ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФОРМЫ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Дегтярев А.М., канд. техн, наук, доц.;
Бондаренко В.А., канд. техн, наук
(Полоцкий государственный университет)

На основе идентификации квадратичной формы криволинейного объекта через его главные инварианты выявляется форма объекта из класса конических сечений на основе координирования точек объекта геодезическими методами.

Введение. При установлении соответствия исследуемой линии проектной, получения элементов рихтовки для криволинейных контуров используют частные подходы выявления только окружности, эллипса или другой модели. В предлагаемой статье на основе аппроксимации сделана попытка получить сразу вид модели из класса конических сечений, идентифицируя её по формулам с получением основных характеристик.

В этом отношении наиболее целесообразно использовать квадратичную форму семейства кривых и её инварианты. Из аналитической геометрии известно [1], что квадратичная форма вида

$$(x\ y\ \ 1)\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0 \qquad (1)$$

задает все конические сечения и, таким образом, является достаточно общей моделью для широкого класса кривых линий, которые часто встречаются на практике. К этим линиям (не мнимым) относят: 1) окружность;
2) эллипс; 3) гиперболу; 4) параболу; 5) точку; 6) две пересекающиеся прямые; 7) две параллельные прямые.

Таким образом, если имеется ряд закоординированных геодезическими методами точек, принадлежащих исследуемой линии, то, установив коэффициенты *a;* и с⅛ в (1), мы можем идентифицировать пршіадлежность линии к любому из перечисленных выше видов. Кроме этого, на основе Йзвестных формул [1] можно получить все необходимые характеристики кривой.

Очевидно, в силу симметричности матрицы в (1) для однозначного определения коэффициентов необходимо не менее шести точек на исслеіуемой линии. Несложно заметить, что, расписав систему (1) после перемножения как

$$\alpha_{11}x^2 + 2\alpha_{12}xy + 2a_1x + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_3 = 0, \qquad (2)$$

мы получаем частное уравнение с шестью неизвестными, которое в таком виде однозначно не решаемо из-за нулевого свободного члена. Видимо, поэтому такого рода задачу решали только в виде ее частных случаев.

Теория. Предлагается один, возможно, не самый лучший, но рабочий алгоритм решения задачи, который можно назвать методом редукции. Для его реализации уравнение (2) разделим слева и справа на величину α_3 и введем новые, штриховые коэффициенты:

$$a'_{11}x^2 + a'_{12}xy + a'_1x + a'_{22}y^2 + a'_2y + 1 = 0. \qquad (3)$$

Здесь $$a'_{ii} = \frac{a_{ii}}{a_3},\ a'_{ij} = \frac{2a_{ij}}{a_3},\ a'_i = \frac{2a_i}{a_3}.$$

Таким образом, путем уменьшения числа неизвестных, мы получили уравнение с ненулевым (единичным) свободным членом, которое при наличии пяти точек на линии однозначно разрешимо. Нарушение масштаба в (3) по сравнению с (2) не мешает идентификации вида линии, но затрудняет получение характеристик, а именно требует индивидуального подхода. По полученным коэффициентам идентификацию вида кривой целесообразно получать на основе инвариантов квадратичной формы (1), которая однозначно связана со всеми перечисленными видами конических сечений. Очевидно, что для контроля необходимо брать избыточное количество точек, что приводит к использованию аппарата метода наименьших квадратов.

Пусть имеется $n > 5$ точек на исследуемой линии. Тогда n уравнений вида (3) образуют переопределенную систему, которая может быть решена на основе метода наименьших квадратов. При этом *вычислительная схема* может быть такой:

1) выделяем из системы (на основе n уравнений (3)) матрицу A, состоящую из коэффициентов при неизвестных a'_{ij}:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1^2 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2^2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n^2 & y_n \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

и свободный член I как вектор-столбец из n единиц;

2) составляем систему нормальных уравнений вида:

$$Nk + Ь = 0.$$

Здесь $N = A^{\tau} A$, $b = A^{T}I$-матрица системы нормальных уравнений и её вектор свободных членов;

3) решаем систему нормальных уравнений из пункта 2 и получаем вектор неизвестных $к$ вида:

$$k = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{12} \\ a'_{1} \\ a'_{22} \\ a'_{2} \end{pmatrix}; \tag{5}$$

