УДК 517.958:532; 512.62

ЕХИЛЕВСКИЙ С.Г, ГОЛУБЕВА О.В., ПЯТКИН Д.В. (Беларусь), ПОТАПОВ В.Г., ДРОБЫШИНЕЦ А.Н., МИХАЙЛОВ А.Н. (ДонНТУ)

СВЯЗЬ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ МОМЕНТАМИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Плотность вероятности элементарного акта сорбции выражена через начальные моменты распределения случайной величины. В качестве последней фигурирует глубина проникновения примеси в слой сорбента. Показано, что моменты распределения представляют собой семейство рекуррентных временных полиномов. Соотношение между полиномами сведено к соотношению между их коэффициентами. Записано точное решение последнего через числа сочетаний.

Probability density of elementary sorption act is expressed through initial moments of random quantity distribution. This quantityr is the depth of admixture intrusion into a sorbent stratum. The authors have shown that distribution moments are a family of recurrent time polynomials. The relation between polynomials is confined to the relation between their coefficients. Its exact solution is recorded.

Считается, что знание всех моментов случайной величины эквивалентно знанию ее функции распределения [1]. Однако в общем виде такая задача не решена, т.к. нет формулы, выражающей например плотность вероятности случайной величины через совокупность ее начальных моментов, подобно тому, как Ряд Тейлора связывает функцию с ее производными в некоторой точке. В связи с этим представляется актуальным получение и исследование таких выражений в рамках конкретных моделей, приводящих к той или иной функции распределения. Рассмотрим в частности плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции.

Обычно динамика сорбции теоретически исследуется методами математической физики. При этом решают систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих кинетику сорбции и баланс поглощаемой примеси. Для линейных изотерм и стандартных краевых условий такая система (см. [2]) сводится к уравнению

$$-\omega'_{\xi} = e^{-\tau}\left(e^{-\xi} + \int_0^{\tau} e^{\tau} d_{\tau}\omega\right), \quad (1)$$

в котором ω - приведенная концентрация сорбтива; ξ и τ - соответственно обезразмеренные координата и время [2].

Уравнение (1) имеет единственное решение

$$\omega(\xi,\tau) = e^{-\xi}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}\left(1 - e^{-\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k}{k!}\right)\right) \quad (2)$$

согласно которому эволюция концентрации примеси строго детерминирована.

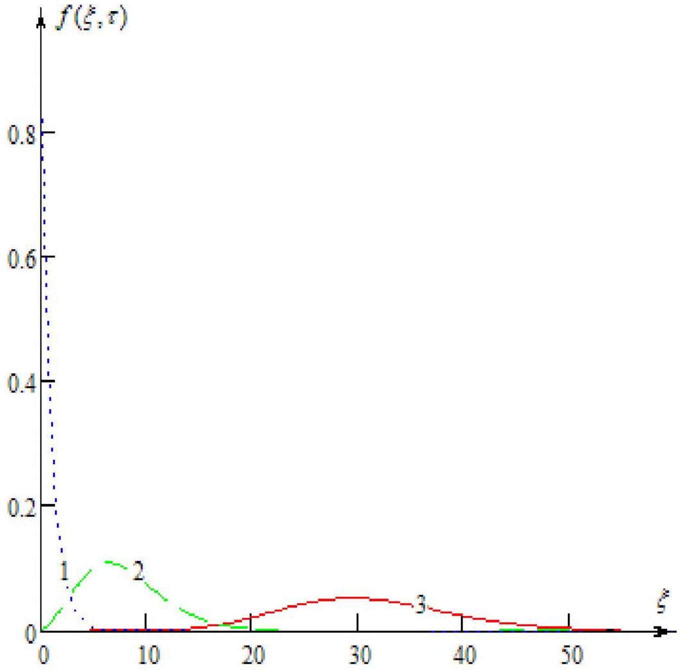

Рис.1 Эволюция дифференциальной функции распределения координаты элементарного акта сорбции

