УДК 517.983+517.444 **DOI 10.52928/2070-1624-2022-40-1-84-91**

ДВУМЕРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ФУНКЦИЕЙ КУММЕРА И ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО G-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Россия);

канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, К. А. ВАСИЛЕВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Рассматриваются два двумерных интегральных преобразования с вырожденной гипергеометрической функцией Куммера и гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах. Применяя технику преобразования Меллина, показываем, что они являются частными случаями двумерного G*-преобразования. На основании теории* G*-преобразования в работе исследованы свойства рассматриваемых интегральных преобразований в весовых пространствах интегрируемых функций в области* $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$. *Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов.*

Ключевые слова: *двумерное интегральное* G*-преобразование,* G*-функция Мейера, вырожденная гипергеометрическая функция Куммера, гипергеометрическая функция Гаусса, двумерное преобразование Меллина, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматриваются двумерные интегральные преобразования

$$\left(\mathrm{G}_{1,1;1,2}\, f\right)(\mathrm{x}) = \frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})}\int_0^\infty {}_1F_1(\bar{a};\bar{c};-\mathrm{x\,t})\, f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0), \tag{1.1}$$

$$\left(\mathrm{G}_{1,2;2,2}\, f\right)(\mathrm{x}) = \frac{\Gamma(\bar{a})\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(\bar{c})}\, {}_2F_1(\bar{a},\bar{b};\bar{c};-\mathrm{x\,t})\, f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0) \tag{1.2}$$

и двумерное G-преобразование [1–4]

$$(\mathrm{G}\, f)(\mathrm{x}) = \int_0^\infty \mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right] f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t} \quad (\mathrm{x}>0)\,, \tag{1.3}$$

где (см., например, [1–6; 7, §28.4]) $\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R^2$; $\mathrm{t}=(t_1,t_2)\in R^2$ – векторы, R^2 – Евклидово двумерное пространство; $\mathrm{x}>\mathrm{t}$ означает $x_1>t_1,\ x_2>t_2$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int_0^\infty := \int_0^\infty\int_0^\infty$; $N=\{1,2,...\}$ – пространство натуральных чисел, $N_0 = N\cup\{0\}$, $N_0^2 = N_0\times N_0$; $R_+^2 = R_+^1\times R_+^1 = \{\mathrm{x}\in R^2, \mathrm{x}>0\}$; C^2 – двумерное пространство комплексных чисел $\mathrm{z}=(z_1,z_2)$, $z_1,z_2\in C$; $\bar{a}=\left(a_1,a_2\right)$, $\bar{b}=\left(b_1,b_2\right)$, $\bar{c}=\left(c_1,c_2\right)\in C^2$; $\Gamma(\bar{a})=\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)$;

$\mathrm{m}=(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{m}_1=\mathrm{m}_2$; $\mathrm{n}=(\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{n}_1=\mathrm{n}_2$;

$\mathrm{p}=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{p}_1=\mathrm{p}_2$; $\mathrm{q}=(\mathrm{q}_1,\mathrm{q}_2)\in N_0^2$ и $\mathrm{q}_1=\mathrm{q}_2$; $(0\leq\mathrm{m}\leq\mathrm{q}, 0\leq\mathrm{n}\leq\mathrm{p})$;

$\mathbf{a}_i=(\mathrm{a}_{i_1},\mathrm{a}_{i_2})$, $1\leq i\leq\mathrm{p}$, $\mathrm{a}_{i_1},\mathrm{a}_{i_2}\in C$ $(1\leq i_1\leq\mathrm{p}_1, 1\leq i_2\leq\mathrm{p}_2)$;

$\mathbf{b}_j=(\mathrm{b}_{j_1},\mathrm{b}_{j_2})$, $1\leq j\leq\mathrm{q}$, $\mathrm{b}_{j_1},\mathrm{b}_{j_2}\in C$ $(1\leq j_1\leq\mathrm{q}_1, 1\leq j_2\leq q_2)$;

