УДК 004.056

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОТ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ РАУСА-ГУРВИЦА В СИСТЕМАХ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ

С.Н. ШУСТОВСКИЙ, В.К. ЖЕЛЕЗНЯК
*Учреждение образования Полоцкий государственный университет,
г. Новополоцк, Республика Беларусь*

Введение. Одной из основных проблем при проектировке электрических систем является задача анализа устойчивости. Электрическая цепь может выполнять свои функции, когда она устойчива. Исключением являются автоколебательные цепи, которые по определению должны быть неустойчивы на заданной частоте. Электрическую цепь можно обозначить, как устойчивую тогда, когда свободные колебания внутри затухают с течением времени. В противном случае электрическая цепь неустойчива и работает в режиме самовозбуждения внутренних контуров. Устойчивость является одним из самых важных критериев при проектировке электро- и радиоаппаратуры, содержащей усилители. В особенности важна устойчивость систем связи, как военных, так и государственных. Такая аппаратура должна быть защищена не только от внешних воздействий, но и от внутренних нежелательных процессов. Понятие устойчивости в данном случае и является защищенностью, так как при неустойчивости системы некоторая информация будет излучаться и приводить к утечке данных. При определении устойчивости существует ряд определенных сложностей. Для определения устойчивости нужно составить характеристическое уравнение системы и вычислить корни. Для цепей высокого порядка вышеперечисленные математические операции очень громоздки, а нули полиномов в аналитической форме найти принципиально невозможно [1]. Критерий устойчивости Рауса-Гурвица имеет ряд особенностей, в связи с которыми он более применим для анализа цепи высокого порядка расчетно-аналитическим методом, в отличие от критериев Михайлова, Найквиста, требующих построения сложных годографов в комплексной плоскости и произведения объемных математических операций.

Цель: показать перспективность применения метода Рауса-Гурвица при расчете устойчивости электрических цепей высокого порядка с обратной связью. Показать пример составления характеристического уравнения электрической цепи с использованием передаточной функции и обратной связи. Рассчитать устойчивость по Гурвицу в общем виде. Для облегчения определения устойчивости введем понятие передаточной функции и обратной связи, что позволит сократить количество математических операций для получения характеристического уравнения.

1. **Расчет передаточной функции.** Рассмотрим передаточную функцию на примере цепи с обратной связью, последовательной по напряжению (ОС Н-типа), представляющую собой два сложных параллельно соединенных четырехполюсника, приведенной на рис. 1.

2. Для этого типа ОС запишем равенство (1) согласно Закону напряжений Кирхгофа в операторной форме:

$$U_{вх}(p) = U_1(p) - U_{ос}(p). \tag{1}$$

Для изображения выходного напряжения запишем равенство (2)

$$U_{вых}(p) = \left[U_1(p) - U_{ос}(p)\right] H(p), \tag{2}$$

где $H(p)$ – операторная передаточная функция по напряжению.

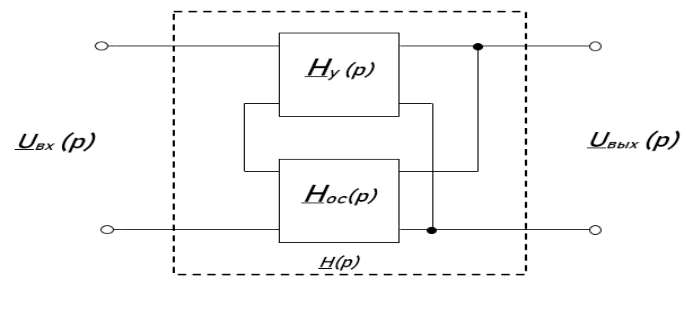

Рис. 1. Цепь с ОС Н-типа

Операторное изображение $U_{oc}(p)$ запишем через передаточную функцию ОС $H_{oc}(p)$, а напряжение $U_1(p)$ через передаточную функцию усилителя $H_y(p)$

$$U_{oc}(p) = U_{вых}(p) H_{oc}(p), \tag{3}$$

$$U_1(p) = U_{вых}(p) \times \frac{1}{H_y(p)}. \tag{4}$$

С учетом выражений (3) и (4) операторная передаточная функция по напряжению цепи (рис. 1) имеет вид: $H(p) = \dfrac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \dfrac{H_y(p)}{1 - H_y(p) \times H_{oc}(p)}$

