СЕКЦИОННЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

ЗАСЕДАНИЕ № 1
ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

УДК 621.396; 534.41

ДОСТОВЕРНОСТЬ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ СЛОЖНЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, И.Б. БУРАЧЕНОК, С.В. ЛАВРОВ
Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», г. Новополоцк, Республика Беларусь
А.Г. ФИЛИППОВИЧ, М.М. БАРАНОВСКИЙ
Оперативно-аналитический центр при Президенте Республики Беларусь, г. Минск

Введение. До недавнего времени из-за существования довольно простых способов генерирования различных сложных сигналов, например, использование обычных аналоговых схем, в практике спектрального анализа основное место занимали гармонические базовые функции. Однако широкое распространение программных средств цифровой обработки сигналов открыло возможность проведения анализа различного рода кривых практически в любой базисной системе. Цифровые, или, как их часто называют дискретные методы анализа, вызывают наибольший интерес у специалистов, так как чем меньше интервал дискретизации (чем выше частота дискретизации), тем точнее отображается исходная функция (форма восстановленного сигнала приближается к оригиналу), и тем меньше ошибки квантования сигналов [1]. Несмотря на то, что при этом увеличивается и количество обрабатываемой информации, что требует увеличения как объема памяти, так и быстродействия устройства обработки информации возможности современных вычислительных систем делают это направление актуальным.

Целью представленного в статье исследования является повышение достоверности оценки параметров сложных сигналов при дискретном преобразовании.

Основными подлежащими решению являются задачи исследования математических методов оценки параметров сложных систем и возможностей повышения точности оценки параметров сигналов, которые позволяют при надлежащем выборе формы сигнала найти основные динамические характеристики исследуемой системы.

Базисной системой называют систему функций $\{f_k(t)\}$, а представление кривой в виде суммы функций $X(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(t)$ называется ее разложением по системе базисной функций. Для выбранной системы функций кривая может быть полностью охарактеризована набором весовых коэффициентов $\{a_k\}$ или зависимостью $a(k)$, а одна и та же кривая в зависимости от выбранной системы базисных функций может иметь кривые различных типов. Любую сложную функцию в соответствии с методами линейной теории можно аппроксимировать суммой более простых функций, обладающих ортогональностью. Разложение функций возможно по различным системам: разложение по системе непрерывных ортогональных функций; разложение по системе дискретных функций (конечное число отсчетов); разложение тригонометрических функций, разложение по системе дельта-функций и др. [2].

Далее остановимся на исследовании разложения по системе дельта-функций. Дискретным называется сигнал, квантованный по уровню и по времени (или по уровню и времени одновременно). При квантовании по уровню все возможные значения сигнала в каждый момент времени представляются некоторым конечным числом разрешенных уровней, отстоящих друг от друга на конечные интервалы. Дискретизация сигналов может приводить к определенной потере информации о поведении сигналов в промежутках между отсчетами. Однако существуют условия, определенные теоремой Котельникова, согласно которой аналоговый сигнал с ограниченным частотным спектром может быть без потерь информации преобразован в дискретный сигнал, и затем абсолютно точно восстановлен по значениям своих дискретных отсчетов [2]. Однократно квантованный сигнал (т. е. квантованный только по уровню или только по времени) иногда рассматривают как дискретно-непрерывный, считая дискретным только сигнал, одновременно квантованный как по уровню, так и по времени [3]. В системах цифровой обработки данных сигнал всегда является цифровым, так как представлен с точностью до определенного количества разрядов. Поэтому при описании цифровых сигналов функция квантования обычно опускается (подразумевается равномерной по умолчанию), а для описания сигналов используются правила описания дискретных сигналов. Множество значений непрерывной кривой, полученное в процессе ее дискретизации по временной оси, обусловливает получение дискретного сигнала. Способ дискретизации непрерывной кривой определяется фиксированным количеством временных отсчетов одинаковой длительностью по оси времени. Примером дискретного сигнала с квантованием по времени является модулированная по амплитуде последовательность идеальных импульсов.

Идеальный единичный импульс рассматривается как сигнал в виде так называемой дельта-функции [3], свойства которой определяются отношениями:

$$\delta(t-\xi)=\begin{cases}0 \text{ при } t\neq\xi\\ \infty \text{ при } t=\xi\end{cases} \quad (1)$$

$$\int_a^b f(t)\delta(t-\xi)dt=f(\xi), \quad (2)$$

где $\delta(t-\xi)$ – дельта-функция, t – время, ξ – момент действия импульса, a и b – произвольные действительные числа (в том числе и $\pm\infty$).

