных преобразований есть $|[w]| > 2 \cdot \sqrt{\frac{\left[w^2\right] - [w]^2}{n-1}}$.

Оценка точности по разностям двойных измерений. Из многократных измерений одной величины **минимальное число** избыточных данных будет при **двух** измерениях. При этом следует различать *дважды измеренные* величины и *двойные (параллельные)* измерения. Формально, измерив два раза одну величину (число *избыточных* измерений 1), можно выполнить оценку точности по известным формулам. Но при построении доверительного интервала (квантили распределения Стьюдента, (см. [Приложение 3](#)) могут быть применены при $n=2$) его размер может быть **больше** определяемой величины даже при **хорошей** гарантированной точности измерений. Достаточно **реальные** результаты можно получить только при $n \geq 8 \div 10$. Если определяемая величина измерена а) *прямо* и *обратно*, б) ее **знаки** в *прямом* и *обратном* направлениях **разные**, то такого рода измерения и называют «*двойными (параллельными)*». В геодезической практике к ним относят *превышения* и *вертикальные углы*. Очевидно, что по **одной** паре *двойных измерений* достоверно выполнить оценку точности **нельзя**, но по всей совокупности достаточного объема можно получить достаточно хорошее представление о точности измерений.

Рассмотрим самый **простой** случай, когда в *двойных измерениях систематическая погрешность* отсутствует, а случайные в *прямом* и *обратном* направлении распределены **одинаково** и по *нормальному закону*.

Пусть *прямое* i -е измерение x_i и *обратное* y_i получены со *случайными погрешностями* ξ_i и η_i соответственно. Тогда их можно записать как

$$\begin{cases} x_i = a + \xi_i, \\ y_i = -a + \eta_i. \end{cases} \quad (2.6.11)$$

по условию $M(\xi_i) = M(\eta_i) = 0$, а *средняя квадратическая погрешность* $m_{i(пр.)} = m_{i(обр.)} = m$. Тогда после n приемов имеем два ряда

$$\begin{cases} x_1 & x_2 & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots \end{cases}$$

Чтобы определить *средние квадратические погрешности* m , рассмотрим *разности двойных измерений* d_i

$$d_i = x_i - y_i = \xi_i - \eta_i. \quad (2.6.12)$$

Из (2.6.11) *математическое ожидание* разности из условий нулевого *математического ожидания* случайной погрешности $M(d) = M(\xi) - M(\eta) = 0$, а для *средней квадратической погрешности* разности

$$m_d^2 = m_{пр.}^2 + m_{обр.}^2 = 2m^2, \quad (2.6.12)$$

или

$$m_d = m \cdot \sqrt{2}. \quad (2.6.12a)$$

При принятых условиях разности d_i можно достаточно хорошо принимать за *истинные погрешности* Δ_i . В этом случае *средняя квадратическая погрешность* m_d разности d может быть получена по известной *формуле Гаусса*

$$m_d = \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \quad (2.6.126)$$

Тогда *средняя квадратическая погрешность* одного измерения m из (2.6.12а) и (2.6.126) будет

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \quad (2.6.13)$$

Для среднего значения $\bar{a}_i = \frac{x_i + y_i}{2}$ в принятых условиях имеем

$$m_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot m^2 + \frac{1}{4} \cdot m^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{m_d^2}{2} + \frac{m_d^2}{2}} = \frac{m_d}{2} = \frac{m \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{m}{\sqrt{2}}. \quad (2.6.14)$$

По значениям разностей d_i можно получить представление и о *постоянной систематической погрешности* θ . На её наличие указывает **значимое** отклонение от нуля *среднего* из всех разностей d_i ($M(d) = 0$, откуда $\bar{d} = 0$ (т.е. нет сдвига (*систематической погрешности*))). В этом случае модель измерений представим как

$$\begin{cases} x_i = a + \theta + \xi_i, \\ y_i = -(a + \theta) + \eta_i' \end{cases} \quad (2.6.15)$$

так как измерения выполнены *прямо* и *обратно* для величин, у которых знаки измерений *прямо* и *обратно* **противоположные**. Тогда в среднем из пары *постоянная систематическая погрешность*, входящая с **разными** знаками, **компенсируется**, а в **разности** (если θ **значима**) – удваивается и проявляется.

Меру значимости лучше всего выявить на основе построения *доверительного интервала* для m_d как *истинной погрешности*:

$$\bar{d} - t_{\beta} \cdot m_{\bar{d}} \leq M(d) \leq \bar{d} + t_{\beta} \cdot m_{\bar{d}}. \quad (2.6.16)$$

Этот интервал при $M(d) = 0$ можно объединить в одно неравенство:

$$|\bar{d} - t_{\beta} \cdot m_{\bar{d}}| \leq 0, \quad (2.6.16a)$$

откуда

$$|\bar{d}| \leq t_{\beta} \cdot m_{\bar{d}}, \quad (2.6.16b)$$

или

$$|[d]| \leq t_{\beta} \cdot m \cdot \sqrt{n} = t_{\beta} \cdot m_d. \quad (2.6.16b)$$

Здесь $m_{\bar{d}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$, t_{β} – коэффициент Стьюдента по *доверительной вероятности* P и числу *степеней свободы* $n - 1$. Тогда, если **выполняется** одно из неравенств (2.6.16а –

2.6.16в) то с *доверительной вероятностью* P гипотеза об **отсутствии** значимого систематического влияния **принимается**.

Существует несколько **приближенных** вариантов критерия (2.6.16а – 2.6.16в).

Приняв $m = 1,25 \cdot \vartheta$, где $\vartheta = \frac{[d]}{n}$ – *средняя абсолютная погрешность*, получим

$$\frac{[d]}{n} \leq t_{\beta} \cdot 1,25 \cdot \frac{[d]}{n\sqrt{n}}, \quad (2.6.17)$$

или

$$[d] \leq t_{\beta} \cdot 1,25 \cdot \frac{[d]}{\sqrt{n}}. \quad (2.6.17a)$$

Если в качестве условия **отсутствия** значимого систематического влияния принять $|\bar{d}| \leq \frac{1}{5} m_{\beta}$ и использовать принятую замену, то имеем

$$\frac{[d]}{n} \leq 1,25 \cdot \frac{[d]}{5n}, \quad (2.6.18)$$

или

$$[d] \leq 0,25 \cdot [d], \quad (2.6.18a)$$

что является более **жестким** условием, чем (2.6.17) (см. [5]).

Если выявлено значимое постоянное систематическое влияние – в среднем это $\theta = \frac{[d]}{n}$, то его **исключают** из всех разностей, получая новый ряд $d'_i = d_i - \bar{d}$. В этом случае оценку проводят на основе *формулы Бесселя* (так как использовано *уклонение от среднего*)

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}, \quad m = \sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \quad (2.6.19)$$

Рассмотрим случай, когда результаты измерений x_i и y_i обладают *весами* p'_i и p''_i соответственно. Тогда для каждой пары имеем

$$\bar{x}_i = \frac{x_i p'_i + y_i p''_i}{p'_i + p''_i} \quad (2.6.20)$$

как *среднее взвешенное*, вес которого $p_i = p'_i + p''_i$. Обратный вес разности будет

$$\frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p'_i} + \frac{1}{p''_i} = \frac{p'_i + p''_i}{p'_i \cdot p''_i}, \quad (2.6.21)$$

а вес

$$p_{d_i} = \frac{p'_i \cdot p''_i}{p'_i + p''_i}. \quad (2.6.21a)$$

Средняя квадратическая погрешность единицы веса получается по взвешенной формуле Гаусса как

$$\mu = m_0 = \sqrt{\frac{[p_d \cdot d^2]}{n}} = \left(\frac{d^T \cdot P_d \cdot d}{n} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.6.22)$$

где d – вектор-столбец разностей d_i .

Средняя квадратическая погрешность среднего взвешенного \bar{x}_i есть

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} = \frac{\mu}{\sqrt{p'_i + p''_i}}. \quad (2.6.23)$$

Если веса прямо и обратно **одинаковы** $p'_i = p''_i = p_i$, то

$$\frac{1}{p_d} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i} = \frac{2}{p_i}, \quad (2.6.24)$$

а

$$p_d = \frac{p_i}{2}. \quad (2.6.24a)$$

Отсюда значения погрешностей определяют как

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d \cdot d^2]}{n}} = \sqrt{\frac{[p \cdot d^2]}{2n}}, \quad (2.6.25)$$

$$M_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}. \quad (2.6.26)$$

В случае *неравоточности* двойных измерений также необходимо провести исследования на наличие **значимого систематического влияния** по взвешенному критерию (2.6.17а):

$$|[p_d \cdot d]| \leq 1,25 \cdot t_{\beta} \cdot \frac{[p_d \cdot d]}{\sqrt{[p_d]}}, \quad (2.6.27)$$

или точному взвешенному критерию (2.6.16б):

$$\left| \frac{[p_d \cdot d]}{[p_d]} \right| \leq t_{\beta} \cdot \sqrt{\frac{[p_d \cdot d]}{[p_d] \cdot n}}. \quad (2.6.27a)$$

Тогда, при **значимом** систематическом влиянии, получают новый ряд, в среднем свободный от этого влияния, как $d'_i = d_i - \theta$, где $\theta = \frac{[p_d \cdot d]}{[p_d]}$ – среднее взвешенное из разностей. Погрешность единицы веса может быть вычислена по взвешенной формуле **Бесселя** через уклонения d'_i как

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d \cdot d'^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{[p \cdot d'^2]}{2(n-1)}} \quad (2.6.28)$$

в случае если условие **не выполняется** (имеется значимая систематическая погрешность).

Последовательность обработки двойных измерений следующая:

1. По *прямым* и *обратным* результатам двойных измерений x_i и y_i находят *разности* (в данном случае – отличие в виде **суммы**) d_i и получают *веса* измерений и разностей, если это необходимо (2.6.21а), (2.6.24а).
2. Исследуют на наличие значимого систематического влияния и в зависимости от результатов используют в качестве исходной формулы оценки разности m_d или *формулу Гаусса* (2.6.12б) или *формулу Бесселя* (2.6.19).
3. Определяют погрешности одного измерения m (2.6.13) или (2.6.19) и среднюю квадратическую погрешность среднего $m_{\bar{x}}$ (2.6.14). В случае неравноточных измерений – погрешности среднего из i -й пары (2.6.23).

Глава 3

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Дисперсионный анализ

Основная идея дисперсионного анализа.

На ряду со статистическими выводами важным для практических нужд разделом математической статистики является группа методов, названная «*статистическим анализом*». Основные задачи, решаемые подобным анализом, это – выявление главных факторов, формирующих процесс, выявление в количественной и качественной мере статистической связи и её значимости. К основным, классическим, видам статистического анализа относят: *дисперсионный анализ, корреляционный анализ и регрессионный анализ.*

Основная идея дисперсионного анализа. Во многих случаях теории и практики принципиально важен вопрос о **значимости** влияния факторов или их комбинаций на результаты эксперимента. В этом случае ставится задача о выявлении меры влияния на результат эксперимента **всех** факторов, которая решается на основе *дисперсионного (факторного) анализа*, введенного английским статистиком Р. Фишером.

Таким образом, дисперсионный анализ – это статистический метод анализа результатов экспериментов, зависящих от различных, одновременно действующих факторов, а также выбор наиболее важных факторов и оценка их влияния.

Идея дисперсионного анализа заключается в **разложении** общей *дисперсии случайной величины* на независимые случайные слагаемые, каждое из которых характеризует **влияние** того или иного фактора или их взаимодействия. Последующее сравнение этих *дисперсий* позволяет оценить существенность влияния факторов на исследуемую величину. Простейший случай *дисперсионного анализа*, когда на результаты эксперимента действует только **один** фактор, называют «*однофакторный дисперсионный анализ*». В нем проверяют нулевую гипотезу H_0 о равенстве средних β_i :

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i = \dots = \beta_m. \quad (3.1.1)$$

Гипотеза H_0 проверяется сравнением внутригрупповых и межгрупповых *дисперсий* по F-критерию. Если расхождение между ними незначительно, то *нулевая гипотеза принимается*. В противном случае гипотеза о равенстве средних **отвергается** и делается заключение о том, что различие в средних обусловлено не только случайностями выборок, но и **действием** исследуемого фактора.

На таком же принципе разложения основан и многофакторный дисперсионный анализ.

3.2. Корреляционный анализ

Основные задачи корреляционного анализа.

Коэффициент детерминации. Индекс корреляции. Корреляционное соотношение. Множественный коэффициент корреляции, частный коэффициент корреляции.

Коэффициент корреляции рангов.

Интервальная оценка коэффициента корреляции. Z-функция Фишера.

Значимость статистической связи.

Основные задачи корреляционного анализа. Уже на ранней стадии статистического исследования зависимостей должны быть поставлены и найдены удовлетворительные ответы на следующие вопросы:

- Имеется ли вообще какая-либо связь между исследуемыми переменными?
- Какова структура этих связей?
- Как измерить (оценить) тесноту связей?

Для этого необходимо:

– выбрать, с учетом специфики анализируемых данных, подходящую характеристику статистической связи (индекс или коэффициент корреляции, корреляционное отношение, какую-либо информационную характеристику связи, ранговый коэффициент корреляции и т.д.);

– с помощью точечной и интервальной оценок оценить её численное значение по имеющимся выборочным данным;

– проверить гипотезу о том, что полученное числовое значение анализируемой связи действительно свидетельствует о наличии статистической связи, т.е. её значимость отличия от нуля.

Этими вопросами и занимается *корреляционный анализ*.

Коэффициент детерминации. Пусть зависимость вектора y от вектора x представлено в виде линейной модели (см. рис. 3.2.1). Очевидно, что реально наблюдаемые значения y_i отличаются от модельных \hat{y}_i на некоторую величину e_i . Тогда $y_i = \hat{y}_i + e_i$, а $e_i = y_i - \hat{y}_i$. Это соотношение можно переписать как

$$y_i - \bar{y} = \hat{y}_i - \bar{y} + e_i = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) = k_i + e_i. \quad (3.2.1)$$

где $(y_i - \bar{y})$ – отклонение i -го наблюдения от среднего значения;

k_i – отклонение i -й модельной точки от среднего значения;

e_i – отклонение результата измерения i -й точки от i -й модельной точки (рисунок 3.2.1).

Возведя обе части равенства (3.2.1) в квадрат и суммируя по объему выборки n , имеем

$$\begin{aligned} [(y - \bar{y})^2] &= [(\hat{y} - \bar{y})^2] + 2[(\hat{y} - \bar{y})(y - \hat{y})] + [(y - \hat{y})^2] = \\ &= [k^2] + 2[k \cdot e] + [e^2] \end{aligned}$$

Не сложно показать, что $[k \cdot e] = 0$. Тогда предыдущее выражение примет вид

$$[(y - \bar{y})^2] = [k^2] + [e^2]. \quad (3.2.2)$$

где $[(y - \bar{y})^2]$ – *общая (полная) сумма квадратов отклонений результатов от среднего* как мера общего **разброса** переменной y относительно средней;

$[k^2] = [(\hat{y} - \bar{y})^2]$ – *объясненная* сумма квадратов как отклонение модельного значения от среднего, или мера разброса, объясненная с помощью линии регрессии (модели);

$[e^2] = [(y - \hat{y})^2]$ – *остаточная (необъясненная)* сумма квадратов между результатами эксперимента и их предсказанными (модельными) значениями, или мера остаточного, не объясненного уравнением регрессии разброса точек вокруг линии регрессии.

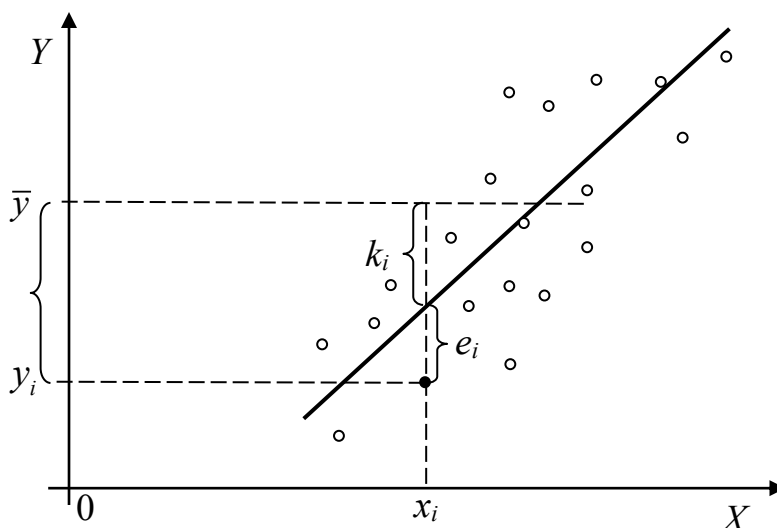


Рисунок 3.2.1. – Графическое представление отклонений

Чтобы найти **долю** разброса зависимой переменной, объясненной регрессией Y по X , очевидно, надо отнести объясненную сумму квадратов $[k^2]$ к общей сумме квадратов:

$$\frac{[k^2]}{[(y - \bar{y})^2]} = R^2, \quad (3.2.3)$$

которая и характеризует долю объясненного разброса. Подобное выражение можно получить из равенства (3.2.2), если разделить его почленно на левую часть и ввести принятое обозначение:

$$1 = \frac{[k^2]}{[(y - \bar{y})^2]} + \frac{[e^2]}{[(y - \bar{y})^2]} = R^2 + \frac{[e^2]}{[(y - \bar{y})^2]},$$

откуда имеем

$$R^2 = 1 - \frac{[e^2]}{[(y - \bar{y})^2]}. \quad (3.2.4)$$

Здесь $\frac{[e^2]}{[(y - \bar{y})^2]}$ – **доля** разброса зависимой переменной, не объясненная *регрессией*

Y по X .

Полученный коэффициент называют *коэффициентом детерминации*, который также является мерой определения в какой степени найденная линия *регрессии* дает **лучший** результат для объяснения поведения зависимой переменной Y , чем горизонтальная прямая $Y = \bar{y}$. Величина изменяется в пределах $0 \leq R^2 \leq 1$. Чем теснее линейная связь между Y и X , тем ближе коэффициент к 1.

Рассмотрим *коэффициент детерминации* для линейной регрессии вида $\hat{y}_i = a \cdot x_i + b$. Тогда по (3.2.3) имеем

$$R^2 = \frac{[k^2]}{[(y - \bar{y})^2]} = \frac{[(a \cdot x + b - (a \cdot \bar{x} + b))^2]}{[(y - \bar{y})^2]} = a^2 \cdot \frac{[(x - \bar{x})^2]}{[(y - \bar{y})^2]} = a^2 \cdot \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = r_{12}^2,$$

так как $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot r_{12}$ (см. [Приложение 1](#)).

Таким образом, *коэффициент детерминации* и квадрат парного коэффициента корреляции для линейной *регрессии* Y по X совпадают.

Индекс корреляции (см., например, [2]). Поделив раскрытое выражение (3.2.2) на число *степеней свободы*, легко переходим к аналогичным выражениям, но в символах *дисперсии*:

$$\sigma_Y^2 = \frac{[(y - \bar{y})^2]}{n} = \frac{[(\hat{y} - \bar{y})^2]}{n} + \frac{[(y - \hat{y})^2]}{n} = \sigma_{\hat{Y}}^2 + \sigma_e^2, \quad (3.2.5)$$

где σ_Y^2 – *дисперсия результирующего признака*;

$\sigma_{\hat{Y}}^2$ – *факторная дисперсия*;

σ_e^2 – *остаточная дисперсия*.

Теперь коэффициент детерминации R^2 на основе формул (3.2.3) – (3.2.5) можно представить как

$$R^2 = \frac{\sigma_{\hat{Y}}^2}{\sigma_Y^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_Y^2} = I_{Y \cdot X}^2. \quad (3.2.6)$$

Эту величину называют *индексом корреляции*.

Корреляционное соотношение (см., например, [2; 13]). Для линейной модели $\hat{y}_i = a \cdot x_i + b$ дисперсия остатков есть выражение $D_e = \sigma_e^2 = \sigma_y^2 \cdot (1 - r_{12}^2) = D_{y|x}$ – *условная дисперсия* Y на X (см. [Приложение 1](#)). Тогда выражение (3.2.6) перепишем следующим образом:

$$1 - \frac{\sigma_{Y|X}^2}{\sigma_Y^2} = \eta_{Y|X}^2, \quad (3.2.7)$$

которое называют *корреляционным отношением*. Эта величина позволяет характеризовать не только тесноту **линейной** связи, но и **любой другой**, для которой определена величина *условной дисперсии* (которая является просто погрешностью используемой модели).

Пусть данные представлены n -мерной линейной *регрессией* вида

$$\hat{y}_i = a_1 \cdot x_1 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1} + a_n.$$

Не сложно заметить, что *факторная дисперсия* и *дисперсия остатков* может быть получена через элементы *ковариационной матрицы* K -факторных признаков

$$D_{\hat{y}} = a^T K a, \quad D_e = \tilde{\sigma}^2 \quad (3.2.8)$$

где a – вектор-столбец коэффициентов при факторных признаках x_i без свободного члена a_n ;

$\tilde{\sigma}^2$ – вектор-столбец коэффициентов при факторных признаках x_i в том числе и минус единица для свободного члена a_n ;

\tilde{I} – расширенная *ковариационная матрица* для всей совокупности, где на последнем месте *дисперсия* и *ковариации* результирующего признака \hat{y}_i .

Тогда *индекс корреляции* из (3.2.6) будет

$$I_{Y.X}^2 = \frac{a^T K a}{\sigma_y^2} = 1 - \frac{\tilde{\sigma}^2}{\sigma_y^2} \quad (3.2.9)$$

Ковариационную матрицу K также называют *матрицей моментов* λ , а обратную к ней – *обратной матрицей моментов* $\Lambda = \lambda^{-1}$, или *матрицей кофакторов*.

Множественный коэффициент корреляции. Можно доказать, что $\frac{1}{\tilde{I}}$ – величина

на, обратная последнему элементу в обратной расширенной *ковариационной матрице*, равна *дисперсии* модели D_e , а последний элемент расширенной *ковариационной матрицы* есть *дисперсия* результирующего признака D_y . Тогда имеем формулу вида

$$R_{n|...}^2 = 1 - \frac{D_e}{D_y} = 1 - \frac{1}{\tilde{I}} \quad (3.2.10)$$

которая работает для любого значения i . Теперь эта формула в виде

$$R_{i|...}^2 = 1 - \frac{D_e}{D_y} = 1 - \frac{1}{\tilde{I}} \quad (3.2.10a)$$

носит название *множественного (совокупного) коэффициента корреляции*. Коэффициент показывает тесноту связи между i -м параметром и **всеми** остальными. Для удобства вычислений значения всех признаков (и факторных, и результирующих) сводят в *матрицу плана* A вида

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_{n1} & \cdots & & \end{pmatrix} \quad (3.2.11)$$

В матрице A результирующий признак может находиться в первом или последнем столбце.

Частный коэффициент корреляции. Для оценки **вклада** в множественный коэффициент корреляции каждого из факторов используются так называемые «частные коэффициенты корреляции». *Частный коэффициент корреляции* – это показатель, характеризующий тесноту связи между i -м и j -м признаком при **удалении** (элиминации) линейного влияния всех остальных признаков. Если обозначить $\sigma_{y1\dots m}^2$ факторную дисперсию регрессии y на все m факторных признаков x , $\sigma_{y1\dots m-1}^2$ – факторную дисперсию регрессии y на $m - 1$ факторных признаков x (без i -го признака), $\sigma_{y(1\dots m-1)}^2$ – остаточную дисперсию регрессии y на $m - 1$ факторных признаков x (без i -го признака), то частный коэффициент корреляции будет иметь вид на основе (3.2.6):

$$R_{ym(12\dots m-1)} = \sqrt{\frac{\sigma_{y1\dots m}^2 - \sigma_{y1\dots m-1}^2}{\sigma_{y(1\dots m-1)}^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{y1\dots m}^2 - \sigma_{y1\dots m-1}^2}{\sigma_y^2 - \sigma_{y1\dots m-1}^2}}, \quad (3.2.12)$$

и того, что результирующая дисперсия равна сумме «укороченных» остаточной и факторной дисперсий (см. (3.2.5)) $\sigma_y^2 = \sigma_{y1\dots m-1}^2 + \sigma_{y(1\dots m-1)}^2$.

Пример 19. Для модели вида $\hat{y}_i = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3$ частный коэффициент корреляции между результирующим признаком y и факторным x_1 при исключении влияния фактора x_2 есть

$$r_{y1(2)} = r_{y1|2} = \sqrt{\frac{\sigma_{y12}^2 - \sigma_{y2}^2}{\sigma_{y(2)}^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_{y12}^2 - \sigma_{y2}^2}{\sigma_y^2 - \sigma_{y2}^2}}$$

Можно показать, что, имея ковариационную матрицу \tilde{I} и обратную к ней \tilde{I}^{-1} , частный коэффициент корреляции между i -м и j -м признаком будет

$$r_{ij|\dots} = -\frac{\tilde{I}_{ij}}{\sqrt{\tilde{I}_{ii} \tilde{I}_{jj}}} \quad (3.2.13)$$

Для **трех** исследуемых рядов, исходя из формул (3.2.11) и (3.2.18), частный коэффициент корреляции $r_{ij|k}$ можно выразить через парные коэффициенты корреляции r_{ij} , r_{ik} , r_{jk} как

$$r_{ij|k} = \frac{r_{ij} - r_{ik} \cdot r_{jk}}{\sqrt{(1 - r_{ik}^2) \cdot (1 - r_{jk}^2)}} \quad (3.2.14)$$

Также для трех исследуемых рядов через парные коэффициенты корреляции r_{ij} , r_{ik} , r_{jk} можно выразить и множественный коэффициент корреляции $r_{i|jk}$ в виде

$$r_{i|jk} = \sqrt{\frac{r_{ij}^2 + r_{ik}^2 - 2r_{ij}r_{ik}r_{jk}}{1 - r_{jk}^2}}. \quad (3.2.15)$$

Коэффициент корреляции рангов (см., например, [2]). В некоторых случаях встречаются с признаками, не поддающимися количественной оценке. В такой ситуации каждой исследуемой величине i -го ряда выставляется оценка, что подразумевает субъективизм. Для его исключения элементы в i -м ряду ранжируют (например, по возрасту), степени изменения какого-либо исследуемого качества. Присудим каждому из них порядковый номер, называемый рангом.

Пусть n элементов по качеству A имеют ранги A_1, A_2, \dots, A_n , по качеству $B - B_1, B_2, \dots, B_n$, а разность между ними $A_k - B_k = d_k$. Значения d_k дают меру тесноты соответствия между качествами A и B . Очевидно, если все d_k равны нулю, то соответствие полное. Получим общий коэффициент тесноты связи между свойствами следующим образом. Значения рангов как A_k , так и B_k изменяются от 1 до n ; сумма рангов равна $n(n+1)/2$, а среднее $(n+1)/2$ для одного и другого признака. Найдем отклонения ранга от среднего как

$$a_k = A_k - \bar{A} = A_k - (n+1)/2 \quad \text{и} \quad b_k = B_k - \bar{B} = B_k - (n+1)/2.$$

Теперь по формуле обычного парного коэффициента корреляции Пирсона (см. [Приложение 1](#)) найдем его значение с учетом введенных обозначений:

$$r_{12} = \rho = \frac{\sum (A_k - (n+1)/2) \cdot (B_k - (n+1)/2)}{\sqrt{\sum (A_k - (n+1)/2)^2 \cdot \sum (B_k - (n+1)/2)^2}} = \frac{\sum a_k \cdot b_k}{\sqrt{\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2}}. \quad (3.2.16)$$

Этот коэффициент называют *коэффициентом корреляции рангов Спирмена*. Обычно его выражают через величины n и d . Для этого находим суммы

$$\begin{aligned} \sum a_n^2 = \sum b_n^2 &= (n^3 - n)/12, \quad \sum d^2 = \sum (A_k - B_k)^2 = \sum (a_k - b_k)^2 = \\ &= \sum a_k^2 + \sum b_k^2 - 2\sum a_k b_k \end{aligned}$$

Отсюда смешанная сумма для числителя (3.2.16) будет

$$\sum a_k b_k = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n^3 - n}{6} - \sum d^2 \right),$$

а значения *коэффициента корреляции* ρ из (3.2.16) при подстановке полученных значений примет более известный и простой вид

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum d^2}{n^3 - n}. \quad (3.2.17)$$

Коэффициент корреляции рангов изменяется от -1 до $+1$. Если все $d = 0$, то $\rho = +1$, а если ранги таковы, что 1-й, 2-й, ..., n -й по одному признаку соответствуют n , $(n - 1)$, ..., 1 по другому признаку, то $\rho = -1$. Коэффициент корреляции рангов применяется для быстрого оценивания отношения между признаками, **не имеющими** нормального закона распределения, которые поддаются *ранжированию*, но не могут быть по каким-либо причинам **точно** измерены. Используется также и для точно измеренных характеристик признаков.

Интервальные оценки коэффициента корреляции. Кроме *точечных оценок коэффициента корреляции*, рассмотренных выше, часто требуется получить их *интервальные оценки*. Они во многих случаях более **адекватно** отражают реальное положение вещей. Для получения такого рода оценок необходимо знать *закон распределения значений коэффициента корреляции*. Тогда *доверительный интервал* строится как

$$r - k_{\beta} \cdot \sigma_r < \rho < r + k_{\beta} \cdot \sigma_r, \quad (3.2.18)$$

где k_{β} – β -процентные точки закона распределения оценки *коэффициента корреляции* r теоретического значения коэффициента ρ .

