

УДК 548.232.4

DOI 10.52928/2070-1624-2023-40-1-56-64

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЕ  
ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПЕРЕОХЛАЖДЕННОГО РАСПЛАВА**

*д-р физ.-мат. наук, проф. О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук, доц. Д. Г. КРОЛЬ*  
(Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого)  
*O. Shablovsky ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2479-1789>,*  
*D. Kroll ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8385-2492>*

Объект исследования – линия роста свободного дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества. Изучено возмущенное состояние линии роста на конечном удалении от вершины дендрита. Именно в этой части фронта кристаллизации наблюдается появление боковых ветвей. Рассмотрены два основных варианта: аperiодический и периодический по координате фон, по которому распространяется волна возмущения. Обнаружена важная роль характерного размера зоны пространственной неоднородности фона, даны количественные оценки пороговых значений этого размера. Изучены зависимости скорости волны от угла заострения линии роста и от ширины зоны неоднородности. Даны примеры, демонстрирующие, что направление движения волны (от вершины на периферию либо с периферии к вершине) влияет на морфологическую устойчивость/неустойчивость линии роста. Подробно изучены свойства параметра затухания возмущений. Численное моделирование свойств процесса роста выполнено для расплавов никеля и меди при переохлаждениях, равных соответственно 166 К и 180 К. Результатом расчетов является корреляция «скорость волны – угол заострения – размер зоны неоднородности», «параметр затухания – угол заострения». Представленная графическая информация демонстрирует количественные различия свойств роста дендритов никеля и меди.

**Ключевые слова:** дендритный рост, эволюция фазовой границы, морфологическая устойчивость, боковая ветвь.

**Введение.** В настоящей работе изложены модельные представления о морфологической устойчивости/неустойчивости линии роста дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества. Важность этого вопроса обусловлена тем, что в результате возбуждения колебаний и волн образуются пространственно-временные структуры на фазовой границе высокоскоростной кристаллизации. Пространственная неоднородность поверхности (линии) роста означает неоднородность теплового поля, являющуюся ведущим фактором формирования складок и боковых ветвей. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований дендритообразования представлено в статьях [1–7]. Рост поверхности свободного дендрита характеризуется высокой степенью нестационарности. По мере увеличения переохлаждения однокомпонентного расплава усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, поэтому при формулировке исходной задачи применяется релаксационная модель Максвелла, а математической моделью фазовой границы кристаллизации служит поверхность сильного разрыва, на которой выполнены условия динамической совместности. Подробное изложение этого подхода к проблеме моделирования роста кристалла дано в [8]. Прикладное значение обсуждаемых вопросов связано с современными технологическими процессами кристаллизации из глубоко переохлажденного расплава, а именно: на экспериментальных установках были достигнуты переохлаждения до 300 К и наблюдались скорости роста кристалла 20–70 м/с [9].

**Цель работы:** изучить влияние процессов возбуждения колебаний и волн на морфологические свойства линии роста дендрита.

**Уравнение роста дендрита.** Рассмотрим двухмерный плоский случай. Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва  $x - F(y, t) = 0$ . Средняя кривизна этой границы  $K = (\partial^2 F / \partial y^2) / G^3$ ,  $G = (1 + (\partial F / \partial y)^2)^{1/2}$ . Здесь координата  $x$  направлена вдоль оси симметрии дендрита в сторону твердой фазы;  $y$  – поперечная декартова координата. Для дальнейших рассуждений важное значение имеет угол  $\theta$ , который образует нормаль  $\mathbf{n}$  границы с осью  $x$ :  $\cos \theta = 1 / G$ . ФГК перемещается со скоростью  $N$  справа налево ( $N = N\mathbf{n}$ ,  $N < 0$ ), и на ее вершине  $\partial F / \partial y = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ . По мере удаления от вершины  $\cos \theta$  монотонно убывает:  $\cos \theta \rightarrow 0$ ,  $\theta \rightarrow \pi / 2$ . Угол заострения линии роста равен  $\theta_1 = (\pi / 2) - \theta$  (рисунок 1).

Теплофизические свойства расплава и кристалла берем постоянными. Это допущение оправдано тем, что относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву.

