Известия Гомельского государственного университета имени Ф.Скорины, 3(16) Вопросы алгебры (2000), 138–144
2000 Mathematics Subject Classification: 20D05

О подгруппах Шмидта простых неабелевых конечных K-групп

Э.М.Пальчик, О.В.Голубева

Посвящается профессору В.Гашюцу в связи с его 80-летием

В работе используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в источниках [1]-[5]. В частности, pd-группа — это группа, порядок которой делится на простое число p; p-замкнутая группа — это группа с нормальной силовской p-подгруппой; минимальная не p-замкнутая группа — не p-замкнутая группа, у которой все собственные подгруппы p-замкнуты.

Классическая теорема С.А.Чунихина касается роли подгрупп Шмидта (минимальных ненильпотентных групп) в теории конечных групп.

Теорема 1. ([6], теорема 4.3.1). *Если в конечной группе X нет p-замкнутых pd-подгрупп Шмидта, то группа X имеет нормальное p-дополнение.*

В этой работе исследуется следующий вопрос: что можно сказать о простой неабелевой конечной минимальной не p-замкнутой группе X, если в ней нет p-сверхразрешимых pd-подгрупп Шмидта, $p > 2$? Под K-группой мы понимаем конечную группу, у которой композиционные факторы являются известными простыми группами из множеств $\{Z_p\}$, $\{A_n, n \geq 5\}$, $\{Spor\}$, $\{Chev\}$.

Лемма 1. *Пусть $X \cong A_n, n \geq 5$. Предположим, что все собственные pd-подгруппы из X являются p-замкнутыми подгруппами для некоторого $p > 2$. Тогда $X \cong A_p$.*

Доказательство. Необходимо доказать, что в этом случае $n = p$. Исключим случаи $p > n$ и $p < n$.

Так как $\mid X \mid = n!/2$, то если $p > n$, p не делит порядок группы и, тем более, не делит порядок подгруппы из X.

Пусть $p < n$. Если $p > 2$ делит $(n-1)!/2$, то по условию группа A_{n-1} должна быть p-замкнутой, что невозможо ввиду простоты группы A_{n-1} для $n-1 > 4$. Если $n-1 = 4$, то $n = 5$ и группа A_5 удовлетворяет условию теоремы. Если $n-1 < 4$, то группа A_n $(n < 5)$ не удовлетворяет условию теоремы.

Пусть теперь $p > 2$ не делит $(n-1)!/2$, но p делит $n!/2$. Это значит, что $n = kp$. Предположим, что $k > 1$. Но тогда в X есть подгруппа $A_{(k-1)p} \subseteq A_{n-1}$. Этот случай уже рассматривался выше.Пусть $X \cong A_n, n \geq 5$. Предположим, что все собственные pd-подгруппы из X являются p-замкнутыми подгруппами для некоторого $p > 2$. Тогда $X \cong A_p$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $X \in Spor$. Пусть P — силовская p-подгруппа из X, $p > 2$. Предположим, что все собственные pd-подгруппы из X являются p-замкнутыми группами. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:*

(1) $X \cong M_{23}$, $p = 23$, $N(P)$ — максимальная в X подгруппа Фробениуса порядка $23 \cdot 11$;

(2) $X \cong J_1$, $p = 7, 19$, $N(P)$ — максимальная в X подгруппа Фробениуса порядка $7 \cdot 6$ или $19 \cdot 6$;

(3) $X \cong J_4$, $p = 29, 37, 43$, $N(P)$ — группа Фробениуса порядка $29 \cdot 28$, или $37 \cdot 12$, или $43 \cdot 14$;

(4) $X \cong F_{23}$, $p = 17$, $N(P)$ — группа Фробениуса порядка $17 \cdot 16$;

(5) $X \cong Ly$, $p = 37, 67$, $N(P)$ — группа Фробениуса порядка $37 \cdot 18$ или $67 \cdot 22$;

(6) $X \cong F'_{24}$, $p = 29$, $N(P)$ *— группа Фробениуса порядка* $29 \cdot 7$;

