Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7
36-45	**3340**	**1,96-IO^6**	**1120**	**21100**	**1850**	**106-10***
36-44	**4250**	**l,53·10^6**	**1340**	**17300**	**2280**	**85,O· IO^6**
36-43	**4760**	**1,40-10***	**1430**	**16400**	**2500**	**79,8-IO^6**
36-42	**6520**	**1,38-IO^6**	**2000**	**11300**	**3220**	**54,1-IO^6**
36-41	**9540**	**0,667-IO^6**	**3090**	**8710**	**4440**	**40,7-10^6**
36-40	**14200**	**0,421 IO^6**	**4910**	**7380**	**6100**	**33,6-IO^6**
36-39	**16800**	**0,419-IO^6**	**6490**	**7050**	**8050**	**31,8 IO^6**
36-38	**31700**	**0,301 IO^6**	**15200**	**300**	**14400**	**28,4-IO^6**
36-37	**88800**	**0,270-IO^6**	**63100**	**257**	**32300**	**27,4-IO^6**
центральные исходные пункты	**6120**	**0,270-IO^6**	**5330**	**272**	**4160**	**25,3-IO^6**

В **заключение** отметим, если коэффициент, характеризующий качество построения геодезических сетей недопустим, то его величину можно уменьшить добавлением исходных пунктов в проектируемой сети.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ УРАВНИВАНИЯ ПЛАНОВОЙ И СПУТНИКОВОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ СЕТИ БЕЗ ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ ОБОБЩЁННЫМ И НЕОБОБЩЁННЫМ МЕТОДОМ Lp-ОЦЕНОК

Будо Ю.П.; Будо А.Ю.; Куприенко Н.О.
(Полоцкий государственный университет)

В необобщённом методе Lp-оценок используется следующая целевая функция [1]

$$\Phi(X)=\left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^{T}\cdot P_n\cdot\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}, \tag{1}$$

где X_{ul} - вектор координат для к (к *= 1/2)* определяемых пунктов; $L(X)_{NX1}$ $=T^{BU4}$-T^{M3M} _ вектор свободных членов в общем случае нелинейных параметрических уравнений для каждого результата измерения T_{N}";$_{x1}$ п - показатель степени на отрезке 1.0 ≤ п < 3.0; Р_ - матрица весов измерений с диагональными элементам $P_i=\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)^{n}$.

В обобщённом методе Lp-оценок применяют целевую функцию [1]:

$$\Phi(X)=\left(\left|L(X)\right|^{\frac{n}{2}}\right)^{m}\cdot K\cdot\left|L(X)\right|^{\frac{я}{2}}, \qquad (2)$$

где $K_n^{-1} = P_n^{\frac{1}{2}} R^{-1} P_n^{\frac{1}{2}}$, в которой R - матрица, содержащая на диагонали единицы, а внедиагональные числа равны коэффициентам корреляции [2].

В современной литературе по обработке спутниковых GPS-сетей достаточно редко рассматриваются вопросы уравнивания, при котором возможно применение степеней 1.0 < л < 2.0 (п = 2,0 соответствует обработке по методу наименьших квадратов (МНК), а при п =1,0 уравнивание выполняется по методу наименьших модулей (МНМ)). Обычно для получения уравненных приращений координат Δx, Δy, Δz между пунктами предпочтение даётся МНК. При этом рассматриваются вопросы уравнивания зависимых результатов GPS-измерений, получаемых в относительном методе спутниковой геодезии только в рамках МНК [2] и нигде не анализируется обработка уравнивания зависимых приращений Δx, Δy, Δz. Причина последнего заключается в отсутствии опубликованных алгоритмов.