Уравнение роста  $N \equiv (\partial F / \partial t) / G = -\mu(T_e - T_j)$  имеет вид [8]

$$\partial^2 F / \partial y^2 = \alpha B + \varphi(\partial F / \partial t)[1 + (\partial F / \partial y)^2], \quad \alpha = L / (UT_e), \quad \varphi = \alpha / \mu, \quad (1)$$

где  $L$  – теплота фазового перехода единицы объема вещества;  
 $\mu$  – кинетический коэффициент роста;  
 $T_e$  – температура равновесия между твердой и жидкой фазами;  
 $T_c$  – равновесная температура кристаллизации;  
 $U$  – поверхностная энергия границы раздела фаз;  
 $B$  – переохлаждение на вершине дендрита;  
 $\Delta T$  – переохлаждение расплава;  
 $c$  – объемная теплоемкость;  
 $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  
 $N_m = -N > 0$ .

Дифференциальное уравнение, описывающее малое возмущение  $f = f(y, t)$  стационарного контура линии роста, имеет вид

$$\partial^2 f / \partial y^2 = B_1(\partial f / \partial y) + B_2(\partial f / \partial t), \quad (2)$$

$$A_1 = -\mu B / (1 + A_2^2) < 0, \quad A_2 > 0, \quad B_1 = 2\varphi A_1 A_2 < 0, \quad B_2 = (1 + A_2^2)\varphi > 0; \quad A_1, A_2, B \equiv \text{const}. \quad (3)$$

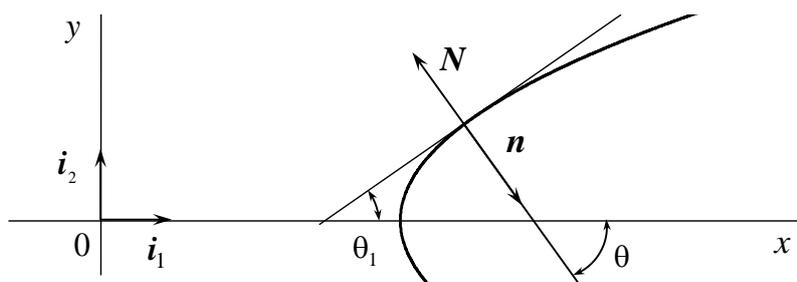
Линеаризация уравнения (1) в виде

$$F(y, t) = F^0(y, t) + f(y, t) \quad (4)$$

была выполнена на точном решении  $F^0 = A_1 t + A_2 y$ , которое определяет с заданной точностью клиновидный контур линии роста на конечном удалении от вершины дендрита. Параметр  $B_1$ , содержащий  $A_1 A_2$ , несет информацию о мультипликативном взаимодействии скорости ФГК и ее заострения:

$$A_1 = \frac{N}{\sin \theta_1}, \quad A_2 = \frac{1}{\text{tg} \theta_1}.$$

Рисунок 1. – Угол  $\theta_1$  заострения линии роста



В данной работе нами проведены пять серий расчетов для никеля и меди при следующих значениях теплофизических параметров:

– никель, Ni:  $T_c = 1728$  К,  $L = 2,14 \cdot 10^9$  Дж/м<sup>3</sup>,  $c = 5,62 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $\lambda = 69$  Вт/(м · К),  
 $U = 1,81$  Дж/м<sup>2</sup>,  $\mu = 9,53$  м/(К · с),  $\Delta T = 166$  К,  $|N|_b = 5,3$  м/с.

– медь, Cu:  $T_c = 1357$  К,  $L = 1,77 \cdot 10^9$  Дж/м<sup>3</sup>,  $c = 4,17 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup> · К),  $\lambda = 317$  Вт/(м · К),  
 $U = 1,35$  Дж/м<sup>2</sup>,  $\gamma = 4,755 \cdot 10^{-8}$  с,  $\mu = 10,056$  м/(К · с),  $\Delta T = 180$  К,  $|N|_b = 11,0$  м/с.

Все расчеты проведены в безразмерных величинах. Соответствие между размерными и безразмерными параметрами имеет вид

$$A_1 \rightarrow (A_1 t_b / y_b) = (-N_b t_b / y_b), \quad B_1 \rightarrow B_1 y_b, \quad B_2 \rightarrow (B_2 y_b^2 / t_b).$$

Индексом  $b$  отмечены масштабы величин, применяемые при обезразмеривании:  $t_b = 10^{-7}$  с,  $y_b = 10^{-6}$  м. Далее при построении и анализе решений уравнения (2) считаем, что выполнен сдвиг по координате  $y \rightarrow y - Y_1 \geq 0$ , где  $Y_1 > 0$  – координата, соответствующая некоторому поперечному сечению клина.

**Возмущенное состояние линии роста.** Укажем 5 видов точных решений уравнения (2), определяющих эволюцию малых возмущений на ФГК. Структура этих решений основана на известных в литературе [10] точных элементарных решениях уравнения теплопроводности.