(7) $X \cong F_3$, $p = 13, 19$; *если* $p = 19$, *то* $N(P)$ *— группа Фробениуса порядка* $19 \cdot 8$, *а если* $p = 13$, *то* $N(P) \cong ((13 \cdot 6) \times 3) \cdot 2$ *(здесь* $a \cdot b$ *означает расщепляемое расширение группы порядка* a *с помощью группы порядка* b *и нормальная подгруппа содержит свой централизатор в этом расширении; знак* $\times$ *означает прямое произведение)*;

(8) $X \cong F_2$, $p = 47$, $N(P)$ *— группа Фробениуса порядка* $47 \cdot 23$;

(9) $X \cong F_1$, $p = 59, 71$, $N(P)$ *— группа Фробениуса порядка* $59 \cdot 29$ *или* $71 \cdot 35$.

Доказательство. Почти все подгруппы спорадических простых групп известны ([7–14]). Поэтому доказательство сводится к обнаружению у X подходящих не p-замкнутых собственных подгрупп. Для примера рассмотрим две группы: F_{22} и F_1.

$|F_{22}| = 2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. F_{22} содержит по [7] подгруппу M_{22} порядка $2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, которая не p-замкнута для любого нечетного p, $p \neq 13$. Кроме того, F_{22} содержит [7] подгруппу $\Omega_7(3)$ порядка $(1/2) \cdot 3^9(3^2-1)(3^4-1)(3^6-1)$. Так как $(3^6-1) = (3^3-1)(3^3+1)$, то 13 делит $|\Omega_7(3)|$ и подгруппа $\Omega_7(3)$ не 13-замкнута. Поэтому F_{22} не удовлетворяет условию леммы и не встречается в заключении.

$|F_1| = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$.

Группа F_1 содержит по [7] подгруппы: F_2, Suz, F_3, F_5, He. Порядок группы F_2 делится по [7] на нечетные простые числа 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47. Ясно, что F_2 не p-замкнута ни для одного такого простого делителя p. Таким образом, эти простые делители не удовлетворяют условиям леммы.

Из [12] известно, что F_1 содержит F_{24}, порядок которой делится на 29. Таким образом, $p = 29$ также исключается.

Кроме того, из [7] известно, что F_1 содержит подгруппу изоморфную $\Omega_8^-(3)$, порядок которой делится на $3^4 + 1 = 41 \cdot 2$ ([3], стр. 8). Поэтому $p = 41$ также исключается. Простые делители $p = 59$ и 71 указаны в заключении (9) леммы. Строение $N(P)$ также указано в [7].

Аналогично проверяются на основании информации из [7]-[14] и остальные спорадические простые группы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* X *— конечная простая неабелева* K*-группа с* S_p*-подгруппой* P, $p > 2$. *Если все собственные подгруппы из* X *являются* p*-замкнутыми, то*

(1) P *есть* TI*-подгруппа в* X;

(2) P *— циклическая группа.*

Доказательство. Пусть $N = N_X(P)$, $1 \neq P_0 \subset P$, $N(P_0) = N_0$. По условию теоремы N_0 есть p-замкнутая группа. Пусть P_0^* – S_p-подгруппа в N_0. Тогда $P_0 \subseteq P_0^* \lhd N_0$.

Если $1 \neq D = P \cap P^x$, то существует и P^y такая, что $P \cap P^y$ является наибольшим пересечением с P среди всех подгрупп из множества $Syl_p(X) - \{P\}$. Как следует из предложения на стр. 235 в [15], $1 \neq D_0 = P \cap P^y$ является максимальным силовским пересечением в смысле Бернсайда. Но тогда $N_P(D_0)$ и $N_{P^y}(D_0)$ являются двумя различными S_p-подгруппами в $N(D) \subset X$, что противоречит условию леммы. Таким образом, P есть TI-подгруппа в X, и заключение (1) доказано.

Предположим далее, что $m_p(X) > 1$. Если теперь $P_0^* = P$ (из заключения (1) следует, что $P_0^* \subseteq P$), то $N_0 = N$. Если $P_0^* \subset P$, то $P_0^* \subset N_P(P_0^*)$. Пусть $N(P_0^*) = N_1$ и P_1 — та S_p-подгруппа в N_1, которая по заключению (1) лежит в P.