Вместе с тем, совершенно очевидно, что элементарный акт сорбции – существенно случайное событие, которое может произойти или не произойти в данном месте. И как указывалось в [3,4], возможен теоретико-вероятностный подход к описанию динамики этого явления. В частности приведенную концентрацию $\omega(\xi,\tau)$ можно интерпретировать как статистическую вероятность проникновения частиц примеси в поглощающий слой на глубину ξ. Соответственно $1-\omega(\xi,\tau)$ есть вероятность поглощения этих частиц таким слоем сорбента, а

$$f(\xi,\tau) = \frac{\partial(1-\omega(\xi,\tau))}{\partial\xi} = e^{-\xi-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^{n-1}}{n!}(n-\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\tau^k}{k!} \quad (3)$$

– плотность вероятности элементарного акта сорбции в данном месте или дифференциальная функция распределения. Ее эволюция построенная с помощью (3) представлена на рис.1. Видно как экспоненциальное распределение со временем трансформируется в нормальное по мере удаления фронта сорбции от входа в фильтр. Такое поведение $f(\xi,\tau)$ находится в полном соответствии с законом больших чисел, согласно которому с необходимостью реализуются распределения с максимальной энтропией. На полубесконечном интервале этим свойством обладает экспоненциальный закон, на бесконечном – нормальный [5]. Его параметры (математическое ожидание и дисперсия ξ) являются функциями времени подлежащими определению.

Оригинальность предлагаемого подхода не вызывает сомнений. Экстремальность энтропии наиболее распространенных в статистике распределений известна в теории информации. Однако глубинная связь наиболее общих следствий конкретных моделей сорбции с основными теоремами теории вероятностей остается не прослеженной. В частности, весьма распространенное утверждение о том, что знание всех моментов распределения $\nu_n(\tau)$ случайной величины ξ эквивалентно знанию ее плотности вероятности не имеет конкретной реализации в виде формулы, выражающей $f(\xi,\tau)$ через $\nu_n(\tau)$.

С целью ее получения воспользуемся найденным в [4] представлением для $\omega(\xi,\tau)$

$$\omega(\xi,\tau) = e^{-\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}Q_n(\tau), \tag{4}$$

где $Q_n(\tau)$ - некоторые функции, которые можно определить, подставив (4) в (1). В частности

$$Q_0(\tau) = e^{\tau}, \tag{5}$$

т. к. согласно (3) и (4)

$$\omega(0,\tau) = 1 = e^{-\tau}Q_0(\tau). \tag{6}$$

Выполнив частное дифференцирование $\omega(\xi,\tau)$ и приравняв выражения при одинаковых степенях ξ в левой и правой частях (1), получим рекуррентное соотношение

$$Q_{n+1}(\tau) = -Q_n(\tau) + \int_0^{\tau} Q_n(\tau)d\tau\ . \tag{7}$$

Вместе с (5) оно позволяет последовательно определить все $Q_n(\tau)$ до какого угодно номера. В [4] это сделано в общем виде

$$Q_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} Q_{nk}\tau^k, \quad (n = 1,2,3...) \tag{8}$$

где

$$Q_{nk} = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k} C_n^l(-1)^{n-l} \ (k = 0,1,2,...,n-1.) \tag{9}$$

- числовые коэффициенты фигурирующих в (4), (7), (8), рекуррентных полиномов, а C_n^i - числа сочетаний из n объектов по i.

С другой стороны, опираясь на (1) в [6] удалось получить рекуррентное соотношение

$$\nu_n(\tau) = n\cdot\left[\nu_{n-1}(\tau) + \int_0^{\tau}\nu_{n-1}(\tau)d\tau\right] \tag{10}$$

между начальными моментами

$$\nu_n(\tau) = \int_0^{\infty}\xi^n f(\xi,\tau)d\xi \tag{11}$$

координаты ξ элементарного акта сорбции, распределенной с плотностью вероятности (3).