4) по полученным коэффициентам составляем инварианты квадратичной формы для идентификации линии, которую они однозначно представляют:

$$I_1 = a'_{11} + a'_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} <\frac{3}{4}'1 & a'_{12} \\ {}^{n}12 & a'_{22} \end{vmatrix} > A \sim \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{1} \\ \frac{3}{4} & {}^{a}22 & O_2 \\ «1 & {}^{a}z & 1 \end{vmatrix} \quad , K = \begin{vmatrix} \frac{1}{8} & a'_{1} \\ ц & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{22} & {}^{a}z \\ a'\imath & 1 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Идентификацию проведем по следующим признакам [1]:

1) группа имеет единственный центр симметрии:

- линия - эллипс, если $I_2 > 0$; Л $I_2 < 0$;
- линия выродилась в точку, если $I_2 > 0, I_2 \approx 0$;
- линия - гипербола, если $I_2 < Q, I_i \neq 0$;
- имеем две пересекающиеся прямые, $I_2 < 0, I_3 = 0$;

2) группа не имеет центра симметрии:

- линия - парабола, если $I_2 = 0, I_2 \neq 0$;

4) группа имеет прямую центров симметрии - имеем две параллельные прямые $I_2 = 0, I_2 = 0$. Кроме того, если коэффициенты при квадратичных членах (α'_{ij}) равны между собой, то имеем окружность. Если не нулевые только члены $a'_{,i}$ то линия - прямая;

5) на последнем этапе необходимо получить основные характеристики исследуемой линии исходя из того, что вид её известен. Рассмотрим все случаи по порядку их значимости для практического использования в аналитическом виде. Пусть после идентификации линия оказалась окружно-

стью. Её основные характеристики - это радиус и координаты ненулевого центра. Общее уравнение окружности имеет вид:

$$(x-x_0)^2 + (y-Уo)^{2 = л2}- \qquad (7)$$

Раскрыв скобки и преобразовав, получим:

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = R^2 - (x⅛ + yl\}, \qquad (8)$$

а переходя к виду, подобному (3), имеем следующее выражение:

$$\frac{X^2}{Λ^2-(xo^2+>^zo)^2} + \frac{y^l}{Λ^2-(x\text{^}+y_0^2)} \frac{2x_0x}{Λ^2-(x_0^2+yo)} \frac{2y_0x}{\text{^}2-(x_0^2+y_0^2)} = \qquad (9)$$

$$= α[\,_1x^2 + a'_{1l}y^l + α[x + a'_2y = 1 \bullet$$

Как и должно быть для окружности, коэффициенты при квадратичных членах одинаковы, а коэффициент при смешанном произведении, ответственный за разворот формы, равен нулю. Имея решение (5) системы из пункта 3, для основных характеристик окружности получим:

$$\begin{cases} -a'_{11} = -a'_{22} = \dfrac{1}{R^2 - \left(x_0^2 + y_0^2\right)} \\ 2x_0 \cdot a'_{11} = -a'_1 \\ 2y_0 \cdot a'_{11} = -a'_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{a'_1}{2a'_{11}} \\ y_0 = -\dfrac{a'_2}{2a'_{11}} \\ R = \dfrac{\sqrt{-4a'_{11} + a'^2_1 + a'^2_2}}{2a'_{11}}. \end{cases} \qquad (Ю)$$

Если после идентификации линия - эллипс, то её основные характеристики - это большая и малая полуоси *а* и *Ь,* эксцентриситет ε, фокальные радиусы, координаты ненулевого центра и фокусов, угол разворота φ относительно одной из координатных осей. Другие характеристики элементарно получаются на основе перечисленных выше. Очевидно, что в формулах (2) или (3) в общем виде будут присутствовать все коэффициенты. Нас в первую очередь интересуют коэффициенты, характеризующие форму и положение эллипса: координаты ненулевого центра (x_0, j⅛), величины главных полуосей *а* и *Ъ,* угол разворота фигуры относительно координатной оси φ.

Одним из решений может быть следующее. Приведенное уравнение эллипса имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Преобразование его к общему виду производится путем вращения осей на угол φ и сдвигом нулевого центра на величину (x_0, y_0). В этом случае из приведенного уравнения получим вид (2).