Если совместное распределение исследуемых рядов при достаточно большом n **нормально**, то *плотность распределения коэффициента корреляции* r будет нормальной с основными характеристиками

$$M(r) = \rho + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \left(M(r) = r - \frac{r(1-r^2)}{2n} \right), \quad (3.2.19)$$

$$D(r) = \frac{(1-\rho^2)^2}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Здесь $O(*)$ – порядок отбрасываемого члена. Из первой формулы (3.2.19) следует, что r есть *смещенная* оценка теоретического коэффициента ρ (смещение отрицательное). *Функция плотности* не зависит ни от *математического ожидания*, ни от *стандарта измерений*, и $n \geq 4$. Теперь, после замены в оценках (3.2.19) ρ на r по (3.2.18), имеем *интервальную оценку*

$$r - u_{\beta} \cdot \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}} < \rho < r + u_{\beta} \cdot \frac{(1-r^2)}{\sqrt{n}}, \quad (3.2.20)$$

где u_{β} – квантиль нормального закона распределения при заданной *доверительной вероятности* β (симметричный интервал, (см. [Приложение 3](#)). Но при малом числе n и значениях *коэффициента корреляции*, достаточно не равных нулю, при отличии результатов от нормального закона, формула (3.2.20) весьма **грубо** отражает реальность.

Z-функция Фишера. Избавиться от перечисленных ограничений позволяет преобразование, предложенное Р. Фишером. Он приравнял выборочный коэффициент корреляции r к гиперболическому тангенсу некоторой величины z : $r = \text{th}(z)$, откуда

$$z = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right). \quad (3.2.21)$$

Функция (3.2.21) получила название *z-функции Фишера*. Распределение z не зависит от значений ρ и n , и уже при $n > 10$ быстро сходится к *нормальному закону* с параметрами

$$M(z) \approx \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) + \frac{\rho}{2(n-1)}, \quad D(z) \approx \frac{1}{n-3}. \quad (3.2.22)$$

Это позволяет построить *доверительный интервал* $[z_1, z_2]$ для *математического ожидания* $M(z)$ по формуле

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \mp \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{n-3}} \right), \quad (3.2.23)$$

откуда следует, что истинное значение *коэффициента корреляции* ρ с *доверительной вероятностью* $\beta = 1 - \alpha$ заключено в пределах

$$\text{th}(z_1) < \rho < \text{th}(z_2). \quad (3.2.24)$$

Значимость статистической связи. Вторая не менее значимая составляющая *корреляционного анализа* – установление **значимости** статистической связи. Задача чаще всего сводится к проверке статистической значимости *коэффициента корреляции* (*коэффициента детерминации*) и может быть в некоторой степени решена на основе *интервальных оценок*. В общем случае проверяется нулевая гипотеза с какой-либо альтернативной, например:

$$\begin{aligned} H_0 : R^2 &= 0; \\ H_1 : R^2 &> 0. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Проверку этой гипотезы можно выполнять на основе *F-теста Фишера*.

Пусть, общая *дисперсия* разлагается на *объясненную* и *необъясненную* составляющие (см. (3.2.5)):

$$\begin{aligned} D(y) &= D(\hat{y}) + D(e); \\ \sum (y_i - \bar{y})^2 &= \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y})^2 = k^2 + e^2. \end{aligned}$$

Тогда формула для *F-статистики* принимает вид (3.2.26) и представляет собой отношение *объясненной* и *необъясненной* сумм квадратов (*дисперсий*):

$$F = \frac{\left(\frac{k^2}{p} \right)}{\left(\frac{e^2}{m} \right)}, \quad (3.2.26)$$

где p – верхнее число степеней свободы или число объясняющих переменных (для парной регрессии 1);

q – нижнее число степеней свободы или число наблюдений без количества оцениваемых коэффициентов (для парной регрессии $n - 2$).

Тогда, если вычисленное значение (3.2.26) больше квантиля F -распределения Фишера $F > F_{\beta; p, q}$ (см. [Приложение 3](#)), то нулевая гипотеза отвергается и значение R^2 считается значимым. Если исследуется значимость парного выборочного коэффициента корреляции, то по (3.2.26) имеем

$$F = \frac{k^2(n-2)}{e^2} = \frac{r_{12}^2 \sigma_y^2 (n-2)}{\sigma_y^2 (1-r_{12}^2)} = \frac{r_{12}^2 (n-2)}{(1-r_{12}^2)}.$$

Так как верхнее число степеней свободы $p = 1$, то $F = t^2$, или $\sqrt{F} = t = r_{12} \sqrt{\frac{(n-2)}{1-r^2}}$ – есть в точности значение, имеющее t -распределение *Стьюдента*.

Таким образом, для значимости парного коэффициента корреляции, если $t < t_{\beta, q}$, то нулевая гипотеза $H_0: r = 0$ принимается с доверительной вероятностью β .

3.3. Регрессионный анализ

[Основные задачи регрессионного анализа.](#)

[Регрессия.](#)

[Линейный регрессионный анализ.](#)

[Условия Гаусса – Маркова.](#)

[Получение уравнения регрессии по методу наименьших квадратов.](#)

[Вычислительная схема МНК.](#)

[Проверка качества уравнения регрессии.](#)

[Интервальное оценивание коэффициентов регрессии.](#)

Основные задачи регрессионного анализа. После того, как мы убедились в наличии статистически **значимых** связей между анализируемыми переменными, приступаем к выявлению и математическому описанию конкретного вида интересующих нас зависимостей:

- а) подбираем класс функций, в рамках которого будем вести свой дальнейший анализ;
 - б) производим (если необходимо) отбор наиболее информативных предсказывающих переменных;
 - в) вычисляем оценки для неизвестных значений параметров, участвующих в формировании уравнения зависимости;
 - г) анализируем точность полученного уравнения связи и его параметров;
 - д) анализируем степень пригодности полученного уравнения для целей прогноза.
- Обозначенные этапы составляют содержание *регрессионного анализа* эмпирических данных.

Выделяют два варианта (в основном) статистических взаимосвязей между переменными X и Y . В первом случае обе переменные равноценны и основным является вопрос о наличии и силе взаимосвязи между ними – *корреляционный анализ*. Вероятнее всего, здесь связь **не носит** направленного характера, т.е. изменение переменных в одном направлении не обязательно является критерием связи между переменными. Другой вариант выделяет одну (несколько) из величин как *независимую (объясняющую, факторную, предиктор)*, а другую – как *зависимую (объясняемую, результирующую)*. В этом случае изменение первой может служить причиной для изменения второй переменной в виде какой-либо зависимости. Таким образом, *регрессионный анализ* является **качественной** стороной статистического исследования зависимостей (анализа связей), в то время как *корреляционный анализ* – **количественной**. Очевидно, что такая зависимость не является однозначной, так как каждому конкретному значению объясняющей переменной соответствует **множество** значений из некоторой области, т.е. соответствует некоторое вероятностное распределение зависимой переменной, рассматриваемой как *случайная величина*.

Регрессия. Поэтому целесообразно анализировать, как объясняющая переменная влияет на зависимую переменную «**в среднем**». Зависимость такого типа выражается как

$$M(Y | x) = f(X) \quad (3.3.1)$$

и носит название *функции регрессии Y на X* . Здесь X – объясняющая переменная (*регрессор*), Y – зависимая.

Зависимость *двух случайных величин* в этом контексте и когда x – одна объясняющая переменная, y – одна зависимая переменная, носит название *парной регрессии* и имеет вид

$$M(y | x) = f(x). \quad (3.3.2)$$

Термин «*регрессия*» (движение назад, возвращение в прежнее состояние) был введен **Фрэнсисом Галтоном** в конце XIX в. при анализе зависимости между ростом родителей и ростом детей.

Таким образом, под *регрессией* понимается функциональная зависимость между объясняющей переменной и *условным математическим ожиданием (средним значением)* зависимой переменной, которая строится ещё и с целью предсказания (*прогнозирования*) этого среднего значения при фиксированных значениях первых. Очевидно, что выражения (3.3.1) и (3.3.2) суть *стохастические* зависимости, т.е. реальные значения зависимой переменной не всегда совпадают с её *условным математическим ожиданием* и различаются даже при одном и том же значении объясняющей переменной. Исходя из этого, фактическая зависимость должна быть дополнена некоторым случайным слагаемым ε , отражающим это несоответствие. Тогда связи в выражениях (3.3.1) и (3.3.2) примут вид

$$Y = M(Y | x) + \varepsilon, \quad (3.3.3)$$

$$y = M(y | x) + \varepsilon. \quad (3.3.4)$$

Они называются *регрессионными моделями (уравнениями)*. Необходимость включения в модель случайного слагаемого ε вызвано, кроме всего прочего, следующими основными причинами:

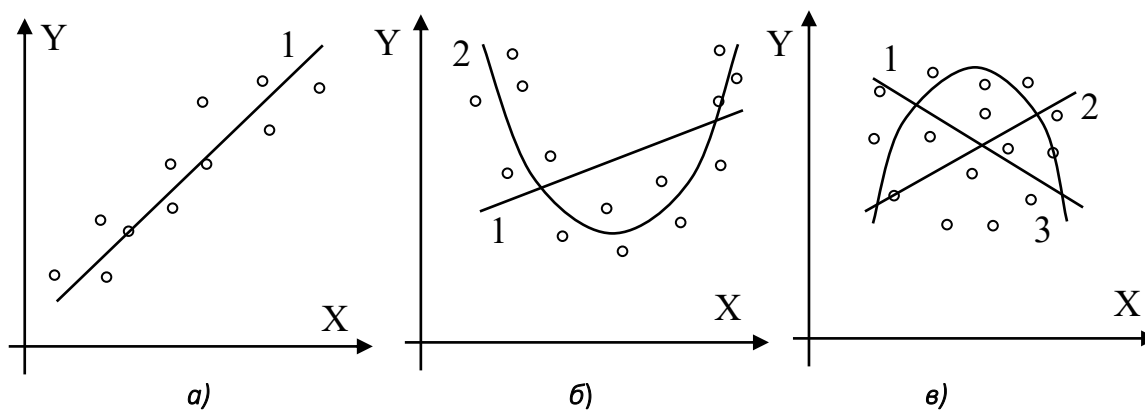
- невключение в модель всех объясняющих переменных;
- неправильный выбор функции модели;
- агрегирование (объединение) переменных;
- погрешности измерений;
- ограниченность статистических данных.

Случайный член и является отражением влияния всех перечисленных факторов, и не только их.

Как было показано выше, первый этап построения качественного уравнения регрессии по эмпирическим данным есть выбор формулы связи переменных. Называется этот этап *спецификацией* уравнения *регрессии*. Проще всего задача решается для *парной регрессии* графическим методом. Для этого в декартовой системе координат строится набор исходных данных в виде точек (x_i, y_i) . Это построение называют *корреляционным полем (диаграммой рассеивания)*, по которой и производят визуально выбор подходящего класса функций (рисунок 3.3.1). Корреляционное поле имеет несколько вариантов:

- 1) данные хорошо описываются *линейной моделью 1* (рисунок 3.31, а);
- 2) данные хорошо описываются *квадратичной моделью 2* и плохо линейной моделью 1 (рисунок 3.31, б);
- 3) данные одинаково плохо описываются квадратичной моделью 3 и линейными моделями 1 и 2 (рисунок 3.31, в).

Аналитические способы спецификации достаточно трудоемки.



а) – линейная модель 1; б) – линейная модель 1 квадратичная 2;
в) – линейные модели 1 и 2, квадратичная 3

Рисунок 3.3.1. – Виды диаграмм рассеивания для парной регрессии

Второй этап построения уравнения регрессии после выбора модели общего вида – определение параметров (коэффициентов) модели – *параметризация*. Последний этап (проверка качества регрессии) называют *верификация*.

Линейный регрессионный анализ. Рассмотрим параметризацию самой простой функции регрессии – парной линейной. Линейная регрессия широко распространена, так как служит для выявления общей тенденции процесса и часто является начальной точкой для дальнейшего анализа.

Пусть из (3.3.1) регрессия Y на X будет

$$M(Y | X = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i, \quad (3.3.5)$$

а линейное регрессионное уравнение из (3.3.3)

$$y_i = M(Y | X = x_i) + \varepsilon_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i. \quad (3.3.6)$$

Соотношение (3.3.6) называют **теоретической линейной регрессионной моделью**; β_0 и β_1 – **теоретическими** коэффициентами регрессии; ε_i – **теоретическими** случайными отклонениями. Таким образом, индивидуальные значения y_i есть **сумма** двух составляющих – **систематической** $\beta_0 + \beta_1 x_i$ и **случайной** ε_i .

В общем виде уравнение (3.3.6) имеет вид

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon_i. \quad (3.3.6a)$$

Для определения значений теоретических коэффициентов из этого уравнения необходимо знать и использовать все значения переменных X и Y из *генеральной совокупности*, что практически **невозможно**. Таким образом, задачи *линейного регрессионного анализа* состоят в том, чтобы по имеющимся статистическим данным (x_i, y_i) для переменных X и Y :

а) получить наилучшие по какому-либо критерию оценки неизвестных теоретических параметров β_0 и β_1 ;

б) проверить статистические гипотезы о параметрах модели;

в) проверить адекватность модели данных наблюдений.

Очевидно, что по выборке ограниченного объема возможно построить лишь эмпирическую регрессию

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_i, \quad (3.3.7)$$

где \hat{y}_i – оценка *условного математического ожидания* $M(Y | X = x_i)$;

b_0 и b_1 – оценки неизвестных теоретических параметров β_0 и β_1 , называемые *эмпирическими коэффициентами регрессии*.

Следовательно, *эмпирическое регрессионное уравнение* (практический аналог (3.3.6)) есть

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i, \quad (2.3.8)$$

где e_i – оценка теоретических случайных отклонений ε_i .

Из-за несовпадения значений *выборки* и *генеральной совокупности* оценки b_0 и b_1 всегда отличаются от истинных коэффициентов β_0 и β_1 . Это несоответствие приводит к несовпадению эмпирической и теоретической *линий регрессии*. При этом другие выборки дают похожие, но разные оценки b_0 и b_1 . Таким образом, задача *параметризации* состоит в том, чтобы по конкретной *выборке* (x_i, y_i) найти оценки b_0 и b_1 неизвестных параметров β_0 и β_1 так, чтобы построенная линия *регрессии* являлась **наилучшей** в определенном смысле среди других прямых (была «ближайшей» к точкам наблюдений по всей выборке). Для этого необходимо ввести **меру** качества оценок,

которая должна являться, очевидно, композицией отклонений e_i (меры по координатного отклонения значений модельной точки от её эмпирической величины). В качестве этой композиции могут быть, например, следующие функции от отклонений e_i , которые для получения оптимальных оценок требуют своей минимизации:

$$\sum_{i=1}^n |e_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - b_0 - b_1 x_i|; \quad (3.3.9)$$

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2, \quad (3.3.10)$$

Определение оценок из минимизации функции (3.3.9) называют *методом наименьших модулей (МНМ)*; из минимизации (3.3.10) – *методом наименьших квадратов (МНК)*. Второй метод является самым распространенным, простым и наиболее теоретически обоснованным. Кроме этого, оценки коэффициентов *регрессии* по МНК при определенных предпосылках обладают рядом важных оптимальных свойств.

Условия Гаусса – Маркова (см., например, [2]). К этим предпосылкам относят:

1. Математическое ожидание случайных отклонений ε_i равно **нулю** для всех наблюдений: $M(\varepsilon_i) = 0$ (условие отсутствия **систематической** составляющей в случайных отклонениях).

2. Дисперсия случайных отклонений ε_i постоянна для всех наблюдений: $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (условие гомоскедастичности или равноточности).

3. Случайные отклонения ε_i и ε_j являются **независимыми** друг от друга для $i \neq j$ (условие отсутствия автокорреляции, некоррелированность).

4. Случайное отклонение ε_i независимо от объясняющих переменных x_i : $\text{cov}(\varepsilon_i, x_i) = 0$.

5. Модель является линейной относительно параметров, а случайные отклонения ε_i имеют нормальный закон распределения.

Все эти условия собраны в *теореме Гаусса – Маркова*: если предпосылки 1 – 5 выполнены, то оценки, полученные по МНК, являются *несмещенными, состоятельными, эффективными*.

Такие оценки в специальной англоязычной литературе называют *BLUE (Best Linear Unbiased Estimators)* – *наилучшие линейные несмещенные оценки*.

Получение уравнения регрессии по методу наименьших квадратов (МНК). Рассмотрим процедуру МНК для получения оценок коэффициентов уравнения регрессии b_0 и b_1 вида (3.3.8) по выборке (x_i, y_i) . В этом случае необходимо **минимизировать** функцию (3.3.10), называемую *целевой* (функцией *потерь*, функцией *риска*):

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \min.$$

Геометрический смысл отклонений e_i показан на рисунке 3.3.2.

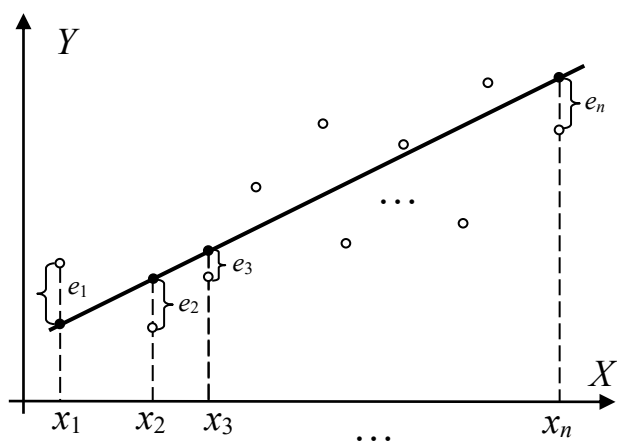


Рисунок 3.3.2. – Геометрический смысл отклонений e_i .

Необходимым условием существования минимума функции двух переменных является равенство нулю её частных производных по неизвестным параметрам b_0 и b_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial b_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) \cdot 1 = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^n e_i \cdot \frac{\partial e_i}{\partial b_1} = -2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - b_0 - b_1 x_i) \cdot x_i = 0 \end{cases} \quad (3.3.11)$$

или

$$\begin{cases} b_0 n + b_1 \sum x_i = \sum y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Система (3.3.12) называется *системой нормальных уравнений* для получения неизвестных коэффициентов уравнения *регрессии*. Разделив (3.3.12) на n получим

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \bar{x} = \bar{y} \\ b_0 \bar{x} + b_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \\ b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \end{cases} \quad (3.3.13)$$

Здесь $(\bar{*})$ – среднее из комбинации (*).

Несложно заметить, что коэффициент b_1 можно получить как

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{m_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{m_y}{m_x}.$$

Такие же результаты дает и *условное математическое ожидание* для двух нормально распределенных величин. Метод получения коэффициентов на основе *условного математического ожидания* в статистике называют *методом средних* или иногда *методом Маркова* (см. [Приложение 1](#)).

Вычислительная схема МНК. Для удобства вычислений поступают следующим образом:

1) формируют матрицу плана A , в которой столбцы – величины при определяемых параметрах модели;

2) составляют нормальную матрицу $N = A^T \cdot A$ и вектор свободных членов $b = A^T \cdot y$ для системы нормальных уравнений (3.3.12), которая в матричном виде есть $N \cdot k = b$. Здесь k – вектор искомых параметров. Решение системы k дает нам оценку коэффициентов уравнения регрессии Y на X .

Пример 20. Для модели вида $y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i$ матрица плана A , нормальная матрица N , свободный член b для системы $N \cdot k = b$ есть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix},$$

что является свернутой записью (3.3.12) с вектором неизвестных $k = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$.

Проверка качества уравнения регрессии. Следующий этап регрессионного анализа – проверка качества оценок и уравнения в целом (верификация). Так как имеется случайный отбор элементов в выборку, случайными являются и оценки b_0 и b_1 теоретических коэффициентов β_0 и β_1 . Если выполняются условия Гаусса – Маркова, то их математические ожидания $M(b_0) = \beta_0$, а $M(b_1) = \beta_1$, а оценки тем надежнее, чем меньше их разброс вокруг β_0 и β_1 , т.е. чем меньше дисперсии $D(b_0)$ и $D(b_1)$ оценок.

В статистике дисперсии ищут только от линейных функций. Поэтому представим оценки b_0 и b_1 как линейные функции относительно Y :

$$b_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} - \frac{\bar{y} \cdot \sum (x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3.3.14)$$

или $b_1 = \sum c_i y_i$. Аналогично для b_0 имеем

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = \frac{\sum y_i}{n} - \sum c_i y_i \cdot \bar{x} = \sum \left(\frac{1}{n} - c_i \bar{x} \right) y_i = \sum d_i y_i. \quad (3.3.14a)$$

Считаем, что дисперсии для величин y постоянны и не зависят от значений x . Тогда c_i и d_i постоянны и, следовательно, для дисперсий оценок коэффициентов имеем

$$D(b_1) = D(\sum c_i y_i) = \sigma^2 \sum c_i^2 = \frac{\sigma^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (3.3.15)$$

$$D(b_0) = D(\sum d_i y_i) = \sigma^2 \sum d_i^2 = \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n} - c_i \bar{x} \right)^2 = \sigma^2 \sum \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) = \sigma^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \sum (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.3.16)$$

Здесь $\sigma^2 = D(Y | X = x_i) = D(\varepsilon_i) = \sigma_\varepsilon^2$ – дисперсия остатков.

Вспомним, что матрица нормальных уравнений

$$N = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix},$$

а обратная к ней матрица

$$N^{-1} = Q = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

В выражении (3.3.15)

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \frac{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n}.$$

Тогда дисперсию коэффициента b_1 можно выразить через элементы обратной матрицы как

$$D(b_1) = \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \sigma^2 \cdot \frac{n}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \sigma^2 \cdot q_{22}. \quad (3.3.17)$$

Аналогично для дисперсии коэффициента b_0 имеем

$$D(b_0) = \sigma^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \sigma^2 \cdot q_{11}. \quad (3.3.17a)$$

Здесь q_{ij} – элементы обратной матрицы Q .

Так как $\sigma^2 = D(\varepsilon_i)$ реально не может быть определено (так как не определены ε_i), её заменяют дисперсией оценок e_i в виде

$$D(e_i) = m_0^2 = \frac{1}{n-2} \cdot \sum (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}. \quad (3.3.18)$$

Корень из этой величины – m_0 есть стандартная погрешность модели регрессии, а корни из дисперсий оценок $m_{b_1} = \sqrt{D(b_1)} = m_0 \cdot \sqrt{q_{22}}$ и $m_{b_0} = \sqrt{D(b_0)} = m_0 \cdot \sqrt{q_{11}}$ – стандартные погрешности коэффициентов регрессии. Такие оценки через элементы обратной матрицы Q и погрешность модели m_0 пригодны для оценки коэффициентов **любой** модели.

Формулы (3.3.14) – (3.3.18) получены на основе алгебраического подхода, который в последнее время используется уже достаточно редко. Более простой, наглядный и современный метод получения этих величин на основе матричного исчисления смотри в разделе *Множественная регрессия*.

Интервальное оценивание коэффициентов регрессии. Кроме точечной оценки коэффициентов регрессии часто необходимо получить их интервальную оценку. Исто-

для из нормального распределения y_i и того, что b_0 и b_1 линейные комбинации y_i , не сложно установить, что и оценки b_0 и b_1 распределены нормально: $b_0 \sim \dots$. Тогда *статистики*

$$t_{b_0} = \frac{b_0 - \beta_0}{m_{b_0}}, \quad t_{b_1} = \frac{b_1 - \beta_1}{m_{b_1}} \quad (3.3.19)$$

имеют *t-распределение Стьюдента* с $\nu = n - 2$ числом степеней свободы. По *доверительной вероятности P* определяют критическое значение двухстороннего интервала в виде квантиля *t-распределения Стьюдента* $t_{q/2, n-2}$ ($q = 1 - P$), которое должно удовлетворять условию $P(|t| < t_{q/2, n-2}) = 1 - q$. Откуда *доверительные интервалы* для коэффициентов есть

$$\begin{aligned} b_0 - t_{q/2, n-1} \cdot m_{b_0} < \beta_0 < b_0 + t_{q/2, n-1} \cdot m_{b_0}, \\ b_1 - t_{q/2, n-1} \cdot m_{b_1} < \beta_1 < b_1 + t_{q/2, n-1} \cdot m_{b_1}, \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

С *доверительной вероятностью P* они накрывают определяемые параметры β_0 и β_1 .

Процесс *верификации* уравнения заканчивают проверкой гипотез относительно коэффициентов уравнения регрессии. Если ожидаются какие-либо известные теоретические коэффициенты, то *нулевые гипотезы* имеют вид $H_0 : b_1 = \beta_1$, $H_0 : b_0 = \beta_0$, для чего используются *статистики* $t = \frac{b_1 - \beta_1}{m_{b_1}}$ или $t = \frac{b_0 - \beta_0}{m_{b_0}}$. При справедливости *нулевой гипотезы t* имеет *распределение Стьюдента* с числом степеней свободы $\nu = n - 2$ и выполняется неравенство $|t| \leq t_{q/2, n-2}$.

Наиболее важной задачей на данном этапе является установление наличия **линейной** зависимости между Y и X . Задача решается на основе *нулевой гипотезы* $H_0 : b_1 = 0$ и какой-либо *альтернативной*, например, $H_1 : b_1 \neq 0$. Если H_0 принимается, то есть основания считать, что величина Y не зависит от X и коэффициент b_1 статистически **не значим**. Для этого используется вторая статистика (2.3.19), но при $\beta_1 = 0$: $t = \frac{b_1}{m_{b_1}}$, которая также имеет *распределение Стьюдента* с $\nu = n - 2$ числом степеней свободы. Гипотеза принимается если $|t| \leq t_{q/2, n-2}$ с *доверительной вероятностью P*.

Аналогично можно исследовать значимость коэффициента β_0 , но это используется крайне редко.

3.4. Другие виды регрессии

[Множественная регрессия.](#)

[Регрессия с многомерным откликом.](#)

[Регрессия с двумерным откликом как задача трансформации координат.](#)

Множественная регрессия. Достаточно часто в геодезических моделях объясняющих переменных x_i несколько, а результирующая переменная y , или отклик, – одна. Регрессия такого вида носит название множественной регрессии и имеет общий вид

$$M(y | x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.4.1)$$

Наиболее часто встречающуюся множественную линейную практическую модель регрессии представим как

$$\hat{y} = y + v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k, \quad (3.4.2)$$

где \hat{y} – смоделированная результирующая переменная y (отклик, результат);

v – практический аналог истинных погрешностей ε , или поправки;

a_i – коэффициенты при объясняющих переменных (факторах) x_i , характеризующие степень влияния каждой из них на конечный результат. Иметь ввиду, что x_i – i -й вектор-столбец, состоящий из n элементов каждый. Такого рода модели также называют *множественными с одномерным откликом*. Для получения оптимальных коэффициентов a_i в (3.4.2) используем метод наименьших квадратов и метод на основе условного математического ожидания (метод средних *Маркова*, вычисления на основе центрированных величин).

При использовании МНК из системы (3.4.2) выражаем поправки v

$$v = \hat{y} - y = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k) - y \quad (3.4.3)$$

и ставим условие метода: найти такие коэффициенты a_i при объясняющих переменных x_i , при которых сумма квадратов поправок $[v^2]$ (или $v^T v$) к величинам y была бы минимальной. Сумма квадратов поправок $[v^2] = v^T v = \Phi$ носит название *целевой функции*, или *функции потерь*. Для её минимизации используется метод Эйлера, т.е. берутся частные производные от целевой функции Φ по определяемым величинам a_i , а полученные k уравнений приравниваются к нулю. Для простоты и наглядности выводов, представим систему в матричном виде систему (3.4.2)

$$\hat{y} = y + v = X \cdot a, \quad (3.4.4)$$

и систему (3.4.3)

$$v = X \cdot a - y, \quad (3.4.5)$$

которая носит название системы уравнений поправок. Здесь X – матрица коэффициентов при неизвестных параметрах a_i размера n (число измерений) на k (число определяемых параметров), a – вектор-столбец из k определяемых коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_k .