По условию леммы $P_1 \lhd N_1$. Так как N_0 есть p-замкнутая группа, то $P_0^* \lhd N_0 \subseteq N(P_0^*) = N_1$.

Если $P_1 = P$, то $N(P_1) = N$. Если же $P_1 \subset P$, то $P_1 \subset N_P(P_1) = P_2$ и $N(P_1) = N_2$ опять является p-замкнутой группой.

Из $P_1 \lhd N_1 \subseteq N(P_1) = N_2$ теперь аналогично следует $P_2 \lhd N_2 \subseteq N(P_2) = N_3$ и так далее. Из этих рассуждений видно, что для цепочки подгрупп $1 \neq P_0 \subseteq P_0^* \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P$ имеют место включения $N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq ... \subseteq N$. Этими рассуждениями показано, что N — сильно p-вложенная подгруппа в X.

Из предложения 2.2 в [16] следует, что для X могут иметь место следующие возможности: $X \cong L_2(p^n)$, $U_3(p^n)$, ${}^2G_2(3^n)$ с $p = 3$, A_{2p}, F_{22} с $p = 5$, ${}^2F_4(2)'$ с $p = 5$, $Aut({}^2B_2(2^5))$ с $p = 5$, Mc с $p = 5$, J_4 с $p = 11$, M_{11} с $p = 3$, $L_3(4)$ с $p = 3$.

Если $X \cong L_2(p^n)$ и $n > 1$, то из теоремы II.8.27(8) в [1] следует, что в X имеется не p-замкнутая подгруппа $L_2(p)$ (если $p = 3$, то $L_2(3) \cong A_4$ и A_4 не является 3-замкнутой группой). Поэтому пусть $X \cong L_2(p)$, и тогда силовская p-подгруппа в X является циклической.

Если $X \cong^2 G_2(3^n)$, то в X имеется не 3-замкнутый централизатор инволюции, содержащий прямой множитель $L_2(3^n)$ ([2], теорема XI.13.2 h)). Поэтому этот случай исключается.

Если $X \cong U_3(p^n)$, $p > 2$, то известно [17], что X не является группой характеристического 2-типа. Если централизатор C некоторой инволюции в X, то из теорем 4.244 и 4.247 в [5] следует, что C содержит неразрешимую компоненту $\overline{L} \in Chev(p)$ (смотри также теорему 9.1 в [3]). Но тогда $\overline{L}$ не является p-замкнутой группой даже в случае $p = 3$.

Группа A_{2p} исключается ввиду леммы 1.

Группа F_{22} с $p = 5$ исключается ввиду леммы 2.

Пусть $X \cong {}^2F_4(2)'$ и $p = 5$. Из [18] следует, что X обладает подгруппой H со свойствами: 1) $O_2(H) = T$, $\mid T \mid = 2^9$, $cl\ T \geq 3$; 2)H/T - группа Фробениуса порядка 20; 3) если P есть S_5-подгруппа в H, то $C_T(P) \subseteq Z(T) \subset T$. Но по условию леммы H является 5-замкнутой подгруппой в X. Поэтому $TP = T \times P$, что противоречит свойству 3) подгруппы H. Поэтому простая группа Титса ${}^2F_4(2)'$ исключается из рассмотрения.

Группа $Aut({}^2B_2(2^5))$ с $p = 5$ не является простой и содержит под индексом 5 простую группу ${}^2B_2(2^5)$ с циклической S_5-подгруппой ([2], теорема XI.3.9). Поэтому группа $Aut({}^2B_2(2^5))$ исключается из рассмотрения.

Группы Mc с $p = 5$, J_4 с $p = 11$, M_{11} с $p = 3$ исключаются из рассмотрения ввиду леммы 2.