Из аналитической геометрии (см., например [2]), известно, что координаты нового центра по известным коэффициентам (2) или (3) могут быть получены как решение системы:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_0+\alpha_{12}y_0+\alpha_1 = 0; \\ \alpha_{12}x_0+\alpha_{22}y_0+\alpha_2 =0. \end{cases} \tag{11}$$

Очевидно, что замена в (11) коэффициентов на их штриховые аналоги не изменит решения. Но следует обратить внимание, что все штриховые коэффициенты, кроме тех, что при квадратичных координатах **удвоенные,** и поэтому требуют деления на два для дальнейшего использования. Известно также, что угол разворота осей для приведения общей формы к каноническому виду может быть получен как [2]

$$\operatorname{tg}(2\varphi)=\frac{2\alpha_{12}}{\alpha_{11}-\alpha_{22}}=\frac{\alpha'_{12}}{\alpha'_{11}-\alpha'_{22}}. \tag{12}$$

Некоторую трудность вызывает получение значений полуосей *a* и *b*. Одним из решений может быть следующее. По инвариантам (6) получаем характеристическое уравнение линии второго порядка:

$$\lambda^2-I_1\lambda + I_2=0. \tag{13}$$

Решения этого уравнения $\lambda_{1,2}$ позволяют получить ещё один вид канонического уравнения линий второй степени для I группы, куда из центральных кривых входят окружность, эллипс и гипербола (см., например [2]):

$$\lambda_1 X^2+\lambda_2 Y^2+\frac{I_3}{I_2}=0, \tag{14}$$

или

$$\left(-\frac{\lambda_1 I_2}{I_3}\right)X^2+\left(-\frac{\lambda_2 I_2}{I_3}\right)Y^2=1. \tag{14a}$$

Несложно заметить, что для эллипса величины при квадратах координат связаны с искомыми осями:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{\lambda_1 I_2}{I_3} \\ \dfrac{1}{b^2} = -\dfrac{\lambda_2 I_2}{I_3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{-\dfrac{I_3}{\lambda_1 I_2}} \\ b = \sqrt{-\dfrac{I_3}{\lambda_2 I_2}}. \end{cases} \tag{15}$$

Другие характеристики эллипса элементарно получаются через (15).

Формулы (11)-(15) применимы к любой из перечисленных линий первой группы.

Практика. Рассмотрим пример. В качестве исходных, возьмем 11 точек, принадлежащих окружности радиуса $R = 20$, и сдвинем нулевой центр в точку (30,40). Таким образом, имеем новые точки.

Исходные данные для аппроксимации

x	50.000	49.754	49.021	47.820	46.180	44.142	41.756	39.080	36.180	33.129	30.000
y	40.000	43.129	46.180	49.080	51.756	54.142	56.180	57.820	59.021	59.754	60.000

Предположим, что эти точки принадлежат кривой неизвестного класса с неизвестными параметрами, и все это требуется определить.

Используя формулу (4) и следующие, получим матрицу $\Lambda(n\times_5)$, матрицу системы нормальных уравнений $N_{(5\times5)}$, вектор свободных членов $\delta(5\times1)$. Решая эту систему, получим вектор k неизвестных штриховых коэффициентов вида (5):

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0.00047619 \\ 0 \\ -0.02857143 \\ 0.00047619 \\ -0.03809524, \end{pmatrix}.$$

Ищем значения первых трех инвариантов (6):

$Z_1 = 0.00095238$; $h = 2.26757\text{-}10^{\wedge\wedge7}$; $I_3 = — 4.319188\cdot \mathrm{IO}^{-8}$.

Так как $I_2 > 0$, $I_t I_3 < 0$, коэффициенты при квадратичных членах в одинаковы, а при смешанных равны нулю, делаем вывод, что исследуема линия - окружность.

Используя формулы (10), получаем ей основные характеристики:

$$
\begin{cases}
⅞ = -\dfrac{a_1'}{2\alpha_{11}'} = --\text{^•} = 30.000; \quad 2⅛(1) \\
Yo \tilde{=} -\dfrac{{}^{a}2}{2\alpha_{11}'} = -\dfrac{k(5)}{2⅛(1)} = 40.000; \\
R = \dfrac{\sqrt{-4\alpha J_1 + \alpha_1'^2 + a_2'^2}}{2\alpha_{11}'} = \dfrac{\sqrt{'-4*(l) + Ц3)^2 + A(5)^2}}{2£(1)} = 20.000.
\end{cases}
$$

Здесь *k(i)* - соответствующие коэффициенты *формы* из вектора решения (5).

Это же решение можно получить, используя формулы (11) - (15).