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1(k-1)} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2(k-1)} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{n(k-1)} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.4.6)$$

Для минимизации целевой функции Φ , возьмем от неё производную сразу по всему вектору коэффициентов a , учитывая, что функция сложная, и приравняем полученную систему к нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial a} = 2v^T \cdot X = 0. \quad (3.4.7)$$

Это уравнение целесообразно переписать в эквивалентном виде

$$X^T \cdot v = 0, \quad (3.4.8)$$

и подставить в него вид уравнения поправок (3.4.5)

$$\begin{aligned} X^T (X \cdot a - y) &= 0 \rightarrow \\ X^T X \cdot a &= X^T y \rightarrow \\ N \cdot a &= b \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

Полученная совместная система носит название системы нормальных уравнений и позволяет однозначно получить вектор искомым коэффициентов при условии $\Phi = v^T v = \min$. Обозначим обратную к матрице N матрицу $Q = N^{-1}$. Тогда искомое решение в виде вектора a получим как

$$a = Q \cdot b. \quad (3.4.10)$$

При решении задачи поиска оптимальных коэффициентов не в матричном, а в алгебраическом виде запишем целевую функцию Φ на основе (3.4.3) как

$$\Phi = [v^2] = [(\hat{y} - y)^2] = \left[\left((a_1 x_1 + a_1 x_1 + \dots + a_k) - y \right)^2 \right]. \quad (3.4.11)$$

От функции Φ возьмем производные по a_1, a_2, \dots, a_k и полученные выражения приравняем к нулю:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} &= 2 \left[\left((a_1 x_1 + a_1 x_1 + \dots + a_k) - y \right) \cdot x_1 \right] = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= 2 \left[\left((a_1 x_1 + a_1 x_1 + \dots + a_k) - y \right) \cdot x_2 \right] = 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_k} &= 2 \left[\left((a_1 x_1 + a_1 x_1 + \dots + a_k) - y \right) \cdot 1 \right] = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.4.12)$$

После элементарных преобразований – деления на 2 и раскрытия скобок с группировкой имеем в развернутом виде совместную систему нормальных уравнений (3.4.9), решение которой дает искомые коэффициенты a_i :

$$\begin{cases} [x_1^2]a_1 + [x_1x_2]a_2 + \dots + [x_1x_n]a_k = [x_1y] \\ [x_2x_1]a_1 + [x_2^2]a_2 + \dots + [x_2x_n]a_k = [x_2y] \\ \vdots \\ [x_nx_1]a_1 + [x_nx_2]a_2 + \dots + na_k = [y] \end{cases} = \begin{cases} N_{11}a_1 + N_{12}a_2 + \dots + N_{1n}a_k = b_1 \\ N_{21}a_1 + N_{22}a_2 + \dots + N_{2n}a_k = b_2 \\ \vdots \\ N_{k1}a_1 + N_{k2}a_2 + \dots + N_{kk}a_k = b_k \end{cases} \quad (3.4.13)$$

Оценка точности полученного уравнения регрессии состоит из оценки модели в целом и оценки коэффициентов модели. Как и ранее, выполняется на основе метода наименьших квадратов и теоремы о переносе ошибок.

Для оценки точности модели используем тот факт, что величины поправок v есть оценки истинных погрешностей Δ модели. Тогда на основе обычной формулы стандартного отклонения находим по поправкам (остаткам) v_i усредненную величину погрешности, которая носит название остаточной погрешности, или погрешности модели в целом:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-k}} = \sqrt{\frac{v^T v}{n-k}} = \sqrt{\frac{\Phi}{t}}. \quad (3.4.14)$$

Здесь n – число элементов в векторе; k – число определяемых параметров (коэффициентов) в модели; $t = n - k$ – число степеней свободы системы.

Оценку точности коэффициентов a_i получим на основе теоремы о переносе ошибок, выразив линейно вектор оцениваемых параметров a через результаты измерений y . Тогда из (3.4.9) и (3.4.10) для матрицы F в теореме имеем

$$F = Q \cdot X^T. \quad (3.4.15)$$

Тогда, на основе теоремы о переносе ошибок имеем вид ковариационной матрицы K_a для вектора коэффициентов a :

$$K_a = F \cdot K_y \cdot F^T = (QX^T) \cdot K_y \cdot (XQ). \quad (3.4.16)$$

Так как вектор измерений y – один, то можно показать, что $K_y = \hat{\sigma}_0^2$, а формула (3.4.16) примет известный вид

$$K_k = F \cdot K_y \cdot F^T = \hat{\sigma}_0^2 \cdot Q \quad (3.4.17)$$

и будет иметь размер по числу определяемых параметров ($k \times k$). Очевидно, что корень квадратный из диагональных элементов матрицы K_a есть стандартные отклонения $\hat{\sigma}_{a_i}$ для вычисленных коэффициентов a_i .

Достаточно часто для вычисления стандартных отклонений вычисленных коэффициентов на основе (3.4.17) используется следующий вид

$$\hat{\sigma}_{a_i} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{Q_{ii}}, \quad (3.4.18)$$

где Q_{ii} – диагональные элементы матрицы обратных весов (матрицы кофакторов) из (3.4.10)

При поиске значений коэффициентов a_i линейной множественной регрессии на основе *условного математического ожидания* (см. [Приложение 1](#)) строится расширенная матрица X_0 для всех объясняющих переменных x_i и отклика y , помещенного последней строкой $X_0 = [X \ y]$. Для полученной расширенной матрицы плана X_0 обычным способом находится оценка совместной ковариационной матрицы K_0 (см. [Приложение 1](#)). Из этой матрицы выделяется последняя строка и последний столбец для представления в виде

$$K_0 = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_y \end{pmatrix}. \quad (3.4.19)$$

Здесь K_{xx} – матрица; k_{xy} и k_{yx} – соответственно, вектор-столбец и вектор-строка в матрице K_0 ; k_y – число, причем $k_y = D_y$, есть дисперсия результирующей переменной y . Тогда на основе теоремы о многомерном условном распределении вероятностей имеем:

– для условного математического ожидания (и уравнения регрессии):

$$MO(y | x_1, \dots, x_n) = \hat{y} = \bar{y} + k_{yx} \cdot K_{xx}^{-1} (x - \bar{x}) = \bar{y} + a(x - \bar{x}), \quad (3.4.20)$$

или в нормальном виде

$$\hat{y} = \bar{y} + a(x - \bar{x}) = a \cdot x + (\bar{y} - a\bar{x}) = a \cdot x + d, \quad (3.4.21)$$

с вектором коэффициентов из (3.4.20)

$$a = k_{yx} \cdot K_{xx}^{-1}; \quad (3.4.22)$$

– для условной дисперсии (и дисперсии модели)

$$D(y | x_1, \dots, x_n) = \sigma_0^2 = k_y - k_{yx} \cdot K_{xx}^{-1} \cdot k_{xy}. \quad (3.4.23)$$

После преобразований с учетом структуры ковариационной матрицы K_0 получим ещё один часто используемый вид для дисперсии модели

$$\hat{\sigma}_0^2 = D_y (1 - r_{y|...}^2), \quad (3.4.24)$$

где D_y – дисперсия результирующей переменной y ,

$r_{y|...}^2$ – квадрат множественного коэффициента корреляции между результирующей переменной y и всеми остальными факторами x_i .

Можно показать, что, если имеется обратная ковариационная матрица K_0^{-1} , то условное математическое ожидание и уравнение многомерной линейной регрессии можно получить как

$$MO(y | x_1, \dots, x_n) = \hat{y} = \bar{y} + \frac{k_{xy}^{-1}}{k_y^{-1}} \cdot (x - \bar{x}) = \bar{y} + a(x - \bar{x}), \quad (3.4.25)$$

которое также можно привести к нормальному виду (3.4.21).

Оценку точности коэффициентов модели в методе условного математического ожидания (обобщенного метода средних) обычно не производят из-за вычислительных трудностей.

Регрессия с многомерным откликом. На основе теоремы о многомерном условном распределении вероятностей можно решить следующую задачу: Найти характеристики (условное математическое ожидание и условную дисперсию) в многомерном условном распределении вероятностей, при котором процесс описан k векторами, но разделен на 2 части k_1 и k_2 ($k_1 + k_2 = k$), и при этом k_1 -вектора являются фиксированными (т.е. через них выражаются остальные k_2 -вектора). Тогда имеем расширенную матрицу плана X_0 , совместную для k_1 -объясняющих переменных X и k_2 -результатирующих переменных Y , размещенных в матрице на последнем месте:

$$X_0 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ x_{11} & \cdots & & & & \cdots \\ x_{12} & \cdots & & & & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & & & & & \\ \hline & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ } nk_1} & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ } nk_2} & \\ & & & & & \end{array} \right) \quad (3.4.26)$$

Для расширенной матрицы плана X_0 обычным способом находится оценка совместной ковариационной матрицы K_0 , которая состоит из блоков:

$$K_0 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} X_u^T X_u & X_u^T Y_u \\ Y_u^T X_u & Y_u^T Y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix}. \quad (3.4.27)$$

Здесь X_u, Y_u – вектора, центрированные средним, для получения ковариационной матрицы. Часто для вычислений коэффициент $1/n$ опускают и работают с девиациями S_{ij} (ненормированными отклонениями от среднего). Тогда на основе теоремы о многомерном условном распределении вероятностей имеем:

– для условного математического ожидания (и уравнения регрессии):

$$MO(Y | X) = \hat{Y} = \bar{Y} + K_{YX} \cdot K_{XX}^{-1} (X - \bar{X}) = \bar{Y} + A(X - \bar{X}), \quad (3.4.28)$$

или в нормальном виде

$$\hat{Y} = AX + (\bar{Y} - A\bar{X}) = AX + B. \quad (3.4.29)$$

с матрицей коэффициентов из (3.4.26)

$$A = K_{yx} \cdot K_{xx}^{-1}; \quad (3.4.30)$$

– для условной ковариационной матрицы $K_{Y|X}$ отклика (результатирующей матрицы переменных Y модели):

$$K_{Y|X} = K_{YY} - K_{YX} \cdot K_{XX}^{-1} \cdot K_{XY}. \quad (3.4.31)$$

Полученная таким образом регрессия носит название *линейной регрессии с многомерным откликом*.

Регрессия с двумерным откликом как задача трансформации координат. На основе линейной регрессии с многомерным откликом достаточно просто может быть решена прикладная задача трансформации (преобразования) координат из одной системы в другую с использованием линейной модели. Здесь задача формулируется следующим образом. Есть координаты (x, y) для n точек в старой системе и есть координаты (x, y) для этих же точек в новой системе. Используя линейное преобразование старой системы в новую, получить коэффициенты этого преобразования, отвечающие заданному критерию качества.

Обозначим набор из n точек (x, y) в старой системе как K_c , а набор из n точек (x, y) в новой системе – как K_n . Тогда вид линейного преобразования старой системы в новую будет

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{bmatrix}_c + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix} = \\ &= K_n^T = X \cdot K_c^T + d \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

или

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \end{bmatrix}_n &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_c = \\ &= K_n^T = X' \cdot K_c'^T \end{aligned} \quad (3.4.33)$$

где K_c' размера $3 \times n$ – матрица старых координат K_c , расширенная вектор-строкой из единиц.

Система (3.4.33) решается на основе метода наименьших квадратов, путем умножения её левой и правой частей на матрицу K_c' , что приводит к совместной системе левосторонних нормальных уравнений вида

$$k \cdot N = b, \quad (3.4.34)$$

где

$$\begin{cases} N = K_c'^T \cdot K_c' \\ b = K_n^T \cdot K_c' \end{cases} \quad (3.4.35)$$

Решение системы (3.4.34) на основе обращения матрицы $N^{-1} = Q$ дает расширенную матрицу оценок коэффициентов преобразования \hat{X}'

$$\hat{X}' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = b \cdot Q. \quad (3.4.36)$$

При решении задачи трансформации на основе условного математического ожидания с двумерным откликом используют теорему о характеристиках многомерного условного нормального закона распределения. Для этого запишем объединенную матрицу K старых K_c и новых K_n координат по столбцам для n точек (x, y) (аналог (3.4.26)):

$$K_{n \times 4} = (K_c | K_H) = \begin{pmatrix} x_c & y_c & x_H & y_H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.4.37)$$

Из системы (3.4.37) обычным способ переходим к выборочной ковариационной матрице C (аналог (3.4.27)):

$$C = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} C_c^T C_c & C_c^T C_H \\ C_H^T C_c & C_H^T C_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{cc} & C_{cH} \\ C_{Hc} & C_{HH} \end{pmatrix}, \quad (3.4.38)$$

где C_c и C_H – центрированные средними старая и новая системы координат соответственно.

На основе матрицы C , используя теорему о многомерном условном распределении вероятностей имеем:

– для условного математического ожидания (и уравнения регрессии)

$$MO(K_H | K_c) = \hat{K}_H = \bar{K}_H + C_{Hc} \cdot C_{cc}^{-1} (K_c - \bar{K}_c) = \bar{K}_H + X (K_c - \bar{K}_c), \quad (3.4.39)$$

или в нормальном виде (см. (3.4.32)):

$$\hat{K}_H = X \cdot K_c + (\bar{K}_H - X \cdot \bar{K}_c) = X \cdot K_c + d, \quad (3.4.40)$$

с матрицей коэффициентов X и вектором свободных членов d из (3.4.39) и (3.4.40)

$$\begin{cases} X = C_{Hc} \cdot C_{cc}^{-1} \\ d = \bar{K}_H - X \cdot \bar{K}_c \end{cases}; \quad (3.4.41)$$

– для условной ковариационной матрицы $C_{K_H|K_c}$ отклика (результатирующей матрицы переменных Y модели):

$$C_{K_H|K_c} = C_{HH} - C_{Hc} \cdot C_{cc}^{-1} \cdot C_{cH}. \quad (3.4.42)$$

Формула (3.4.41) позволяют получить коэффициенты преобразования, а (3.4.42) – выполнить оценку точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с.
2. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
3. Большаков В. Д., Маркузе Ю. И. Городская полигонометрия. – М.: Недра, 1979. – 303 с.
4. Большаков В. Д., Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1977. – 367 с.
5. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
6. Большаков В. Д., Маркузе Ю. И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984. – 352 с.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. – М.: Высш. шк., 2002. – 575 с.
8. Видуев Н. Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений. – Киев.: Вища школа, 1978. – 376 с.
9. ГОСТ 11.006-74. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. – М.: Издательство стандартов, 1975. – 24 с.
10. Кемниц Ю. В. Теория ошибок измерений. – М.: Недра, 1967. – 175 с.
11. Кемниц Ю. В. Математическая обработка зависимых результатов измерений. – М.: Недра, 1970. – 192 с.
12. Леман Э. Теория точечного оценивания. – М.: Наука, 1991. – 448 с.
13. Маркузе Ю. И., Бойко Е. Г., Голубев В. В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: справ. пособие. – М.: Картгеоцентр – Геодезиздат, 1994. – 431 с.
14. Математическая статистика / Под ред. А. М. Длина. – М.: Высш. шк., 1975. – 398 с.
15. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
16. Смирнов Н. В., Белугин Д. А. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
17. Статистическая обработка результатов эксперимента на микро-ЭВМ и программируемых калькуляторах / А. А. Костылев, П. В. Миляев, Ю. Д. Дорский и др. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.
18. Степнов М. Н. Статистическая обработка результатов механических испытаний. – М.: Машиностроение, 1972. – 232 с.
19. Маркузе М. Ю. Обобщенный принцип проектирования точности измерений по заданной точности функций // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2000. – № 1. – С. 30–35.
20. Андерсон. Многомерный статистический анализ.

Основные сведения из теории вероятностей и математической статистики

1. Случайные величины

События.

Виды случайных величин.

Закон распределения.

Плотность распределения.

Моменты.

Другие характеристики случайной величины.

События. Исходом любого *опыта (испытания)*, осуществляемого при вполне определенных условиях, является *событие*. Событие может иметь качественную или количественную характеристику. Степенью возможности реализации случайного события является **вероятность**. Два события называют **независимыми**, если вероятность любого из них не зависит от наступления или ненаступления другого события. События называют **равновозможными случайными событиями**, если каждое из них не является объективно более возможным, чем другие.

Заслуживает упоминания трактовка *случайного процесса*, данная Анри Пуанкаре: Все процессы реального мира подчиняются *причинно-следственным связям*. *Следствие*, наряду с другими случаями, может порождать очень большое количество разнообразных *причин*. Если *следствие* порождено одной, ярко выраженной причиной, то процесс можно считать **детерминированным** (в основном закономерным). Если следствие порождено большим количеством практически *независимых* и *малозначных причин*, то его нужно считать **случайным**.

Если вероятности любого числа явлений будут p_1, p_2, \dots , то вероятность наступления первого, или второго, или третьего и т.д. явления будет равна сумме всех отдельных вероятностей – **теорема сложения вероятностей**.

Если вероятности любого числа явлений будут p_1, p_2, \dots , то вероятность наступления и первого, и второго, и третьего и т.д. явления будет равна *произведению* всех отдельных вероятностей – **теорема произведения вероятностей**.

Количественной характеристикой результата опыта является **случайная величина**, которая может принимать различные числовые значения из счетного множества X , заранее неизвестные и зависящие от случайных причин, которые не могут быть полностью учтены. Такого рода величины, закономерность которых проявляется только при массовых испытаниях и не проявляется при одиночных, и являются объектами изучения *теории вероятностей*. Типичный пример – результаты геодезических измерений.

Виды случайных величин. Пусть в результате эксперимента получены изолированные значения x_1, \dots, x_n , являющиеся *реализациями (исходами) случайной величины* ξ , которые можно перечислить и которым ставится в соответствие *вероятность* их появления p_i . В этом случае говорят о **дискретной случайной величине** (например, число попаданий в мишень).

Если *исходы* принимают любые значения из некоторого интервала $a \leq x \leq b$, причем их число *бесконечно*, то говорят о **непрерывной случайной величине**, все значе-

ния которой перечислить **нельзя** (например, *невязка* тахеометрического хода или расстояние от центра мишени до следов выстрелов).

Следует отметить, что *случайная величина* – теоретическое (т.е. не достижимое практически) понятие, представляющее собой всю возможную совокупность значений результатов *исхода* события. Обозначение: X (или ξ) – *случайные величины*, а x_1, x_2, \dots, x_n – *реализации случайной величины X* , т.е. её конкретные значения, полученные в процессе эксперимента.

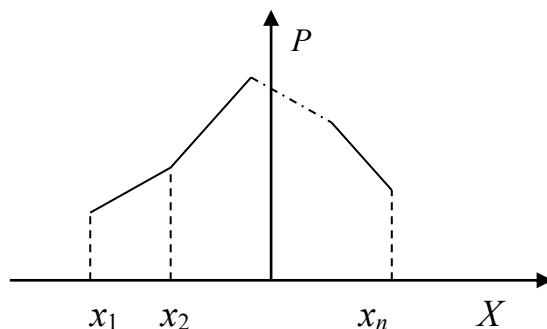
Закон распределения. Самой главной и существенной характеристикой *случайной величины* является *закон распределения*. Под ним понимают всякое соотношение, которое **устанавливает связь** между конкретным значением *случайной величины* и её *вероятностью*.

Форма задания *закона распределения* для *прерывных случайных величин*:

- 1) аналитическая (например, формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$)
- 2) табличная

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

- 3) графическая



График, который получают при такой форме представления закона, называется **многоугольником распределения**.

Для *непрерывных случайных величин* в качестве *закона распределения* используется **функция распределения $F(x)$** . Под *функцией распределения* понимается *вероятность* того, что *случайная величина X* примет значения, которые будут **меньше** некоторого заданного значения x .

$$F(x) = P(X < x) \quad (1.1)$$

Функция распределения по своей сути является *кумулятивной (накопительной) функцией*. С её помощью достаточно просто решается важная задача *теории вероятностей* о *вероятности* попадания *случайной величины X* в заданный интервал $\alpha \leq X < \beta$. Очевидно, что решение дается формулой

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.2)$$

Закон распределения для непрерывной случайной величины также может быть задан в графическом виде (рисунок 1.1), но, очевидно, не в табличном, так как нельзя перечислить все значения *непрерывной случайной величины*, число которых бесконечно.

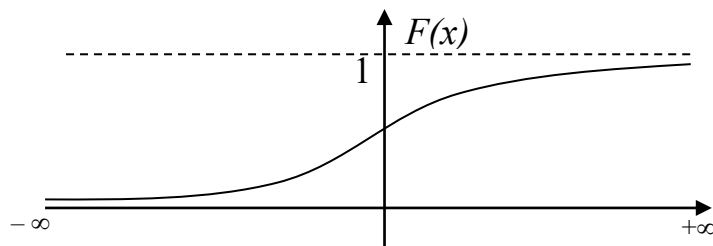


Рисунок 1.1. – График функции распределения

Плотность распределения. Только для *непрерывных случайных величин* существует ещё один вид *функции распределения*, называемой **функцией плотности распределения** $f(x)$. Так как этот вид получают путем взятия производной от *функции распределения*

$$f(x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x), \quad (1.3)$$

то это представление носит имя **дифференциальный закон распределения**. При этом, аргумент функции может изменяться от плюс до минус бесконечности. Взяв интеграл от *функции плотности*, мы получим *функцию распределения*, которую поэтому называют **интегральным законом распределения случайной величины**.

Моменты. Распределение *случайной величины*, хоть и является наиболее полной характеристикой, достаточно часто не требуется и достаточно трудно вычислимо. Поэтому, наряду (или взамен) с *законом* и *плотностью распределения*, для численной характеристики *случайной величины*, используют величины, называемые **моментом k -го порядка**. Наиболее распространенные виды моментов – это *начальные* и *центральные*. Достаточно часто используются *абсолютные* и *условные моменты*.

Все виды моментов определены через *математическое ожидание*, которое является одной из основных численных характеристик *случайной величины*, являясь его *средневероятным* значением, а потому достаточно надежным. Более строго, *математическим ожиданием* $M(X)$ *случайной величины* X называют **совокупность** произведений всех возможных значений реализаций (например, измерений) этой величины на соответствующие им *вероятности*. Таким образом, для действительной *случайной величины* X со счетным числом возможных *исходов* x_i , каждое из которых ожидается с соответствующей *вероятностью* p_i , выражение вида

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \quad (1.4)$$

называется *математическим ожиданием* этой величины, в случае если она *дискретна* (*средневероятное значение случайной величины*).

Если случайная величина **непрерывна**, то математическое ожидание определяется через плотность вероятностей следующим образом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx. \quad (1.5)$$

Так как сумма вероятностей по определению равна **единице**, то формулу (1.4) можно переписать в виде

$$M(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^n p_i} = \frac{[x \cdot p]}{[p]}.$$

Здесь [*] – символ суммирования Гаусса по одноименному индексу.

Основные свойства математического ожидания:

- 1) $M(c) = c$;
- 2) $M(cX) = c \cdot M(X)$;
- 3) $M(\sum c_i \cdot X_i) = \sum (c_i \cdot M(X_i))$;
- 4) $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot \prod_{i=1}^n M(X_i))$;
- 5) $M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2) + \text{cov}(X_1, X_2)$;
- 6) $M(X^2) = D(X) + M^2(X)$;
- 7) $M(a \cdot X + b) = a \cdot M(X) + b$;
- 8) $M[f(X_1, \dots, \dots)]$.

Здесь c, a, b – постоянные величины, а $\text{cov}(X_1, X_2)$ – мера зависимости между собой случайных величин X_1 и X_2 , называемая *ковариацией*.

В качестве других символов математического ожидания используют также $M_X, MO(X), E(X)$.

Математическое ожидание характеризует положение центра распределения вероятностей случайной величины.

Существуют и другие характеристики центра, наиболее общеизвестные из которых называют *модой* и *медианой*.

Под **модой** $Mo(X)$ понимают такое значение случайной величины, вероятность появления которого *наибольшая*.

Под **медианой** $Me(X)$ понимают такое значение случайной величины, относительно которого вероятность появления значения *больше* или *меньше* его одинакова и равна 0,5.

Теперь, исходя из вышесказанного, *начальный момент порядка k* определим как *математическое ожидание k-й степени* от самой случайной величины

$$\alpha^k = M(X^k) \quad (1.6)$$

Центральным моментом k -го порядка называется математическое ожидание степени k от *центрированной* (величина **минус** её математическое ожидание) случайной величины вида $(X - M(X))$:

$$\mu_k = M((X - M(X))^k). \quad (1.7)$$

Естественно, это чисто теоретические величины, которые мы можем только оценить с какой-либо степенью достоверности. В качестве таких оценок используют

$$\hat{\mu}_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^k \cdot p_i, \quad (1.8)$$

$$\hat{\mu}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x) dx, \quad (1.9)$$

соответственно, для *дискретных* и *непрерывных* случайных величин *центральных моментов* и

$$\hat{\alpha}_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i, \quad (1.10)$$

$$\hat{\alpha}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx, \quad (1.11)$$

для *дискретных* и *непрерывных* оценок *начальных моментов* k -го порядка. При оценивании параметров *распределения* и результатов измерений используется также *абсолютные моменты* (т.е. случайная величина берется **по модулю**). Наиболее важный из них – это *центральный абсолютный момент первого порядка*, называемый **средним абсолютным отклонением**

$$\mu_{|1|} = M[|X - M(X)|] = \gamma_1. \quad (1.12)$$

Не сложно заметить, что *начальный момент первого порядка* является *математическим ожиданием*. Центральный же момент второго порядка, называемый **дисперсией**, характеризует *меру рассеивания* случайной величины вокруг её *математического ожидания* и наряду с ним является **второй** основной численной характеристикой случайной величины (параметров *функции распределения*). Исходя из определения, *дисперсия* может быть представлена в виде

$$\mu_2 = D(X) = M((X - M(X))^2), \quad (1.13)$$

а её оценки для *дискретных* и *непрерывных* величин, – как

$$\hat{\mu}_2 = \hat{D}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \quad (1.13a)$$

$$\hat{\mu}_2 = \hat{D}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x) dx. \quad (1.13b)$$

Основные свойства *дисперсии*:

- 1) $D(c) = 0$;
- 2) $D(cX) = c^2 D(X)$;
- 3) $D\left(\sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \cdot D(X_i)$;
- 4) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$;
- 5) $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$;
- 6) $D(X + c) = D(X)$;
- 7) $D(a \cdot X + b) = a^2 D(X)$;
- 8) $D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$;
- 9) $D(X) = \text{cov}(X, X)$;
- 10) $D(X \cdot Y) = D(X) \cdot D(Y) + M^2(X) \cdot D(Y) + M^2(Y) \cdot D(X)$.

В качестве других символов *дисперсии* используют также D_X , σ_X^2 , K_{XX} , а в качестве других символов для обозначения *ковариации* используют также K_{XY} , $K(X, Y)$.

Другие характеристики случайной величины. *Дисперсия*, имеющая по определению квадратическую размерность от *случайной величины* является не совсем удобной, и поэтому используют величину, называемую **стандартом σ** , как *корень из дисперсии*:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (1.14)$$

Кроме дисперсии (стандарта) в качестве *относительной меры рассеивания* используется *отношение стандарта к математическому ожиданию*, выраженному в процентах и называемому **коэффициентом вариации**:

$$v = \frac{\sigma}{MO(X)} \cdot 100\%. \quad (1.15)$$

Для более детального и качественного анализа распределения используют *центральные моменты третьего и четвертого порядков*, отнесенные к соответствующей степени *стандарта*. Эти величины характеризуют *меру скошенности распределения* в виде **асимметрии A**

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (1.16)$$

и *меру крутости (плосковершинности)* как **эксцесс E**

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (1.17)$$

Если величина *асимметрии* $A > 0$, то распределение скошено влево, и наоборот. Распределение с отрицательным эксцессом является более *плосковершинным* по сравнению с $E = 0$ (рисунки 1.2 и 1.3).

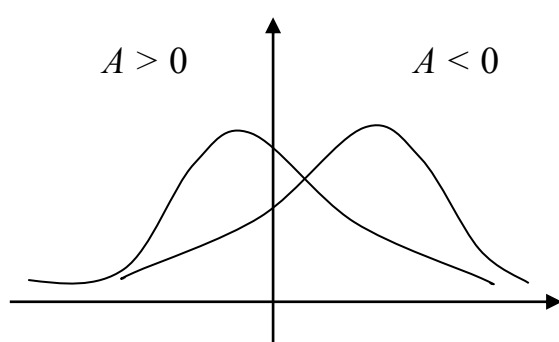


Рисунок 1.2. – Асимметрия

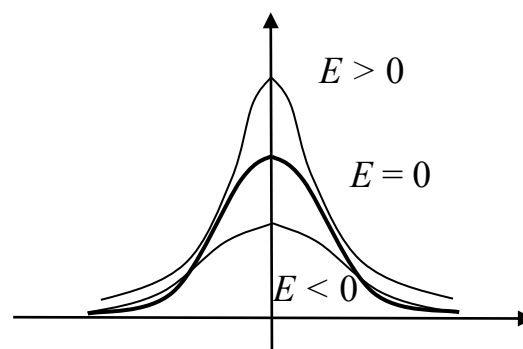


Рисунок 1.3. – Эксцесс

Очень часто в различных вопросах анализа и проверки гипотез используется такая числовая характеристика *распределения вероятностей* как **квантиль**. Для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ квантилью порядка P ($0 < P < 1$) называют число k_p , такое что

$$F(k_p) \leq P. \quad (1.18)$$

То есть, k_p является **единственным** решением функционального уравнения

$$F(x) = P. \quad (1.19)$$

Квантиль $k_{1/2}$ есть *медиана случайной величины*. Квантили значений, кратных 0,25 называют **квартили**, а кратные 0,10 – **децили**. Эти величины весьма полезны при интервальной оценке результатов измерений и статистической проверке гипотез.

2. Законы распределения случайных величин

Равномерный закон распределения.

Нормальный закон Муавра – Гаусса – Лапласа.

Основные характеристики.

Вероятность попадания в интервал.

Равномерный закон распределения. Пусть случайная величина с одинаковой вероятностью принимает любые значения в пределах участка вещественной прямой от α до β и не может принимать значений вне этого участка. Из сказанного следует, что график *плотности закона распределения вероятностей* такой величины должен иметь вид, как на рисунке 2.1.