Представленная математическая модель идеализирует реальный импульс в том смысле, что определяет его длительность равной нулю, а уровень – равный бесконечности, что сразу исключает из рассмотрения эти параметры. Однако «площадь» такого идеализированного импульса конечна и равна единице, так из (2) при $f(t)=1$ следует

$$\int_a^b \delta(t-\xi)dt=f(\xi),\ \ a<\xi<b, \quad (3)$$

Таким образом, единственным параметром этого сигнала является момент его действия ξ. Если положить, что $a=0$, $b=t$, то из (3) получим

$$\int_0^t \delta(t-\xi)dt=1,\ \ a<\xi<b, \quad (4)$$

откуда следует, что интегрирование сигнала в виде дельта-функции дает постоянную величину, равную единице.

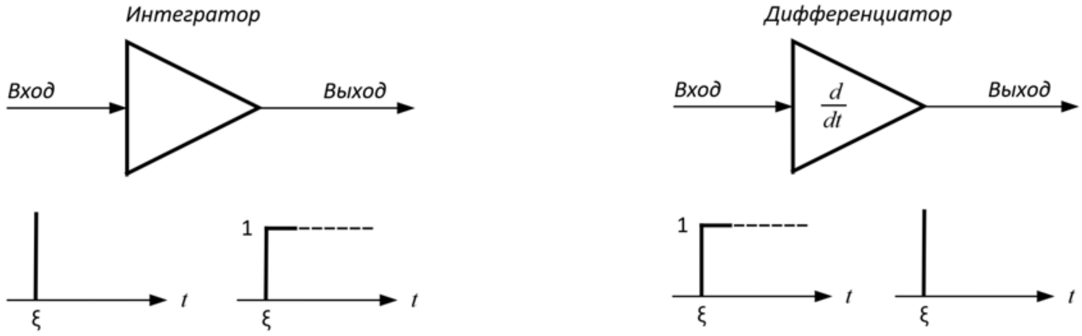
Так как импульс действует в момент времени $t=\xi$, значение интеграла отлично от нуля для $t>\xi$ (символически можно обозначить единичной функцией $1(t-\xi)$ [3]). Тогда выражение (4) можно записать следующим образом

$$\int_0^t \delta(t-\xi)dt=1(t-\xi). \quad (5)$$

Если продифференцировать выражение (5) по времени, получим

$$\delta(t-\xi)=\frac{t}{dt}1(t-\xi). \quad (6)$$

Таким образом, если подать на вход интегратора сигнал, представленный дельта функцией, то на выходе получим сигнал в виде единичной функции (рис. 1, *а*). Подача на вход дифференциатора единичной функции на выходе дает дельта-функцию (рис. 1, *б*).



а – формирование единичной функции *б* – формирование дельта функций

Рис. 1. Модели формирования единичной и дельта-функций

Это доказывает то, что масштаб единичной функции можно изменить любым образом, достаточно лишь умножить ее на любую постоянную величину. При этом дельта-функция будет иметь тот же постоянный множитель, обозначающий изменение «площади» дельта-функции в соответствующее число раз (по сравнению с единицей) [3].

С помощью дельта-функций можно представить идеализированную последовательность импульсов постоянного или переменного уровней с интервалами следования T_n, как показано на рис. 2.

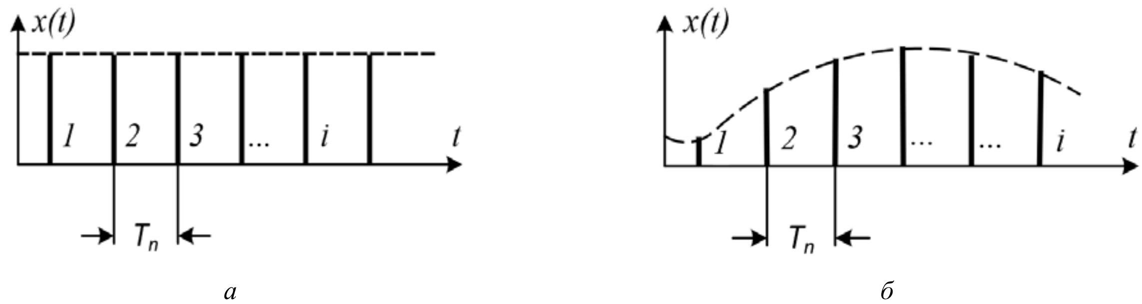


Рис. 2. Идеализированная последовательность импульсов с постоянными интервалами следования: *а* – постоянного уровня; *б* – переменного уровня

В первом случае можно записать:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a\delta(t - i\mathrm{T}_n). \tag{7}$$

Во втором случае:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} x(i\mathrm{T}_n)\delta(t - i\mathrm{T}_n). \tag{8}$$

При этом следует иметь в виду символический характер множителей а в формуле (7) и $x(i\mathrm{T}_n)$ в формуле (8), которые определяют «площади» соответствующих дельта-функций (так как уровни дельта-функций бесконечно велики).