*Расчет 1.* Физический смысл имеет следующее точное решение:

$$f(y, t) = H \exp(ky) \cos(k_1 y + rt), \quad (5)$$

$$2k = B_1 - (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} < 0, \quad r = -k_1(B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} / B_2 < 0, \quad k_1 > 0.$$

Данное решение – ограниченное при  $y \geq 0$ ,  $t \geq 0$ ; выбором произвольной константы  $H$  его можно сделать сколь угодно малым. Формула (5) описывает эволюцию линии роста за волной  $k_1 y + rt = 0$ . Скорость перемещения волны равна

$$V = dy / dt = (B_1^2 + 4k_1^2)^{1/2} / B_2 > 0. \quad (6)$$

Фон перед волной представляет собой аperiодическое по координате  $y$  возмущение вида

$$f_0(y) = H \exp(ky), \quad k < 0, \quad y \geq 0, \quad (7)$$

где  $k$  – параметр пространственной неоднородности возмущения. Характерную ширину неоднородного слоя определим как

$$y_1 = \frac{|f_0(y)|}{|df_0(y)/dy|} = -\frac{1}{k} > 0.$$

В решении (5) волновое число равно  $k_1$ , а круговая частота есть величина  $(-r) > 0$ . Нетрудно видеть, что  $k_1^2 = k(k - B_1) > 0$  при  $k < B_1$ . Для определенности берем  $k_1 > 0$ . Чем сильнее выражена неоднородность фона (7), тем больше квадрат  $k_1^2$  волнового числа:  $d(k_1^2)/d(-k) = B_1 - 2k > 0$ . Отметим, что в данном решении  $V > 0$ , т. е. волна идет на периферию дендрита, удаляясь от его вершины.

Простые расчеты показывают, что  $\partial(V^2)/\partial(-B_1) = 2(2k - B_1)/B_2^2 < 0$  при  $k < B_1 < 0$ . В итоге имеем нетривиальное поведение  $V^2$ : при фиксированном  $B_1$ , т. е. при фиксированном параметре  $A_1 A_2$  («скорость ФГК – заострение») скорость волны монотонно растет при убывании масштаба неоднородности  $y_1$ ; скорость  $V$  волны монотонно убывает по мере возрастания параметра  $(-A_1 A_2)$  при фиксированной неоднородности фона.

Устойчивая волна существует при  $k_1^2 > 0$ , т. е. при  $k < B_1 < 0$ . Критическое значение параметра неоднородности равно  $k_* = B_1 = 2\varphi A_1 A_2$ . Соответственно критический размер зоны неоднородности фона есть  $y_* = 1/(-k_*)$ :

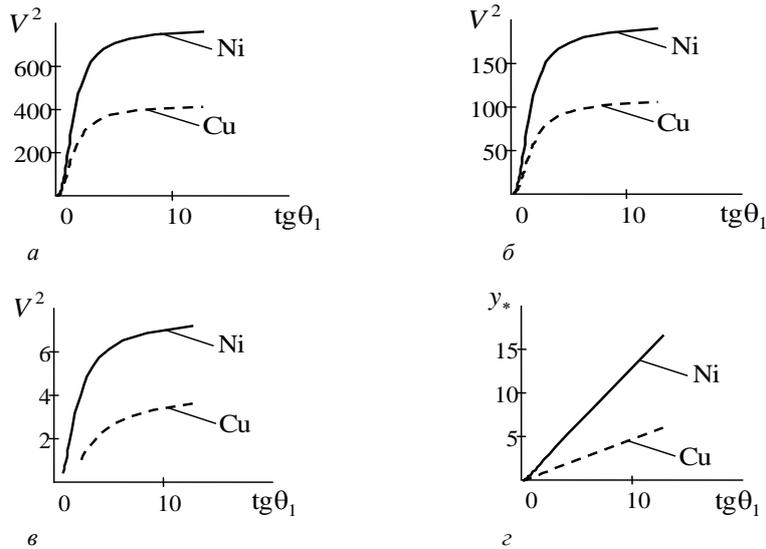
$$y_* = \frac{\sin \theta_1 \operatorname{tg} \theta_1}{2\varphi N_m}.$$