Пусть $X \cong L_3(4)$ с $p = 3$. Тогда X содержит не 3-замкнутую подгруппу $L_2(7)$ ([19]). Поэтому и этот случай исключается из рассмотрения. Этим заключение (2) доказано. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть X — простая минимальная не p-замкнутая группа из множества $Chev$, $p > 2$, P — ее циклическая S_p-подгруппа, $N = N(P)$, $C^* = C(P)$, $C^* = P \times C$, Q — S_q-подгруппа из C, $q \neq p$. Тогда*

(1) N — единственная максимальная подгруппа в X, содержащая P и любую из ее нетривиальных подгрупп;

(2) N содержит нормализатор в X любой неединичной q-подгруппы из C^*;

(3) если $X \in Chev(p)$, то $X \cong L_2(p)$;

(4) если $X \in Chev(r)$, $r \neq p$, $r > 2$ и 2 или r делит $\mid C \mid$, то $X \cong L_2(r^n)$;

(5) если $X \in Chev(r)$, $r \neq p$, Q не является циклической группой, $q > 2$, то $q \neq r$, $r = 2$ (то есть $X \in Chev(2)$);

(6) если $X \in Chev(r)$, $r \neq p$, r не делит $\mid C \mid$, то любая силовская подгруппа из N является абелевой; если $\Pi(N/C^*) = \Pi$, $q \in \Pi$, то q не делит $\mid C \mid$; в частности, C — холловская подгруппа в X;

(7) если $X \in Chev(r)$, $r \neq p$, $\overline{N} = N/C^*$ и $q \notin \Pi(\overline{N})$, то либо $X \in Chev(2)$, либо $N_q = X_q$ есть циклическая силовская q-подгруппа в X и $PX_q = P \times X_q$.

Доказательство. Пусть $C^* = P \times C$. Тогда $C^* \lhd N$ и N/C^* является подгруппой из $Aut(P)$. Известно ([4], лемма 10.2), что $N/C^* = \overline{N}$ является подгруппой группы Z_{p-1}. Если $\overline{N} = 1$, то по теореме Бернсайда ([1]), теорема IV.2.6) X имела бы нормальное p-дополнение. Поэтому $\overline{N} \neq 1$. Из леммы 3 следует, что P есть TI-подгруппа в X. Поэтому X порождается любыми двумя элементами, лежащими в различных S_p-подгруппах из X. Из леммы 1 в [20] следует, что N — единственная максимальная подгруппа в X, содержащая P и любую из ее нетривиальных подгрупп. Этим заключение (1) доказано.

Предположим, что q делит $\mid C^* \mid$ и Q — произвольная q-подгруппа из C. Тогда $N(Q) \supset P$. По условию леммы тогда $N(Q)$ есть p-замкнутая подгруппа. Поэтому $N(Q) \subseteq N$. Этими рассуждениями показано, что N содержит нормализатор в X любой неединичной q-подгруппы из C^*, этим заключение (2) доказано.

Предположим, что $X \in Chev(p)$. Из замечания в скобках перед теоремой 4.247 в [5] следует, что либо $X \cong L_2(p^n)$, либо $p = 3$, $X \cong {}^2G_2(3^n)$, либо квазипростая группа множества $Chev(p)$ содержит подгруппу изоморфную $SL(2,p)$ (тогда простая группа этого множества содержит либо $L_2(p)$, либо $SL(2,p)$). В последнем случае группа X не удовлетворяет условию леммы, так как по условию ни $SL(2,p)$, ни $L_2(p)$ не могут быть собственными подгруппами в X (по условию они являются p-замкнутыми , что невозможно для этих групп). В случае $X \cong {}^2G_2(3^n)$ и $p = 3$ в X имеется централизатор инволюции, который не является 3-замкнутой группой ([2], теорема XI.13.h)). Если же $X \cong L_2(p^n)$, то из теоремы II.8.27(8) в [1] и условия леммы следует, что $n = 1$ и $X \cong L_2(p)$. Этим (3) полностью доказано.