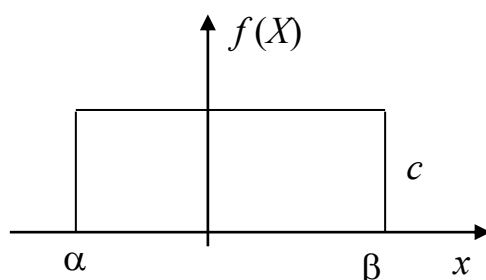


Рисунок 2.1. – График плотности равномерного распределения

Функцию плотности можно представить как

$$f(X) = R(\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha}, & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0, & x < \alpha, x > \beta. \end{cases} \quad (2.1)$$

Функция закона распределения для равномерной случайной величины будет

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(x) dx = \int_{\alpha}^x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{x}{\beta - \alpha} \Big|_{\alpha}^x = \frac{(x - \alpha)}{\beta - \alpha},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \alpha \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \alpha < x \leq \beta. \\ 1, & x > \beta \end{cases} \quad (2.2)$$

График функции распределения имеет вид рисунка 2.2.

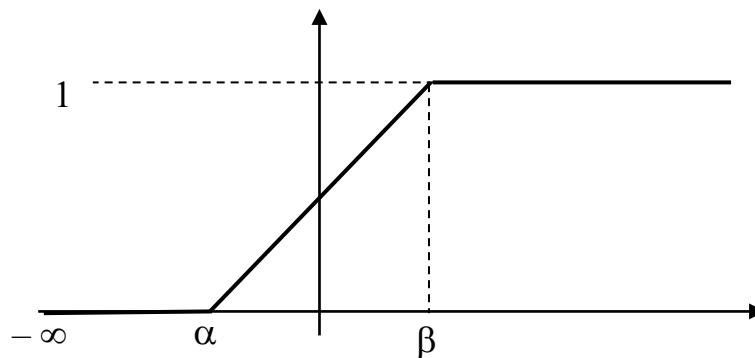


Рисунок 2.2. – График функции равномерного распределения

Равномерному закону распределения подчиняются ошибки округления, избежать которых при вычислениях невозможно. При отсчете по шкале с ценой деления δ , погрешности отсчета будут случайной величиной с *равномерным законом распределения* $R(0, \delta)$ и *стандартом*, примерно, в **одну треть** от цены деления.

Если независимые случайные величины X_1 и X_2 имеют равномерное распределение на интервале $[0, 1]$, то их сумма $X = X_1 + X_2$ имеет **треугольное распределение Симпсона** на интервале $[0, 2]$. В общем случае распределение суммы n независимых случайных величин, с ростом n достаточно быстро сближается с самым известным законом распределения, называемым **нормальным распределением** с параметрами $M_X = 0, \sigma = 1$. Уже при $n = 3$ такое приближение удовлетворительно для многих практических целей.

В статистических приложениях случайные величины с равномерным распределением используются для построения случайных величин с *заданной функцией распределения* $F(x)$. Если случайная величина Y распределена равномерно на интервале $[0, 1]$, а искомая функция распределения *непрерывна, строго возрастает* и имеет **обратную**, то случайная величина $X = F^{-1}(Y)$ имеет *функцию распределения* $F(x)$.

Нормальный закон Муавра – Гаусса – Лапласа. Особую и исключительно важную роль в теории вероятностей играет *нормальный закон распределения случайных величин*. Это наиболее часто встречающийся на практике *закон распределения*. Во-первых, он является *предельным* законом (к нему приближаются другие законы) для различных комбинаций *случайных величин* при весьма часто встречающихся **типичных** условиях; во-вторых, можно доказать, что **сумма** достаточно большого числа *независимых* (или слабо зависимых) случайных величин с какими угодно *законами распределения*, но достаточно **равным** влиянием каждого на конечный результат, тем ближе к *нормальному закону распределения*, чем лучше выполняются эти достаточно нежесткие условия и **больше** число слагаемых.

В известном нам виде нормальный закон впервые был получен в 1812 г. **П.С. Лапласом**:

$$f(Y) = \frac{1}{\sigma_Y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{(Y-M_Y)^2}{\sigma_Y^2}}. \quad (2.3)$$

Эта формула носит название формулы *плотности распределения Гаусса (Муавра – Гаусса – Лапласа)* и обозначается $N(x; M_X, \sigma_X)$. **К. Пирсон** предложил называть такой закон «*нормальным*».

Основные характеристики. *Интегральная функция закона распределения* по определению имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-M_X)^2}{\sigma^2}}. \quad (2.4)$$

Функция симметрична относительно значения математического ожидания и имеет две точки перегиба. Значения x в точках перегиба соответствуют значениям *стандартов* $\pm\sigma$, а *касательные* к точкам перегибов пересекают ось x в значениях $\pm 2\sigma$. Функция имеет **максимум** в точке M_X со значением $0,3989/\sigma$ (рисунок 2.3).

$$M_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = m. \quad (2.5)$$

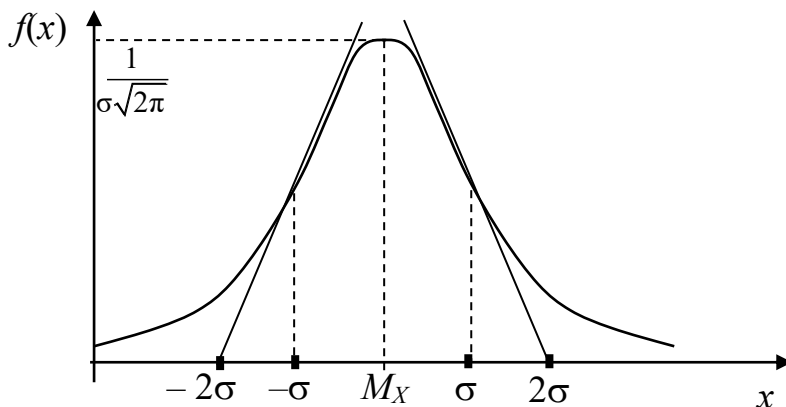


Рисунок 2.3. – Функция плотности нормального распределения

Основные характеристики *нормального закона распределения* можно получить, используя основные формулы (1.5а) и (1.13б).

Из приведенных формул и графиков следует, что *математическое ожидание* является как *центром симметрии распределения*, так и *центром рассеивания* и характеризует положение распределения на оси абсцисс. При этом изменение *центра рассеивания* не изменяет форму кривой распределения, а его размерность – та же, что и у *случайной величины X*.

Параметр σ (*стандарт распределения*, см. формулу (1.14)) характеризует только **форму** кривой распределения, не касаясь положения. При увеличении *стандарта*, исходя из того, что площадь под кривой **неизменна** и равна **1**, *кривая распределения* становится более **плоской**, но растягивается вдоль оси абсцисс. При уменьшении σ кривая **вытягивается** вверх, одновременно **сжимаясь** с боков, становясь более иглообразной. Таким образом, изменение *стандарта* σ равносильно изменению *масштаба кривой распределения*, чем и обусловлено название этой величины в статистике как параметр *масштаба*, в то время как *математическое ожидание* там называют параметром *сдвига*.

Другие характеристика закона, такие как *асимметрия* и *эксцесс*, будут иметь вид:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0, \quad (2.6)$$

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Результаты вполне естественны, так как *асимметрия* характеризует меру отличия закона от симметричного, а нормальный закон симметричен; *эксцесс* же по определению характеризует меру крутости закона относительно нормального закона распределения.

Вероятность попадания в интервал. Для определения *вероятности* попадания *нормально распределенной случайной величины* в заданный интервал используем формулу (1.2) с учетом вида *функции распределения* (2.4):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^b e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-M_X)^2}{\sigma^2}} - \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-M_X)^2}{\sigma^2}} \right). \quad (2.7)$$

Интегралы в правой части **не выражаются** через элементарные функции, поэтому решение задачи требует использования *численных методов* с последующим **табулированием** значений. Для этого исследуемая *случайная величина* должна быть **безразмерна**. Значит, необходимо ввести новую безразмерную величину $z = \frac{x - M_X}{\sigma}$, которая центрирована математическим ожиданием, масштабирована стандартом и называется **нормированной (стандартизованной)**. Вид её подобран так, чтобы основные характеристики имели значения $M_z = 0$, а $\sigma_z = 1$. На основе этого, *функцию плотности* и *функцию распределения* для *нормального закона* можно представить в следующем виде:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad (2.8)$$

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

С учетом введенных обозначений формула (2.7) приобретет вид

$$P(a < X < b) = P(t_1 < z < t_2) = F(t_2) - F(t_1), \quad (2.9)$$

где $t_2 = \frac{b - M_X}{\sigma}$, $t_1 = \frac{a - M_X}{\sigma}$ – нормированные границы интервала.

Кроме функции распределения $F(t)$, достаточно часто используются следующие функции, связанные с ней:

– интеграл вероятностей или нормированная функция Лапласа

$$\Phi_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (2.10)$$

– для симметричных интервалов, – функция Лапласа:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad (2.11)$$

– функция ошибок:

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^t e^{-z^2} dz. \quad (2.12)$$

Связь между четырьмя функциями может быть установлена из соотношений

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t) = \frac{1}{2} + \Phi_z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \quad (2.13)$$

Для интеграла вероятности, функции распределения и функции Лапласа связь можно легко получить из графиков этих функций (рисунок 2.4).

Функция ошибок, функция закона распределения и функция плотности закона распределения как процедуры имеются в любом стандартном математическом пакете, например, в пакете *MATLAB* (см. Приложение 3).

Если интервал **симметричный**, то вероятность попадания в него целесообразнее искать с использованием функции Лапласа

$$P(-t < z < t) = P(|t| < z) = \Phi(t). \quad (2.14)$$

Для функции распределения $F(-x) = 1 - F(x)$, а $\Phi(-t) = -\Phi(t)$ (см. рисунок 2.4).

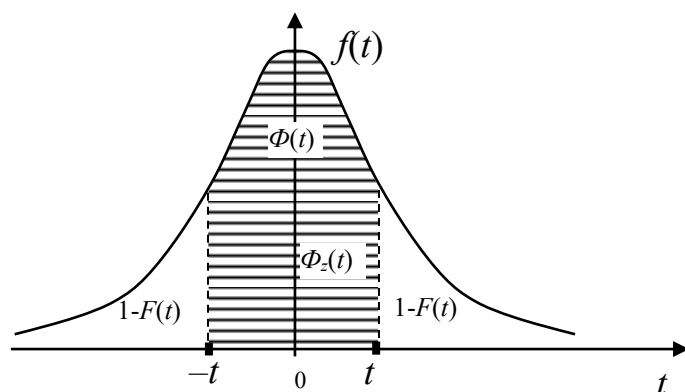


Рисунок 2.4. – Представление основных видов функции распределения

При использовании для этих целей *интеграла вероятности* впереди появляется коэффициент 2: $2\Phi_z(t)$. Другие формулы на основе разных представлений для различных интервалов легко получить на основании рисунка 2.4.

Если отсутствуют статистические таблицы или компьютерные программы для функции Лапласа, можно использовать следующую формулу, полученную путем разложения функции в *ряд Тейлора*:

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{40} + \frac{t^7}{336} + \frac{t^9}{3456} - \dots - (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)} + \dots \right). \quad (2.15)$$

Используя функцию Лапласа, можно достаточно легко находить не только *вероятность* попадания нормированной величины в интервал, но и величину интервала при заданной *вероятности* и характеристиках *случайной величины*. Имея же *вероятность* и величину интервала, возможно достаточно неплохо оценивать основные характеристики с использованием формулы (2.14) при том, что t – нормированная величина.

Пример 21. Пусть требуется получить величину симметричного интервала, в который попадает случайная величина с вероятностью 95% и характеристиками $\bar{X} = 0,07''$, $m = 0,97''$. Так как интервал симметричный, используем формулу (2.14) для стандартизованной величины с аргументом – граничной величиной $\pm x_{зр.} = |x_{зр.}| = x_{зр.}$

$$z = \frac{x_{зр.} - \bar{X}}{m}.$$

Теперь имеем уравнение вида $\Phi\left(\frac{x_{зр.} - \bar{X}}{m}\right) = 0,95$. Используя таблицы функции Лапласа и обратную интерполяцию, или компьютерную программу, по вероятности находим значение квантиля (подфункционального выражения):

$$\frac{x_{зр.} - \bar{X}}{m} = \frac{x_{зр.} - 0,07''}{0,97''} = 1,96.$$

Отсюда значения граничного интервала $x_{зр.} = \pm 1,97$. Если используется интеграл вероятностей, то значение вероятности предварительно делится на два.

На основе этого подхода можно определить как **границы** симметричного интервала, так и оценки *математического ожидания* и *стандарта*, если известны все другие величины. Для этого придется решать систему **двух** уравнений. Такого рода методы определения основных характеристик известного закона распределения получили название **квантильных**. Их точность зависит от *меры отклонения* реальных частот от теоретических в соответствующих интервалах. В общем случае такого рода оценки требуют определения характеристик по большему, чем два, числу интервалов с использованием *метода наименьших квадратов*.

3. Многомерные случайные величины

Двумерная функция распределения.

Вероятность попадания в двумерную область на основе плотности распределения.

Условный закон распределения.

Основные характеристики двумерного закона распределения.

Основные характеристики для двумерного нормального закона распределения.

Условная плотность распределения для нормального закона.

Основные комбинации нормально распределенных величин.

Эллипс рассеивания.

Как реальные, так и модельные случайные процессы достаточно часто описываются не одной случайной величиной, а несколькими, образующими *систему* (комплекс) *случайных величин* или *многомерную случайную величину*. Будем обозначать *систему случайных величин* X_1, X_2, \dots, X_n как (X_1, X_2, \dots, X_n) . Так как многомерные объекты достаточно трудны для восприятия, воспользуемся самой простой системой случайных величин – из **двух** значений. Полученные ниже формулы совершенно **просто** расширяются на любое количество составляющих комплекс.

Двумерная функция распределения. Как следует из §1.1 Приложения 1, наиболее полной характеристикой *случайной величины* является её *функция распределения*. Расширяя формулу (1.1) на двухмерный случай, *функцию распределения* этой системы можно представить как

$$F(x, y) = P((X < x), (Y < y)). \quad (3.1)$$

Геометрически эта функция есть *вероятность* попадания случайной точки (x, y) в **открытый** вниз-влево прямоугольник с вершиной в этой точке. Обозначим *событие*, означающее попадание *случайной величины* (X, Y) в область D , как $(X, Y) \subset D$. Получим на основе *функции распределения* системы *вероятность* попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R , ограниченный абсциссами x и $x + \Delta x$, ординатами y и $y + \Delta y$ (рисунок 3.1).

Вероятность попадания системы *случайных величин* (X, Y) в область R есть площадь области R . На рисунке 3.1 видно, что эту площадь можно определить достаточно просто, считая, что вершины прямоугольника есть функции от соответствующих комбинаций границ его образующих – x и $x + \Delta x$, y и $y + \Delta y$

$$P((X, Y) \subset R) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y). \quad (3.2)$$

Границы могут быть заданы любыми другими числами.

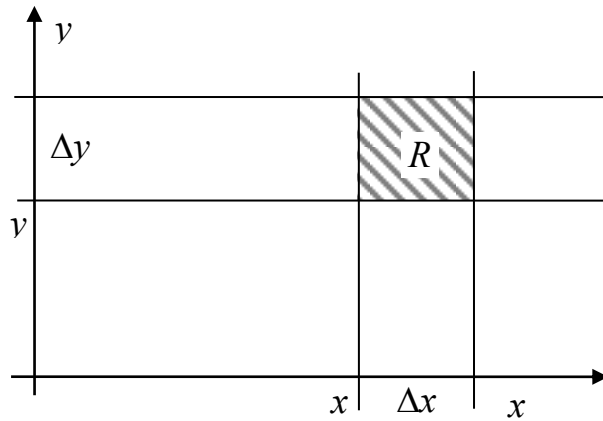


Рисунок 3.1. – Определение вероятности попадания в область R

Вероятность попадания в двумерную область на основе плотности распределения. Эта же задача, но для любой (а не только прямоугольной) области может быть решена на основе представления закона распределения в виде *функции плотности распределения* системы *случайных величин*, как и для одномерного случая (см. формулу (1.3)). Необходимо учесть, что эта функция существует только для *непрерывных случайных величин*. Для её получения предположим, что приращения Δx и Δy в (3.2) стремятся к нулю, отнесем левую и правую часть формулы к их произведению и возьмем по ним предел:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{P((X, Y) \subset R)}{\Delta x \Delta y} = \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y)}{\Delta x \Delta y}.$$

Из математического анализа известно, что это выражение есть вторая смешанная **частная производная** функции $F(x, y)$ и также, по аналогии с одномерной случайной величиной, – *плотность распределения* системы (X, Y)

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y) = f(x, y). \quad (3.3)$$

Из формулы (3.3) получают **общую** формулу для *вероятности* попадания *случайной точки* (X, Y) в любую заданную область D

$$P((X, Y) \subset D) = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy, \quad (3.4)$$

которая геометрически представляет собой **объем** тела, ограниченного функцией $f(x, y)$ и областью D .

Условный закон распределения. Для того чтобы полнейшим образом охарактеризовать систему *случайных величин* недостаточно знать *частные законы распределения* каждой величины, входящей в систему, а также *общий закон распределения*, –

нужно знать **зависимость** между входящими в систему величинами. Эта зависимость характеризуется *условным законом распределения*, задаваемым как в виде *функции распределения* $F(x | y)$, так и в виде *плотности распределения* $f(x | y)$. Последняя имеет более широкое практическое значение и будет рассмотрена подробнее.

Условный закон распределения $f(x | y)$ в виде *функции плотности* трактуется как *плотность распределения* величины x при условии, что величина y приняла **фиксированное** значение. Зная *частную* и *условную функции плотности*, можно найти совместную функцию:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x)f(y | x) \\ f(x, y) &= f_2(y)f(x | y) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Эти формулы называют **теоремой умножения законов распределения**.

Из формул (3.5) легко получить формулы для *условных распределений*, имеющих достаточно важное прикладное значение:

$$\begin{aligned} f(y | x) &= \frac{f(x, y)}{f_1(x)} \\ f(x | y) &= \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

С использованием этих видов распределений можно получить следующие **условия независимости случайных величин**:

$$\begin{aligned} f(y | x) &= f_2(y) \\ f(x | y) &= f_1(x) \\ f(x, y) &= f_1(x) \cdot f_2(y) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Основные характеристики двумерного закона распределения. Очень часто трудно (либо нет необходимости) для описания системы случайных величин использовать закон распределения. В этом случае применяют несколько *основных характеристик* закона, но **расширенных** на многомерный случай. Здесь, как и ранее, будем рассматривать двумерную систему *случайных величин*, характеристики которой элементарно расширяются на любое количество элементов.

Основные характеристики одномерной *случайной величины* X – это *математическое ожидание* $MO(X)$ и *дисперсия* $D(X)$ (см. формулы (1.5), (1.13)). Если описывается **комплекс** из n *случайных величин*, то естественным расширением понятия *математического ожидания* этой системы будет **вектор** из n математических ожиданий для каждого элемента многомерной случайной величины. Для двумерной системы $Z = (X, Y)$ это будет вектор из двух элементов

$$MO(Z) = \begin{pmatrix} MO(X) \\ MO(Y) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Так как *дисперсия* является *математическим ожиданием* от квадрата *центрированной случайной величины* (т.е., величины, умноженной на саму себя), то при рас-

ширении одномерной величины в многомерную систему необходимо рассмотреть упорядоченные пары всех возможных сочетаний из **двух** значений. Проще и наглядней это получить с использованием **матричного** аппарата линейной алгебры, предварительно *центрировав* элементы *случайного вектора*. Для нашего двумерного случая **центрированный** вектор будет иметь вид

$$\overset{\circ}{Z} = \begin{pmatrix} -MO(X) \\ Y - MO(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} | \\ \overset{\circ}{Y}) \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

а перебор комбинаций осуществим перемножением **центрированного** вектора $\overset{\circ}{Z}$ на **транспонированный** к нему

$$K = MO \left(\overset{\circ}{Z} \cdot \overset{\circ}{Z} \right) = MO \left\{ \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \\ \overset{\circ}{Y} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overset{\circ}{X} & \overset{\circ}{Y} \\ \overset{\circ}{Y} & \overset{\circ}{X} \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.10)$$

или в более распространенном, развернутом виде

$$K = \begin{pmatrix} MO((X - MO(X))^2) & MO((X - MO(X)) \cdot (Y - MO(Y))) \\ MO((Y - MO(Y)) \cdot (X - MO(X))) & MO((Y - MO(Y))^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{XX} & K_{XY} \\ K_{YX} & K_{YY} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(X) & cov(X, Y) \\ cov(Y, X) & D(Y) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

В приведенной матрице **по диагонали** расположены *дисперсии* элементов системы (*вторые центральные моменты*), а *недиагональные элементы*, значения которых симметричны относительно диагонали, носят названия **ковариаций** между парой соответствующих случайных величин (*вторые смешанные центральные моменты*). Таким образом, в качестве характеристики *меры рассеивания случайного вектора* Z выступает структура, называемая **ковариационной матрицей** (матрицей моментов) K с описанным выше составом. Недиагональные элементы матрицы K показывают **в среднем** тесноту связи между соответствующими элементами и их *дисперсиями* (диагональными элементами) и вычисляются для дискретных и непрерывных величин следующим образом:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^n (x_i - M_X) \cdot (y_i - M_Y) p_{xy}, \quad (3.12)$$

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_X) \cdot (y - M_Y) f(x, y) dx dy$$

Значит, если элементы внутри системы случайных величин попарно *независимы* между собой, то матрица будет иметь **диагональный** вид (*дисперсионная матрица*).

Если в формулах (3.10) или (3.11) вместо *центрированной величины* взять *стандартизованную* (*центрированную и нормированную* соответствующими стан-

дартами) $\overset{\infty}{Z}$, то получим другой вид меры рассеивания системы случайных величин в виде **корреляционной матрицы** R , которая является приведенной к одному **единичному** масштабу ковариационной матрицей K :

$$\overset{\infty}{Z} = \begin{pmatrix} \frac{X - MO(X)}{\sigma_X} \\ \frac{Y - MO(Y)}{\sigma_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{\infty}{X} \\ \overset{\infty}{Y} \end{pmatrix},$$

после несложных преобразований (3.11), с учетом нового вида Z ,

$$R = \begin{pmatrix} \frac{D_X}{\sigma_X \sigma_X} & \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ \frac{\text{cov}(Y, X)}{\sigma_X \sigma_Y} & \frac{D_Y}{\sigma_Y \sigma_Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} \\ r_{21} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Здесь r_{ij} – коэффициент корреляции между i -й и j -й случайными величинами, или мера тесноты связи между ними при **одинаковых** (единичных) условиях.

Основные характеристики для двумерного нормального закона распределения.

Так как нормальный закон распределения имеет наибольшее практическое значение, рассмотрим его более подробно для случайного двумерного вектора.

Известно, что для получения *совместной плотности распределения* двух независимых случайных величин необходимо перемножить их *частные функции плотности* (см. формулу (3.7)). Для нормального закона это можно представить как

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) = \left(\frac{1}{\sigma_X \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(X - MO(X))^2}{2\sigma_X^2}} \right) \times \left(\frac{1}{\sigma_Y \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(Y - MO(Y))^2}{2\sigma_Y^2}} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_X \sigma_Y \cdot 2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(X - MO(X))^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(Y - MO(Y))^2}{2\sigma_Y^2} \right)}$$
(3.14)

Несложно заметить, что для этой функции в качестве её *математического ожидания* выступает вектор-столбец из *математических ожиданий* входящих величин, а в качестве *меры рассеивания* – *диагональная ковариационная матрица* (см. (3.11)), состоящая из *дисперсий*, составляющих вектор элементов. В соответствии с матричной алгеброй коэффициент перед экспонентой в (3.14) есть корень из определителя *дисперсионной матрицы*

$$\sigma_X \cdot \sigma_Y = \sqrt{\det \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}} = |K|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.15)$$

а используя *центрированную* запись (3.9) нашей двумерной системы, выражение под знаком экспоненты можно записать как

$$-\frac{1}{2} \cdot \left[(X - M_X) \quad (Y - M_Y) \right] \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (X - M_X) \\ (Y - M_Y) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\overset{\circ}{Z}' \cdot K^{-1} \cdot \overset{\circ}{Z} \right).$$

Здесь K^{-1} – *обратная ковариационная матрица*. На этой основе *функцию плотности распределения* любой произвольной многомерной системы случайных величин Z (в том числе и *коррелированных*) представим как

$$f(Z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \cdot |K|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \overset{\circ}{Z}' \cdot K^{-1} \cdot \overset{\circ}{Z}}. \quad (3.16)$$

Чтобы используя (3.16) записать *функцию плотности распределения* для двумерной системы случайных величин с **полной ковариационной матрицей**, необходимо найти для неё **корень** из определителя *ковариационной матрицы* и *обратную ковариационную матрицу* в общем виде:

$$|K|^{\frac{1}{2}} = \left| \begin{array}{cc} \sigma_X^2 & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \sigma_Y^2 \end{array} \right|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sigma_X^2 \cdot \sigma_Y^2 - \text{cov}(X, Y)^2} = \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot (1 - r_{12}^2).$$

На основе представления *ковариации* через *коэффициент корреляции* (см. формулу (3.13)), $\text{cov}(X, Y) = r_{12} \sigma_X \sigma_Y$, и *обратная ковариационная матрица* получена с использованием (3.11), (3.13) и общего правила получения обратной матрицы:

$$\begin{aligned} K^{-1} &= \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|K|} \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 & -\text{cov}(X, Y) \\ -\text{cov}(Y, X) & \sigma_X^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(1 - r_{12}^2)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2} & -\frac{r_{12}}{\sigma_X \sigma_Y} \\ -\frac{r_{12}}{\sigma_X \sigma_Y} & \frac{1}{\sigma_Y^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Введя две стандартизованные величины

$$u = \frac{X - MO(X)}{\sigma_X}$$

$$v = \frac{Y - MO(Y)}{\sigma_Y}$$
(3.17)

произведение под знаком экспоненты в (3.16) примет вид

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-r_{12}^2)} \cdot (u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2),$$

а полное значение функции (3.16) для двухмерной системы

$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_X \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2)}.$$
(3.18)

Условная плотность распределения для нормального закона. Кроме полученной функции, большое практическое значение имеет функция условной плотности распределения для нормального закона (см. формулы (3.6)). С учетом (3.17),

$$f_1(X) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}},$$

а первая из формул (3.16) будет

$$f(Y|X) = \frac{f(X, Y)}{f_1(X)} = \frac{e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2)} \cdot \sigma_X \sqrt{2\pi}}{2\pi \cdot \sigma_X \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (-u^2)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} = \frac{e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2 - u^2 + u^2 \cdot r_{12}^2)}}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (v^2 - 2uv \cdot r_{12} + (ur_{12})^2)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot (v - ur_{12})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{(1-r_{12}^2)}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot (1-r_{12}^2)} \cdot \frac{1}{\sigma_Y^2} \cdot (y - \bar{y} - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot r_{12} \cdot (x - \bar{x}))^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{Y|X}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma_{Y|X}^2} \cdot (y - M_{Y|X})^2}.$$

Таким образом, *условная плотность вероятностей* для нормального закона распределения также является *нормально распределенной* с *условным математическим ожиданием*

$$M_{Y|X} = M_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r_{12} \cdot (x - M_x), \quad (3.19)$$

и *условной дисперсией*

$$\sigma_{Y|X}^2 = D_{Y|X} = \sigma_y^2 (1 - r_{12}^2). \quad (3.19a)$$

Причем только *условное математическое ожидание* прямо зависит от аргумента x .

Основные комбинации нормально распределенных величин. Наряду с нормальным законом распределения очень часто в практических приложениях используются разного рода **комбинации** нескольких *нормально распределенных случайных величин*, которые образуют величины с новыми и достаточно важными *законами распределения*. К ним можно отнести, в первую очередь, *распределение χ^2* , *t-распределение Стьюдента* и *F-распределение Фишера*.

В связи с *гауссовской теорией ошибок*, астроном **Ф. Хельмерт** (1876 г.) исследовал случайную величину следующего вида: n независимых нормально распределенных случайных величин X_1, \dots, X_n были *стандартизованы* (центрированы и нормированы) в величины $u_i = (X_i - M_X) / \sigma_X$. Затем эти величины были *скомбинированы*

как $\chi_n^2 = u_1^2 + \dots + u_n^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$. *Функцию плотности распределения* новой случайной

величины просто получить для одномерного случая, расширяя её на многомерный случай. Её основные характеристики: $M(\chi^2) = n$, $D(\chi^2) = 2n$. С возрастанием n функция χ^2 стремится к *нормальному закону распределения* (рисунок 3.2). **К. Пирсон** (1900 г.) назвал это *распределение «хи-квадрат»*.

Исследуя отклонения *выборочных средних* \bar{X} от *истинного значения* $\theta_1 = M_X$ случайной величины, английский статистик **В. Госсет** (псевдоним «*Стьюдент*») получил в 1908 г. следующий результат (рисунок 3.3).