$k=\left(k_1,k_2\right)\in N_0^2=N_0\times N_0$ $\left(k_1\in N_0, k_2\in N_0\right)$ – индекс с $k! = k_1!k_2!$ и $|k|=k_1+k_2$; для $l=(l_1,l_2)\in R_+^2$ $D^l=\dfrac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}(\partial x_2)^{l_2}}$; $d\,\mathrm{t}=d\,t_1\cdot d\,t_2$; $f(\mathbf{t})=(t_1,t_2)$; функции в ядрах преобразований (1.1) и (1.2) представляют собой произведения вырожденной гипергеометрической функции (функции Куммера) ${}_1F_1(a;c;z)$ и гипергеометрической функции Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ соответственно:

$${}_1F_1(\bar{a},\bar{c};-\mathrm{x}\,\mathrm{t})=\prod_{i=1}^{2}{}_1F_1(a_i,c_i;-\mathrm{x}_i\,\mathrm{t}_i);$$

$${}_2F_1(\bar{a},\bar{b};\bar{c};-\mathrm{x}\,\mathrm{t})=\prod_{i=1}^{2}{}_2F_1(a_i,b_i;c_i;-\mathrm{x}_i\,\mathrm{t}_i).$$

Для $a, b, c\in C$ вырожденная гипергеометрическая функция Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$, определяется по формуле [7, §1]

$${}_1F_1(a;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}=\lim_{b\to\infty}{}_2F_1\left(a,b;c;\frac{z}{b}\right),\ |z|<\infty,$$

где $(\gamma)_n$ – символ Похгаммера: $(\gamma)_0\equiv 1$, $(\gamma)_n=\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)$ $(\gamma\in C; n\in N)$; ${}_2F_1(a,b;c;z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!},\ |z|<1,$$

с соответствующим аналитическим продолжением

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$$

для $z\in C, 0<\mathrm{Re}(b)<\mathrm{Re}(c), (|\arg(1-z)|<\pi, z\neq 1)$ [8, формулы 2.1(2) и 2.1.(10)].

Функция вида $\mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]$ в ядре преобразования (1.3) [1–4]

$$\mathrm{G}_{\mathrm{p,q}}^{\mathrm{m,n}}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]=\prod_{k=1}^{2}G_{p_k,q_k}^{m_k,n_k}\left[x_k t_k\left|\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right],$$

является произведением *G*-функций Мейера $G_{p,q}^{m,n}[z]$ [9, гл. 1].

G-функцией Мейера порядка (m, n, p, q), где $0\le m\le q, 0\le n\le p$, называется функция, определяемая интегралом Меллина – Барнса

$$G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}a_1,...,a_p\\b_1,...,b_q\end{matrix}\right.\right]=G_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s)z^{-s}ds, z\neq 0, \tag{1.4}$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\left|s\right.\right]=\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a)_p\\(b)_q\end{matrix}\left|s\right.\right]=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}. \tag{1.5}$$

Здесь L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса $s=-b_j-k,\ \ j=1,2,...,m,$ $k=0,1,2,...$ слева, а полюса $s=1-a_j+k, j=1,2,...,n,\ k=0,1,2,...$ – справа; пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией *G*-функции (1.4) можно ознакомиться, например, в [9, гл. 6].

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1; 3–6; 10] и, в частности, является продолжением [2]. Мы рассматриваем еще два класса двумерных интегральных преобразований вида (1.1) и (1.2) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, $\bar{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$, $\bar{2}=(2,2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2)$ на R^2_+, для которых $\| f\|_{\bar{\nu},\bar{2}}<\infty$, где

$$\| f\|_{\bar{\nu},\bar{2}}=\left\{\int_{R^1_+} x_2^{\nu_2\cdot 2-1}\left[\int_{R^1_+} x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1,x_2)|^2dx_1\right]dx_2\right\}^{1/2}<\infty.$$

Используя технику преобразования Меллина, показываем, что преобразования (1.1) и (1.2) являются частными случаями двумерного G-преобразования (1.3). На основании теории G-преобразования, построенной в [1], мы исследуем свойства рассматриваемых интегральных преобразований в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных аналогов в [9].