Соотношения (7), (10) имеют сходную структуру, что позволяет установить связь рекуррентных полиномов с начальными моментами

$$Q_{n+1}(\tau)=\frac{1}{n!}\nu_n(-\tau)(-1)^{n+1}\,. \tag{12}$$

В ее справедливости можно убедиться непосредственно, подставив (12) в (7) и получив (10) с помощью тождественных преобразований.

Подставив (4) в (3) получим

$$f(\xi,\tau)=-e^{-\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}Q_{n+1}(\tau)\,. \tag{13}$$

Формулы (12), (13) иллюстрируют утверждение о том, что дифференциальная функция распределения случайной величины определяется своими начальными моментами:

$$f(\xi,\tau)=-e^{-\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\xi)^n}{n!}\frac{\nu_n(-\tau)}{n!}\,. \tag{14}$$

В частности при $\tau=0$ из (10) следует

$$\nu_n(0)=n!\,, \tag{15}$$

что после подстановки в (14) дает

$$f(\xi,0)=e^{-\xi}\,, \tag{16}$$

как и должно быть[1].

Однако при больших временах в (14) возникают проблемы со сходимостью. Причина в том, что формула (4) никак не учитывает асимптотику сорбционной активности при больших временах. Т.е. возникает ситуация аналогичная той, при которой сходимость стандартных разложений зависит от вида функции разлагаемой в ряд Тейлора или Фурье.

Чтобы правильно учесть специфику задачи привлечем дополнительные (не основанные на уравнениях математической физики) соображения для получения асимптотики $f(\xi,\tau)$ при больших временах и ее выделения из (14) с целью улучшения сходимости.

Имея в виду, что с учетом (8), (9), (12) начальные моменты нам известны:

$$\nu_n(\tau)=n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\tau^k\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}C_{n+1}^{l}(-1)^l \tag{17}$$

сосчитаем математическое ожидание, среднеквадратическое отклонение, асимметрию и эксцесс ξ

$$m(\tau)=\nu_1(\tau)\,,\ \sigma(\tau)=\sqrt{\mu_2(\tau)}\,,\quad A(\tau)=\frac{\mu_3(\tau)}{\sigma^3(\tau)}\,,\quad E(\tau)=\frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)}-3\,, \tag{18}$$

где

$$\mu_n(\tau)=\int_0^{\infty}(\xi-\nu_1(\tau))^n f(\xi,\tau)\,d\xi \tag{19}$$

- центральный момент n-го порядка. Выполнив под знаком интеграла в (19) биномиальное разложение, получим после интегрирования по ξ

[1] Справедливость последнего результата непосредственно подтверждается формулами (1), (3).

$$\mu_n(\tau)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^{n-i}\cdot\nu_{n-i}(\tau)\cdot\nu_1(\tau)^i\,. \tag{20}$$

Подставив в (20) найденные с помощью (17)

$$\nu_1(\tau)=1+\tau\,,\quad \nu_2(\tau)=2+4\tau+\tau^2\,,\quad \nu_3(\tau)=6+18\tau+9\tau^2+\tau^3\,,\quad \nu_4(\tau)=24+96\tau+72\tau^2+16\tau^3+\tau^4\,, \tag{21}$$

получим искомые центральные моменты

$$\mu_2(\tau)=1+2\tau\,,\qquad \mu_3(\tau)=2+6\tau\,,\qquad \mu_4(\tau)=9+36\tau+12\tau^2\,. \tag{22}$$

Подставив (22), (18), найдем

$$A(\tau)=\frac{6\tau+2}{(2\tau+1)^{3/2}}\underset{\tau\to\infty}{\to}\frac{3}{\sqrt{2\tau}}\,, \tag{23}$$

$$E(\tau)=\frac{24\tau+6}{(2\tau+1)^2}\underset{\tau\to\infty}{\to}\frac{6}{\tau}\,. \tag{24}$$

Видно, что асимметрия и эксцесс являются бесконечно малыми при $\tau\to\infty$. Это значит, что при больших временах $f(\xi,\tau)$, как уже упоминалось, трансформируется в нормальное распределение (рис 2)