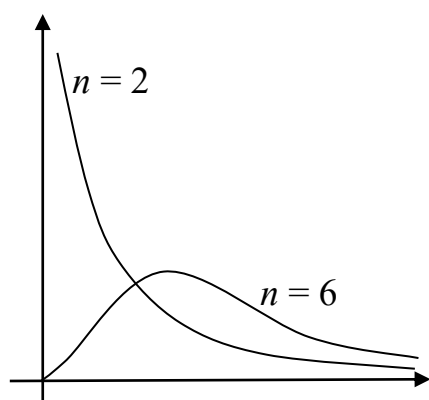


Рисунок 3.2. – χ^2 -распределение

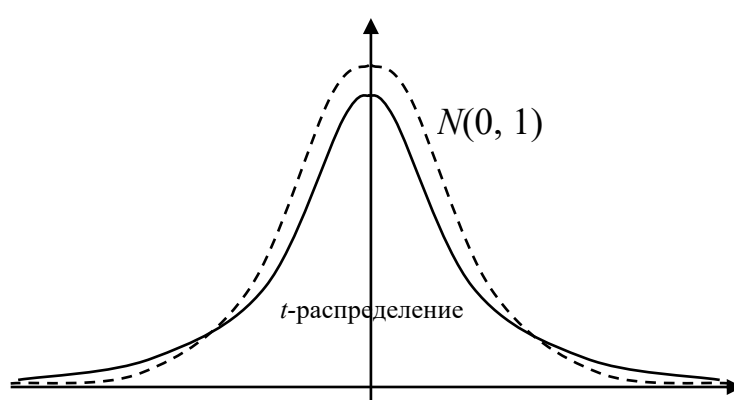


Рисунок 3.3. – t -распределение Стьюдента

Пусть X_1, \dots, X_n – независимые нормально распределенные случайные величины. Тогда *плотность распределения* случайной величины, выраженная формулой

$$t_n = \frac{X_1}{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=2}^n X_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

была названа им *t-распределением* (распределение **Стьюдента**) с n степенями свободы и основными характеристиками: $M(t_n) = 0$, $D(t_n) = n/(n - 2)$.

Пример 22. Если X_1, \dots, X_n – независимые нормально распределенные случайные величины, извлеченные из генеральной выборки с характеристиками $a = M_x$, $\sigma^2 = D_x$, \bar{x} и m^2 , соответственно, – выборочное среднее и выборочная дисперсия, то случайная величина $t_{n-1} = \frac{(\bar{x} - a) \cdot \sqrt{n-1}}{m}$ имеет распределение Стьюдента с $n - 1$ степенями свободы.

Начиная с $n > 20$, распределение Стьюдента практически не отличается от *нормального закона распределения* (см. рисунок 3.3), который может быть использован вместо *t-распределения* для вычисления вероятностей.

Анализируя отношение двух выборочных дисперсий m^2 и m'^2 , вычисленных по наблюдениям из двух выборок, извлеченных из одной *нормальной*, английский статистик **Р. Фишер** (1924 г.) пришел к распределению, в дальнейшем названному **F-распределением Фишера** для величины

$$F_{m_1, m_2} = \frac{\frac{1}{m_1} \cdot \sum_{i=1}^{m_1} x_i^2}{\frac{1}{m_2} \cdot \sum_{i=1}^{m_2} x_i'^2} = \frac{\frac{1}{m_1} \chi_{m_1}^2}{\frac{1}{m_2} \chi_{m_2}^2}$$

с основными характеристиками $M(F_{m_1, m_2}) = m_2/(m_2 - 2)$ и $D(F_{m_1, m_2}) = \frac{2m_2^2(m_1 + m_2 - 2)}{m_1(m_2 - 2)^2(m_2 - 4)}$.

Все перечисленные законы являются *предельными*, то есть при достаточно большом n практически не отличаются от нормального закона распределения.

Эллипс рассеивания. Строя график двумерной функции плотности нормального закона распределения $f(X, Y)$ (рисунок 3.4) и анализируя его обычными методами аналитической геометрии, можно заметить, что он имеет вид **холма** с вершиной в точке (M_x, M_y) . В **сечении** плоскостями, параллельными плоскости XOY будем иметь фигуры, описываемые выражением под знаком **экспоненты**. При фиксированной правой части это выражение представляет собой эллипс

$$u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2 = k^2. \quad (3.20)$$

Угол между осями эллипса и осью OX есть

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2r_{12} \cdot \sigma_X \sigma_Y}{\sigma_X^2 - \sigma_Y^2}. \quad (3.21)$$

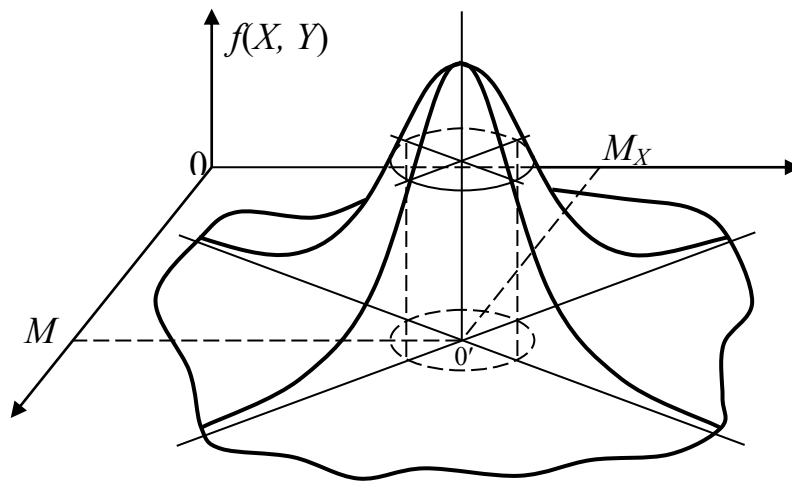


Рисунок 3.4. – Двумерная плотность распределения

Значение угла прямо зависит от *коэффициента корреляции* и соотношения *стандартов*.

Очевидно, что величина k в (3.20) связана с высотой сечения и т.о. – с *уровнем вероятности*, которая постоянна на всем сечении. Поэтому эллипсы такого рода называются *эллипсами равной плотности* или *эллипсами рассеивания*. Наиболее простой (канонический) вид эллипс рассеивания приобретает, если перенести начало координат в точку (M_x, M_y) и повернуть координатные оси на угол α . Тогда *функция плотности* примет вид

$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2}\right)}, \quad (3.22)$$

будучи функцией для *независимых* величин. Для функции типа (3.22) уравнение *эллипса рассеивания* описывается формулой

$$\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} = k^2 \quad (3.23)$$

или

$$\frac{x^2}{(k\sigma_X)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_Y)^2} = 1. \quad (3.23a)$$

Здесь k – **постоянный** коэффициент пропорциональности между полуосями *эллипса* и *стандартами*. Если полуоси **равны стандартам**, т.е. $k = 1$, то такой эллипс называют **единичным эллипсом рассеивания**. Если мы имеем распределение с **одинаковыми стандартами**, то такое распределение называют **круговым**.

Для определения *вероятности* попадания *случайной величины* в *эллипс рассеивания* D вида (3.23), по общей формуле (3.4) имеем

$$P((X, Y) \in D) = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y} \cdot \iint_D e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{y^2}{\sigma_Y^2} \right)} dx dy. \quad (3.24)$$

Сделав замену и перейдя от декартовой системы координат к полярной, получим *вероятность* попадания случайной точки в *эллипс рассеивания*, полуоси которого *равны k-стандартам*:

$$P((X, Y) \in D) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}. \quad (3.25)$$

Из формулы (3.25) величина k при заданной вероятности рассчитывается формулой

$$k = \sqrt{-2 \cdot \ln(1 - P)}. \quad (3.25a)$$

Пример 23. Для единичного эллипса рассеивания с полуосями $a = \sigma_X$, $b = \sigma_Y$,

и $k = 1$ имеем $P((X, Y) \in D) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393$.

4. Статистические связи

Вероятностные связи.

Корреляция.

Регрессия.

Как реальные, так и математические отношения между несколькими величинами можно свести к:

– *функциональным*, когда аргументам по точно известному закону однозначно ставится в соответствие значение $y = f(x, \dots)$;

– *стохастическим (случайным, вероятностным)*, когда аргументу соответствует *закон распределения*, а изменение аргумента влечет за собой изменение закона распределения в виде изменения его основных характеристик, что есть *условное распределение вероятностей*.

Вероятностные связи. Вероятностные связи и отношения имеют наибольшее распространение в реальных процессах. При этом, в подавляющем большинстве случаев, отслеживается изменение не *закона распределения* в целом, а **некоторых** его характеристик. Если в системе *случайных величин* с изменением одной или нескольких для других ищется изменение *математического ожидания* (т.е. *условное математическое ожидание*) в качественной и/или количественной форме, то такая связь называется **корреляционной**. Если в тех же условиях ищется изменение *дисперсии*, то такую связь называют **скелдастичной**.

Наибольшее распространение при анализе реальных процессов получили *корреляционные связи*. Такая связь качественно характеризуется *вторым центральным смешанным моментом (корреляционным моментом)* или *ковариацией* (см. формулы (3.11), (3.12)).

Найдем значение *ковариаций* на основе этих формул для двумерного *нормального закона распределения* вида (3.18) для непрерывных случайных величин:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_X) \cdot (y - M_Y) f(x, y) dx dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-r_{12}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_X) \cdot (y - M_Y) e^{-\frac{1}{2(1-r_{12}^2)}(u^2 - 2uv \cdot r_{12} + v^2)} dx dy$$

Произведя замену, после преобразования получим окончательное значение

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = r_{12} \cdot \sigma_X \sigma_Y. \quad (4.1)$$

Корреляция. Таким образом, *ковариация* является теснотой связи между случайными величинами, но при **разных** их мерах рассеивания (*масштабах*), что не совсем удобно. Поэтому из формулы (4.1) выражают величину r_{12} , называемую *коэффициентом корреляции*:

$$r_{12} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad (4.2)$$

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

- 1) лежит в пределах $1 \leq r \leq +1$. Свойство очевидно, так как коэффициент представляет собой **косинус** угла между *центрированными случайными величинами*;
- 2) для линейных функций вида $Y = aX + b$ коэффициент корреляции между X и Y равен ± 1 .

Для доказательства найдем *ковариацию* между X и Y ,

$$K_{XY} = M[(X - M_X) \cdot (Y - M_Y)] = M[(X - M_X) \cdot (aX + bY - aM_X - b)] =$$

$$= aM[(X - M_X)^2] = aD_X$$

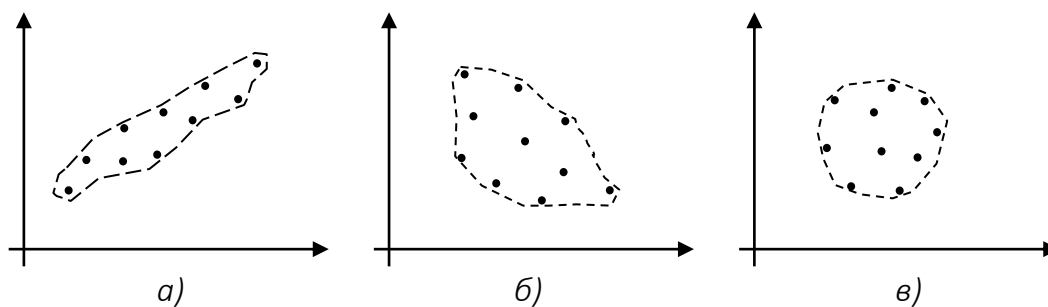
дисперсию и *стандарт* случайной величины $Y = aX + b$

$$D_Y = \sigma_Y^2 = D(aX + b) = a^2 D_X, \quad \sigma_Y = |a| \cdot \sigma_X.$$

Используя выражение (4.2), окончательно получим

$$r_{12} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{aD_X}{|a|\sigma_X^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

При **отрицательном** значении коэффициента корреляции имеем *обратную корреляцию*, когда при **возрастании** аргумента функция **убывает** (рисунок 4.1, б). При **положительном** коэффициенте имеем *прямую корреляцию* (рисунок 4.1, а).



а) – положительная; б) – отрицательная; в) – практически нулевая

Рисунок 4.1. – Виды корреляции

На рисунке 4.1 видно, что при состоянии а) корреляция более плотная и, соответственно, значение коэффициента больше, чем в случае б). Для случая в) о корреляции вообще говорить не приходится. Для некоррелированных случайных величин (рисунок 4.1, в) при изменении входной случайной величины меняется только диапазон выходной случайной величины, но его математическое ожидание не меняется.

Для независимых случайных величин корреляционный момент равен нулю. Действительно, используя для независимых величин третье равенство из (3.7), для нашего случая ковариация будет иметь вид

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_X) f_1(X) dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (y - M_Y) f_2(Y) dy, \quad (4.3)$$

то есть будет произведением двух центральных моментов первого порядка, которые равны нулю. Таким образом, если корреляционный момент, следовательно, и коэффициент корреляции равен нулю, – это явный признак независимости двух случайных величин. Следует заметить, что из некоррелированности величин не всегда следует их независимость, за исключением нормального закона распределения.

Коэффициент корреляции характеризует тесноту не всякой связи, а лишь линейной, которая формально получается как условное математическое ожидание при получении условной плотности распределения для нормального закона (см. формулу (3.19)). Следует иметь ввиду, что и ковариация, и корреляция являются теснотой связи между случайными величинами. Но первая характеризует связь между случайными величинами с разными дисперсиями (разные масштабы по осям), что для практики достаточно неудобно. Коэффициент корреляции же характеризует ту же связь, но для величин с одинаковыми единичными масштабами, что значительно удобнее.

Регрессия. Ковариация и корреляция являются количественным выражением тесноты связи между случайными величинами. Качественным выражением этой связи является вид функции связи между случайными величинами, называемой уравнением регрессии. Из определения корреляционной связи очевидно, что это должен быть вид, характеризующий условное математическое ожидание. Для рассмотренной ранее двумерной функции это будет выражение

$$M(Y | X) = f(X). \quad (4.4)$$

Для нормально распределенных случайных величин условное математическое ожидание (см. формулу (3.19)), имеет вид

$$M(Y | X) = M_{Y|X} = M_Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} r_{12} \cdot (x - M_X), \quad (4.5)$$

что и является *качественной* характеристикой корреляции между случайными величинами, или уравнением *парной регрессии*. Выражение в правой части легко приводится к виду

$$y_i = ax + b, \quad (4.6)$$

где $y_i = MO(Y | X)$ может трактоваться как результат **практической** реализации случайной величины;

коэффициенты будут иметь вид

$$a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot r_{12}, \quad b = M_Y - \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot r_{12} \cdot M_X, \quad b = M_Y - a \cdot M_X. \quad (4.7)$$

Это уравнение называют уравнением *линейной регрессии* y на x , которое **в среднем** характеризует **качественно** вид *корреляционной* зависимости в виде *линейной функции*.

Не сложно заметить, что *уравнение регрессии* должно проходить через точку (M_X, M_Y) , а её **наклон** получен таким образом, что она лежит в зоне **наибольшей** плотности скопления реализаций *случайной величины* (x_i, y_i) . Если *коэффициент корреляции* равен **нулю**, то $M(Y | X) = M_Y$ и мы имеем линию, **параллельную** горизонтальной оси, – ещё один признак *некоррелированности случайных величин*.

Если *условный закон* распределения записывается для n случайных величин когда t из них в виде x_i фиксированы, а остальные $n - t$ величин вида y_i являются случайными, условное математическое ожидание переходит в вектор условных математических ожиданий как $M_{y|x} = M_{(y_1, y_2, \dots, y_{n-t} | x_1, x_2, \dots, x_t)}$. Очевидно, что условная дисперсия переходит в условную ковариационную матрицу размера $t \times t$.

Для представления вектора условных математических ожиданий всю ковариационную матрицу K для n исследуемых величин делят на блоки для t фиксированных переменных x_i и $n - t$ случайных величин y_i :

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Тогда, вектор условных математических ожиданий на основании выводов (см. например, [20]) примет вид

$$M_{y|x} = M_{(y_1, y_2, \dots, y_{n-t} | x_1, x_2, \dots, x_t)} = M_y + K_{yx} K_{xx}^{-1} (x - M_x), \quad (4.9)$$

а условная ковариационная матрица $K_{y|x}$ для набора случайных переменных y_i при фиксировании набора величин x_i будет выражаться следующим образом:

$$K_{y|x} = K_{yy} - K_{yx}K_{xx}^{-1}K_{xy}. \quad (4.10)$$

Если обратить общую ковариационную матрицу K , $K^{-1} = \Lambda$, то вектор условных математических ожиданий (4.9) можно получить как

$$M_{y|x} = M_{(y_1, y_2, \dots, y_{n-t} | x_1, x_2, \dots, x_t)} = M_y + \Lambda_{xy} \Lambda_{yy}^{-1} (x - M_x). \quad (4.11)$$

Раскрыв скобки в (4.9) и выполнив группировку по переменным, получим обычное линейное представление условного математического ожидания, или уравнения регрессии:

$$M_{y|x} = K_{yx}K_{xx}^{-1}x + (M_y - K_{yx}K_{xx}^{-1}M_x) = Ax + b. \quad (4.12)$$

Аналогично, для (4.11) имеем

$$M_{y|x} = \Lambda_{xy} \Lambda_{yy}^{-1}x + (M_y - \Lambda_{xy} \Lambda_{yy}^{-1}M_x) = Ax + b. \quad (4.13)$$

Представленные формулы (4.9) – (4.13) носят название *теоремы о вычислении характеристик многомерного условного закона распределения вероятностей*.

Не сложно показать, что для парной регрессии одна объясняющая переменная x и одна результирующая переменная y , формула (4.9) переходит в (4.5), а (4.10) – в условную дисперсию $D_{y|x} = D_y(1 - r_{xy}^2)$. Если исследуется процесс, описываемый несколькими объясняющими переменными x_i и одной результирующей переменной y , формула (4.9) примет вид для k фиксированных значений

$$M_{y|x_1 \dots x_{k-1}} = M_y + \sum_{k \neq i} \beta_{ki} (x_i - M_{x_i}), \quad \beta_{ki} = -\frac{\Lambda_{ki}}{\Lambda_{kk}}. \quad (4.14)$$

Здесь Λ_{ij} – элементы *обратной ковариационной матрицы* размера $(k \times k)$, у которой на **последнем** месте находится результирующая переменная y . Если она на первом месте, то индексы **меняются** местами. Это уравнение также приводится к более распространенному виду

$$y_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_kx_k + a_0, \quad (4.15)$$

где коэффициенты формируются в процессе простого **раскрывания** скобок и группировки.

Кроме регрессии y на x , возможна *обратная регрессия* x на y и можно показать, что *косинус угла* между этими линиями, пересекающимися в точке (M_x, M_y) , есть значение *коэффициента корреляции*.

5. Введение в математическую статистику

Закон больших чисел.

Центральная предельная теорема.

Выборочный метод.

Эмпирическое распределение.

Выборочные характеристики.

Математические законы *теории вероятностей* получены абстрагированием реальных статистических закономерностей, свойственных **массовым** случайным явлениям, т.е. с **большим** числом ($n \rightarrow \infty$) **однородных** опытов или **складывающихся** случайных воздействий, порождающих в совокупности *случайные величины* с определенным *законом распределения*. Многие теоремы *теории вероятностей* не всегда возможно использовать для исследования реальных процессов: в них подразумевается совершенно **точно** известным закон распределения случайной величины или его характеристики. Кроме того, подразумевается, что эти характеристики получены **по всем значениям** случайной величины, число которых часто бесконечно, и при очень жестких дополнительных условиях.

В реальности часто встречается класс задач, когда имеется набор результатов опыта очень ограниченного числа, но ни *закон распределения*, ни характеристики **не известны**. Таким образом, требуется **адаптация** теорем *теории вероятностей* к решению реальных практических задач с целью получения количественных и качественных суждений об исследуемом процессе.

В первом приближении этими вопросами и занимается *математическая статистика*. Первый этап построения алгоритмов *математической статистики* связан с *предельными теоремами теории вероятностей* и *выборочным методом*.

Закон больших чисел. С глубокой древности было известно, что конкретные особенности отдельного случайного явления почти не сказываются на *среднем* результате массы таких явлений. Случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном явлении, в массе взаимно погашаются, выравниваются. Именно эта *устойчивость средних* и представляет собой «физическое» содержание **закона больших чисел**. В широком смысле этот закон говорит о том, что при очень большом числе случайных явлений, *средний* их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. В узком смысле под *законом больших чисел* понимаю ряд теорем, в которых для некоторых условий получают **приближения средними** из большого числа объектов, некоторых теоретических характеристик случайных величин. Таким образом, используется свойство случайных величин в определенных условиях вести себя практически как **неслучайные**, что позволяет достаточно уверенно работать с этими величинами. Закон больших чисел работает со значениями *случайных величин*. Расширяя рассмотренные выше свойства на *законы распределения*, возможно получить ряд теорем для уверенной работы не с предельными значениями случайных величин, а с **предельными законами распределения**. Группа теорем такого рода (количественная форма закона больших чисел) носит название **центральной предельной теоремы**.

Различные формы закона больших чисел с различными видами *центральной предельной теоремы* и образуют совокупность *предельных теорем*. Эти теоремы поз-

воляют **реально вычислять** ряд теоретических величин и устанавливать **условия**, при которых вычисленные величины будут наиболее близки к теоретическим.

Основные теоремы *закона больших чисел*:

1. **Теорема Бернулли**. При неограниченном возрастании числа n независимых опытов, отношение удачных опытов n_i к общему числу опытов n – частота $Q = \frac{n_i}{n}$, – стремится к теоретической вероятности P этого события:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Q - P| < \xi) = 1, \quad (5.1)$$

где ξ – малое положительное число.

2. **Теорема Чебышева**. При неограниченном возрастании числа n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина X с математическим ожиданием M_X принимает значение X_i , среднее арифметическое этих значений **стремится** к математическому ожиданию случайной величины X :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M_X| < \xi) = 1. \quad (5.2)$$

3. **Теорема Маркова** (обобщенная *теорема Чебышева*). При неограниченном возрастании числа n независимых опытов со случайной величиной X , имеющей ограниченную (и не бесконечную) дисперсию $D_X < c$, среднее арифметическое наблюдаемых значений стремится к среднему арифметическому *математических ожиданий этих величин*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \bar{M}_X| < \xi) = 1. \quad (5.3)$$

Очень важен тот факт, что и для **зависимых случайных величин** закон больших чисел выполняется, если имеет место *условие Маркова*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D([X])}{n^2} \rightarrow 0. \quad (5.4)$$

Центральная предельная теорема. Основные теоремы из группы *центральная предельная теорема*:

1. **Теорема Ляпунова** (простейший случай). Если случайные величины X_i взаимно независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием M_X и дисперсией D_X , то при неограниченном возрастании n , сумма вида $Y = X_1 + \dots + X_n$ имеет **приближенно нормальный закон распределения** с параметрами $M_Y = nM_X$ и $D_Y = nD_X$.

2. **Общая теорема Ляпунова**. Если случайные величины X_i распределены **не одинаково** с математическими ожиданиями M_{X_i} и дисперсиями D_{X_i} , то при ограничении вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M(|\bar{X}|^3)}{[D_X]^{\frac{3}{2}}} \right) = 0 \quad (5.5)$$

и неограниченном возрастании n , сумма вида $Y = X_1 + \dots + X_n$ имеет **приближенно нормальный закон распределения** с параметрами $M_Y = [M_X]$ и $D_Y = [D_X]$.

Выборочный метод. Вторую часть проблемы *адаптации* алгоритмов теории вероятностей к практическим нуждам, а именно работу с конечным массивом данных, решает выборочный метод статистики. **Выборочный метод** – статистический метод исследования общих свойств совокупности объектов по части этих объектов, называемой **выборкой** (*выборочная совокупность* объема n). Вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений) называется **генеральной совокупностью** объема N .

Чтобы по данным *выборки* уверенно судить об исследуемом признаке, она должна быть *представительной (репрезентативной)* – случайной, но полно и адекватно представлять n результатами всю *генеральную совокупность*. Основные типы *выборок*:

- а) *случайная выборка с возвратом* (геодезические измерения);
- б) *случайная выборка без возврата* (контроль качества).

Если объем *выборки* n велик ($n > 50$), то обычно используют способ *группировки данных* для их дальнейшей обработки и анализа. При этом весь диапазон *выборки* разбивают на s интервалов (обычно $8 < s < 25$) и считают число n_i величин, попавших в них. Для ориентации в выборе s достаточно часто можно пользоваться формулой **Стерджеса**:

$$s = \log_2(n) + 1 = 3,3 \lg(n) + 1. \quad (5.6)$$

Существует еще ряд формул для этих целей:

– формула **Брукса – Каррузера**:

$$s = 5 \lg(n), \quad (5.6a)$$

– формула **Хайнхольда – Гаеде**:

$$s = \sqrt{n}, \quad (5.6b)$$

и ряд других (см, например, [15]). Эти же формулы используются для расчета длины интервала при исследовании *выборки* на соответствие теоретическому закону распределения.

Тогда исследуемая *выборка* представляется **парой** чисел (x_i, n_i) , где x_i – **середина** соответствующего интервала. Величину n_i называют *эмпирической интервальной абсолютной частотой*, а отношение $q_i = \frac{n_i}{n}$ – *эмпирической интервальной относительной частотой* группированной *выборки*. Часто используется накопленная (*кумулятивная*) частота вида $y_k = \sum_{i=1}^k q_i$, которая бывает *абсолютной* и *относительной*.

Эмпирическое распределение. Если *выборку* выстроить по возрастанию – *вариационный ряд* с элементами $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$, и представить её в виде *полигона, гистограммы* или *кумуляты* (график *накопленных частот*), мы получим наглядное представление *статистического распределения* данных, называемого **эмпирическим распределением**. Аналитически оно может быть представлено для *эмпирического за-*

кона распределения в виде накопленных частот (рисунок 5.1) для эмпирической плотности вероятности в виде относительных частот. Такое представление обусловлено применением закона больших чисел в виде теоремы Бернулли.

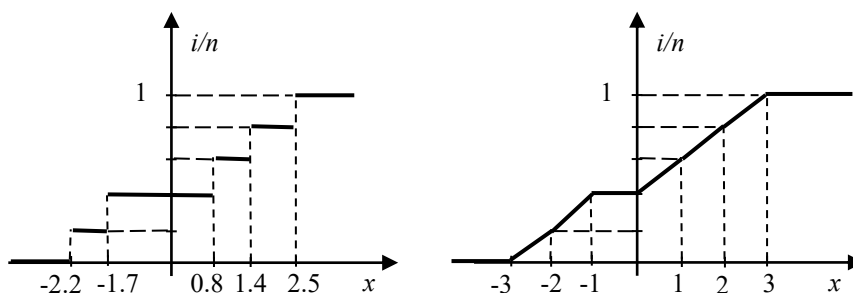


Рисунок 5.1. – Виды представления эмпирического закона распределения

Таким образом, эмпирическим (выборочным) аналогом теоретической функции распределения вида $F(x) = P(X < x)$ будет функция

$$\hat{F}^{(n)}(x) = \frac{n(x)}{n}, \quad (5.7)$$

для группированных данных

$$\hat{F}^{(n)}(x) = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_{i_x}}{n}, \quad (5.7a)$$

где $n(x)$ – число наблюдаемых значений исследуемой случайной величины в выборке из n элементов, меньших выбранного x ;

i_x – номер **правого** крайнего интервала, для которого значения не превосходят x .
В общем случае

$$F^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} < x \leq x_{(i+1)}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \\ 1, & x > x_{(n)} \end{cases} \quad (5.8)$$

При построении графика, из ряда строят *вариационный* и откладывают по горизонтальной оси значения *случайных величин* (или границы интервалов), а по вертикальной – величины i/n . В результате имеем одно из возможных **графических** представлений *эмпирической функции распределения*. Например, для $n = 5$ имеем рисунок 5.1.

Такого рода оценки *функции распределения* $\hat{F}^{(n)}(x)$ значений теоретической функции $F(x)$, не связанные с предварительным выбором общего модельного вида этой функции, называются **непараметрическими** и получают самое широкое применение при исследовании реальных процессов.

Выборочные характеристики. На основании теоремы Чебышева, количественную характеристику выборки в виде математического ожидания производят **заменой** математического ожидания *средним арифметическим* (в случае *равнозначных* значений выборки), или, с оценкой *вероятности* по теореме Бернулли, – в виде *среднего взвешенного*. Такого рода величины в математической статистике называют **выборочными средними**.

Общий переход от теоретических характеристик, т.е. вычисленных при точном значении закона распределения, к *выборочным* – полученным по результатам выборки, производится на основе **интерпретации** *выборки* как уменьшенной и репрезентативной модели генеральной совокупности с возможными значениями в виде наблюдений. В качестве *вероятностей* берутся их оценки по теореме Бернулли в виде *относительных частот* их появления.

Исходя из сказанного выше, **эмпирическим** аналогом *начальных* и *центральных моментов*, соответственно, для *равновероятных* и *неравновероятных* значений эксперимента будут выражения

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k = \frac{[x^k]}{n}, \quad \hat{\alpha}_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot \hat{p}_i = [x^k \hat{p}]$$

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha}_k)^k = \frac{\begin{matrix} o \\ x^k \end{matrix}}{n}, \quad \hat{\mu}_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha}_k)^k \cdot \hat{p}_i = \begin{bmatrix} 0^k \\ x \cdot \hat{p} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

Пример 23. Если оценки вероятностей составляют 0.5 для максимального и минимального значений, и нули для других, то имеем *выборочное среднее взвешенное* в виде *полуразмаха* $\hat{x} = \frac{(x_{\text{макс.}} + x_{\text{мин.}})}{2}$; при значении вероятности, равной единице для *среднего элемента* в *вариационном ряду* и нулей – для всех других, имеем в качестве *выборочного значения* обычную *выборочную медиану*.