В настоящее время в большинстве случаев произвольный детерминированный сигнал представляется в виде совокупности элементарных сигналов. Известно, что всякая функция $x(t)$, удовлетворяющая на промежутке $0 \le t \le T$ условиям Дирихле:

а) интервал, на котором функция определена, может быть разбит на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $x(t)$ непрерывна и монотонна;

б) во всякой точке разрыва функции $x(t)$ существуют значения $x(t+0)$ и $x(t-0)$); может быть разложена в ряд Фурье, т. е. представлена точно или приближенно суммой гармоник с соответствующими постоянными коэффициентами.

Таким образом, если функция $x(t)$ имеет конечную длительность, то она может быть представлена суммой элементарных детерминированных сигналов типа синусоиды. При этом каждый элементарный сигнал характеризуется своей амплитудой (можно определить по формуле $C_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2\pi kj\frac{t}{T}}dt$), и частотой $\frac{2\pi k}{T} = \omega_k$. Расстояние между соседними частотами гармоник по оси частот равно $2\pi/T$.

Разложение функции $x(t)$ на бесконечную последовательность дельта-функций с «площадями», определяемыми соответствующими значениями самой же разлагаемой функции имеет большое значение в теории линейных систем, так как позволяет определять реакцию системы на произвольный входной сигнал простой суперпозицией более простых реакций на воздействие в виде дельта-функций.

Математически дискретные сигналы представляются в виде непрерывных последовательностей чисел – дискретных функций. Например, квантование по времени заменяет непрерывную функцию решетчатой, которая определяется совокупностью выделенных ординат, или дискрет. Эти ординаты, или дискреты, модулируют некоторую последовательность импульсов. Решетчатой называют функцию $f[nT]$, заданную дискретными значениями через равностоящие интервалы времени, т. е. В моменты времени $0, T, 2T, \ldots$ [4], например, как показано на рис. 3.

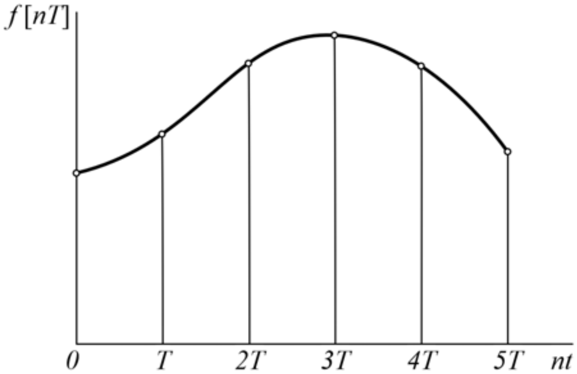


Рис. 3. Решетчатая функция

В промежутки времени функция $f[nT]$, равна нулю. Число может n принимать целые положительные значения. Решетчатую функцию (РФ) можно образовать из любой числовой таблицы. Ее можно образовывать и из непрерывной функции, придавая ее аргументу кратные T значения. При переходе от непрерывной функции к решетчатой масштаб времени изменяют таким образом, чтобы интервал времени между смежными значениями аргумента равнялся 1. Например, если задана непрерывная функция $f(t) = \mathrm{e}^{a_1 t}$, то введя время $\overline{t} = \frac{t}{T}$, получим $f(\overline{t}) = \mathrm{e}^{a\overline{t}}$, где $a = a_1 T$. РФ обозначается либо как $f[nT]$, либо как $f[n]$. Одной и той же решетчатой функции $f[n]$ может соответствовать несколько непрерывных функций.

Поиск и установление сложных систем с помощью математической модели исследуемого объекта реализуется на основе определения входных воздействий и откликов. Точность модели обеспечивается высокой точностью измерений ее определяющих параметров.

Далее подробно остановимся на разности k-го порядка РФ. В теории РФ огромную роль играет разность 1-го порядка [5]

$$f[n] = f[n+1] - f[n] \tag{9}$$

$\Delta f[n]$ равно приращению РФ при переходе от аргумента n к аргументу $n+1$.