Пусть теперь $X \in Chev(r)$, $p \neq r$, $r > 2$. Предположим, что 2 делит $\mid C \mid$. Тогда пусть t — инволюция из C и $C_1 = C_X(t)$. По условию леммы $P \lhd C_1$. Значит, $O(C_1) \neq 1$. Пусть $X \not\cong L_2(r^n)$, $X \not\cong {}^2G_2(3^n)$ с $r = 3$. Тогда в остальных случаях по теореме 4.247 в [5] в C_1 имеется инволюция u и субнормальная подгруппа L в $C_X(u) = C_2$ такие, что $L \cong SL(2,q)$ для некоторого нечетного q, $< u >= Z(L)$, $< O(C_1), t >$ нормализует L и $C_{<O(C_1),t>}(L) = 1$. Но тогда $P \subseteq O(C_1) \subseteq N(L)$ и по условию леммы группа PL является p-замкнутой (по этой причине $P \cap L = 1$). Поэтому $[P, L] = 1$, что дает нам $C_{O(C_1)}(L) \neq 1$. Это противоречие показывает, что $X \notin Chev(r) - \{L_2(r^n), {}^2G_2(3^n)\}$. Если же $X \cong {}^2G_2(3^n)$ и 2 делит $\mid C \mid$, то для инволюции $t \in C$ имеем $P \subset C(t) = C_1$ и по условию $P \lhd C_1$. Но по теореме XI.13.h) в [2] C_1 не является p-замкнутой группой ни для одного простого делителя числа $\mid C_1 \mid$. Если r делит $\mid C \mid$, то по заключению (2) S_r-подгруппа X_r лежит в N и из $P \lhd N$ следует, что X_r нормализует P. Но по теореме 4.254(i) в [5] это невозможно. Поэтому $X \cong L_2(r^n)$ и (4) доказано.

Пусть далее $X \in Chev(r)$, $r \neq p$. Предположим, что Q — не является циклической подгруппой и $q > 2$. Как и выше, при доказательстве (4) показывается, что $q \neq r$. Пусть E — элементарная абелева подгруппа порядка q^2 в Q. По заключению (2) леммы нормализаторы всех ($\neq 1$) подгрупп из E лежат в N. По теореме 4.249 в [5] тогда $r = 2$. Этим (5) доказано.

Пусть $X \in Chev(r)$, $r \neq p$. Предположим, что r не делит $\mid C \mid$. Пусть Q_1 — произвольная S_q-подгруппа из N, содержащая Q. Тогда $Q \lhd Q_1$ и $Q \cap Z(Q_1) \neq 1$. Пусть $u \in Q \cap Z(Q_1)$. Тогда из предложения 2.6 в [21] следует, что $C_X(u)$ есть абелева r'-группа. В частности, Q_1 — абелева. Предположим, что $\Pi(N/C^*) = \Pi$ и $q \in \Pi$. Если $1 \neq Q \subset Q_1$, то из абелевости $C_X(u)$ следует, что $PQ_1 = P \times Q_1$, что невозможно ввиду того, что N/C^* является подгруппой циклической группы порядка $p-1$, которая действует на P нетривиально. Поэтому, если $q \in \Pi$, то q не делит $\mid C \mid$. Поэто $N = P\lambda(C\lambda K)$, где K – циклическая холловская подгруппа в N порядка $p-1$, а C – холловская в X подгруппа ввиду заключения (2) леммы. Этим (6) доказано.

(7) доказывается на основании заключений (2) и (6) аналогично доказательству за ключения (5). Лемма полностью доказана.

Лемма 5. *Пусть $A \lhd B$ и группа B/A содержит pd-подгруппу Шмидта $H/A = \overline{H}$ которая обладает одним из свойств:*

(1) $\overline{H}$ является p-замкнутой группой;

(2) $\overline{H}$ является p'-замкнутой группой;

(3) $\overline{H}$ является p-сверхразрешимой группой.

Тогда и группа B содержит вне A подгруппу Шмидта H_0 ($\subseteq H$), которая облад тем же свойством (1), (2) или (3), что и $\overline{H}$, причем $\Pi(\overline{H}) = \Pi(H_0)$ и либо $\overline{H}_0 \cong \overline{H}$ либо $\overline{H}_0$ — примарная группа и $< \overline{H}_0^{\overline{H}} >= \overline{H}$.