2. Предварительные сведения. Двумерное преобразование Меллина функции $f(x)=f(x_1,x_2)$, $x_1>0,\ x_2>0,$ определяется формулой (см., например, [1–6; 10; 11])

$$(\mathfrak{M}f)(s)=f^*(s)=\int_{R^2_+} f(t)t^{s-1}\,d\,t, \tag{2.1}$$

где $s=(s_1,s_2),\ s_j\in C\ (j=1,2).$

Обратное преобразование Меллина для $x=(x_1,x_2)\in R^2_+$ дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(x)=\mathfrak{M}^{-1}\left[g(s)\right](x)\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty} x^{-s}\,g(s)d\,s,\ \gamma_j=\mathrm{Re}(s_j)\,(j=1,2).$$

В [1] получили формулу преобразования Меллина (2.1) от G-преобразования (1.3)

$$\left(\mathfrak{M}\,G\,f\right)(s)=\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}\left[\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right| s\right](\mathfrak{M}f)(1-s), \tag{2.2}$$

где функция $\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}(\mathbf{s})$ является произведением функций вида (1.5)

$$\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}(s)\equiv\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}\left[\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right| s\right]=\prod_{k=1}^{2}\mathcal{G}^{m_k,n_k}_{p_k,q_k}\left[\left.\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right| s_k\right].$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{G}}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}^{m,n}_{p,q}(\mathbf{s})$ [1–6; 9] назовем множество векторов $\bar{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$ таких, что $\alpha_1<1-\nu_1<\beta_1$, $\alpha_2<1-\nu_2<\beta_2$ и функции вида (1.5) $\mathcal{G}^{m_1,n_1}_{p_1,q_1}(s_1)$, $\mathcal{G}^{m_2,n_2}_{p_2,q_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1)=1-\nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2)=1-\nu_2$ соответственно.

Нам понадобятся:

– интеграл, содержащий функцию Куммера ${}_1F_1(a;c;z)$ [12, формула 1.14.1(1)]

$$\int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha-1}\,{}_1F_1(a,b;\pm\lambda x)dx=\pm\frac{x^\alpha}{\alpha}\,{}_2F_2(\alpha,a;\alpha+1;b;\pm\lambda x)+\lambda^{-\alpha}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b-\alpha)}, \tag{2.3}$$

$(x_1=x,\ x_2=\infty,\ \mathrm{Re}(\lambda)>0,\mathrm{Re}(a-\alpha)>0,\ x>0);$

– интеграл, содержащий гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a,b;c;z)$ [12, формула 2.21.1(1)]

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\,{}_2F_1(a,b;c;-\omega x)dx = \omega^{-\alpha}\frac{\Gamma(c)\Gamma(\alpha)\Gamma(a-\alpha)\Gamma(b-\alpha)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-\alpha)}, \tag{2.4}$$

$(0<\mathrm{Re}(\alpha)<\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(b);\quad |\arg\omega|<\pi)$.

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$-теорию $\mathrm{G}_{1,1;1,2}$- и $\mathrm{G}_{1,2;2,2}$-преобразований, нам понадобятся следующие постоянные [1, формулы (3.3)–(3.7)]:

$$\alpha_1=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\mathrm{Re}(b_{j_1})\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0,\end{cases}\qquad \beta_1=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_1\le n_1}\left[\mathrm{Re}(a_{i_1})\right], & n_1>0,\\ \infty, & n_1=0;\end{cases} \tag{2.6}$$

$$\alpha_2=\begin{cases}-\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\mathrm{Re}(b_{j_2})\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0,\end{cases},\qquad \beta_2=\begin{cases}1-\max\limits_{1\le i_2\le n_2}\left[\mathrm{Re}(a_{i_2})\right], & n_2>0,\\ \infty, & n_2=0;\end{cases} \tag{2.7}$$

$$a_1^*=2(m_1+n_1)-p_1-q_1,\ a_2^*=2(m_2-n_2)-p_2-q_2; \tag{2.8}$$

$$\Delta_1=q_1-p_1,\Delta_2=q_2-p_2; \tag{2.9}$$

$$\mu_1=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_1}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_1}+\frac{p_1-q_1}{2},\quad \mu_2=\sum_{j=1}^{q_1}b_{j_2}-\sum_{i=1}^{p_1}a_{i_2}+\frac{p_2-q_2}{2}. \tag{2.10}$$