Свойства решения (5, 6) представлены на рисунке 2. Если размер зоны неоднородности больше критического, т. е.  $y_1 > y_*$ , то  $k_1^2 < 0$  и решение (5) неустойчивое, т. к. содержит гиперболический косинус:

$$k_1^2 = -\bar{k}_1^2, \quad k_1 = i\bar{k}_1, \quad r = i\bar{r}, \quad 2k = B_1 - (B_1^2 - 4\bar{k}_1^2)^{1/2}, \quad \bar{r} = -\bar{k}_1(B_1^2 - 4\bar{k}_1^2)^{1/2} / B_2,$$

$$(-B_1/2) < (-k) < (-B_1), \quad 0 > k > B_1, \quad f = i\bar{f}, \quad \bar{f}(y, t) = f_1 \exp(ky) \operatorname{ch}(\bar{k}_1 y + \bar{r}t), \quad y \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Волна  $\bar{k}_1 y + \bar{r}t = \operatorname{const}$  движется со скоростью  $\bar{V} > 0$ , где  $\bar{V}^2 = (B_1^2 - 4\bar{k}_1^2) / B_2^2 > 0$ .



*a, б, в* – квадрат скорости волны возмущения как функция тангенса угла заострения линии роста:  
*a* –  $k = -10$ ; *б* –  $k = -5$ ; *в* –  $k = -1$ ; *z* – критический размер зоны неоднородности  
 как функция тангенса угла заострения линии роста

Рисунок 2. – Возмущенное состояние (5)–(7)

*Расчет 2.* Перейдем к рассмотрению случая, когда фон перед волной – периодическая функция координаты  $y$ . Уравнению (2) удовлетворяет решение

$$f(y, t) = H \cos ky \exp \left[ h_2 y + t \left( h_1 - \frac{k^2}{B_2} \right) \right], \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$h_1 = -B_1^2 / (4B_2) < 0, \quad h_2 = B_1 / 2 < 0.$$

где  $H, k$  – произвольные постоянные; посредством выбора  $H$  это решение можно сделать сколь угодно малым. Волна

$$h_2 y = t \left( \frac{k^2}{B_2} - h_1 \right)$$

распространяется по пространственно периодическому фону

$$f_0(y) = H \cos ky \quad (9)$$

со скоростью

$$V = \frac{2}{B_1 B_2} \left( k^2 + \frac{B_1^2}{4} \right) < 0. \quad (10)$$

Напомним, что при записи уравнения (2) был выполнен сдвиг по координате  $y \rightarrow (y - Y_1) \geq 0$ . Таким образом, в начальном ( $t = 0$ ) состоянии фронт волны имеет координату  $y = 0$ , а затем движется с периферии дендрита к его вершине в сторону отрицательных  $y$ . За фронтом волны ( $y \geq Vt$ ) состояние линии роста устойчивое. Полупериод колебаний  $\pi/k$  представляет собой ширину зоны неоднородности исходного возмущения линии роста.

Затухание возмущения (8) во времени определяется экспонентой  $f \sim \exp(-n_1 t)$ , где

$$n_1 = (k^2 + \varphi^2 A_1^2 A_2^2) / [\varphi(1 + A_2^2)] \quad (11)$$

есть параметр затухания. Далее находим

$$\frac{dn_1}{d(A_2^2)} = \frac{(\varphi^2 A_1^2 - k^2)}{\varphi(1 + A_2^2)^2}.$$

При фиксированных  $\varphi A_1$  и  $k$  зависимость  $n_1 = n_1(A_2^2)$  – монотонно возрастающая по мере заострения ФГК, если  $\varphi^2 A_1^2 > k^2$ . Рост  $A_2^2$  означает уменьшение  $\theta_1$ . При  $k^2 > \varphi^2 A_1^2$  имеем убывающую функцию  $n_1 = n_1(A_2^2)$ . Пороговое значение  $k_*^2 = \varphi^2 A_1^2$  примечательно тем, что для него параметр затухания  $n_1^{**} = \varphi A_1^2$  не зависит от угла заострения  $\theta_1$ . Иллюстрация закономерностей поведения параметра затухания дана на рисунке 3. Сплошная и пунктирная линии соответствуют частотам возмущения, расположенным слева  $k_l^2$  и справа  $k_r^2$  от порогового значения  $k_*^2$ .