Доказательство. Среди подгрупп, порождающих вместе с A всю группу H, выбер наименьшую по включению L. По лемме 2 из [22] $A \cap L \subseteq \Phi(L)$. Тогда $\overline{H} = H/A = AL/A \cong L/L \cap A$. Из доказательства теоремы III.3.5 в [1] следует, что если $\overline{H}$ облада свойством (1), то и L им обладает; если $\overline{H}$ обладает свойством (2), то и L им облада Из теоремы VI.8.6 в [1] следует, что если $\overline{H}$ является p-сверхразрешимой группой, т и L — p-сверхразрешимая группа. То, что $\Pi(\overline{H}) = \Pi(L)$ следует из теоремы III.3.5 [1]. Так как $L/L \cap A$ — группа Шмидта, то L — ненильпотентная группа. Значит, он содержит минимальную ненильпотентную подгруппу H_0, которая наследует любое свойств (1)-(3) группы L. Ясно, что $H_0 \not\subseteq L \cap A$, так как последняя – нильпотентн группа. Из $H_0 \subseteq L$ теперь следует, что $H_0 \not\subseteq A$.

Пусть $\overline{H}_0 = H_0A/A \cong H_0/H_0 \cap A$. Если H_0 — p-замкнутая группа, то из свойств гру Шмидта [23]-[25] следует, что либо $\overline{H}_0$ есть группа Шмидта, либо $\overline{H}_0$ есть цикличес q-группа, где $q \neq p$, $q \in \Pi(\overline{H})$. В первом случае, очевидно, $\overline{H}_0 \cong \overline{H}$, так как собственн подгруппы в $\overline{H}$ являются нильпотентными. Во втором случае S_p-подгруппа T из H лежит в $L \cap A \subseteq \Phi(L)$ по построению H_0 в L. Поэтому $T \lhd H_0$ и H_0 является p-замкну группой. В частности, она не может быть p'-замкнутой группой. Если $< \overline{H}_0^{\overline{H}} >= \overline{R} \subset \overline{H}$ то из $\overline{R} \lhd \overline{H} \cong L/L \cap A$ и $L \cap A \subseteq \Phi(L)$ следует ввиду теоремы III.3.5 в [1], что $\overline{R}$ и R — нильпотентные группы. Это невозможно ввиду $H_0 \subseteq R$. Если H_0 — p'-замкну группа, то $\overline{H}_0$ есть либо группа Шмидта, либо циклическая p-группа и аналогич доказывается, что $< \overline{H}_0^{\overline{H}} >= \overline{H}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть X — конечная простая неабелева K-группа, у которой все со ственные подгруппы p-замкнуты, $p > 2$. Тогда X содержит p-сверхразрешимую p-замкнутую pd-подгруппу Шмидта.*

Доказательство. Если $X \cong A_p, p \geq 5$, то S_p-подгруппа P из X имеет порядок p и и теоремы Бернсайда ([1], теорема IV.2.6) следует, что подгруппа $H = N(P)$ облада тем свойством, что $N(P)/C(P) \neq 1$ и $\mid N(P)/C(P) \mid$ делит $p-1$. Пусть $C(P) = P \times C$ Поэтому в $\overline{H} = N(P)/C$ можно взять подгруппу $\overline{K}$ простого порядка q, делящего $p-1$ и взять в $\overline{H}$ подгруппу порядка pq, которая и будет p-сверхразрешимой подгрупп Шмидта. Тогда из леммы 5 следует, что в H имеется p-сверхразрешимая p-замкнут pd-подгруппа Шмидта.

Все группы множества $Spor$, удовлетворяющие условию следствия, перечислены заключениях (1)-(9) леммы 2. Там же указаны нормализаторы соответствующих сило ских p-подгрупп, которые сами и являются искомыми подгруппами Шмидта, исключ случай $X \cong F_3$, $p = 13$. В этом случае в $N(P)$ имеются подгруппы Шмидта нужного свойства порядка $13 \cdot 2$ и $13 \cdot 3$.

Пусть теперь $X \in Chev$. Из леммы 4 следует, что в X имеются подгруппы N и $C^* = P \times C$ такие, что $N = N_X(P)$, и $\overline{N} = N/C^*$ изоморфна неединичной подгруппе из Z_{p-1}, где P — циклическая S_p-подгруппа в X. Поэтому в N/C есть подгруппа порядка pq, где $1 \neq q$ делит $p-1$, которая, очевидно, будет p-замкнутой p-сверхразрешимой подгруппой Шмидта в $\overline{N}$. Из леммы 5 тогда следует, что и в N (то есть в X) есть p-замкнутая p-сверхразрешимая pd-подгруппа Шмидта. Теорема доказана.