Через $[X,Y]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

3. $\mathbf{G_{1,1;1,2}}$- и $\mathbf{G_{1,2;2,2}}$-преобразования как G-преобразование. Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $\mathrm{G}_{1,1;1,2}$-преобразованию (1.1), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.3) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$(\mathfrak{M}\mathrm{G}_{1,1;1,2}f)(\mathrm{s})=\frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})}\int_0^\infty \mathrm{x}^{\mathrm{s}-1}d\,\mathrm{x}\int_0^\infty {}_1F_1(\bar{a};\bar{c};-\mathrm{x\,t})f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}=$$

$$=\frac{\Gamma(\bar{a})}{\Gamma(\bar{c})}\int_0^\infty f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\int_0^\infty \mathrm{x}^{\mathrm{s}-1}\,{}_1F_1(\bar{a};\bar{c};-\mathrm{x\,t})d\,\mathrm{x}=\frac{\Gamma(\mathrm{s})\Gamma(\bar{a}-\mathrm{s})}{\Gamma(\bar{c}-\mathrm{s})}(\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s})=\mathcal{G}_{1,2}^{1,1}\left[\begin{matrix}1-\bar{a}\\0,1-\bar{c}\end{matrix}\middle|\mathrm{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s}).$$

Таким образом, имеем

$$(\mathfrak{M}\mathrm{G}_{1,1;1,2}f)(\mathrm{s})=\mathcal{G}_{1,2}^{1,1}\left[\begin{matrix}1-\bar{a}\\0,1-\bar{c}\end{matrix}\middle|\mathrm{s}\right](\mathfrak{M}f)(1-\mathrm{s}). \tag{3.1}$$

Из (2.2) и (3.1) следует представление преобразования (1.1) $\mathrm{G}_{1,1;1,2}f$ в виде G-преобразования (1.3):

$$(\mathrm{G}_{1,1;1,2}f)(\mathrm{x})=\int_0^\infty \mathrm{G}_{1,2}^{1,1}\left[\mathrm{xt}\middle|\begin{matrix}1-\bar{a}\\0,1-\bar{c}\end{matrix}\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\quad(\mathrm{x}>0). \tag{3.2}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.1):

$$m_1=m_2=1;\ n_1=n_2=1;\quad p_1=p_2=1;\ q_1=q_2=2;\ \alpha_1=-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_1)],\ \alpha_2=-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1=\mathrm{Re}(a_1),\ \beta_2=\mathrm{Re}(a_2);\ a_1^*=a_2^*=1;\ \Delta_1=\Delta_2=1;\ \mu_1=\mathrm{Re}(a_1-c_1)-\frac{1}{2},\quad \mu_2=\mathrm{Re}(a_2-c_2)-\frac{1}{2}.$$

Применяем двумерное преобразование Меллина (2.1) к $G_{1,2;2,2}$-преобразованию (1.2), далее последовательно меняем порядок интегрирования и используем формулу (2.4) во внутреннем интеграле, с учетом (1.5) окончательно получаем

$$(\mathfrak{M}G_{1,2;2,2}\, f)(s)=\frac{\Gamma(\bar a)\Gamma(\bar b)}{\Gamma(\bar c)}\int_0^\infty x^{s-1}\,dx\int_0^\infty {}_2F_1(\bar a,\bar b;\bar c;-xt)f(t)dt=$$

$$=\frac{\Gamma(\bar a)\Gamma(\bar b)}{\Gamma(\bar c)}\int_0^\infty f(t)dt\int_0^\infty {}_2F_1(\bar a,\bar b;\bar c;-xt)x^{s-1}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\bar a-s)\Gamma(\bar b-s)\Gamma(s)}{\Gamma(\bar c-s)}(\mathfrak{M}f)(1-s)=\bar{\mathcal{G}}^{1,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}1-\bar a,\,1-\bar b\\ 0,\,1-\bar c\end{matrix}\middle|\, s\right](\mathfrak{M}f)(1-s).$$