Учитывая, что коэффициента^ при смешанном произведении есть ноль, а при квадратичных равны и необходим учет коэффициента 2, формула (11) примет вид:

$$
\begin{cases}
{}^{a}H\text{·}⅞o = \sim f\text{->} \quad a' \\
{}^{a}22\ \text{'}У0 = 2\text{-} \quad ,{}^{a}2
\end{cases}
$$

Из этой системы следуют две первые формулы из (10). Составив по инвариантам Л и I_2 характеристическое уравнение (13), имеем в качестве решения два одинаковых корня $\lambda_{1,2}$= 0,00047619, которые равны коэффициентам при квадратичных членах (см. вектор *к).* Тогда коэффициент (радиус) в уравнении (15) будет

$$\text{J-} = -\Delta 1\Delta._{ZZ}>_{\Lambda} = \sqrt{I - \frac{I_3}{\lambda_{1\cdot 2} I_2}} = 20.000. \quad \Lambda^2 I_3$$

Пусть теперь моделируются данные, принадлежащие центрированному эллипсу с полуосями a = 40, $Ь$ = 50, поворачиваем оси на угол φ = 30° по часовой стрелке и сдвигаем центр в новую точку (20, 30). Таким образом, имеем новые координаты точек:

54.6410	58.1254	60.6710	*622151*	62.7198	62.1726	60.5869	58.0019	54.4811	50.1113	45.0000
10.0000	17.0200	24.3597	31.8382	39.2715	46.4765	532758	59.5019	65.0016	69.6395	73.3013

Составляем по ним матрицу *A, N* и вектор *Ь*. Решая систему нормальных уравнений, получим вектор коэффициентов *к:*

$$к = \begin{pmatrix} -0.00118789 \\ 0.00040697 \\ 0.03530647 \\ -0.00095293 \\ 0.04903603 \end{pmatrix},$$

и инварианты 7$_1$ =-0.00214082; I_1 = 1.0905679-10^6; Z_3 = 2.2777658-10^.

Так как $Z_2 > 0$, $Z_1 Z_3 < 0$, делаем вывод, что исследуемая линия - эллипс. Решая систему (11) с элементами вектора *к* получаем координаты центра:

-0.001187894 0.000203488^ pcλ fθ.O17653234 p⅛W20.000A
0.000203488 -0.000952926J l4j⁄J ~ 40.024518017J ’ | 4yoJ^(30.00θJ

По значениям инвариантов получаем и решаем характеристическое уравнение (13): λ_1 = 0.001305378; λ_2 = 0.000835442. Тогда из (15) значения полуосей будут:

a = √(–—^—) = 40.000;
V2

A = -Ь- = 50.000.
V2

Теперь, используя (12) найдем угол разворота осей φ

⅛(2φ) = -Λ~; = -⅛(2) / *(1)-*(3) = 1.7320508,
a -a

откуда φ = 30.00000°. Как видим, все формулы дают верный результат.

Если исследуемая фигура отличается от модельной (например, деформирована), то последовательность вычислений такая же, но в результате мы получим линию, у которой $[V^2] = min$. Здесь же необходимо произвести оценку точности результатов по стандартным формулам *МНК* и получить исправительные элементы v, которые могут быть полезны на практике как элементы рихтовки, т.е. элементы, приводящие кривую к ближайшей линии конического сечения с наименьшими затратами. При такой постановке задачи может возникнуть плохо обусловленная система нормальных уравнений, что достаточно неплохо устраняется введением центральных координат.

Заключение. Предложенный алгоритм отыскания вида кривой из класса конических сечений использует метод редукции, что позволяет обобщить решение сразу на весь класс кривых. Некоторые проблемы с обусловленностью решаемой системы нормальных уравнений достаточно хорошо устраняется введением центрированных координат. Идентификация формы по полученным коэффициентам выполнена на основе однозначной связи инвариантов квадратичной формы и вида линии, что является наиболее простым и в то же время достаточно общим подходом.

Использование метода наименьших квадратов для реальных измерений исследуемых объектов позволяет не только оценить результаты вычислений, но и получить элементы исправления реального контура к ближайшему коническому сечению с наименьшими затратами исходя из решения по методу наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - М.: Наука, 1981.-232 с.
2. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. - 831 с.

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ СТРОГИМИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ И КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБАМИ

Мицкевич В.И., д-р техн, наук, проф.;
Парадня П.Ф.; Строк А.В.
(Полоцкий государственный университет)

Как известно, в методе наименьших квадратов существует два способа уравнивания - параметрический и коррелатный, также их комбинации, например, параметрический способ с дополнительными условиями. Раньше считалось, что все существующие способы всегда приводят к одним и тем же конечным результатам, включая оценку точности функций измеренных и уравненных величин. Результаты уравнивания могут быть различны для одного и того же геодезического четырехугольника