Рассмотрим основные формулы уравнивания зависимых и независимых результатов измерений и применим их к обработке нуль-свободных (без исходных пунктов) и свободных (с одним исходным пунктом) спутниковых GPS-сетей. Уравнивание зависимых геодезических измерений выполняется путём минимизации целевой функции

$$\Phi(X)=\left(\left|V\right|^{\frac{n}{2}}\right)^{Г}\cdot K_n^{-1}\cdot\left|V\right|^{\frac{n}{2}}, \qquad (3)$$

где $1^{z}_{\Lambda\prime x1}$ - вектор поправок в результаты измерений, вычисляемый в j-м приближении с использованием вектора координат определяемых пунктов $A''_{,xl}$; корреляционная матрица K_n вычисляется с помощью матриц по формуле [1]:

$$K_n = P_n^{-\frac{1}{2}} R P_n^{-\frac{1}{2}}; \qquad (4)$$

где

$$R_{N\times N}=\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1N} \\ & 1 & \cdots & r_{2N} \\ & sim & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь г - коэффициенты корреляции.

При уравнивании независимых величин используют следующие формулы.

Вектор поправок Bj-м приближении находят из выражения;

$$V_j = V_{j-1} - AFV_{j-1}, \tag{5}$$

где A_{NX1} - матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; ΛxW - расширенная псевдообратная матрица, определяемая для свободных и несвободных геодезических сетей по формуле:

$$F = (A^{T}CA)^{-1} A^{T}C.$$

Весовая матрица $C_{N}*_{N}$ *для* независимых результатов измерений будет такой:

$$C = P_n(di_a g\backslash v\backslash^{n'2}). \tag{6}$$

Для зависимых измерений используем формулы [1]:

$$x = -H'^{1}G, \tag{7}$$

где H_{lxl} — матрица Гессе (вторых частных производных от функции (1)):

$$H = Z + A^{T}C_2A_1 \tag{8}$$

где Z_{lxl} - матрица, элементы которой вычисляются с использованием A и C_1 по формуле:

$$Z_{i'j} = \sum_{lt=l}^{N}\sum_{r=l}^{N} a_k{}^{\wedge}{}_{kj}\text{-}(C_l\backslash_{r'} \tag{9}$$

Матричную запись для матрицы Z найти не удалось.

Матрица для градиента, входящего в (7) вычисляется по формуле

$$G = A^{T}\text{-}C_3\text{-}I, \tag{10}$$

∏W⁄АГМ|=[1.... 1Lr·

$$C_1 = K_n^{-1} \boxdot \left\{ \frac{n \cdot |n-2|}{2} |L(X)|^{\frac{n-4}{2}} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^{T} \right\}, \tag{H}$$

$$C_2 = K;^{1} \square S\ п \left\{ |L(X)|\sim\Gamma^{\wedge}\ S \left[\sim\cdot|L(X)fr^{\frac{n}{2}} \right] \right\}» \tag{12}$$

(я-2, n-2 f)

$$C_3 = K_n^{-1} \square S \cdot \left\{ n \cdot |L(x)|^{\frac{n}{2}-2} \cdot \left[|L(X)|^{\frac{n}{2}} \right]^T \right\}, \qquad (13)$$

где S_{NxN} - диагональная матрица сигналов (единиц на диагонали с знаком числа Z,(%)); знак □ означает поэлементное умножение матриц. Например, A□B= $(\alpha_{ij}\, b_{lj})$.

В первом приближении при j = 1 в равенстве (3) используют V_{01} найденное по МНК. Приближения выполняются до тех пор, пока

$$\Phi_j(X)<\Phi_{j-1}(X), \qquad (14)$$

при $j<5$, чтобы остановить медленно сходящийся итерационный процесс.

Отметим, что с применением формулы (7) используются матрицы C_b C_2, C_3. Однако поправки в предварительные координаты можно вычислить по формуле

$$x = -F\times L(X), \qquad (15)$$

где

$$F = H^{-1}A^TC_2 \qquad (16)$$

и, следовательно, используются матрицы C_1 и C_2, а матрицу C_3 можно не вычислять.