Таким образом, получили

$$(\mathfrak{M}G_{1,2;2,2}\, f)(s)=\bar{\mathcal{G}}^{1,2}_{2,2}\left[\begin{matrix}1-\bar a,\,1-\bar b\\ 0,\,1-\bar c\end{matrix}\middle|\, s\right](\mathfrak{M}f)(1-s). \tag{3.3}$$

Из (2.2) и (3.3) вытекает представление преобразования (1.2) $G_{1,2;2,2}\, f$ в виде G-преобразования (1.3):

$$(G_{1,2;2,2}\, f)(x)=\int_0^\infty G^{1,2}_{2,2}\left[xt\,\middle|\,\begin{matrix}1-\bar a,\,1-\bar b\\ 0,\,1-\bar c\end{matrix}\right]f(t)dt \quad (x>0). \tag{3.4}$$

Определим параметры (2.6)–(2.10) в (3.3):

$$m_1=m_2=1;\, n_1=n_2=2;\quad p_1=p_2=2;\, q_1=q_2=2;\ \alpha_1=-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_1)],\, \alpha_2=-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_2)];$$

$$\beta_1=1-\max[\mathrm{Re}(1-a_1),\mathrm{Re}(1-b_1)),\ \ \beta_2=1-\max[\mathrm{Re}(1-a_2),\mathrm{Re}(1-b_2);$$

$$a_1^*=a_2^*=2;\ \ \Delta_1=\Delta_2=0;\ \ \mu_1=\mathrm{Re}(a_1+b_1-c_1)-1,\ \ \ \mu_2=\mathrm{Re}(a_2+b_2-c_2)-1\,.$$

4. $\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2}$-теория $G_{1,1;1,2}$-преобразования. В следующей теореме представлена $\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2}$-теория преобразования $G_{1,1;1,2}\, f$ (1.1).

Теорема 4.1. *Пусть*

$$-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_1)]<1-\nu_1<\mathrm{Re}(a_1)\,,\ -\min[0,\mathrm{Re}(1-c_2)]<1-\nu_2<\mathrm{Re}(a_2)\,,\ \nu_1=\nu_2\,, \tag{4.1}$$

$$a_1^*=a_2^*=1\,. \tag{4.2}$$

Верны следующие утверждения:

A. Существует взаимно однозначное преобразование $G_{1,1;1,2}\in[\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2},\mathfrak{L}_{1-\bar\nu,\bar 2}]$ *такое, что равенство (3.1) выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2}$ *и* $\mathrm{Re}(s)=1-\bar\nu$.

B. Если $f\in\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{\bar\nu,\bar 2}$, *то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(x)\big(G_{1,1;1,2}\, g\big)(x)dx=\int_0^\infty\big(G_{1,1;1,2}\, f\big)(x)g(x)dx\,.$$

C. Пусть $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_1)\in C^2$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>-\overline{\nu}$, *преобразование* $\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f$ *(1.1) представимо в виде*

$$(\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G_{2,3}^{1,2}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}-\overline{\lambda},\ 1-\overline{a}\\ 0,1-\overline{c},\ -\overline{\lambda}-1\end{matrix}\right.\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,,$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})<-\overline{\nu}$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f)(\mathrm{x})=-\mathrm{x}^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G_{2,3}^{2,1}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}1-\overline{a},-\overline{\lambda},\\ -\overline{\lambda}-1,0,1-\overline{c}\end{matrix}\right.\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,.$$