Перейдем от оператора p к оператору $j\omega$, для получения комплексной передаточной функции: $H(j\omega) = \dfrac{U_{вых}(j\omega)}{U_{вх}(j\omega)} = \dfrac{H_y(j\omega)}{1 - H_y(j\omega) \times H_{oc}(j\omega)}$.

Произведение $H_y(j\omega) \times H_{oc}(j\omega) = H_p(j\omega)$ является передаточной функцией по петле ОС или петлевым усилителем.

Так же операторную передаточную функцию $H(p)$ можно представить как дробно-рациональную функцию с вещественными коэффициентами:

$$H(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0} = \frac{W(p)}{V(p)} \tag{5}$$

или

$$H(p) = H \frac{(p - p_0)(p - p_{02}) \cdots (p - p_{0n})}{(p - p_1)(p - p_2) \cdots (p - p_m)}, \tag{6}$$

где p_{01}, $p_{02}, \ldots, p_{0n}$ – нули; p_1, p_2, ..., p_m – полюсы передаточной функции; $H = \dfrac{a_n}{b_m}$.

Заменив в формуле (5) оператор p на $j\omega$, получим комплексную передаточную функцию цепи: $H(j\omega) = \left| H(j\omega) \right| e^{j\varphi(\omega)}$

Для определения вида частотно зависимой ОС воспользуемся кривой, описывающей конец вектора $H_p(j\omega)$ при изменении частоты, называемой годографом (рис 2).

Обратная связь называется положительной, если годограф $H_p(j\omega)$ лежит в правой, и отрицательной – если в левой полуплоскости комплексной плоскости. Отрицательная ОС применяется для стабилизации коэффициента усиления, подавления паразитных сигналов, коррекции частотных характеристик; положительная ОС может являться причиной неустойчивости цепи [2].

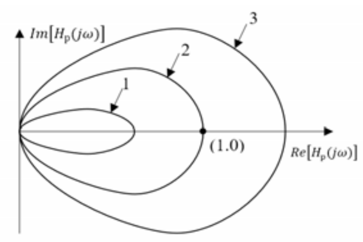

Рис. 2. Годограф ОС

Пусть H_{oc} и H_y – положительные вещественные числа. Тогда при $H_y \times H_{oc} = 1$, т. е. когда $H_{oc} = \dfrac{1}{H_y}$, значение передаточной функции стремится к бесконечности. Это означает, что даже при бесконечно малых значениях амплитуды входного напряжения $U_{вх}(t)$ амплитуда выходного напряжения $U_{вых}(t)$ $U_{вх}(t) = 0$ будет неограниченно возрастать. В этом случае наступает самовозбуждение цепи с ОС. Таким образом, термины неустойчивость и самовозбуждение являются синонимами.

2. Вычисление характеристического уравнения. Рассмотрим цепь с обратной связью и выведем для нее характеристическое уравнение.

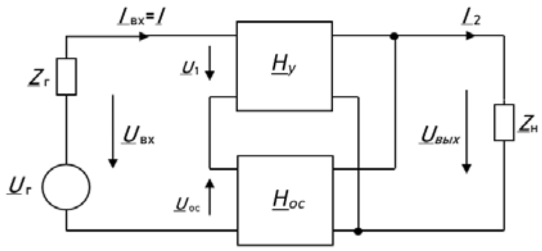

Рис. 3. Цепь с обратной связью, последовательной по напряжению

Пусть $U_{вх}(t)=0$, значит $U_{вх}(p)=0$, из рис. 3 следует: $U_{вых}(p)=\left[1-H_{ос}(p)\times H_{у}(p)\right]=0$. Для отрицательной и вещественной ОС согласно уравнению для коэффициента усиления усилителя, запишем:

$$H=\frac{H_{у}}{1+H_{у}\times H_{ос}} \tag{7}$$

Запишем передаточную функцию основной цепи в виде (5): $H_{ос}(p)=\dfrac{W_2(p)}{V_2(p)}$, $H_{у}(p)=\dfrac{W_1(p)}{V_1(p)}$. Тогда уравнение (7) перепишется следующим образом:

$$\frac{V_1(p)V_2(p)-W_1(p)W_2(p)}{V_1(p)V_2(p)}=0\,. \tag{8}$$

Равенство (8) выполнимо при условии: $V_1(p)V_2(p)-W_1(p)W_2(p)=0$

Так как левая часть равенства является полиномом, можно и необходимо записать ее в каноническом виде: $b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0=0$. Данное выражение является характеристическим уравнением рассматриваемой цепи.

3. Применение критерия Рауса-Гурвица. Имея характеристическое уравнение можно судить об устойчивости цепи по критерию Рауса-Гурвица.

Критерий Рауса-Гурвица относится к алгебраическим критериям устойчивости и позволяет по значениям коэффициентов b_m, b_{m-1}, b_0 характеристического уравнения, без определения его корней, узнать является ли исследуемая цепь устойчивой.

Критерий формулируется следующим образом: цепь с обратной связью является устойчивой, если полином характеристического уравнения, является полиномом Гурвица. При этом используется основное свойство полинома Гурвица: все его корни находятся в левой полуплоскости комплексной переменной *p*. [1]

Для того чтобы многочлен $b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0=0$ являлся полиномом Гурвица, необходимо и достаточно, чтобы были положительными определитель Рауса–Гурвица (9)

$$D_{n-1}=\begin{bmatrix} b_{m-1} & b_{m-3} & b_{m-5} & \cdots & 0 \\ b_m & b_{m-2} & b_{m-4} & \cdots & 0 \\ 0 & b_{m-1} & b_{m-3} & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

и все главные миноры этого определителя.

В первой строке записываются коэффициенты полинома Гурвица через один, начиная со второго. Во второй строке они записываются через один, начиная с первого. Вторая пара строк формируется путем смещения первой пары строк на одну позицию. Третья пара – смещением второй пары строк еще на одну вправо и т. д.

Если все n-1 главных миноров Гурвица положительны, а минор n-го порядка равен нулю: $\Delta n=0$, то система находится на границе устойчивости.

Таким образом расчет устойчивости цепи сводится к простому решению матрицы Гурвица, а основные затруднения может вызвать только лишь составление характеристического уравнения и определение вида ОС.

Заключение

1. Устойчивость цепи, вычисленная по критерию Рауса-Гурвица дает понятие о защищенности информации, так как устойчивая цепь не будет излучать сигналы, приводящие к утечке данных.

2. Метод Рауса-Гурвица применим для вычисления цепей любого порядка, что немаловажно при проектировании сложной аппаратуры связи.

3. Метод пригоден для анализа схем двойного назначения с разными параметрами элементов.

4. Так как вычисление устойчивости сводится к решению матрицы, возможно применить компьютерные методы вычисления, что позволит автоматизировать процесс

5. Метод позволяет определить запас устойчивости цепи, что довольно важно при проектировании оборудования, работающего в условиях влияния на него извне высокочастотных помех и импульсов.

Список литературы

1. Шамриков, Б. М. Основы теории цифровых систем управления : учебник для высш. техн. учеб. завед. / Б. В. Шамриков. – М. : Машиностроение, 1985. –С. 69–82.

2. Гуревич, И. В. Основы расчетов радиотехнических цепей (линейные цепи при гармонических воздействиях) / И. В. Гуревич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – М. : Связь, 1975. – С. 25–36.