Оценку точности выполним по известной формуле [1]:

$$Q = f\kappa_n f^\tau, \qquad (17)$$

где

$$f = \frac{2}{n \cdot n} F; \qquad (18)$$

$$\mu = \sqrt{\frac{V^\tau K_1^{-1} V}{N-I}}, \qquad (19)$$

$$V = Ax+ L(X). \qquad (20)$$

Если нет исходных пунктов, то [3]

$$R_{j,,}=(H+i^\tau \cdot i\Gamma^{-1}-i^\tau(i \cdot i^\tau\ i\ i^\tau)^{-1}i, \qquad (21)$$

в которой для нивелирной сети

$$i = (1\ 1\ 1\ 1\ \dots\ 1),$$

а для GPS-сети

$$i_{3*t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Вместо (21) можно записать

$$R \div_t = (H + If^1 - A - I, \quad k^2 \qquad (23)$$

где

$$I_{t*t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ i \\ \dots \\ i \end{pmatrix} \qquad (24)$$

легко записывается программным путём при t = 3 × к (к - количество пунктов GPS-сети).

Для плановой геодезической сети

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots 0 & & 1 \\ \eta & -*1 & \times 2 & -Y_2 & \dots \Pi & & -*, \\ 1*1 & Ii & *2 & \times 2 & -X_1 & & Ii \end{pmatrix}, \qquad (25)$$

в которой $X_i = x_i - x_{ср}$; $Y_i = y_i - y_{ср}$ - уклонения от среднего арифметического, полученного по координатам всех пунктов геодезической сети.

В таблицах 1 - 8 приведены следующие сведения: μ - СКО единицы веса, вычисляемая по формуле (19); M_k - ошибки положения пункта, м; Δx, Δy, Δz - разности уравненных координат между значениями при п = 2,1 и при другом значении п. Для плановой сети [4, с. 217] и для GPS-четырёхугольника эти величины даются в миллиметрах.

Последняя колонка в таблицах 1 - 8 соответствует многокритериаль. ному уравниванию, когда отыскиваются степени и для каждого измерения под условием [5]:

$$\Phi_2 = \min \max N. \tag{26}$$

Таблица 1

Результаты вычислений линейно-угловой триангуляции без использования корреляционной матрицы

Обозначение	n= 1,1	п- 1,5	n = 2,1	n = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
.Р	0,852	0,877	1,014	1,552	4,304	1,079
M_1	0,0368	0,0201	0,0067	0,0085	0,0223	0,0058
M_2	0,0587	0,0295	0,0116	0,0139	0,0365	0,0093
Г Mj	0,0674	0,0314	0,0105	0,0133	0,0349	0,0087
Дхi	1	0	0	-I	-1	0
Ду,	-3	-2	0	1	2	0
Дхт	-2	-2	1	0	-1	0
Дуг	-6	-3	0	1	2	0
Дхз	-3	-3	0	1	1	-1
Дуз	-3	-2	I	I	1	1

Таблица 2

Результаты вычислений линейно-угловой триангуляции с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n=l,l	п = 1,5	л = 2,1	п = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	1,398	1,266	1,514	2,033	4,813	1,744
Mi	0,0669	0,0137	0,0041	0,0025	0,0033	0,0018
M_2	0,1101	0,0237	0,0066	0,0039	0,0049	0,0024
M_3	0,1490	0,0254	0,0052	0,0032	0,0042	0,0024
ДХ1	1	0	0	0	0	0
Дуi	-4	-2	0	1	1	-1
ДХ2	3	-3	0	-1	-1	-2
ДУ2	-15	-1	0	2	3	1
Дхз	1	-6	0	0	0	-5
ДУз	-6	-4	0	0	-1	-3

Таблица 3

Уравнивание линейно-угловой триангуляции без исходных пунктов и без корреляционной матрицы

Обозначение	n=l,l	n = 1,5	n = 2,l	n = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	0,958	0,993	1,154	1,816	5,114	1,097
Mi	0,0266	0,0078	0,0038	0,0047	0,0124	0,0035
M_2	0,0345	0,0111	0,0042	0,0047	0,126	0,0039
M_3	0,0389	0,0137	0,0046	0,0056	0,0151	0,0042
M_4	0,0271	0,0117	0,0051	0,0068	0,0186	0,0044
M_5	0,0223	0,0086	0,0046	0,0056	0,0149	0,0044
ДХ|	1	1	0	-1	-1	0
Дуi	1	0	0	1	1	0
ДХ2	0	0	0	0	0	1
ДУ2	-2	-1	1	1	2	1
Дхз	-3	-2	0	1	2	-1
Дуэ	-1	-1	0	-1	-1	0
Дх<	0	0	0	0	0	-1
ДУ4	1	1	0	-1	-1	0
$Дх_5$	1	1	0	0	-1	1
ДУЭ	1	0	0	0	-1	-1