D. Преобразование $\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\overline{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют (4.1) и выполняются условия (4.2), а также преобразования* $\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}_{1,1;1,2}\,f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\overline{\tilde{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (3.1), то* $\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f=\tilde{\mathrm{G}}_{1,1;1,2}\,f$ *для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\tilde{\nu}},\overline{2}}\cap\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

E. Если выполняются условия (4.1) и (4.2), то для $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *преобразование* $\mathrm{G}_{1,1;1,2}\,f$ *дается формулами (1.1) и (3.2).*

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.1), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

5. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ **-теория** $\mathbf{G_{1,2;2,2}}$**-преобразования.** В следующей теореме представлена $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теория преобразования $\mathrm{G}_{1,2;2,2}\,f$ (1.2).

Теорема 5.1. *Пусть*

$$-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_1)]<1-\nu_1<1-\max[\mathrm{Re}(1-a_1),\mathrm{Re}(1-b_1)\,,$$

$$-\min[0,\mathrm{Re}(1-c_2)]<1-\nu_2<1-\max[\mathrm{Re}(1-a_2),\mathrm{Re}(1-b_2)\,,\ \nu_1=\nu_2\,; \tag{5.1}$$

$$a_1^*=a_2^*=2\,. \tag{5.2}$$

Верны следующие утверждения:

A. Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}_{1,2;2,2}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ *такое, что равенство (3.3) выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s})=1-\overline{\nu}$.

B. Если $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *,то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})\left(\mathrm{G}_{1,2;2,2}\,g\right)(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}=\int_0^\infty\left(\mathrm{G}_{1,2;2,2}\,f\right)(\mathrm{x})g(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}\,.$$

C. Пусть $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\ \lambda_1)\in C^2$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>-\overline{\nu}$, *преобразование (1.2) представимо в виде*

$$(\mathrm{G}_{1,2;2,2}\,f)(\mathrm{x})=\mathrm{x}^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G_{3,3}^{1,3}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}-\overline{\lambda},\quad 1-\overline{a},\,1-\overline{b}\\ 0,\,1-\overline{c},-\overline{\lambda}-1\end{matrix}\right.\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,,$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})<-\overline{\nu}$ *дается формулой*

$$(\mathrm{G}_{1,2;2,2}\,f)(\mathrm{x})=-\mathrm{x}^{-\overline{\lambda}}\frac{d}{d\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{\overline{\lambda}+1}\int_0^\infty G_{3,3}^{2,2}\left[\mathrm{xt}\left|\begin{matrix}1-\overline{a},\,1-\overline{b},-\overline{\lambda}\\ -\overline{\lambda}-1,0,\,1-\overline{c}\end{matrix}\right.\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\,.$$

D. Преобразование $\mathrm{G}_{1,2;2,2} f$ *не зависит от* $\bar{\nu}$ *в том смысле, что если* $\bar{\nu}$ *и* $\bar{\tilde{\nu}}$ *удовлетворяют (5.1) и выполняются условия (5.2), а также преобразования* $\mathrm{G}_{1,2;2,2} f$ *и* $\tilde{\mathrm{G}}_{1,2;2,2} f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}}$ *равенством (3.3), то* $\mathrm{G}_{1,2;2,2} f = \tilde{\mathrm{G}}_{1,2;2,2} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$.

E. Если выполняются условия (5.2), то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *преобразование* $\mathrm{G}_{1,2;2,2} f$ *дается формулами (1.2) и (3.4).*

Доказательство следует из непосредственной проверки с учетом представления (3.3), из результатов в [1, теорема 1; 9, теорема 6.1], из существования всех приведенных операторов в указанных классах функций.

Заключение. В работе получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1.1) и (1.2) из одних пространств интегрируемых функций в другие, получены аналоги формулы интегрирования по частям. Для таких преобразований установлены различные интегральные представления.