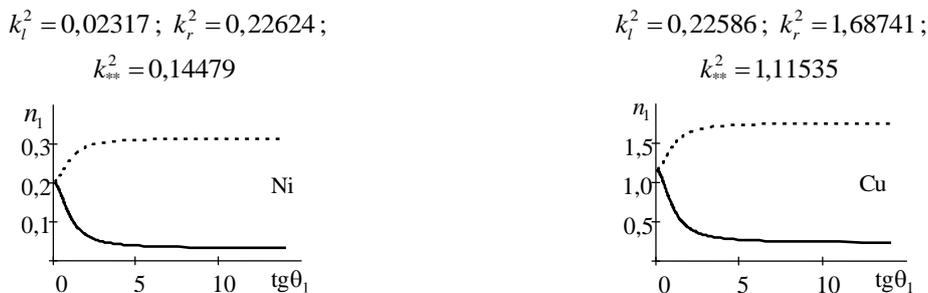


Рисунок 3. – Возмущенное состояние (8)–(10).  
Зависимость параметра затухания (11) от угла заострения линии роста

Расчет 3. Берем за основу решение

$$f(y, t) = H \exp(-ky) \exp \left[ \left( h_1 + \frac{k^2}{B_2} \right) t + h_2 y \right], \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (12)$$

где  $H, k$  – произвольные постоянные;  $h_1 < 0, h_2 < 0$  (см. (8)).

Волна

$$h_2 y = - \left( h_1 + \frac{k^2}{B_2} \right) t + \text{const}$$

распространяется по неоднородному фону

$$f_0(y) = H \exp(-ky), \quad k > 0, \quad y \geq 0 \quad (13)$$

со скоростью

$$V = - \frac{2}{B_1 B_2} \left( k^2 - \frac{B_1^2}{4} \right). \quad (14)$$

Формулы для  $B_1 < 0, B_2 > 0$  записаны в (2). Характерная ширина зоны неоднородности равна  $y_1 = 1/(-k)$ . Из (14) ясно, что волна движется от вершины на периферию дендрита ( $V > 0$ ), если  $k^2 > (B_1^2/4)$ , т. е. при  $\left[ k^2 / (\varphi^2 A_1^2) \right] > A_2^2$  или, что то же самое, при  $k^2 > k_*^2$ ,

$$k_*^2 = \frac{\varphi^2 N^2}{\sin^2 \theta_1 \text{tg}^2 \theta_1} = (B_1^2/4). \quad (15)$$

Волна движется с периферии дендрита к вершине ( $V < 0$ ), если  $k^2 < k_*^2$ . Здесь  $k_*$  характеризует пороговую ширину (15) зоны неоднородности исходного возмущения, причем  $V(k^2 = k_*^2) = 0$ . Процесс устойчивый и решение (12) аperiodическое по  $t$ , если  $V < 0$ : волна идет с периферии к вершине,  $k^2 < k_*^2$ . Процесс неустойчивый, если  $V > 0$ : волна идет от вершины на периферию,  $k^2 > k_*^2$ .

Для сравнения отметим, что в случае (5) с таким же (с точностью до обозначений) экспоненциальным по  $y$  фоном имеем устойчивое периодическое по  $t$  решение для  $k^2 > B_1^2, V > 0$ . Дело в том, что в этих задачах различаются функции  $V^2 = V^2(k^2, B_1, B_2)$ , обусловленные характером возбуждения волн в начальном сечении  $y = 0$ .

На основе формулы (14) получаем

$$V^2 = \frac{(k^2 - \varphi^2 A_1^2 A_2^2)^2}{[\varphi^2 A_1 A_2 (1 + A_2^2)]^2}. \quad (16)$$

Здесь  $V^2 \rightarrow \infty$  при  $A_2 \rightarrow 0$ , т. е. при  $\theta_1 \rightarrow (\pi/2)$ . Если  $A_2 \rightarrow \infty$ , т. е.  $\theta_1 \rightarrow 0$ , то  $V^2 \rightarrow 0$ . Такое же поведение волны наблюдалось нами для решения (8): в обоих случаях имеем экспоненциальный по  $t$  характер возбуждения волн при  $y=0$ . Функция  $V^2 = V^2(k^2, A_2^2)$  ведет себя немонотонно по отношению к аргументу  $A_2^2$ , а именно: при каждом фиксированном  $k > 0$  имеем  $\partial(V^2)/\partial(A_2^2) = 0$  вдоль линии

$$k^2 = \varphi^2 A_1^2 \frac{A_2^2 (A_2^2 - 1)}{(1 + 3A_2^2)} = k_*^2 \frac{(A_2^2 - 1)}{(1 + 3A_2^2)},$$

которая существует при  $A_2^2 > 1$ , т. е. при  $0 < \text{tg}\theta_1 < 1$ . Функция  $V^2$  имеет максимум по отношению к аргументу  $\text{tg}\theta_1$  (рисунок 4).