В качестве *меры рассеивания* результатов используется *выборочный центральный момент второго порядка* – *выборочная дисперсия* для *равновероятного* и *неравновероятного* случаев, соответственно:

$$m^2 = \hat{D}_X = \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}), \quad m^2 = \hat{D}_X = \hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot \hat{p}_i, \quad (5.10)$$

Некоторые другие характеристики:

– *выборочный коэффициент вариации*:

$$\hat{V} = \frac{m}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{[(x - \bar{x})^2]}{[x]} \cdot 100\%; \quad (5.11)$$

– выборочный коэффициент асимметрии:

$$\hat{A} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{[(x - \bar{x})^3]}{n \cdot m^3} = \frac{[(x - \bar{x})^3] \cdot \sqrt{n}}{[(x - \bar{x})^2]}; \quad (5.12)$$

– выборочный коэффициент эксцесса:

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} - 3 = \frac{[(x - \bar{x})^4]}{n \cdot m^4} - 3 = \frac{[(x - \bar{x})^4] \cdot n}{[(x - \bar{x})^2]} - 3; \quad (5.13)$$

– выборочная ковариация:

$$\hat{K}_{XY} = \text{cov}(X, Y) = \frac{[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]}{n} = \frac{[xy]}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}; \quad (5.14)$$

– выборочный парный коэффициент корреляции:

$$\begin{aligned} \hat{r}_{xy} &= \frac{[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]}{n \cdot m_x \cdot m_y} = \frac{[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]}{\sqrt{(x - \bar{x})^2 \cdot (y - \bar{y})^2}} = \\ &= \frac{[xy] - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{([x^2] - n \cdot \bar{x}^2) \cdot ([y^2] - n \cdot \bar{y}^2)}}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Пример 24. Для двух экспериментальных рядов x и y в n элементов каждый, составляется матрица плана A размера $(n \times 3)$, в которой первый столбец – вектор x , второй – вектор y , третий – n единиц. Находят нормальную матрицу $N = A^T \cdot A$, имеющую размер (3×3) . Не сложно показать, что её структура будет иметь вид

$$N = \begin{bmatrix} [x^2] & [xy] & [x] \\ [xy] & [y^2] & [y] \\ [x] & [y] & n \end{bmatrix}.$$

Следовательно, формулы (5.14) и (5.15) получаются как комбинации элементарных определителей второго порядка из соответствующих строк и столбцов, нормированных множителем $1/n$ ($1/n^2$), или без него. Например, формула (5.14) получается как определитель из матрицы, в которой удалены первый столбец и вторая строка, деленный на n^2 , и т.д.

6. Элементы теории оценивания

Параметрическое оценивание.

Доброкачественные оценки – состоятельность, несмещенность, эффективность.

Функция правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия.

Метод моментов.

Метод наименьших квадратов.

Другие точечные оценки.

Интервальные оценки.

Доверительные эллипсоиды.

В рассмотренном выборочном методе для оценки основных характеристик элементов выборки *математическое ожидание* заменяют по теореме Чебышева *средним арифметическим* или *средним взвешенным* (при использовании теоремы Бернулли), которое напрямую связано с *законом распределения случайной величины*. Очевидно, что остаётся открытым вопрос о получении оценок характеристик на основе их вероятностных свойств, описываемых этим законом распределения с *наперед заданными свойствами*. Раздел математической статистики, позволяющий получать *оптимальные* по заданным критериям оценки основных характеристик, называют **теорией статистического оценивания**. При этом выделяют два случая: закон распределения случайной величины достаточно хорошо **известен** и используется – *параметрические методы оценивания*; закон распределения **не известен** – *непараметрические методы оценивания*.

Параметрическое оценивание. Рассмотрим задачу *параметрического оценивания* основных характеристик выборки. Пусть имеется выборка объема n с элементами x_i , и пусть интересующие нас свойства описываются моделью вида $M(x, \theta) = 0$, где θ – вектор искомого параметров. Задача статистического оценивания неизвестных параметров по выборке x_i заключается в **построении** такой вектор-функции $\hat{\theta}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которая давала бы в некотором смысле наиболее **точные** приближенные значения для неизвестных нам истинных значений параметров θ_i .

Назовем любую функцию $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от результатов наблюдений x_i случайной величины X *статистикой*. Статистика $\hat{\theta}$, используемая в качестве **приближенного** значения неизвестного параметра θ , называется *статистической оценкой*. Обычно в математической статистике оценку математического ожидания называют **оценкой сдвига**, а оценку меры рассеяния – **оценкой масштаба**. Все статистические оценки есть *случайные величины*, так как являются функциями от случайных результатов опыта.

Доброкачественные оценки. Чтобы оценки были надежными (доброкачественными) к ним предъявляют следующие требования:

1. **Состоятельность.** Оценка $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неизвестного параметра θ называется *состоятельной*, если при росте числа наблюдений ($n \rightarrow \infty$) она **стремится по вероятности** к оцениваемому значению θ , т.е.

$$P_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left| \hat{\theta} - \theta \right| > \xi \right\} \rightarrow 0. \quad (6.1)$$

Имеет практический смысл, так как увеличение объема исходной информации должно приближать нас к истине. Это свойство проверяется в первую очередь, носит асимптотический характер и проявляется при очень больших объемах выборки, которые практически нереализуемы. Несложно заметить, что в большинстве случаев для оценки параметра можно получить несколько **разных**, но *состоятельных* значений. Например, оценки в виде среднего арифметического и полуразмаха являются состоятельными оценками математического ожидания симметричного распределения.

Отсюда делаем вывод, что одного условия *состоятельности* недостаточно для однозначной и полной характеристики *надежности* оценки.

2. **Несмещенность.** Оценка $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неизвестного параметра θ называется *несмещенной*, если при любом объеме выборки n результат её **осреднения** по всем возможным выборкам данного объема приводит к точному истинному значению оцениваемого параметра: $M\hat{\theta} = \theta$.

Например, для оценки математического ожидания $M(x) = a$ в виде среднего арифметического имеем

$$M(\bar{x}) = M\left(\frac{1}{n} \cdot [x]\right) = \frac{1}{n} \cdot [M(x)] = \frac{1}{n} \cdot [a] = a,$$

а для оценки дисперсии $\sigma^2 = D_X$ в виде выборочной дисперсии m^2 (5.10), или (5.16)

$$\begin{aligned} M(m^2) &= \frac{1}{n} \cdot M\left(\left[(x - \bar{x})^2\right]\right) = \frac{1}{n} \cdot M\left(\left[(x - a) - (\bar{x} - a)\right]^2\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot M\left(\left[(x - a)^2\right] - 2(\bar{x} - a) \cdot [(x - a)] + [(\bar{x} - a)^2]\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot M\left(\left[(x - a)^2\right] - 2(\bar{x} - a) \cdot (n\bar{x} - na) + n(\bar{x} - a)^2\right) = \\ &= \frac{1}{n} \cdot M\left(\left[(x - a)^2\right] - n(\bar{x} - a)^2\right) = \frac{1}{n} \left(\left[M(x - a)^2\right] - nM(\bar{x} - a)^2\right) = \\ &= \frac{1}{n} \left(n \cdot \sigma^2 - n \cdot \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Здесь использовано то, что $D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} [D(x)] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Таким образом, среднее арифметическое есть несмещенная оценка математического ожидания, а выборочная дисперсия имеет отрицательное смещение, равное σ^2 / n , что должно учитываться при небольших n .

Несмещенность является характеристикой хороших свойств *оценки* при каждом конечном объеме выборки. Удовлетворение этому условию устраняет *систематическую погрешность оценивания*, зависящую от объема выборки n , и, в случае *состоятельности оценки*, стремится, как правило, к **нулю** при $n \rightarrow \infty$. Устраняется смещение легко, если **выявлена** его суть.

Так, для примера с дисперсией, надо перейти к оценке, которая будет несмещенной, вида

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot m^2, \tag{6.2}$$

Требования *несмещенности* (при соблюдении состоятельности), особенно **существенны** при малых выборках.

3. **Эффективность.** Оценка $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неизвестного параметра θ называется *эффективной*, если среди прочих оценок этого же параметра, она обладает **наименьшей мерой случайного разброса** относительно истинного значения оцениваемого параметра. Эффективность является решающим свойством, определяющим *качество оценки*, но, вообще говоря, не предполагает соблюдение свойства *несмещенности* (см. пример для *дисперсии*).

Функция правдоподобия. Пусть имеется *выборка*, состоящая из n k -мерных наблюдений. При *независимости* и одинаковой распределенности, их *совместная плотность вероятности* будет произведением *частных плотностей*:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta). \quad (6.3)$$

Таким образом, эта функция задает *вероятность* получения именно всех наблюдений x_1, \dots, x_n **одновременно**. Очевидно, чем больше значение $L(X; \theta)$, тем *правдоподобнее* (или *более вероятна*) система наблюдений X при заданном значении параметра θ . Отсюда и название функции ***L-функция правдоподобия***. Несложно заметить, что чем резче проявляется зависимость изменения вероятности в L от изменения параметра θ , тем больше *информации* заключено в конкретных значениях X и θ друг о друге. Под *информацией* о параметре θ , содержащейся в случайной величине X , понимают степень **уменьшения неопределенности (энтропии)** о неизвестном значении θ после наблюдения за данной случайной величиной. Если по наблюдаемым значениям x_i случайной величины X можно с *вероятностью 1* точно **восстановить** значение параметра θ , то наблюдения содержат **максимально** возможную *информацию* о параметре. Если величина L случайной величины X одна и та же при всех значениях параметра θ , то нет возможности сделать **заключение** о θ по результатам наблюдений случайной величины.

Метод максимального правдоподобия. Из сказанного выше не ясно, как установить именно те комбинации результатов измерений (*статистики*), с помощью которых **наилучшим** образом оцениваются неизвестные параметры, т.е. как конкретно строить *доброкачественные (оптимальные) оценки*.

Наиболее давнишним, восходящим ко временам Эйлера и Лагранжа (а основы заложены ещё Д. Бернулли) методом, решающим поставленную задачу **поиска оптимальных оценок**, является **метод максимального правдоподобия** (ММП). Окончательную законченность он получил в 1912 г. благодаря работам **Р. Фишера**.

В качестве основы использована *функция правдоподобия* $L(X; \theta)$ (6.3). Эта функция при каждом фиксированном значении параметра θ есть *мера правдоподобности* получения системы наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n . Поэтому, изменяя значения θ , при конкретно имеющихся величинах x_1, x_2, \dots, x_n , можно проследить, при каких значениях θ эти наблюдения **более правдоподобны**, а где – **менее**, и выбрать такое значение $\hat{\theta}_{\text{ММП}}$, при котором система наблюдений выглядит **наиболее правдоподобно**.

Математически это описывается как

$$\hat{\theta}_{ММП} = \max_{\hat{\theta}} \left(L(x_1, x_2, \dots, x_n; \hat{\theta}) \right), \quad (6.4)$$

или для независимых наблюдений с плотностью вероятностей для i -го наблюдения $f(x_i; \hat{\theta})$

$$\hat{\theta}_{ММП} = \max_{\hat{\theta}} \prod_{i=1}^n f(x_i; \hat{\theta}). \quad (6.4a)$$

Оценки, полученные по методу максимального правдоподобия, являются состоятельными, асимптотически несмещенными, асимптотически эффективными, но **не являются наилучшими во всех ситуациях**. Во-первых, их хорошие свойства проявляются часто лишь при очень больших объемах выборки, так что при малых n с ними могут конкурировать, и даже превосходить, другие оценки. К примеру, это могут быть оценки метода моментов, метода наименьших квадратов и др. Во-вторых, что является самым уязвимым местом оценок ММП, для построения оценок и обеспечения их хороших свойств, необходимо **точное** знание закона распределения $f(x_i; \hat{\theta})$, что в большинстве случаев практически нереально. В этой ситуации выгоднее искать не наилучшую оценку для конкретной функции плотности, которая резко теряет свои хорошие свойства при отклонении реального распределения от модельного, а **оценку**, хотя и не лучшую для $f(x_i; \hat{\theta})$, но достаточно **устойчивую** в более широком классе распределений, включающем и это как частный случай. Подобные оценки называют **устойчивыми** (или **робастными**). Оценки, являющиеся наилучшими из класса наихудших, называют **гарантированными (минимаксными)** – оценки, хуже которых не будет.

Для практических вычислений достижение максимума функции правдоподобия необходимо, чтобы в точке $\hat{\theta}_{ММП}$ обращались **в нуль** частные производные функции $L(X; \theta)$ по определяемым параметрам или **логарифм** этой функции, что, в случае её монотонности, **удобнее** для вычислений. Значит, ММП-оценки могут быть получены из решения k уравнений вида

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^{(j)}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (6.5)$$

или

$$\frac{\partial \left(\sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta) \right)}{\partial \theta^{(j)}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (6.5a)$$

Пример 25. Пусть случайная величина X имеет нормальный закон распределения $N(x; a, \sigma^2)$ с неизвестным значением $a = M_X$ и дисперсией $\sigma^2 = D_X$. В соответствии с (6.3) функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sigma^n} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2},$$

а логарифм функции правдоподобия

$$l(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2) = \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$

Дифференцируя функцию l по a и σ^2 и приравнявая к нулю результат, имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot [(x - a)] = 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 = 0 \end{aligned}$$

Решение системы относительно a и σ^2 дают ММП-оценки этих параметров с известными ранее свойствами:

$$\hat{a}_{\text{ММП}} = \frac{[x]}{n}, \quad \hat{\sigma}_{\text{ММП}}^2 = \frac{[(x - \bar{x})^2]}{n}.$$

Метод моментов. Другой метод оценивания параметра θ , если известна функция плотности, в виде $\hat{\theta}$, по элементам независимой выборки x_1, x_2, \dots, x_n , называемый **методом моментов (ММ)**, заключается в следующем. Приравнивают определенное количество *выборочных моментов* к соответствующим теоретическим (вычисленным с использованием функции плотности $f(x_i; \hat{\theta})$) моментам исследуемой случайной величины. Решение совместно k уравнений (по числу определяемых параметров) дает искомые оценки:

$$\left\{ \begin{aligned} \int x^{(l)} f(x_i; \theta) dx &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(l)}, \\ \int x^{(l)} x^{(m)} f(x_i; \theta) dx &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{(l)} x_i^{(m)}, \\ &\dots \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

ММ-оценки ввел **К. Пирсон**. В принципе, была произведена **замена** математического ожидания *усреднением*, на основании теоремы Чебышева. Также использовано то обстоятельство, что некоторые моменты являются *оценками* основных характеристик выборки.

К достоинствам *метода моментов* относят его сравнительно простую вычислительную реализацию. Фишер показал, что *асимптотическая эффективность* ММ-оценок как правило **меньше**, т.е. они уступают ММП-оценкам, но могут использоваться как *оценки* первого **приближения** для определения более *эффективных оценок*.

Пример 26. Для оценок система (6.6) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i; \\ \sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2; \end{array} \right.$$

что сразу дает вид оценок для математического ожидания и дисперсии, уже полученных ранее.

Метод наименьших квадратов. Если не задается закон распределения, но требуется оценить параметры θ по наблюдаемым значениям y_i функции $\psi(\theta; x)$ со случайными погрешностями ε_i

$$y_i = \psi(\theta; x_i) + \varepsilon_i, \quad (6.7)$$

то используют метод наименьших квадратов, дающий МНК-оценки из условия

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \psi(\hat{\theta}_{МНК}; x_i))^2 = [\varepsilon^2] = \Phi(\varepsilon) = \min_{\hat{\theta}}. \quad (6.8)$$

Здесь функция от погрешностей ε_i , $\Phi(\varepsilon)$, называется **целевой функцией** (функцией потерь, функцией риска). Так как истинные погрешности не известны, то величина ε_i заменяется отклонением функции от её измеренного значения. Метод наименьших квадратов требует поиска таких оценок $\hat{\theta}$, только при которых достигается **минимум целевой функции**. Основной принцип наименьших квадратов гласит: найти такие оценки параметров, которые дают **минимальную** сумму квадратов отклонений из всех возможных комбинаций параметров.

При весьма общих предположениях о природе теоретических случайных погрешностей ε_i и структуре функций $\psi(\theta; x)$, МНК-оценки являются *состоятельными, асимптотически несмещенными и асимптотически эффективными*. Но должны выполняться основные требования для ε_i и функции $\psi(\theta; x)$ для обеспечения **оптимальных** свойств оценок по МНК:

– остатки ε_i имеют **нулевые математические ожидания** $M(\varepsilon_i) = 0$, т.е. в результатах нет значимого *систематического смещения*;

– остатки имеют **конечные** и одинаковые дисперсии $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$, не зависящие ни от номера i , ни от параметра $\hat{\theta}$;

– функция $\psi(\theta; x)$ **непрерывна** и дифференцируема по всем параметрам $\theta^{(i)}$.

Не сложно заметить, что первые условия для случайных величин очень похожи на условия *центральной предельной теоремы Ляпунова*.

Другие точечные оценки (см., например, [1] или [12]). Существует ещё один достаточно развитый в последнее время класс оценок, являющий собой некий симбиоз ММП- и МНК-оценок. Этот метод разработан **Хьюбером** (1972г.) и назван им *М-оценками*.

В этом подходе, в самом общем для одномерного случая, оценки могут быть получены через решение **экстремальной** задачи вида

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i; \theta) = \min, \quad (6.9)$$

где ρ^* – целевая функция произвольного вида от результатов измерений и искомой оценки θ , (например, оценки сдвига или масштаба). Задачу (6.9) сводят к решению **неявного** функционального уравнения

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i; \theta) = 0, \quad (6.10)$$

где $\psi(x_i; \theta) = \frac{\partial \rho(x_i; \theta)}{\partial \theta} = \rho'(x_i; \theta)$ – функция чувствительности **Хьюбера**. Если $\rho(x_i; \theta) = -\ln f(x; \theta)$, то имеем обычные ММП-оценки.

Пусть нас интересует в качестве θ оценка сдвига. Тогда уравнение (6.9) примет вид

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i - \theta) = \min, \quad (6.11)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i - \theta) = 0, \quad (6.12)$$

что решает поставленную задачу. Последнее уравнение можно записать в **эквивалентном** виде

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot (x_i - \theta) = 0, \quad (6.13)$$

где $w_i = \frac{\psi(x_i - \theta)}{(x_i - \theta)}$ – весовые коэффициенты, зависящие, в первую очередь, от результатов измерений.

Раскрытие уравнения (6.13) приводит к оценке θ в виде *среднего весового*

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}. \quad (6.14)$$

Учитывая, что ψ – функция **Хьюбера** – должна формироваться на основе состоятельности по Фишеру, её можно представить через функцию плотности распределения $f(x; \theta)$ как

$$\psi(x; \theta) = -\frac{f'(x; \theta)}{f(x; \theta)} = -\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial x}. \quad (6.15)$$

Исходя из сказанного выше, можно записать взаимосвязь между четырьмя имеющимися функциями: весовой, целевой, плотности и Хьюбера, имея одну из которых можно получить все другие (или нужные) и, соответственно, оценки на их основе. Достаточно сложным является выбор первой функции, что в принципе тоже решаемо.

$$w_i = \frac{\psi(y_i)}{y_i} = -\frac{f'(y_i)}{y_i \cdot f(y_i)} = \frac{\rho'(y_i)}{y_i};$$

$$\psi(y_i) = w_i \cdot y_i = -\frac{f'(y_i)}{f(y_i)} = \rho'(y_i);$$
(6.16)

$$f(y) = c_1 \cdot e^{-\int \psi(y) dy} = c_1 \cdot e^{-\int y \cdot w(y) dy} = c_1 \cdot e^{-\rho(y)};$$

$$\rho(y) = \int \psi(y) dy = \int y \cdot w(y) dy = \int \left(-\frac{f'(y)}{f(y)} \right) dy.$$

Если на основе алгоритма *M-оценок* получаем оценку параметра *сдвига*, то вводится еще одно *неявное* уравнение (аналог (6.10)):

$$\sum_{i=1}^n \chi(x_i; \theta) = 0, \quad (6.17)$$

где θ – оценка масштаба. Вообще подфункциональное выражение в этом случае должно иметь вид (x_i / θ) или $(x_i - \theta_1) / \theta_2$ (см. (6.11) и (6.12) для сдвига);

χ – функция на основе *состоятельности* по **Фишеру** также может быть выражена через *функцию плотности* $f(x; \theta)$

$$\chi(x_i; \theta) = 1 - x_i \cdot \frac{f'(x; \theta)}{f(x; \theta)} = -1 - x_i \cdot \psi(x_i; \theta). \quad (6.18)$$

Решение неявного уравнения (6.17) с учетом (6.18) или с другим представлением на основе (6.16) и дает нам *M-оценку масштаба*.

Пример 27. Пусть в качестве плотности имеем функцию для нормального закона распределения $N(x; a, \sigma^2)$. Тогда *весовая функция, ψ -функция, целевая и χ -функция* будут иметь вид

$$w_i = -\frac{f'(x_i; \theta)}{x_i f(x_i; \theta)} = \frac{x_i f(x_i; \theta)}{x_i f(x_i; \theta)} = 1; \quad \psi(x_i) = x_i; \quad \rho(x_i) = \frac{x^2}{2}; \quad \chi(x_i) = x^2 - 1.$$

Тогда оценки сдвига и масштаба по (6.14) и (6.18) будут

$$\theta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot 1}{\sum_{i=1}^n 1} = \bar{x}; \quad \sum_{i=1}^n \left(\left(\frac{(x_i - \theta_1)}{\theta_2} \right)^2 - 1 \right) = 0; \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)^2 = \theta_2.$$

Рассмотренные выше оценки носят название *параметрических* , так как для своего определения требуют достаточно точного знания закона распределения погрешностей результатов наблюдений. Но в очень большом количестве случаев закон распределения или не известен совсем, или его знание весьма приближенно. В этой ситуации также хочется получить *эффективные оценки* . Оценки такого рода называют *не-*

параметрическими, и если они получены верно, то дают результат **не хуже** параметрических, когда закон распределения известен, и эффективны, когда он не известен. Наиболее часто используемые оценки такого рода – это *L-оценки* (оценки из линейных комбинаций) и *R-оценки* (оценки на ранговых статистиках).

Интервальные оценки. Для малых выборок и экспериментальных данных более реальны, чем точечные оценки, – другие, показывающие, с какой вероятностью значение полученной оценки находится в заданной границе. Такого рода оценки называют *интервальными*.

В самом общем случае, если есть случайная величина X и какой-либо интервал Θ на действительной прямой, а истинное значение параметра θ не известно, то интервал $(a_1(x), a_2(x)) \subset \Theta$ с границами, являющимися функциями от наблюдаемых значений случайной величины X , называется **интервальной оценкой**, или **доверительным интервалом** для θ . Число

$$\frac{|X - \hat{x}|}{m_{\hat{x}}} = \sqrt{\gamma_{\beta}} = P = \inf_{\theta \in \Theta} P\{a_1(x) < \theta < a_2(x)\} \quad (6.19)$$

называют **коэффициентом доверия** этого **доверительного интервала**, а величины $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – **нижним и верхним доверительными пределами**.

Доверительные эллипсоиды (см., например, [7; 13]). Рассмотренный метод пригоден для *одномерных случайных величин*. Обобщенным понятием для *доверительных интервалов* в случае оценивания нескольких случайных величин, является понятие **доверительных эллипсоидов**, введенных для этих целей **Хотеллингом**.

Пусть имеется система случайных величин X с вектором математических ожиданий M_X

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad M_X = \begin{pmatrix} M_{X_1} \\ \vdots \\ M_{X_n} \end{pmatrix}$$

с k элементами в каждой случайной величине. Тогда, **доверительный эллипсоид**, накрывающий точку X из истинных значений X_1, \dots, X_n с **доверительной вероятностью** β , имеет вид

$$(X - \hat{x})^T K_{\hat{x}}^{-1} (X - \hat{x}) = \gamma_{\beta}, \quad (6.20)$$

где $K_{\hat{x}}$ – ковариационная матрица вектора оценок математического ожидания \hat{x} . Коэффициент γ_{β} подчиняется **распределению Фишера** с числом **степеней свободы** k и $n - k$ выбираемого из таблиц этого распределения по **доверительной вероятности** β .

Если случайная величина X одномерна, то **доверительный эллипсоид** превращается в **доверительный интервал** с $K_{\hat{x}} = m_{\hat{x}}^2 = m^2 / n$ и $\frac{|X - \hat{x}|}{m_{\hat{x}}} = \sqrt{\gamma_{\beta}} = t_{\beta}$, где t_{β} – **квантиль распределения Стьюдента** с числом **степеней свободы** $n - 1$.

7. Статистическая проверка гипотез

Параметрические критерии.

Основной принцип проверки статистических гипотез.

Общая схема проверки гипотез.

Критерии согласия, критерии χ^2 и ω^2 .

В один из основных разделов математической статистики, называемый «статистические выводы», входит *теория оценивания и статистическая проверка гипотез*.

Большая часть моделей, используемых в геодезии, требует многократного улучшения и уточнения. Для этих целей проводят расчеты, связанные с установлением выполнимости или невыполнимости принятых предположений, анализ качества найденных оценок, исследуют достоверность полученных выводов. Все эти расчеты и исследования проводят по схеме **статистической проверки гипотез**.

Статистической называют *гипотезу* о виде закона распределения или параметрах известного распределения. В первом случае гипотеза называется *непараметрической*, а во втором – *параметрической*.

Параметрические гипотезы. Гипотеза H_0 , подлежащая проверке, называется *нулевой* (основной). Наряду с нулевой рассматривают гипотезу H_1 , которая будет **приниматься**, если отклоняется H_0 . Такая гипотеза называется *альтернативной* (*конкурирующей*). К примеру, если проверяется гипотеза о равенстве параметра θ некоторому значению θ_0 , т.е. $H_0: \theta = \theta_0$, то в качестве альтернативной могут рассматриваться следующие гипотезы:

$$H_1^{(1)}: \theta \neq \theta_0; H_1^{(2)}: \theta > \theta_0; H_1^{(3)}: \theta < \theta_0; H_1^{(4)}: \theta = \theta_1; (\theta_1 \neq \theta_0). \quad (7.1)$$

Выбор альтернативной гипотезы определяется конкретной формулировкой задачи, а нулевая гипотеза часто специально подбирается так, чтобы **отвергнуть** её и принять тем самым *альтернативную гипотезу*. К примеру, чтобы принять гипотезу о наличии корреляции между двумя рядами измерений, можно опровергнуть отсутствие такой корреляции, взяв утверждение в качестве нулевой гипотезы.

Гипотезу называют *простой* (одно конкретное предположение: $H_0: \theta = \theta_0$, $H_1^{(1)}: \theta = \theta_1$) и *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез ($H_1^{(1)}: \theta \neq \theta_0$; $H_1^{(2)}: \theta > \theta_0$; $H_1^{(3)}: \theta < \theta_0$; и т.д.).

Сущность проверки *статистической гипотезы* заключается в том, чтобы установить, согласуются или нет результаты наблюдений и выдвинутая гипотеза, можно ли расхождение между гипотезой и результатом выборочных наблюдений отнести на счет *случайной погрешности*, обусловленной механизмом случайного отбора. При проверке гипотезы *выборочные данные* могут противоречить гипотезе H_0 . Тогда она отклоняется. Если же статистические данные согласуются с выдвинутой гипотезой, то она не отклоняется. В этом случае говорят (хотя и не совсем точно), что нулевая гипотеза принимается.

Статистическая проверка гипотез на основании *выборочных данных* неизбежно связана с **риском** принятия ложного решения. При этом возможны ошибки двух родов. *Ошибка первого рода* состоит в том, что будет **отвергнута** правильная *нулевая гипотеза*.

за. *Ошибка второго рода* состоит в том, что будет **принята нулевая гипотеза**, в то время как в действительности верна *альтернативная гипотеза*. Возможные результаты статистических выводов представлены следующей таблицей:

Результаты проверки гипотезы	Возможные состояния гипотезы	
	Верна H_0	Верна H_1
Гипотеза H_0 отклоняется	Ошибка первого рода	Правильный вывод
Гипотеза H_0 не отклоняется	Правильный вывод	Ошибка второго рода

Последствия указанных ошибок не равнозначны. Первая приводит к более **осторожному**, консервативному решению, вторая – к **неоправданному** риску. Что лучше или хуже – зависит от конкретной постановки задачи и содержания *нулевой гипотезы*. К примеру, если H_0 состоит в признании результатов измерений качественными и допущена ошибка первого рода, то будут забракованы годные измерения. Допустив ошибку второго рода, мы выдадим заказчику некачественные измерения. Очевидно, последствия второй ошибки более серьезны.

Исключить *ошибки первого и второго рода* невозможно в силу ограниченности *выборки*. Поэтому стремятся **минимизировать** потери от ошибок. Одновременное уменьшение вероятностей данных ошибок невозможно, так как задачи их уменьшения являются конкурирующими, и снижение *вероятности* допустить одну из них, влечет за собой увеличение *вероятности* допустить другую. В большинстве случаев единственный способ уменьшения вероятности ошибок состоит в *увеличении объема выборки*.