Работа выполнена в рамках ГПНИ «Конвергенция – 2025», подпрограмма «Математические модели и методы», задание 1.2.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович М. В., Скоромник О. В. Двумерное интегральное преобразование с G-функцией Мейера в ядре в пространстве суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2019. – № 4. – С. 131–136.
2. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Два частных случая двумерного интегрального G-преобразования в весовых пространствах суммируемых функций // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 117–123. – DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123.
3. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
4. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи // АМАДЕ-2021: сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116.
5. Ситник С. М., Скоромник О. В., Шлапаков С. А. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 18–27.
6. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer), 2020. – P. 293–319.
7. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра. – 294 с.
9. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
10. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1170–1178.
11. Theory and applications of fractional differential equations // North–Holland Mathematics Studies; ed.: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. – Amsterdam : Elsevier.xv, 2006. – Vol. 204. – 523 p.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1986. – Т. 3: Дополнительные главы. – 801 с.

REFERENCES

1. Papkovich, M. V., & Skoromnik, O. V. (2019). Dvumernoe integral'noe preobrazovanie s G-funktsiei Meiera v yadre v prostranstve summiruemykh funktsii [Two-Dimentional Integral Transform With the Meijer G-Function in the Kernel in the Space of Summable Functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (4), 131–136. (In Russ., abstr. in Engl.).
2. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Dva chastnykh sluchaya dvumernogo integral'nogo G-preobrazovaniya v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Two special cases of two-dimensional integral G-transformation in the weighted spaces of summable functions]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 117–123. (In Russ., abstr. in Engl.). DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-117-123.
3. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of VSU]*, *1*(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).

4. Sitnik S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G- i H-preobrazovaniya i ikh chastnye sluchai [Multidimensional modified G- and H-transforms and their special cases]. In *AMADE-2021*: sb. trudov (104–116). Minsk: IVTs Minfina. (In Russ., abstr. in Engl.).
5. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2019). Mnogomernoe obshchee integral'noe preobrazovanie so spetsial'nymi funktsiyami v yadre [Multidimensional general integral transformation with special functions in the kernel]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of VSU]*, *3*(104), 18–27. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. In *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Cham, Switzerland: Birkhäuser Basel (Springer).
7. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1987). *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]*. Minsk: Nauka i tekhnika. (In Russ.).
8. Beitmen, G., & Erdeii, A. (1973). *Vysshie transtsendentnye funktsii*: v 3 t. T. 1: *Gipergeometricheskaya funktsiya Gaussa. Funktsiya Lezhandra*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
9. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications.* London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
10. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions. *Lobachevskii J. of Mathematics*, *43*(6), 1170–1178.
11. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (Ed.). (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North–Holland Mathematics Studies* (Vol. 204). Amsterdam: Elsevier.xv.
12. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., & Marichev, O. I. (1986). *Integraly i ryady*: v 3 t. T. 3: *Dopolnitel'nye glavy*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Поступила 17.04.2023

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL TRANSFORMATIONS WITH KUMMER FUNCTION AND HYPERGEOMETRIC GAUSSIAN FUNCTION IN KERNELS AS SPECIAL CASES OF TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL G-TRANSFORMATION

S. SITNIK
(Belgorod State National Research University "BelGU", Russia);

O. SKOROMNIK, K. VASILEVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two two-dimensional integral transformations with confluent hypergeometric Kummer function and Gauss hypergeometric function in kernels are considered. Applying the Mellin transformation technique, we show that they are special cases of a two-dimensional G*-transformation. Based on the theory of the* G*-transformation, the properties of the considered integral transformations in the weight spaces of integrable functions in the domain* $R_+^2 = R_+^1 \times R_+^1$ *are investigated. The results of the study generalize the results obtained earlier for the corresponding one-dimensional analogues.*

Keywords: *two-dimensional integral* G*-transformation, Meijer* G*-function, confluent hypergeometric Kummer function, Gauss hypergeometric function, two-dimensional Mellin transform, space of integrable functions, fractional integrals and derivatives.*