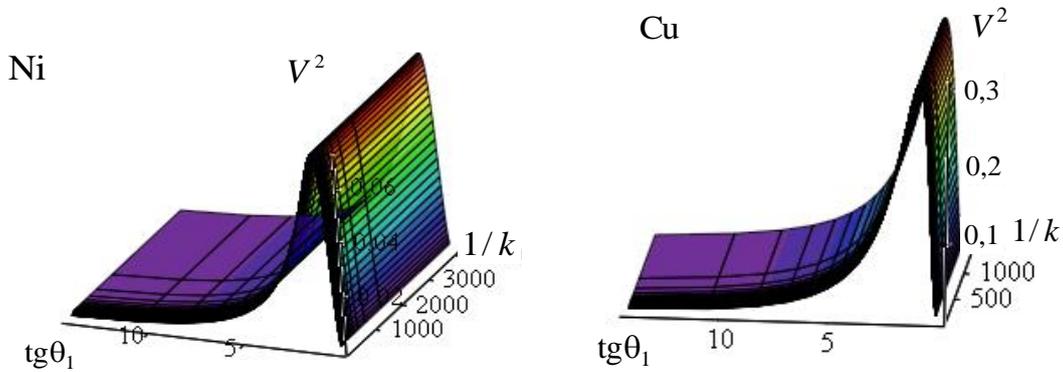


Рисунок 4. – Возмущенное состояние (12)–(14). Зависимость квадрата скорости волны возмущения (16) от ширины зоны неоднородности и от тангенса угла заострения линии роста

Расчет 4. Уравнение (2) имеет точное решение

$$f(y, t) = H \exp[h_1 t + y(h_2 - k)] \cos\left(ky - \frac{2k^2}{B_2} t\right), \quad y \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

где  $H, k$  – произвольные постоянные;  $h_1 < 0, h_2 < 0$ .

Волна  $y = (2kt/B_2) \geq 0, k > 0$  распространяется по неоднородному фону

$$f_0(y) = H \exp(-n_2 y), \quad y \geq 0, \quad n_2 = k - h_2 - (h_1 B_2 / 2k) \quad (18)$$

со скоростью  $V = 2k/B_2 > 0$ . Обсудим связь (18) между параметрами  $k$  и  $n_2$ :

$$2k = n_2 + h_2 + [(n_2 + h_2)^2 + 2h_1 B_2]^{1/2}.$$

Волна существует ( $V > 0$ ), если  $k > 0$ . Значит, параметр неоднородности фона должен удовлетворять неравенству  $n_2 > (-\varphi A_1 A_2)(1 + \sqrt{2})$ . Если же  $0 < \frac{n_2}{(-\varphi A_1 A_2)} < (1 + \sqrt{2})$ , то волна не возникает. Запишем параметр неоднородности в виде

$$n_2 = \frac{B_2 V}{2} - h_2 - \frac{h_1}{V}. \quad (19)$$

Отсюда ясно, что связь  $n_2 \leftrightarrow V$  немонотонная:  $dn_2/dV = 0$  при

$$V^2 = V_*^2, \quad V_*^2 = 2A_1^2 A_2^2 / (1 + A_2^2)^2, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 n_2}{dV^2} = -\frac{2h_1}{V^3} > 0.$$

Значение  $V = V_*$  соответствует минимуму функции  $n_2 = n_2(V)$  при каждом фиксированном  $A_2 > 0$ . Соответствующая пороговая ширина зоны неоднородности  $y_* = 1/n_2^*$ , где  $n_2^* = n_2(V = V_*)$ . Свойства этого режима возмущения показаны на рисунках 5, 6.

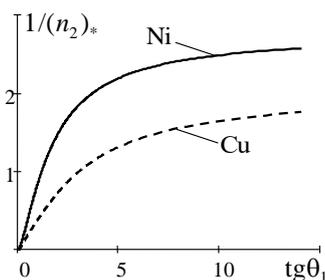


Рисунок 5. – Возмущенное состояние (17), (18). Пороговое значение ширины зоны неоднородности как функция тангенса угла заострения линии роста

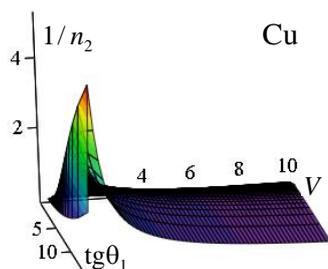


Рисунок 6. – Возмущенное состояние (17), (18). Нелинейная связь скорости волны и ширины зоны неоднородности аperiodически возмущенного фона