Таблица 4

Уравнивание линейно-угловой триангуляции без исходных пунктов с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n= 1,1	n= 1,5	n = 2,l	n = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	1,457	1,536	1,719	2,359	5,675	2,216
M_1	0,0183	0,0075	0,0020	0,0012	0,0016	0,0009
M_2	0,0482	0,0120	0,0024	0,0012	0,0016	0,0011
M_3	0,0651	0,0122	0,0026	0,0014	0,0019	0,0011
M_4	0,0398	0,0084	0,0025	0,0015	0,0019	0,0009
M_5	0,0245	0,0088	0,0024	0,0012	0,0016	0,0011
ДХ|	1	-1	0	0	0	0
SiJ	4	0	0	0	0	-1
Дхг	0	-2	0	0	1	1
I ДУ2	-2	-1	1	1	2	“ 1
: Дхэ	1	0	1	1	1	0
I ДУЭ	-3	2	0	0	-1	0
Дхд	-5	0	0	0	0	-1
$Ду_4$	1	0	0	-1	-1	1
Дхэ	3	3	0	-1	-1	1
Дуэ	0	-1	0	0	-1	-1

Iаблица5

Уравнивание сети GPS без использования корреляционной матрицы

Обозначение	п = 1,1	n = 1,5	n = 2,l	n = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	0,064	0,128	0,401	0,900	2,504	0,075
M_1	0,0086	0,0074	0,0085	0,0079	0,0079	0,0042
M_2	0,0065	0,0064	0,0077	0,0070	0,0068	0,0040
M_3	0,0072	0,0067	0,0081	0,0075	0,0073	0,0039
ZUi	1.1	0,6	0	-0,1	-0,2	-0,1
Дуi	6,6	3,6	0	-1,0	-1,6	r- 0
ZUi	1,7	1,2	0	-0,5	-0,8	0,2
Дх$_2$	0,3	0,3	0	-0.1	-0,2	0
ДУ2	4,6	2,4	0	-0,6	-0,9	0
ZIz$_2$	3,7	2,0	0	-0,6	-0,9	0,3
Дх$_3$	0.0	0,0	0	0,0	0,0	-0,1
Дуз	2,4	1,1	0	-0,3	-0,5	0
Zlz$_3$	2,0	1,4	0	-0,5	-0,8	0

Таблица 6

Уравнивание сети GPS с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	n= 1,1	n = l,5	n = 2,l	n = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	0,142	0,147	0,404	0,904	2,459	0,310
M_1	0,2042	0,0251	0,0093	0,01	0,0709	0,0048
M_2	0,1509	0,0252	0,0065	0,0097	0,0195	0,0046
M_3	0,1769	0,0146	0,0104	0,0288	0,0354	0,0048
Дх.	7,0	2,5	0	-1,7	0,7	-1,3
Дуi	7,9	3,4	0	-1,2	-2,4	-0,9
ZUi	6,5	0,9	0	-0,5	-0.3	0
ДХ2	-11,5	0,4	0	-0,1	0,1	1,8
Zb·2	2,6	2,3	0	-0,5	-1,2	-0,1
ZIz$_2$	0,6	2,3	0	-0,3	-0,7	0,5
Дхз	-11,5	-1.4	0	0,1	0,6	1,5
Zb·3	6,1	2,2	0	-0,5	1,1	0,2
ZIz$_3$	6,4	1,2	0	0,3	-0,8	-0,6