Вероятность совершить ошибку *первого рода* принято обозначать буквой α (q), и её называют **уровнем значимости**. Вероятность совершить *ошибку второго рода* обозначают β . Вероятность не совершить ошибку второго рода вида $(1 - \beta)$ называется **мощностью критерия**. Значения α задают заранее, обычно 0,1, 0,05, 0,01, а затем стремятся построить критерий наибольшей *мощности*.

Пример 28. Если уровень значимости $\alpha = 0,05$, то исследователь не хочет отвергнуть верную гипотезу (совершить ошибку первого рода) более чем в 5 случаях из 100.

Проверку статистической гипотезы осуществляют на основании данных выборки. Для этого используют специально подобранную *случайную статистику*, **точное** (или достаточно приближенное) значение которой известно. Обычно используемые *статистики* и обозначения:

- U (или Z , или малые u , z) – если это *стандартизованное нормальное распределение* (см. (2.13));
- χ^2 – если это *распределение χ^2* (см. (3.33));
- F – если это *F-распределение Фишера* (см. (3.35));
- T (или t) – если это *распределение Стьюдента* (см.(3.34)).

Статистическим критерием называют случайную статистику, которая служит для проверки *нулевой гипотезы*. После выбора критерия множество всех его возможных значений *разбивают на два непересекающихся подмножества*: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза отклоняется, другое – при которых она не отклоняется. Совокупность значений критерия, при которых *нулевую гипотезу* отклоняют, называют **критической областью**. Совокупность значений критерия, при которых *нулевую гипотезу* не отклоняют, называют **областью принятия гипотезы**.

Основной принцип проверки статистических гипотез (см., например, [14; 18]). Если наблюдаемое значение критерия, вычисленное по выборке, принадлежит *критической области*, то нулевую гипотезу отклоняют. Если же наблюдаемое значение критерия принадлежит *области принятия гипотезы*, то нулевую гипотезу не отклоняют (принимают).

Точки, разделяющие *критическую область* и *область принятия гипотезы*, называют **критическими**. В основу определения *критических точек*, а, следовательно, и *критической области* положен принцип *практической невозможности маловероятных событий*.

Пусть для проверки нулевой гипотезы H_0 служит критерий K . Предположим, что плотность распределения вероятности случайного критерия K в случае справедливости H_0 имеет вид $f(k|H_0)$, а математическое ожидание K равно k_0 . Тогда вероятность того, что случайный критерий K попадет в произвольный интервал $(k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2})$, можно найти по формуле

$$P(k_{1-\alpha/2} < K < k_{\alpha/2}) = \int_{k_{1-\alpha/2}}^{k_{\alpha/2}} f(k|H_0)dk. \quad (7.2)$$

Зададим эту вероятность равной $1 - \alpha$ и вычислим *критические точки* (квантили) K -распределения $k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2}$ из условий:

$$\begin{aligned} P(K \leq k_{1-\alpha/2}) &= \int_{-\infty}^{k_{1-\alpha/2}} f(k|H_0)dk = \frac{\alpha}{2}, \\ P(K \geq k_{\alpha/2}) &= \int_{k_{\alpha/2}}^{+\infty} f(k|H_0)dk = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(k_{1-\alpha/2} < K < k_{\alpha/2}) &= 1 - \alpha, \\ P((K \leq k_{1-\alpha/2}) \cup (K \geq k_{\alpha/2})) &= \alpha. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Зададим *вероятность* α настолько малой (0,05; 0,01), чтобы попадание случайного критерия K за пределы интервала $(k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2})$ можно было бы считать **маловероятным** событием. Тогда, исходя из принципа *практической невозможности маловероятных событий*, можно считать, что если гипотеза H_0 справедлива, то при её проверке с помощью критерия K , по данным одной выборки, наблюдаемое значение K должно наверняка попасть в определенный интервал $(k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2})$. Если же наблюдаемое значение K попадает за пределы указанного интервала, то произойдет **маловероятное**, практически невозможное, *событие*. Это дает основание считать, что с *вероятностью* $1 - \alpha$ **нулевая гипотеза H_0 несправедлива**. Точки $k_{1-\alpha/2}, k_{\alpha/2}$ являются *критическими*.

Критическая область $(-\infty; k_{1-\alpha/2}) \cup (k_{\alpha/2}; +\infty)$ называется *двусторонней критической областью* (рисунок 7.1). Она определяется в случае, когда *альтернативная гипотеза* имеет вид: $H_1: \theta \neq \theta_0$. Кроме *двусторонней*, рассматривают также *односторонние критические области* – *правостороннюю* и *левостороннюю*.

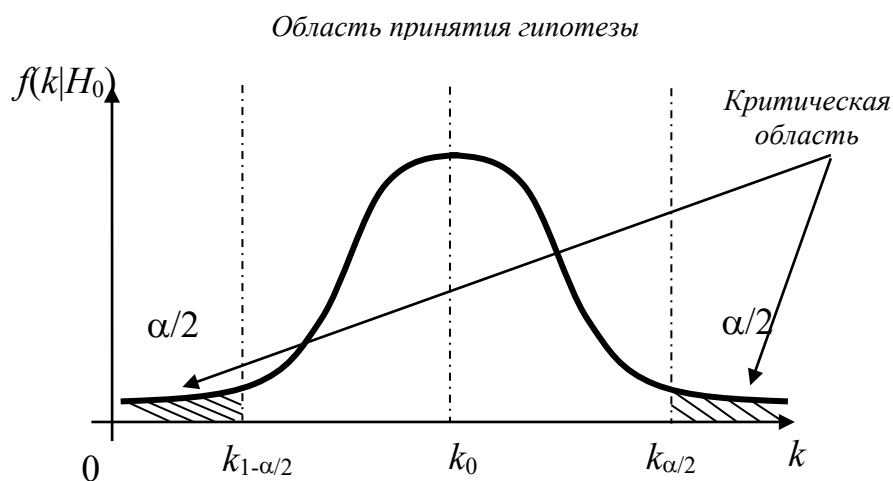


Рисунок 7.1. – Области при статистической проверке гипотез

Правосторонней называют *критическую область* $(k_\alpha; +\infty)$, определяемую из соотношения $P(K > k_\alpha) = \alpha$. Она используется в случае, когда *альтернативная гипотеза* имеет вид: $H_1: \theta > \theta_0$ (рисунок 7.2, а).

Левосторонней называют *критическую область* $(-\infty; k_{1-\alpha})$, определяемую из соотношения $P(K < k_{1-\alpha}) = \alpha$. Она используется в случае, когда *альтернативная гипотеза* имеет вид: $H_1: \theta < \theta_0$ (рисунок 7.2, б).

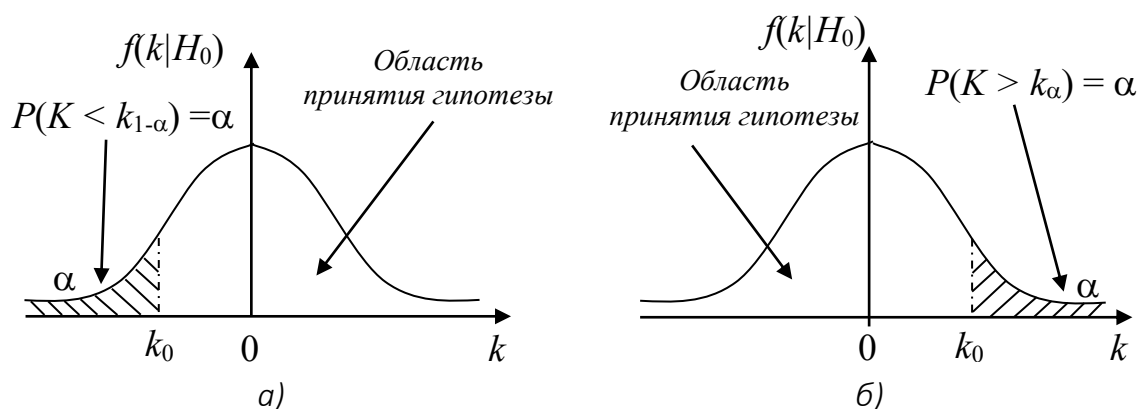


Рисунок 7.2. – Критическая область: правосторонняя (а) и левосторонняя (б)

Общая схема проверки гипотез:

1. Формулировка проверяемой (нулевой H_0) и альтернативной (H_1) (если необходимо) гипотез.
2. Выбор соответствующего уровня значимости α .
3. Определение объема выборки n (если необходимо).
4. Выбор критерия K для проверки H_0 .
5. Определение критической области и области принятия гипотезы.
6. Вычисление наблюдаемого (практического) значения критерия $K_{\text{набл}}$.
7. Принятие статистического решения.

Проверка гипотез при *двусторонней критической области* тесно связана с *интервальным оцениванием*. Если гипотетическое значение исследуемого параметра попадает в заданный *доверительный интервал* при фиксированной *вероятности* и *выборке* определенного объема, то делают вывод, что нет оснований для **отклонения** выдвинутой гипотезы.

Пример 29. Рассмотрим проверку гипотезы о математическом ожидании случайной величины с нормальным законом распределения при неизвестной дисперсии. Математическое ожидание μ неизвестно, но есть основания утверждать что $\mu = \mu_0$. Строим следующие гипотезы: $H_0: \mu = \mu_0$; $H_1^{(1)}: \mu \neq \mu_0$; $H_1^{(2)}: \mu > \mu_0$; $H_1^{(3)}: \mu < \mu_0$.

Для проверки гипотезы H_0 производится n измерений, вычисляется выборочное среднее \bar{X} и исправленная выборочная дисперсия S^2 . Далее строится t -статистика

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S / \sqrt{n}},$$

имеющая при справедливости гипотезы H_0 распределение Стьюдента с $\nu = n - 1$ степенями свободы.

Критическую область строим в зависимости от вида альтернативной гипотезы:

1. При $H_1^{(1)}: \mu \neq \mu_0$ по таблицам (или формулам) квантилей распределения Стьюдента по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - 1$ находим критические точки $t_{\alpha/2, n-1}$ и $t_{1-\alpha/2, n-1} = -t_{\alpha/2, n-1}$. Если вычисленная величина $|T| < t_{\alpha/2, n-1}$ (или, что одно и то же, $t_{1-\alpha/2, n-1} < T < t_{\alpha/2, n-1}$) – нет оснований для отклонения нулевой гипотезы H_0 . Если $|T| \geq t_{\alpha/2, n-1}$ (или, что одно и то же $T \leq t_{1-\alpha/2, n-1}$ и $T \geq t_{\alpha/2, n-1}$) – H_0 отклоняют в пользу $H_1^{(1)}$.

2. При альтернативной гипотезе $H_1^{(2)}: \mu > \mu_0$ определяют критическую точку $t_{\alpha, n-1}$ правосторонней критической области. Если при этом $T < t_{\alpha, n-1}$ – нет оснований для отклонения нулевой гипотезы H_0 . Если $T \geq t_{\alpha, n-1}$ – H_0 отклоняется в пользу гипотезы $H_1^{(2)}$.

3. При $H_1^{(3)}: \mu < \mu_0$ определяют критическую точку $t_{1-\alpha, n-1} = -t_{\alpha, n-1}$ левосторонней критической области. Если при этом $T > t_{1-\alpha, n-1}$ (или $-t_{\alpha, n-1}$) – нет оснований для отклонения нулевой гипотезы H_0 . Если $T \leq -t_{\alpha, n-1}$ (или $t_{1-\alpha, n-1}$) – H_0 отклоняется в пользу гипотезы $H_1^{(3)}$.

Критерии согласия. Рассмотренные выше *параметрические критерии* не исчерпывают все возможности статистической проверки гипотез. Во многих практических статистических задачах точный закон распределения, как в рассмотренных выше критериях, не известен. Таким образом, закон распределения сам является **гипотезой**, которая требует проверки. Такого рода проверка гипотез, когда *эмпирическое распределение* $F^*(x)$ сравнивается с теоретическим $F(x)$ с помощью специально подобранной *случайной величины*, носит название **критерия согласия**.

Критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона. Рассмотрим подробнее один из самых **распространенных критериев согласия** – критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

Разбиваем всю область изменения случайной величины X на l интервалов Δ_i и считаем абсолютные частоты m_i для каждого. Зная теоретический закон распределения $F(x)$, определяем теоретические вероятности p_i попадания случайной величины X в интервал и теоретическое число значений, попавших в интервалы как np_i . Если эмпирические частоты сильно отличаются от теоретических, проверяемую гипотезу H_0 следует отвергнуть. Для этого сформулируем критерий, характеризующий степень расхождения между числом эмпирических и теоретических частот в интервалах. Если проверяемая гипотеза H_0 верна, то случайные величины m_i , характеризующие количество

попаданий в интервалы Δ_i подчиняются биномиальному закону распределения с математическим ожиданием np_i и дисперсией $np_i q_i$ ($q_i = 1 - p_i$). Тогда при $n \rightarrow \infty$ случайная величина вида $y_i = \frac{(m_i - np_i)}{\sqrt{np_i q_i}}$ распределена нормально с математическим ожиданием нуль и дисперсией единица. Пирсон доказал, что при $n \rightarrow \infty$ статистика

$$\sum_{i=1}^l y_i^2 q_i = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \quad (7.6)$$

имеет распределение χ^2 с $k = (n - 1)$ степенью свободы. Но так как параметры распределения $F(x)$ оцениваются по выборке, то эта статистика имеет распределение хи-квадрат, с $k = (n - 1 - r)$ степенями свободы. Здесь r – число рассчитанных по выборке параметров распределения.

Последовательность применения критерия χ^2 Пирсона: рассчитав значение χ^2 по (7.6) и выбрав уровень значимости q , по таблице распределения χ^2 определяют эталонное значение $\chi_{k,q}^2$. Если $\chi^2 > \chi_{k,q}^2$, то гипотеза H_0 отвергается, если $\chi^2 \leq \chi_{k,q}^2$, то нулевая гипотеза не отвергается (не совсем верно говорят «принимается»). Очевидно, что при проверке гипотезы о законе распределения, контролируется лишь ошибка второго рода (неверная гипотеза не отклоняется). Статистика χ^2 имеет хи-квадрат распределение лишь при $n \rightarrow \infty$, поэтому в i -м интервале надо иметь хотя бы 5 – 10 наблюдений. Если проведены 1-2 наблюдения, то интервалы необходимо объединить. По инструкции [9] критерий χ^2 Пирсона используют в крайних случаях при $n < 200$ с числом интервалов 15 – 18, а обычно при $n > 200$ с числом интервалов 18 – 20. Выбор числа интервалов рассмотрен ниже.

Критерии согласия типа ω^2 . Для числа наблюдений 50 – 200 используют разные виды взвешенных статистик под общим названием ω^2 вида

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(F_n^*(x) - F(x) \right)^2 \cdot \psi(F(x)) dF(x), \quad (7.7)$$

где $\psi(F(x))$ – некоторая весовая функция. Основные виды:

- $\psi(F(x))=1$ – имеем критерий *Смирнова – Колмогорова – Мизеса*;
- $\psi(F(x))=1/F(1-F)$ – критерий *Андерсона – Дарлингга*.

Один из этих критериев, или им подобный, при других значениях весовой функции обязателен при числе наблюдений 50 – 200. Если используется статистика вида $\max(F_n^*(x) - F(x))$, то она соответствует критерию Колмогорова для $n > 100$.

Основные сведения из теории матриц

Таблица чисел или алгебраический объект вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

называется **матрицей** (таблицей) размера $n \times m$ (n – число строк, m – число столбцов).

Величины a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) называют **элементами матрицы**. Пишут также $A = \{a_{ij}\}$.

При $n = m$ матрицу называют **квадратной**, а при $a_{ij} = a_{ji}$ – **симметричной**. Квадратную матрицу, в которой все недиагональные элементы $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) называют **диагональной**; ее часто записывают в виде $A = \{a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}\}$. Диагональная матрица с элементами $a_{ii} = 1$ называется **единичной** и обозначается E .

Матрица, все элементы которой равны нулю, называются **нулевой**.

Матрицу-столбец называют **вектором**.

Матрица порядка 1×1 представляет собой **скалярную величину**. Элементы a_{ij} квадратной матрицы образуют её главную диагональ. Параллельные ей диагонали называют **побочными** (кодиагоналями).

В матричной алгебре выполняются следующие алгебраические действия:

1) сложение и вычитание

$$A \pm B = C,$$

где матрица C имеет элементы $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.

Очевидно, что можно складывать матрицы только одинаковых размеров;

2) умножение

$$A \cdot B = C,$$

где элемент $c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk}$, т.е. он равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы A и k -го столбца матрицы B .

Перемножать можно лишь такие матрицы, у которых число столбцов матрицы первого сомножителя равно числу строк матрицы второго сомножителя. Следует иметь в виду, что $A + B = B + A$, но $A \cdot B \neq B \cdot A$, поэтому различают умножение слева и справа. Исключения – перемножение диагональных и симметричных матриц.

Действие **деления** в матричной алгебре **не существует**. Оно заменяется действием умножения на обратную матрицу. Обратной по отношению к квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1} , что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Определение обратной матрицы связано с понятием ее определителя. Его можно построить только для квадратных матриц. Он обычно обозначается $|A|$ или $\det(A)$.

Если в матрице $A = \{a_{ij}\}$ порядка n выделить какой-либо элемент a_{ij} и вычеркнуть из неё i -ю строчку и j -й столбец, то получается новая квадратная матрица порядка $(n - 1)$. Ее определитель называется **минором** a_{ij} и обозначается $M^{(ij)}$.

Величина $D^{(ij)} = (-1)^{i+j} M^{(ij)}$ называется **алгебраическим дополнением** элемента a_{ij} . Справедлива формула

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} D^{(ij)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} D^{(ij)}. \quad (1)$$

Если $\det(A) \neq 0$, то матрица A называется неособенной или **невырожденной**. Тогда можно составить матрицу $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} D^{(ij)}$, обратную к A .

Пример. Найдем определитель матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

По формуле (1) находим

$$\begin{aligned} |A| &= 1(+1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 10 \end{vmatrix} + 2(-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} + 3(+1) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \\ &= 1(50 - 48) - 2(40 - 42) + 3(32 - 35) = -3. \end{aligned}$$

Здесь согласно (1) $\det(A)$ вычислен при $i = 1$ путем разложения по первой строке. То же значение определителя мы бы получили по любой другой строке или столбцу матрицы. Для рассматриваемой в примере матрицы A имеем

$$D^{(ij)} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Имеют место свойства $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; $(A^{-1})^{-1} = A$.

Если матрица A симметричная, то матрица A^{-1} также симметричная.

Для матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } D = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Приведем простое правило для вычисления определителя третьего порядка. Напишем матрицу A и припишем к ней справа два первых столбца

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Тогда определитель будет равен разности суммы произведений чисел, лежащих на диагоналях, отмеченных сплошными линиями, и суммы произведений чисел на пунктирных диагоналях.

можно записать в матричном виде

$$Ax + L = 0, \quad (3)$$

где $A = A; \quad x = x; \quad L = l$.

При $n > k$ имеем переопределенную систему, которая может быть как совместной, так и несовместной. Умножив ее на матрицу A^T слева, получим новую систему $A^T Ax + A^T L = 0$ или

$$Rx + b = 0. \quad (4)$$

Если $\text{rk}(A) = k$, то можно получить решение

$$x = -R^{-1}b, \quad (5)$$

где $b = A^T L$.

Подставив вектор x в исходную систему, имеем $Ax + L = V$, причем $V = 0$, если система была совместной. В противном случае вектор V обладает свойством $V^T V = \min$.

Если систему умножить на матрицу $A^T P$, где P – невырожденная матрица, то в системе (4) матрица R будет $R = A^T P A$ и вектор $b = A^T P L$. Тогда будем иметь условие метода наименьших квадратов

$$V^T P V = \min. \quad (6)$$

Выражение (4) называют *системой нормальных уравнений*.

Справедливо также выражение (лемма Гаусса)

$$A^T P V = 0. \quad (7)$$

Решение системы (3) можно записать в виде $x = -A^+ L$, где A^+ – главная псевдообратная матрица, удовлетворяющая соотношениям:

$$\begin{aligned} AA^+ A &= A; & A^+ AA^+ &= A^+; \\ A^+ A &= (A^+ A)^T; & AA^+ &= (AA^+)^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Если A – квадратная и невырожденная матрица, то $A^+ = A^{-1}$.

Вектор x можно получить также в виде $x = -R^+ b - (E - R^+ R)z$, где z – произвольный вектор. Условие (6) остается в силе и в этом случае.

Кроме матрицы R^+ существуют так называемые g_i -обратные матрицы, обладающие не всеми, а только первыми i из перечисленных в (8) свойствами. Такие матрицы обозначают R^g . Чаще всего используют матрицу R^g , обладающую первыми двумя свойствами. Решение с помощью этой матрицы можно записать в виде $x = -R^g b - (E - R^g R)z$.

Однородная система $Ax = 0$ имеет решение $x \neq 0$, если матрица A вырождена. Оно сводится к нахождению так называемой фундаментальной матрицы решения X размера $n \times d$, имеющей d линейно-независимых столбцов. Тогда вектор x можно представить в виде $x = Xz$, где z – произвольный вектор размера $d \times 1$. Это означает также, что число решений бесконечно. Число d называется *размерностью пространства решений*, причем $d = n - r$, где $r = \text{rk}(A)$. Матрицы A и X удовлетворяют свойству $AX = 0$.

Вектор $U \neq 0$ называется **собственным вектором** матрицы A , число λ – соответствующим ему **собственным значением**, если $AU = \lambda U$. Когда A – симметричная матрица порядка n , можно найти n взаимно ортогональных собственных векторов U_1, U_2, \dots, U_n матрицы A .

Матрица $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, составленная из векторов U , обладает свойством $U^T U = U U^T = D$, где D – диагональная матрица. Если векторы U_i нормировать (сумма квадратов их элементов равна 1), т.е. обозначить $F = U D^{-1/2}$, то $F^T F = D^{-1/2} U^T D^{-1} = E$.

Матрица F называется **ортогональной**. Она обладает свойством $F^T = F^{-1}$. Симметричную матрицу A можно привести к диагональному виду

$$\Lambda = F^T A F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \dots \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратной матрицы равен числу ненулевых собственных значений. Можно также написать $A = F \Lambda F^T$.

Определитель матрицы A равен произведению всех её собственных чисел, а след – их сумме. Собственные числа находят из решения так называемого характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$.

Для матрицы 2-го порядка оно имеет вид квадратного уравнения

$$\lambda^2 + \text{Sp}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

а для матрицы 3-го порядка представляет собой кубическое уравнение

$$\lambda^3 - \text{Sp}(A)\lambda^2 + c\lambda - \det(A) = 0,$$

где для симметричной матрицы $c = a_{11}(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{12}^2 - a_{23}^2 - a_{13}^2$.

Например, для матрицы

$$R = \begin{pmatrix} 2,583 & -1,167 & -0,250 \\ & 2,833 & -1,000 \\ \text{сим.} & & 1,877 \end{pmatrix} \quad (9)$$

получим характеристическое уравнение $\lambda^3 - 7,293\lambda^2 + 15,059\lambda - 7,835 = 0$ и собственные числа $\lambda_1 = 4,0575$; $\lambda_2 = 0,7895$; $\lambda_3 = 2,4460$.

Для определения собственных векторов матрицы A необходимо решить однородную систему уравнений $(A - \lambda_i)U_i = 0$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Очевидно, что решением этой однородной системы будет вектор $U_i = X_i z$.

Матрицу X_i можно найти следующим образом.

Разделим матрицу $\bar{A} = A - \lambda E$ и вектор U на клетки $d \times d$:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{pmatrix}; \quad \bar{U}_i = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}.$$

Опуская ее первую строку, получим систему $\bar{A}_{22}U_2 + \bar{A}_{21}U_1 = 0$ и вектор

$$U_2 = -\bar{A}_{22}^{-1}\bar{A}_{21}U_1. \quad (10)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ -\bar{A}_{22}^{-1} A_{21} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} E \\ -A_{22}^{-1} A_{21} \end{pmatrix}.$$

С учетом (2) получаем равенство $\bar{A}X = \begin{pmatrix} A_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} A_{21} \\ \bar{A}_{21} - \bar{A}_{21} \end{pmatrix} = 0$.

Вектор U_1 правой части (10) можно выбрать произвольно, например $U_1 = e$, где e – единичный вектор размера $d \times 1$.

Матрица, обладающая свойством $A^2 = A^T$ называется **идемпотентной**. Единственно невырожденной идемпотентной матрицей является единичная матрица. Матрица $E - A$ также идемпотентная. Ранг идемпотентной матрицы равен её следу.

Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ идемпотентная. Её ранг равен $\text{Sp}(A) = 1$.

Собственные числа идемпотентной матрицы равны либо 1, либо 0. Число собственных чисел матрицы A , равных 1, совпадает с её рангом. В общем случае идемпотентная матрица имеет вид $A = B(CB)^{-1}C$, если существуют матрицы $(CB)^{-1}$. В частном случае $A = B(B^T B)^{-1} B^T$. Тогда матрица A – симметричная (в этом случае она называется матрицей проектирования).

Матрицу с помощью горизонтальных и вертикальных линий можно разделить на блоки. В отличие от элементов a_{ij} матрицы A , её блоки обозначают большими буквами, указывающими номера горизонтальных и вертикальных полос. Матрицу A называют **блочной** (клеточной). Пишут $A = \{A_{ij}\}$.

Разделение матриц на блоки находит наибольшее применение при матричном умножении и обращении матриц. Если две матрицы A и B разделить так, что их блоки пригодны для перемножения по своим размерам, то произведение может быть представлено в блочном виде. При этом сохраняется правило перемножения нерасчлененных матриц, а блоки матриц при умножении играют ту же роль, что и элементы при обычном перемножении.

Так, если $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, то их произведение

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.$$

Квазидиагональной или **квазитреугольной** называются матрицы, определяемые как диагональная или треугольная, если соответствующие свойства их элементов отнести к блокам.

При обращении больших матриц их часто разделяют на блоки. Правило блочного обращения матриц заключается в следующем.

Если квадратная матрица A разбита на четыре блока $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, то

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}[A_{22} \cdot 1]^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}[A_{22} \cdot 1]^{-1} \\ -[A_{22} \cdot 1]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & [A_{22} \cdot 1]^{-1} \end{pmatrix},$$

где $[A_{22} \cdot 1] = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Это выражение называют *формулой Фробениуса*. Справедливо также свойство определителя

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|.$$

Масштабирование коэффициентов системы нормальных уравнений. В уравнительных вычислениях часто возникают случаи, когда неизвестные имеют различную физическую природу и вследствие этого элементы матрицы R – различный порядок. Для удобства вычислений и повышения точности решения и элементов обратной матрицы в этом случае матрицу R следует разделить на блоки, например, на четыре:

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix},$$

если в векторе $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ подвекторы x_1 и x_2 имеют различную природу.

Тогда выполним следующее преобразование:

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 10^s E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 10^s E \end{pmatrix},$$

подобрав величину s таким образом, чтобы элементы матрицы $\bar{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \bar{R}_{12} \\ \bar{R}_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$ были одного порядка. Матрица $\bar{R}^{-1} = \bar{Q}$ равна $\bar{Q} = E_s^{-1} Q E_s^{-1}$, где $E_s = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 10^s E \end{pmatrix}$.

Тогда искомую матрицу и вектор получим по формулам $Q = E_s \bar{Q} E_s$ или

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} 10^s \\ \bar{Q}_{22} 10^s & Q_{22} 10^{2s} \end{pmatrix}.$$

Квадратичной формой называется функция вектора x вида $\Phi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$. Введя симметричную матрицу A , можно написать, что $\Phi = x^T A x$. Матрица A называется **матрицей квадратичной формы**.

Положительно определенной матрица A будет в том случае, если $x^T A x > 0$ для всех $x \neq 0$, при этом $\text{rk} A = n$.

Матрица A положительно определена в том и только в том случае, когда все ее главные миноры, в том числе и $|A|$ положительны. Все собственные числа положи-

тельно определенной матрицы положительны, все её диагональные элементы также положительны.

Неравенство $A > 0$ (≥ 0) означает, что матрица C – положительно определенная (полуопределенная) матрица. Неравенство $A > B$ ($A \geq B$) эквивалентно тому, что $A - B > 0$ (≥ 0) или $|A - B| > 0$ (≥ 0).

Если вектор $x = Fu$, то квадратичная форма приобретает вид $\Phi = u^T F^T A Fu$.

С помощью ортогональной матрицы F симметричную матрицу можно преобразовать к диагональному виду. Тогда квадратичная форма имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2.$$

Приведем еще ряд сведений, связанных с дифференцированием матричных выражений.

Вектор $y = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ \dots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{pmatrix}$, составляющие которого являются функциями φ_i ,

называется **вектором-функцией**.

Выражение $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}$ называется производной вектора φ по

вектору x (матрица Якоби) и представляет собой матрицу, i -я строка которой формируется из производных i -й функции по составляющим вектора x .

В частном случае, если имеем линейное преобразование $\varphi(x) = Ax + b$, то $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = A$, если $\varphi(x) = x^T A + b$, то $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = A^T$.