Разность 2-го порядка

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n] = f[n+2] - f[n+1] - f[n+1] + f[n] = f[n+2] - 2f[n+1] + f[n]. \tag{10}$$

Разность k-го порядка [5]

$$\Delta^k f[n] = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \frac{k!}{\nu!(k-\nu)!} f[n+k-\nu]. \tag{11}$$

В качестве примера рассмотрим

1. функцию $f[n] = an^2$ – в соответствии с (9) для нее

   –первая разность записывается $\dfrac{f[n]}{a} = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$;

   –вторая разность записывается $\dfrac{\Delta^2 f[n]}{a} = (n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2 = 2$.

2. функцию $f[n] = e^{an}$ – в соответствии с (9) для нее

   –первая разность записывается $f[n] = e^{a(n+1)} - e^{an} = e^{an}(e^a - 1)$;

   –вторая разность записывается $\Delta^2 f[n] = e^{a(n+2)} - 2e^{a(n+1)} + e^{an} = e^{an}(e^a - 1)^2$.

Из теории уравнений в конечных разностях, рассмотренной в книге Я.З. Цыпкина [5] уравнением p-го порядка в конечных разностях, или разностным уравнением p-го порядка называют уравнение, в которое входят неизвестная функция $y = [n]$ и ее разности до p-го порядка включительно:

$$b_p \Delta^p y[n] + b_{p-1} \Delta^{p-1} y[n] + \ldots + b_0 y[n] = f[n], \tag{12}$$

где $b_p, b_{p-1}, \ldots$ – коэффициенты; $f[n]$ – внешняя сила, воздействующая на систему.

Существует и вторая форма уравнений в конечных разностях. Ее получают из (12) , заменяя все разности (начиная с $\Delta y[n]$ и заканчивая $\Delta^p y[n]$) на их выражениях через $y[n+1],\ y[n+2], \ldots, y[n+p]$, в соответствии с формулой (11).

Если затем объединить слагаемые с одинаковыми значениями аргументов функции y, т. е. слагаемые с $y[n],\ y[n+1]$, вплоть до $y[n+p]$, то получим следующее

$$a_p y[n+p] + a_{p-1} y[n+p-1] + \ldots + a_0 y[n] = f[n], \tag{13}$$

Уравнение в конечных разностях в отличие от дифференциальных уравнений обладает особенностями:

1) записанное в виде (13) оно позволяет определять последующие значения отклика системы $y[n+p]$ через значения отклика в предыдущие моменты времени, т. е. через значения $y[n+p-1], y[n+p-2], \ldots$, вплоть до $y[0]$ и через значения вынуждающей силы $f[n]$.

2) если условно называть порядком разностного уравнения разность максимального и минимального значения аргументов функции y этого уравнения, то порядок разностного уравнения не всегда совпадает с порядком наивысшей разности того же уравнения.

Заключение. В работе показано, что любую сложную функцию в соответствии с методами линейной теории можно аппроксимировать суммой более простых функций, обладающих ортогональностью, каждая из которых несет только свою долю информации, содержащейся в кривой. Установлено, что одни и те же функции можно разложить не только по синусам и косинусам, но и по другим ортогональным базисным системам. В частности, в качестве ортогональных функций могут быть использованы различного типа многочлены. Дискретный сигнал в процессе его анализа может быть разложен только по системам дискретных базисных функций, у которых отсчеты времени совпадают с отсчетами сигнала. Наиболее значимые результаты получены с использованием разложения непрерывной функции на дельта-функции.

Список литературы

1. Бураченок, И. Б. Обнаружение первичных признаков речевого сигнала / И. Б. Бураченок, В. К. Железняк // Вестник Полоцкого государственного университета. – 2020. – № 12. – С. 2-12.
2. Анцыферов, С. С. Общая теория измерений : учеб. пособие / С. С. Анцыферов, Б. И. Голубь / под ред. Акад. РАН Н.Н. Евтихиева. – М. : Горячая линия – Телеком, 2007. – 176 с.
3. Солодов, А .В. Теория информации и ее применение к задачам автоматического управления и контроля / А. В. Солодов. – М. : Наука, 1967. – 432 с.
4. Бессонов, Л.А. Линейные электрические цепи : учеб. пособие для электротехн. и радиотехн. специальностей вузов / Л.А. Бессонов. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1974. – 320 с.
5. Цыпкин, Я. З. Основы теории автоматических систем : учеб. пособие / Я.З. Цыпкин. – М. : Наука, 1977. – 560 с.