Таблица 7

Уравнивание сети GPS без исходных пунктов и без корреляционной матрицы

Обозначение	п - 1,1	n=l,5	n = 2,l	n = 2,5	п = 3,0	Многокритериальным
μ	0,079	0,156	0,491	1,102	3,066	0,120
Mi	0,0060	0,0051	0,0058	0,0054	0,0054	0,0030
M_2	0,0041	0,0042	0,0049	0,0044	0,0041	0,0027
M_3	0,0050	0,0047	0,0057	0,0053	0,0054	0,0027
M_4	0,0059	0,0054	0,0064	0,0059	0,0058	0,0030
Дх>	0,7	0,4	0	-0,1—	-0,2	0
Дуi	3,2	1,8	0	-0,5	-0,9	0
⅞,	-0,1	0,1	0	-0,1	-0,1	0,4
Дхг	-0.1	0,0	0	-0,1	-0,1	0,1
Дуг	1,2	0,6	0	-0,1	-0,2	0,4
Дгг	1,9	0,9	0	-ОД	-0,3	0,7
Дхз	-0,3	-0,2	0	0,1 ..	0,1	-0,1
ДУз	-0,9	-0,6	0	0,2	0,3	-0,3
⅛3	0,2	0,3	0	-0,1	-0,2	0,2
Ли	-0,3	-0,2	0	0,1	0,2	0
Ду<	-3,4	-1,8	0	0,4	0,7	-0,9
Ли	-1,8	-1,1	0	0,4	0,7	-1,1

Таблица 8

Уравнивание сети GPS без исходных пунктов
с использованием корреляционной матрицы

Обозначение	п = 1.1	n= 1,5	п = 2,l	п = 2,5	n = 3,0	Многокритериальным
μ	0,174	0,180	0,494	1,108	3,011	0,464
M_1	0,1939	0,0299	0,0104	0,0183	0,0549	0,0029
M_2	0,2306	0,0273	0,0059	0,0065	0,0147	0,0027
M_3	0,1635	0,0187	0,0108	0,0273	0,0288	0,0029
M_4	0,0723	0,0068	0,0044	0,0091	0,0344	0,0029
ДХ|	11,0	2,2	0	-1,3	0,3	-1,3
I Ду>	3,8	1,4	0	-0,6	-1,8	-1.5
№i	3,1	-0,2	0	-0.3	од	0
Дхг	-7,5	0,0	0	0,3	-од	1,1
ДУг	-1,6	0,3	0	0,1	-0,6	-0,5
№г	-2,8	1,2	0	-од	-0,3	о,6
Дхз	-7,5	-1,8	0	0,5	ОД	0,6
ДУз	1,9	0,2	0	■ 0,1	1,7	1,7
Дгз	3,0	0,1	0	0,4	-0,4	-о.з
Ли	4,0	-0,4	0	0,4	-о,з	-0,4
ДУ4	-4,1	-2,0	0	0,5	0,6	0,3
$Дz_4$	-3,4	-1,1	0	0,1	0,5	-0,3

По данным таблиц 1 - 8 можно сделать следующие выводы:

1) расхождение координат при разных п для плановой сети не превосходит 6 мм, а для сети GPS - 8 мм;

2) при отсутствии корреляции величины Δx, Δy, Δz равны нулю как для плановых сетей, так и для сетей GPS при многокритериальном уравнивании;

3) **ВО ВСеХ СЛуЧаЯХ Ммногокритеряальное $< M_{11}$ — 2.0-**

В заключение отметим, что результаты, приведенные в таблицах 1 - 8, могут быть применены при отладке соответствующих программ.

ЛИТЕРАТУРА

*

1. Мицкевич, В.И. Алгоритм обобщённого метода Lp-оценок на основе метода Ньютона / В.И. Мицкевич, А.Ю. Будо // Веста. Полоц. гос. ун-та. - 2006. - № 9. - С. 92 - 96.
2. Кемниц, Ю.В. Математическая обработка зависимых результатов измерений /Ю.В. Кемниц. - М.: Недра, 1970. - 192 с.
3. Маркузе, Ю.И. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: справ, пособие / Ю.И. Маркузе, Е.Г. Бойко, В.В. Голубев. - М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 1994.-431 с.
4. Практикум по высшей геодезии (вычислительные работы): учеб, пособие для вузов / Н.В. Яковлев [и др.]. - М.: Недра, 1982. - 368 с.
5. Мицкевич, В.И. Применение многокритериальной оптимизации при проектировании и уравнивании геодезических сетей / В.И. Мицкевич // Веста. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. - 2004. - № 4. - С. 77 - 79.