Если $\varphi(x)$ — квадратичная форма, т.е. $\varphi(x) = x^T A x$, то $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x^T A$.

Дифференцирование по x^T дает $\frac{\partial \Phi}{\partial x^T} = 2A^T x$.

Можно рассматривать сложную вектор-функцию $f(y)$, где $y = \varphi(x)$, тогда

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Так, если $f(y) = Ay$, а $y = Bx$, то $\frac{\partial f(y)}{\partial x} = AB$, если $f(y) = y^T Ay$; $y = Bx + b$ то

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x} = 2y^T AB.$$

С помощью прицеленных формул можно доказать справедливость условия (6).

Продифференцируем квадратичную форму $\Phi = V^T P V$ по вектору x и найдем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2V^T P; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = A,$$

так как

$$V = Ax + L. \quad (13)$$

Приравнивая производную (12) нулю, приходим к лемме Гаусса (7), а после подстановки выражения (13) в (7) – к нормальному уравнению (4).

Приведем часто применяемые формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |A|}{\partial A} &= (A^{-1})^T |A|; \\ \frac{\partial (x^T A^{-1} x)}{\partial A} &= -(A^{-1})^T x x^T (A^{-1})^T, \quad \frac{\partial (x^T A y)}{\partial A} = x y^T; \\ \frac{\partial \text{Sp}(B A^T c)}{\partial A} &= CB; \quad \frac{\partial \text{Sp} A}{\partial A} = E. \end{aligned}$$

Если имеется вектор-функция $y = \varphi(x)$, то ее можно привести к линейному виду путем разложения в ряд Тейлора

$$y = \varphi(x^{(0)}) + A \Delta x + R,$$

где $A = \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right)_{x=x^{(0)}};$

$x^{(0)}$ – приближенный близкий к x вектор;

$$\Delta x = x - x^{(0)};$$

R – остаток, включающий нелинейные члены разложения. Если остатком R можно пренебречь, то $y = \varphi(x^{(0)}) + A \Delta x$.

Приведем ряд матричных тождеств:

$$(A \pm BDC)^{-1} = A^{-1} \pm A^{-1} B (D^{-1} \pm CA^{-1} B)^{-1} CA^{-1}.$$

Если $B = x_{n \times 1}$ и $C^T = y_{n \times 1}$ – векторы, $D = d_{1 \times 1}$, то

$$(A \pm dxy^T)^{-1} = A^{-1} \pm \frac{A^{-1} x y^T A^{-1}}{1/d \pm y^T A^{-1} x}; \quad (14)$$

$$(A + B)^{-1} = B^{-1} C^{-1} A^{-1},$$

где $C = A^{-1} + B^{-1};$

$$(P_2 + A^T P_1 A)^{-1} B^T P_1 = P_2^{-1} B^T (P_1^{-1} + A P_2^{-1} A^T)^{-1};$$

$$(P_1^{-1} + A^T P_2^{-1} A) P_1 A^T = A^T P_2^{-1} (A P_1 A^T + P_2);$$

$$(P_1^{-1} + A^T P_2^{-1} A)^{-1} (E + A^T P_2^{-1} A P_1) = P_1.$$

В уравнильных вычислениях часто приходится иметь дело со специальными матрицами, обратные для которых можно получить алгебраически.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & r & \dots & r \\ r & 1 & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & \dots & 1 \end{pmatrix}$ обратная матрица будет

$$A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} b & r & \dots & r \\ r & b & \dots & r \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r & r & \dots & b \end{pmatrix},$$

где $b = r(2 - n) - 1$; $D = \{r(n - 1) + 1\}(r - 1)$.

Симметричная матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$ имеет обратную

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ & 2(n-1) & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & n \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_{(n-1) \times (n-1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 2 \end{pmatrix}$ имеет обратную

$$A_{(n-1) \times (n-1)}^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ & n-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & n-1 \end{pmatrix}.$$

Обработка результатов измерений в среде MATLAB

Введение.

Ввод данных.

Основные операции.

Определение некоторых стандартных матриц.

Дополнительные возможности.

Элементы прикладной статистики в MATLAB.

Введение. Специализированная система компьютерной математики (СКМ) MATLAB прошла многолетний путь развития от узко специализированного матричного программного модуля, используемого только на больших ЭВМ, до универсальной интегрированной СКМ, ориентированной на массовые персональные компьютеры класса IBM PC, Macintosh, рабочие станции UNIX и имеющей мощные средства диалога, графики и комплексной визуализации. MATLAB представляет собой хорошо апробированную и надежную СКМ, рассчитанную на решение самого широкого круга математических задач с представлением данных в универсальной (но не навязываемой пользователю) матричной форме, предложенной фирмой MathWorks, Inc. Система вобрала в себя не только передовой опыт развития и компьютерной реализации численных методов, накопленных за последние три десятилетия, но и весь опыт становления математики за всю историю человечества.

Ввод данных. Работа в MATLAB производится из командной строки после знака приглашения вида `>`. Введенные данные на экране редактированию не подлежат. Данные в среде MATLAB могут быть введены в виде числа, вектора или матрицы. Число вводится путем присвоения его значению какой-либо переменной и нажатием клавиши *Enter* (в дальнейшем – `↵`):

```
>> a = 8
```

и нажатием клавиши `↵`. Точка с запятой после числа ставится для того, чтобы введенное значение после ввода не дублировалось на экране, а сохранялось только в памяти. Для вывода значения на экран набирают имя переменной и `↵`. Следует иметь в виду, что имя переменной прописывается только латиницей, большая буква и малая – разные переменные. Допускается также рекурсивное присвоение вида:

```
>> a = a + 4;
```

Из векторов выделяют вектор-столбец (по умолчанию) и вектор-строку. Ввод элементов производится в квадратных скобках с разделителями в виде пробела, точки с запятой или `↵` с присвоением массиву данных имени переменной. Для вектор-столбца с элементами 1, 2 и 3 и именем *b* имеем

```
>> b = [1; 2; 3] ↵
```

или

```
>> b = [1  
2  
3]
```

Результат

```
>>b=  
1  
2  
3
```

Запомнить, что символы ; и `\n`, кроме разделителя элементов, являются и знаками окончания строки и перехода на следующую строку.

Вектор-строка из элементов 4.1, 5.2 и 6.3 с именем `c` должна вводиться через пробел как

```
>> c = [4.1 5.2 6.3]
```

Результат

```
>> c =  
4.1 5.2 6.3
```

Разделитель целой и дробной частей числа – только **точка**.

Матрица вводится также путем присвоения массиву данных имени переменной в квадратных скобках по строчкам. Разделение строчек – символы ; или `\n`. Введем матрицу `A` с элементами первой строки 2, 3, а второй 3, -1.784

```
>> A = [2 3; 3 -1.784]
```

или

```
>> A = [2 3  
3 -1.784]
```

Результат

```
>> A =  
2 3  
3 -1.784
```

Обращение к i -му элементу вектора, или (i, j) элементу матрицы (i – номер строки, j – номер столбца через запятую) производится так

```
>> c(3) ←
```

Результат

```
>> ans =  
      6.3
```

```
>> A(2, 2) ←
```

Результат

```
>> ans =  
      1.784
```

Здесь `ans` – имя переменной по умолчанию, присваиваемое программой.

Если введен неверно i -й элемент вектора, или (i, j) элемент матрицы (i – номер строки, j – номер столбца через запятую), то он переопределяется простым переприсваиванием. Если новое значение второго элемента вектора `b` будет 7, то

```
>> b(2) = 7 ←
```

Результат

```
>> b =  
      1  
      7  
      3
```

Если требуется дополнить вектор, или матрицу набором новых элементов, то поступают так. Пусть в вектор-столбец надо добавить ещё один вектор-столбец слева, состоящий из элементов 5, 6, 7. Тогда набираем

```
>> b1 = [b; [5; 6; 7]] ←
```

Или

```
>> bb = [5; 6; 7]; b1 = [b; bb] ←
```

Результат

```
>> b1=  
      1  5  
      7  6  
      3  7
```

Чтобы к матрице A добавить строку сверху из элементов 7 и 8 и назвать результат A1, набираем

```
>> A1 = [[7 8] A] ←
```

или

```
>> aa = [7 8]; A1 = [aa A] ←
```

Результат

```
>> A1 =  
    7  8  
    2  3  
    3 -1.784
```

Для извлечения из матрицы некоторого числа строк или столбцов делают так. Пусть из матрицы A1 требуется изъять последнюю строку и дать ей имя a1. Тогда набираем

```
>> a1 = A1(3, 1:2) ←
```

т.е из матрицы A1 изымаем элементы 3 строки и столбцов с 1 по 2.

Результат

```
>> a1=  
    3 -1.784
```

Основные операции. Теперь с этими переменными можно производить любые математические матричные действия. Основные из них:

+	сложение	/	деление (число)
-	вычитание	^a	степень a
*	умножение	sqrt(a)	корень квадратный из a
'	(где буква э) транспонирование	inv(N)	обращение матрицы N
trace(N)	след матрицы	det(N)	определитель матрицы
.*	поэлементное умножение	./	поэлементное деление
sort(a)	сортировка a по возрастанию	sum(a)	сумма элементов a
cumsum	накопительная сумма	cumprod	накопительное произведение
diff(a)	последовательная разность a		

Например, если необходимо умножить матрицу, транспонированную к A1, на A1, обратить результат и присвоить ему имя Q, то процесс можно записать так

```
>> Q = inv(A1'*A1) ←
```

Результат

```
>> Q=  
    0.0503078707938803  -0.0374079930310087  
   -0.0374079930310087   0.04094223216923
```

Если не требуется выведение 15 знаков после запятой, то набирают команду `format short g`, по которой результат считается со всеми 15 знаками, но выводится только 4.

Если необходимо провести поэлементное действие вида $/$, или \wedge с векторами, то перед знаком действия ставится символ точки (`.`). Например, вектор строку `a1(6 9)` поэлементно поделим на вектор `b2(2 3)`. Запись в MATLAB может быть следующая

```
>>a1 = [8 9]; b2 = [2 3]; c2 = a2./b2 ←↵
```

Результат

```
>> c 2=  
    4 3
```

Здесь, чтобы не выводить на экран промежуточные значения, которые можно записывать в одну строку, операторы разделены точкой с запятой (`;`).

Чтобы узнать размеры массива `a` набирают команду

```
>>d = size(c2) ←↵
```

Результат вектор из числа строк и числа столбцов

```
>> d =  
    1 2
```

Определение некоторых стандартных матриц. Существует ряд векторов и матриц, состоящих из определенных заранее элементов, и которые часто используются в вычислениях. К ним относят вектор номеров $1, 2, \dots, n$ (счетчик), определяемый как

```
>> c = 1:10 ←↵
```

Результат

```
>> c =  
    1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
```

и определяющий строку; вектор-столбец из n единиц (сумматор)

```
>> d = ones(5, 1) ←↵
```

Результат

```
>>d=
```

```
1  
1  
1  
1  
1
```

вектор-столбец из n нулей

```
>> f = zeros(3, 1) ↵
```

Результат

```
>> f =
```

```
0  
0  
0
```

Эти же функции распространяются и на вектор-строку и матрицу. Единичная матрица $n \times n$ определяется как

```
>> g = eye(4) ↵
```

Результат

```
>> g =
```

```
1 0 0 0  
0 1 0 0  
0 0 1 0  
0 0 0 1
```

Дополнительные возможности. В системе MATLAB возможно получать аналитические выражения производных и проводить по ним вычисления. Чтобы начать аналитические вычисления, необходимо определить нужные переменные, например, x , y , z как символьные функцией **syms**

```
<< syms x y z
```

Следующий шаг – запись по обычным правилам дифференцируемого выражения, например, с именем f . Наконец, для взятия производной используется функция, которая берет производную от функции f по аргументу x , и результат присваивает переменной $f1$.

```
<< f1 = diff(f, x)
```

Пусть требуется аналитически получить производную по аргументу x от функции $F = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Объявив переменные x, y, z как символьные функцией `syms`, как описано выше. Записываем вид функции

```
<< F = sqrt(x^2+y^2+z^2)
```

Результат

```
F =  
(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)
```

Далее, получаем аналитический вид производной от функции F по аргументу x , используя функцию `diff`, присваивая результат символьной переменной `f1`

```
<< f1 = diff(F, x)
```

Результат

```
f1 =  
x/(x^2 + y^2 + z^2)^(1/2)
```

или в обычном представлении это $f_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Чтобы вычислить значение функции при известных численных значениях аргументов используют функцию

subs (имя функции, {символьные аргументы}, {соответствующие им численные значения}).

Для нашего примера, при $x = 100, y = 200, z = 300$, имеем

```
>> f1c = subs(f1, {x, y, z}, {100, 200, 300})
```

Результат

```
f1c =  
0.2673.
```

Если число цифр после запятой мало, переопределяют короткий формат на длинный

```
>> format long g
```

и пересчитывают выражение для производной $f1$ в числах `f1c`.

Результат

```
f1c =  
0.267261241912424
```

Для многократных вычислений по формуле целесообразно разработать и сохранить под каким-либо именем функцию пользователя. В MATLAB функция определяется следующим образом

```
>> function [x, Q] = mnk(A, P, I)  
    N = A'*P*A;  
    b = A'*P*I;  
    Q = inv(N);  
    x = -Q*b;
```

Здесь определена функция под именем mnk, в которую вводятся аргументы в виде матрицы A и вектора 1. Выводится вектор x решения системы нормальных уравнений и обратная матрица для системы Q. Функция оформляется и сохраняется в виде m-файла.

Элементы прикладной статистики в среде MATLAB. Практически все, необходимые для геодезической практики, задачи, связанные с теорией вероятностей и математической статистикой, можно решить в среде MATLAB. Из наиболее часто встречающихся выделим вычисления значения функции распределения и квантилей основных законов: *N-распределения Гаусса*, *t-распределения Стьюдента*, χ^2 (*хи-квадрат*)-*распределения Пирсона* и *F-распределения Фишера*. Для решения этих задач в среде MATLAB имеются соответствующие статистические функции. При этом следует помнить, что законы распределения представляют следующими основными видами:

- функция закона распределения (*кумулятивную функцию*) – *cumulative distribution function – cdf*;
- обратная функция закона распределения (*квантиль*) – *inverse cumulative distribution function*;
- функция плотности закона распределения – *probability density function – pdf*.

Все перечисленные функции по видам сведем в таблицу

Функция:	кумулятивная	обратная	плотности
<i>N-Гаусса</i>	normcdf(k)	norminv(P)	normpdf(k)
χ^2 - <i>Пирсона</i>	chi2cdf(k,n1)	chi2inv(P,n1)	chi2pdf(k)
<i>t-Стьюдента</i>	tcdf(k,n1)	tinv(P,n1)	tpdf(k)
<i>F-Фишера</i>	fcdf(k,n1,n2)	finv(P,n1,n2)	fpdf(k)

Здесь k, P, n1 и n2 – квантиль распределения, доверительная вероятность и числа степеней свободы, соответственно.

Использование этих функций в среде MATLAB полностью заменяет необходимость статистических таблиц, необходимых для большинства вычислений в теории вероятностей и математической статистике.

Например, требуется получить вероятность того, что случайная величина с нормальным законом распределения не превосходит значения 2.5. Набираем

```
>> P=normcdf(2.5)
```


Результат

```
>> P=  
    0.9845
```

Если требуется получить границу (квантиль), которую не превзойдет случайная величина с доверительной вероятностью $P = 0.95$, набираем следующее

```
>> k = norminv(0.95)
```

Результат

```
>> k=  
    1.6449
```

Для распределения Стьюдента следует учитывать число степеней свободы. Тогда для получения квантиля для уровня значимости $\alpha = 0.05$ и числа степеней свободы 8, получаем

```
k=tinv(0.95, 8)
```

Результат

```
>> k=  
    1.8595
```

Здесь уровень значимости $\alpha = 0.05$ переведен в доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$, так как процедура вычисления квантиля в MATLAB работает именно с ней.

Некоторые важные выражения в MATLAB:

$[x^2] \rightarrow x'*x$

$[xy] \rightarrow x'*y$

$[x]/n \rightarrow \text{sum}(x)/n$

$\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \rightarrow \text{sqrt}(v'*v/(n-1))$

из матрицы $K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$ коэффициент корреляции $r_{12} = \frac{k_{12}}{\sqrt{k_{11} \cdot k_{22}}}$ \rightarrow

```
r12=k(1,2)/sqrt(k(1,1)*k(2,2))
```

Редкие статистические таблицы

Критерий Ирвина для отбраковки грубых измерений

q	Значения λ_p при заданном n								
	2	3	10	20	30	50	100	400	1000
0.10	2.3	1.8	1.2	1.0	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6
0.05	2.8	2.2	1.5	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8
0.01	3.7	2.9	2.0	1.8	1.7	1.6	1.5	1.3	1.2
0.005	4.0	3.2	2.3	2.0	1.9	1.8	1.6	1.5	1.4

*Критические значения критерия Романовского
для отбраковки грубых измерений*

n'	Значения t_q при q				n'	Значения t_q при q			
	0.05	0.02	0.01	0.001		0.05	0.02	0.01	0.001
2	15.6	39.0	78.0	779.7	15	2.2	2.7	3.1	4.3
3	5.0	8.0	11.5	36.5	20	2.2	2.6	2.9	4.0
4	3.6	5.1	6.5	14.5	25	2.1	2.5	2.9	3.8
5	3.0	4.1	5.0	9.4	30	2.1	2.5	2.8	3.7
6	2.8	3.6	4.4	7.4	40	2.0	2.5	2.7	3.6
7	2.6	3.4	4.0	6.4	60	2.0	2.4	2.7	3.5
8	2.5	3.2	3.7	5.7	120	2.0	2.4	2.6	3.4
9	2.4	3.1	3.5	5.3	∞	2.0	2.3	2.6	3.3
10	2.4	3.0	3.4	5.0					

Статистика Дарбина–Уотсона: d_L и d_U . уровень значимости 5%

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
16	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83

32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Статистика Дарбина–Уотсона: d_L и d_U . уровень значимости 1%

n	$k = 1$		$k = 2$		$k = 3$		$k = 4$		$k = 5$	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
31	1.15	1.27	1.08	1.34	1.02	1.42	0.96	1.51	0.90	1.60
32	1.16	1.28	1.10	1.35	1.04	1.43	0.98	1.51	0.92	1.60
33	1.17	1.29	1.11	1.36	1.05	1.43	1.00	1.51	0.94	1.59
34	1.18	1.30	1.13	1.36	1.07	1.43	1.01	1.51	0.95	1.59
35	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
36	1.21	1.32	1.15	1.38	1.10	1.44	1.04	1.51	0.99	1.59
37	1.22	1.32	1.16	1.38	1.11	1.45	1.06	1.51	1.00	1.59
38	1.23	1.33	1.18	1.39	1.12	1.45	1.07	1.52	1.02	1.58
39	1.24	1.34	1.19	1.39	1.14	1.45	1.09	1.52	1.03	1.58

40	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
55	1.36	1.43	1.32	1.47	1.28	1.51	1.25	1.55	1.21	1.59
60	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
65	1.41	1.47	1.38	1.50	1.35	1.53	1.31	1.57	1.28	1.61
70	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
75	1.45	1.50	1.42	1.53	1.39	1.56	1.37	1.59	1.34	1.62
80	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
85	1.48	1.53	1.46	1.55	1.43	1.58	1.41	1.60	1.39	1.63
90	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
95	1.51	1.55	1.49	1.57	1.47	1.60	1.45	1.62	1.42	1.64
100	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

n – число наблюдений.

k – число объясняющих переменных (без учета постоянного члена).

Критические значения z_α критерия $n\omega^2$ Мизеса

Уровень значимости α	Критическое значение z_α	Уровень значимости α	Критическое значение z_α
0.5	0.1184	0.05	0.4614
0.4	0.1467	0.03	0.5489
0.3	0.1843	0.02	0.6198
0.2	0.2412	0.01	0.7435
0.1	0.3473	0.001	0.1679

Критические значения количества рядов для определения наличия автокорреляции по методу рядов ($\alpha = 0.5$)

Нижняя граница k_1

$n_1 \backslash n_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2	2	2	2	2	2	2	2	2
3					2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3
4				2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
5			2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5
6		2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6
7		2	2	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
8		2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7	7
9		2	3	3	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8	8	8
10		2	3	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8	8	9
11		2	3	4	4	5	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9
12	2	2	3	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10
13	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10
14	2	2	3	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11
15	2	3	3	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12
16	2	3	4	4	5	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12
17	2	3	4	4	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11	11	11	12	12	13
18	2	3	4	5	5	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13
19	2	3	4	5	6	6	7	8	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	13
20	2	3	4	5	6	6	7	8	9	9	10	10	11	12	12	13	13	13	14

Верхняя граница k_2

$n_1 \backslash n_2$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
4				9	9														
5			9	10	10	11	11												
6			9	10	11	12	12	13	13	13	13								
7				11	12	13	13	14	14	14	14	15	15	15					
8				11	12	13	14	14	15	15	16	16	16	16	17	17	17	17	17
9					13	14	14	15	16	16	16	17	17	18	18	18	18	18	18
10					13	14	15	16	16	17	17	18	18	18	19	19	19	20	20
11					13	14	15	16	17	17	18	19	19	19	20	20	20	21	21
12					13	14	16	16	17	18	19	19	20	20	21	21	21	22	22
13						15	16	17	18	19	19	20	20	21	21	22	22	23	23
14						15	16	17	18	19	20	20	21	22	22	23	23	23	24
15						15	16	18	18	19	20	21	22	22	23	23	24	24	25
16							17	18	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25	25
17							17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	25	26	26
18							17	18	19	20	21	22	23	24	25	25	26	26	27
19							17	18	20	21	22	23	23	24	25	26	26	27	27
20							17	18	20	21	22	23	24	25	25	26	27	27	28

**Рабочая программа по дисциплине
Теория математической обработки геодезических измерений. 1 часть**

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная программа по дисциплине «Теория математической обработки геодезических измерений» разработана для учреждений высшего образования Республики Беларусь в соответствии с требованиями образовательного стандарта высшего образования I степени по специальности 1-56 02 01 «Геодезия».

Цель учебной дисциплины – приобретение теоретических знаний о вероятностно-статистических методах и элементах функционального анализа, необходимых для обработки результатов геодезических измерений.

Основные задачи учебной дисциплины:

- использование методов теории вероятностей и математической статистики для обработки результатов многократных измерений одной величины;
- изучение способов оценки точности результатов геодезических измерений и их функций;
- предрасчет необходимой точности измерений при проектировании геодезических построений;
- проведение статистического анализа на основе результатов геодезических измерений;
- уравнивание и оценка точности геодезических построений по методу наименьших квадратов параметрическим и коррелятным способами.
- изучение альтернативных (неклассических) способов математической обработки систем геодезических измерений.

Учебная дисциплина базируется на знаниях, полученных при изучении таких курсов, как «Математика», «Информатика», «Геодезия».

Курс дисциплины делится на две составные части: «Основы теории погрешностей измерений» и «Уравнивание геодезических построений по методу наименьших квадратов».

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные вероятностно-статистические критерии нормального распределения случайных величин;
- предельные теоремы теории вероятностей;
- методы составления и решения уравнений поправок по методу наименьших квадратов;

уметь:

- анализировать ряды измерений на закон распределения их ошибок;
- составлять уравнения поправок для измеренных величин;
- составлять и решать системы нормальных уравнений;
- производить оценку точности измеренных величин и их функций;

владеть:

- основными методами математической обработки измерений;
- методами уравнивания геодезических измерений и их этапами;

– основными методами решения систем нормальных уравнений при уравнивании в геодезических построениях.

В результате изучения учебной дисциплины формируется **базовая профессиональная компетенция БПК-8**:

– Знать и уметь использовать на практике основные методы математической обработки геодезических измерений.

Связи с другими учебными дисциплинами. Учебная дисциплина «Теории математической обработки геодезических измерений» является одной из важнейших при подготовке будущего инженера-геодезиста. Для эффективного изучения дисциплины необходимо знание студентами таких разделов дисциплины «Математика», как «Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и нескольких переменных», «Функциональный анализ», дисциплин «Теории вероятностей и математическая статистика» и «Геодезия». Дисциплина необходима студентам при изучении таких дисциплин, как «Топография», «Методы создания государственной геодезической основы» и «Инженерная геодезия».

Форма получения образования – дневная.

В соответствии с учебным планом на изучение учебной дисциплины отводится: общее количество учебных часов – 272, аудиторных – 136 часов, из них лекции 68 часов, лабораторные занятия – 68 часов.

Распределение аудиторного времени по курсам и семестрам 2 курса:

– 3 семестр, общее количество часов – 136, лекции 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа;

– 4 семестр, общее количество часов – 136, лекции 34 часа, лабораторные занятия – 34 часа.

Самостоятельная работа студента – 136 часов (68 в 1 семестре и 68 во 2 семестре).

Учебная дисциплина изучается в 3 и 4 семестрах. Формы текущей аттестации – экзамен в конце каждого семестра.

ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ (3 семестр)

1. Оценка точности функции от результатов измерений.
2. Оценка точности вектор-функции от результатов измерений.
3. Проектирование условий измерений.
4. Вычисление весов измерений и функций.
5. Обработка равноточных многократных измерений.
6. Обработка неравноточных многократных измерений.
7. Исследование ряда погрешностей на соответствие нормальному закону распределения.
8. Парный корреляционно-регрессионный анализ.
9. Множественный корреляционно-регрессионный анализ.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА (3 семестр)

1. Измерения и их классификация.
2. Виды погрешностей, их классификация.

3. Основные цели и задачи теории погрешностей измерений.
4. Вероятностные основы теории погрешностей измерений.
5. Средняя квадратическая погрешность функции некоррелированных измерений.
6. Средняя квадратическая погрешность функции коррелированных измерений.
7. Фундаментальная теорема переноса ошибок.
8. Совместный учёт случайной и систематической составляющей.
9. Оценивание вектор-функции.
10. Предрасчет точности измерений по погрешности функции с использованием различных критериев.
11. Предрасчет условий измерений по погрешности функции с использованием различных критериев.
12. Основы предрасчёта точности измерений в вектор-функции.
13. Веса измерений и веса функций.
14. Дополнительные возможности оценки косвенных измерений.
15. Точечные оценки многократно измеренной неравноточной величины.
16. Точечные оценки многократно измеренной равноточной величины.
17. Интервальные оценки многократно измеренной равноточной и неравноточной величины.
18. Последовательность обработки многократно измеренной равноточной величины.
19. Последовательность обработки многократно измеренной неравноточной величины.
20. Альтернативные методы обработки результатов измерений.
21. Статистические мешающие параметры и их выявление.
22. Отбраковка грубых измерений.
23. Выявление значимого систематического влияния.
24. Нетрадиционный подход к обработке: интервальные числа, численное дифференцирование.
25. Использование альтернативных оценок при обработке многократно измеренной величины.
26. Основные положения статистического анализа результатов геодезических измерений.
27. Виды статистических связей, ковариация и корреляция для двумерного эмпирического ряда.
28. Эмпирический коэффициент корреляции и его статистическая значимость.
29. Парная регрессия на основе метода условного математического ожидания.
30. Парная регрессия на основе метода наименьших квадратов.
31. Регрессия по централизованным величинам.
32. Регрессия по стандартизированным величинам.
33. Оценка точности модели и коэффициентов регрессии. Другие способы парной регрессии.
34. Множественный регрессионный анализ с одномерным откликом на основе метода условного математического ожидания.
35. Множественный регрессионный анализ с одномерным откликом на основе метода наименьших квадратов.
36. Оценка точности результатов моделирования множественной регрессии с одномерным откликом.
37. Вычисление корреляционных характеристик на основе уравнения регрессии.

38. Множественный регрессионный анализ с двумерным откликом на основе метода наименьших квадратов.

39. Множественный регрессионный анализ с двумерным откликом на основе метода условного математического ожидания.

40. Оценка точности результатов моделирования множественной регрессии с двумерным откликом.

41. Предварительные исследования ряда погрешностей на соответствие нормальному закону.

42. Окончательные исследования ряда погрешностей на соответствие нормальному закону.

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

Диагностика качества усвоения знаний проводится в форме промежуточного контроля и текущей аттестации.

Результат промежуточного контроля за семестр оценивается отметкой в баллах по десятибалльной шкале и выводится исходя из отметок, выставленных в ходе проведения мероприятий промежуточного контроля в течение семестра по следующей формуле:

$$П = (\text{среднее из опросов за теорию}) * 0.4 + (\text{среднее из оценок за контрольные работы}) * 0.6$$

Текущая аттестация проводится в форме экзамена.

Методика формирования итоговой отметки: $ИО = (\text{результат промежуточного контроля за семестр}) * 0.7 + (\text{оценка за экзамен}) * 0.3$.

При изучении дисциплины «Теория математической обработки геодезических измерений» в качестве инновационной технологии использовалась LMS Canvas, электронный адрес <https://canvas.instructure.com/courses/827917>. Материал дисциплины был разделен на 4 модуля.

Лабораторные работы высылаются в нужный срок из среды Canvas, проверяются и оцениваются в электронном журнале. На каждый модуль в среде представлены тесты на остаточные знания. Среда проводит рейтинг студентов по оценкам, посещению и результаты по каждому студенту или группе выдает в виде таблиц или графика для анализа процесса обучения.