Abstract. Let G be a finite simple non-abelian K-group in which all its subgroups are p-closed, $p > 2$. It is proved that G contains a p-supersoluble p-closed Schmidt pd-subgroup. A Schmidt pd-subgroup is a minimal non-nilpotent finite group of the order divisible by a prime p.

Литература

[1] B.Huppert, *Endliche Gruppen,* I. Berlin, Springer–Verlag, 1967.

[2] B.Huppert, N.Blackburn, *Finite groups,* III, Berlin, Springer–Verlag, 1982.

[3] D.Gorenstein, R.Lyons, R.Solomon, *The classification of the finite simple groups,* Math. surveys and monographs (AMS, Providence, R. I.) 40:1 (1994), 1–165.

[4] D.Gorenstein, R.Lyons, R.Solomon, *The classification of the finite simple groups,* Math. surveys and monographs. (AMS, Providence, R. I.) 40:2 (1994), 1–218.

[5] Д.Горенстейн, *Конечные простые группы. Введение в их классификацию,* М.: Мир, 1985.

[6] С.А.Чунихин, *Подгруппы конечных групп,* Минск, Наука и техника, 1964.

[7] D.Gorenstein, R.Lyons, *The local structure of finite groups, of characteristic 2 type,* Memoirs AMS 276 (1983), 1–731.

[8] С.А.Сыскин, *Абстрактные свойства простых спорадических групп,* Успехи матем. н. 35:5 (1980), 181–212.

[9] R.A.Wilson, *The maximal subgroups of the Lyons group,* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 97:3 (1985), 433–436.

[10] R.A.Wilson, *Some subgroups of the Baby Monster,* Invent. Math. 89:1 (1987), 197–218.

[11] R.A.Wilson, *The local subgroups of the Fischer groups,* J. London Math. Soc. 36:1 (1987), 77–94.

[12] R.A.Wilson, *The odd-local subgroups of the Monster,* J. Austral Math. Soc. 44:1 (1988), 1–16.

[13] R.A.Wilson, *Some subgroups of the Tompson group,* J. Austral Math. Soc. 44:1 (1988), 17–32.

[14] R.A.Wilson, *The maximal subgroups of J_4,* Proc. London Math. Soc. 56:3 (1988), 484–510.

[15] I.Alperin, *Sylow intersection and fusion,* J. Algebra 6:2 (1967), 222–241.

[16] T.R.Berger, P.Landrock, G.O.Michler, *Minimal degrees of faithful characters of finite groups with a T.I. Sylov p-subgroup,* Proc. AMS 99:1 (1987), 15–21.

[17] M.Aschbacher, *Groups of characteristic 2-type,* In book: The Santa Cruz couferense of finite groups, Calif., 1979, Providence, R. I. 1980, 29–36.

[18] D.Parrot, *A characterization of the Tits' simple group,* Canadien J. Math. 24:4 (1972), 672–685.

[19] T.Conway, R.Curtis, S.Norton, P.Parker, R.Wilson, *Atlas of finite groups,* Oxford, Clarendon Press, 1985.

[20] В.И.Зенков, *О порождении конечных групп классом сопряженных абелевых подгрупп,* Алгебра и логика 35:3 (1996), 288–293.

[21] G.M.Seitz, *Root subgroups for maximal tori in finite groups Lie type,* Pacific J. Math. 106:1 (1983), 153–244.

[22] Я.Г.Беркович, Э.М.Пальчик, *О перестановочности подгрупп конечной группы,* Сибирский матем. журн. 8:4 (1967), 741–753.

[23] L.Redei, *Die endlichen einstüfig nichtnilpotenten Gruppen,* Publ. Math. 4 (1956), 303–324.

[24] О.Ю.Шмидт, *Группы, все подгруппы которых специальных,* Матем. сб. 31 (1924), 366–372.

[25] Ю.А.Гольфанд, *О группах, все подгруппы которых специальные,* ДАН СССР 60:8 (1948), 1313–1315.

Поступило 8.06.2000

Полоцкий государственный университет
211440 Полоцк, Беларусь