Расчет 5. Решение (17) позволяет рассмотреть волну

$$y = -h_1 t / (h_2 - k), \quad V = -h_1 / (h_2 - k), \quad (21)$$

которая распространяется по пространственно периодическому фону

$$f_0(y) = H \cos k_1 y, \quad (22)$$

$$k_1 = k \left[ 1 + \frac{2k(h_2 - k)}{h_1 B_2} \right].$$

Случай  $V < 0$  дает такие оценки:

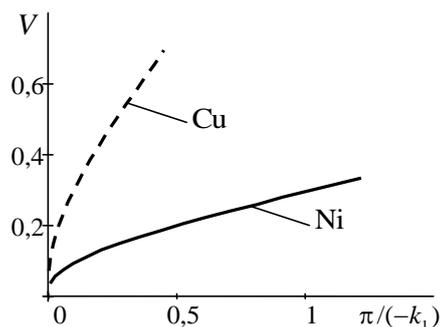
$$\frac{A_1 A_2}{(1 + A_2^2)} < V < 0, \quad k > 0.$$

Именно в этом интервале находятся значения скорости волны, идущей с периферии к вершине. Ширина зоны неоднородности фона равна  $\pi/k_1$  (см. (22), где  $k = (h_1 + Vh_2)/V$ ). Случай  $V > 0$  существует, если  $k < h_2 < 0$ : волна идет на периферию и в каждый фиксированный момент времени процесс за волной неустойчивый по отношению к координате  $y$ :

$$f \sim \exp[y(h_2 - k)], \quad (h_2 - k) > 0, \quad y > 0.$$

Скорость волны монотонно растет по мере увеличения ширины зоны неоднородности (рисунок 7).

**Рисунок 7. – Возмущенное состояние (17), (21), (22). Неустойчивый режим ( $V > 0$ ). Связь скорости волны и ширины зоны неоднородности пространственно-периодически возмущенного фона**



**Заключение.** Выполнен анализ возмущенных состояний линии роста свободного дендрита в переохлажденном расплаве чистого вещества, определяемых зависимостями (5), (8), (12) и (17). Показано, что основными факторами влияния являются: направление движения волны возмущения (от вершины на периферию либо с периферии к вершине); характер состояния фона перед волной (аперриодический по координате (7), (13), (18) либо периодический (9), (22); линейный размер зоны неоднородности фона. Представленная на рисунках 2–7 информация позволяет сопоставить друг с другом свойства дендритного роста для переохлажденных расплавов никеля ( $\Delta T = 166$  К) и меди ( $\Delta T = 180$  К).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brener E. A., Mel'nikov V. I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // *Advances in Physics*. – 1991. – Vol. 40, iss. 1. – P. 53–97. – DOI: [10.1080/00018739100101472](https://doi.org/10.1080/00018739100101472).
2. Mullis A. M. Deterministic side-branching during thermal dendritic growth // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 84, 012071. – P. 1–8. – DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012071](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012071).
3. Glicksman M. E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation // *J. of Crystal Growth*. – 2016. – Vol. 450. – P. 119–139. – DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031).
4. Strickland J., Nenchev B., Dong H. On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review // *Crystals*. – 2020. – 10(7). – P. 627–656. – DOI: [10.3390/cryst10070627](https://doi.org/10.3390/cryst10070627).
5. Kurz W., Rappaz M., Trivedi R. Progress in modeling solidification microstructures in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018 // *Int. Mater. Rev.* – 2021. – Vol. 66, iss. 1. – P. 30–76. – DOI: [10.1080/09506608.2020.1757894](https://doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894).
6. Шабловский О. Н., Кроль Д. Г. Динамика неустойчивости волновых возмущений и боковое ветвление дендрита в переохлажденном расплаве // *Успехи прикладной физики*. – 2022. – № 2. – С. 189–202.
7. Wang X., Li K., Qin X. et al. Research on Mesoscale Nucleation and Growth Processes in Solution Crystallization: A Review // *Crystals*. – 2022. – Vol. 12. – P. 1234–1255. – DOI: [10.3390/cryst12091234](https://doi.org/10.3390/cryst12091234).
8. Шабловский О. Н. Морфологические свойства линии роста двумерного дендрита в переохлажденном расплаве // *Прикладная физика*. – 2012. – № 4. – С. 40–46.
9. Herlach D. M., Galenko P., Holland-Moritz D. *Metastable Solids from Undercooled Melts*. – Oxford: Pergamon, 2007. – 448 p.
10. Полянин А. Д., Вязьмин А. В., Журов А. И. и др. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. – М.: Факториал, 1998, – 368 с.

#### REFERENCES

1. Brener, E. A., & Mel'nikov, V. I. (1991). Pattern selection in two-dimensional dendritic growth. *Advances in Physics*, 40(1), 53–97. DOI: [10.1080/00018739100101472](https://doi.org/10.1080/00018739100101472).
2. Mullis, A. M. (2015). Deterministic side-branching during thermal dendritic growth *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, (84), 1–9. DOI: [10.1088/1757-899X/84/1/012071](https://doi.org/10.1088/1757-899X/84/1/012071).
3. Glicksman, M. E. (2016). Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation. *J. of Crystal Growth*, 450, 119–139. DOI: [10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031](https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2016.03.031).
4. Strickland, J., & Nenchev, B. (2020). On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review. *Crystals*, 10(7), 627–656. DOI: [10.3390/cryst10070627](https://doi.org/10.3390/cryst10070627).
5. Kurz, W., Rappaz, M., & Trivedi, R. (2021). Progress in modeling solidification microstructures in metals and alloys. Part II: dendrites from 2001 to 2018. *Int. Mater. Rev.*, 66(1), 30–76. DOI: [10.1080/09506608.2020.1757894](https://doi.org/10.1080/09506608.2020.1757894).
6. Shablovskii, O. N., & Krol', D. G. (2022). Dinamika neustoichivosti volnovykh vozmushchenii i bokovoe vevtvenie dendrita v pereokhlazhdenom rasplave [Dynamics of instability of wave disturbances and lateral branching of a dendrite in a supercooled melt]. *Uspehi prikladnoj fiziki [Advances in Applied Physics]*, (2), 189–202. <https://elibrary.ru/item.asp?id=48451163>. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Wang, X., Li, K., Qin, X., Li, M., Liu, Y., An, Y., ... Gong, J. (2022). Research on Mesoscale Nucleation and Growth Processes in Solution Crystallization: A Review. *Crystals*, (12), 1234–1255. DOI: [10.3390/cryst12091234](https://doi.org/10.3390/cryst12091234).

8. Shablovskii, O. N. (2012). Morfologicheskie svoystva linii rosta dvumernogo dendrita v pereokhlazhdennom rasplave [Morphological properties of the growth line of a two-dimensional dendrite in a supercooled melt. *Prikladnaya fizika [Applied Physics]*, (4), 40–46. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17913532>. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Herlach, D. M., Galenko, P., & Holland-Moritz, D. (2007). *Metastable Solids from Undercooled Melts*. Oxford: Pergamon.
10. Polyenin, A. D., Vyaz'min, A. V., Zhurov, A. I., & Kazenin, D. A. (1998). *Spravochnik po tochnym resheniyam uravnenii teplo- i massoperenosa [Handbook on the exact solutions of heat and mass transfer equations]*. – Moscow: Faktorial. (In Russ.)

Поступила 06.02.2023

## SPATIAL-TEMPORAL INHOMOGENEITIES AT THE PHASE BOUNDARY OF HIGH-SPEED CRYSTALLIZATION OF A UNDERCOOLED MELT

**O. SHABLOVSKY, D. KROLL**  
(*Sukhoi State Technical University of Gomel*)

*The object of study is the growth line of a free dendrite in a undercooled melt of a pure substance. The perturbed state of the growth line at a finite distance from the top of the dendrite has been studied. It is in this part of the crystallization front that the appearance of side branches is observed. Two main variants are considered: aperiodic and coordinate-periodic background, along which the perturbation wave propagates. An important role of the characteristic size of the zone of spatial inhomogeneity of the background is revealed, and quantitative estimates of the threshold values of this size are given. The dependences of the wave velocity on the angle of sharpening of the growth line and on the width of the inhomogeneity zone are studied. Examples are given demonstrating that the direction of wave movement (from the top to the periphery or from the periphery to the top) affects the morphological stability/instability of the growth line. The properties of the perturbation damping parameter are studied in detail. Numerical modeling of the properties of the growth process was performed for nickel and copper melts at undercoolings equal to 160 K and 180 K respectively. The result of the calculations is the correlation "wave speed – taper angle – size of the inhomogeneity zone", "attenuation parameter – taper angle". The presented graphical information demonstrates quantitative differences in the growth properties of nickel and copper dendrites.*

**Keywords:** dendritic growth, interface evolution, morphological stability, side branch.