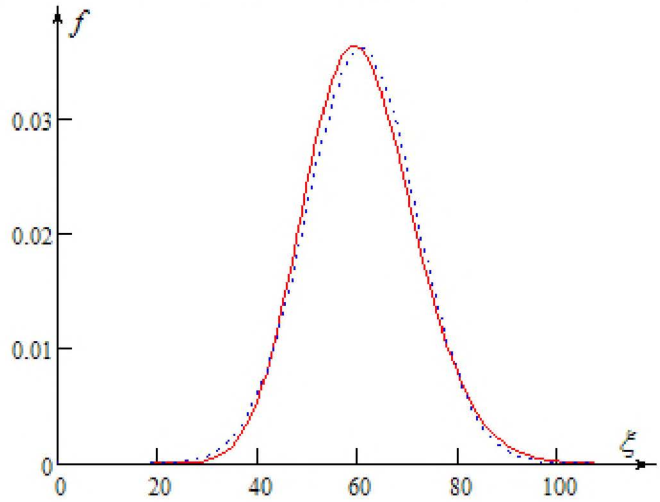

Рис.2. Асимптотика дифференциальной функции распределения координаты элементарного акта сорбции

$$f(\xi,\tau)=f_N(\xi,\tau)\cdot(1+\varphi(\xi,\tau))\,, \tag{25}$$

где

$$f_N(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\tau)}}e^{-\frac{(\xi-m(\tau))^2}{2\sigma(\tau)}}\,, \tag{26}$$

а $f_N(\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)$ - погрешность (рис.3), возникающая при замене $f(\xi,\tau)$ нормальным законом (26). Фигурирующие в нем параметры нами уже определены (см. (18), а также первые формулы в (21), (22))

$$m(\tau)=1+\tau\,, \tag{27}$$

$$\sigma(\tau)=\sqrt{2\tau+1}\,. \tag{28}$$

Для того чтобы завершить исследование, осталось выразить $\varphi(\xi,\tau)$ (или хотя бы ее главную часть) через асимметрию, эксцесс и другие числовые характеристики, связанные с центральными моментами высших порядков.

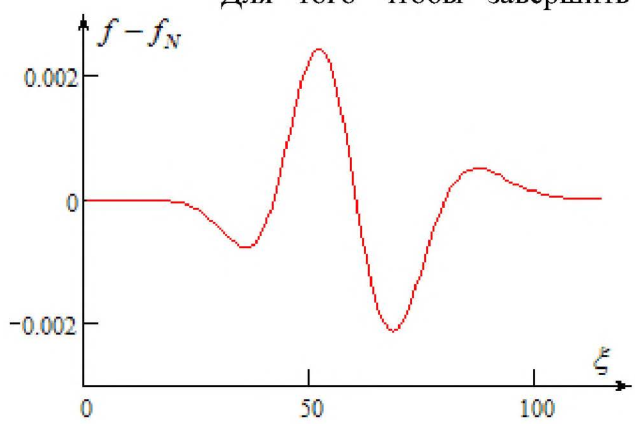

Рис. 3. Отклонение $f(\xi,\tau)$, от нормального закона $f_N(\xi,\tau)$ при $\tau=60$

Таким образом, знание асимптотики $f(\xi,\tau)$ при больших временах, многократно улучшает сходимость фигурирующих в (2), (3) двойных рядов. В результате скорость численных экспериментов, как и сами их возможности, выводятся на качественно иной уровень.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.:Наука, 1969. – 576с.

2. Ехилевский С.Г. О формировании квазистационарного профиля концентрации CO_2 при фильтрации выдыхаемого воздуха через кислородсодержащий продукт регенеративного патрона/ Ехилевский С.Г., Ткачев С.М..// Вестн. Полоц. гос.ун-та. Сер. B, Промышленность. Прикладные науки. – 2008.- №8.- С.115-120.

3. Ехилевский С.Г. Регенерация нестационарных потоков воздуха //Изв. Донецкого горного института. - 1998. - №2. - С. 53-58.

4. Ехилевский С.Г. Рекуррентные полиномы в моделировании динамическиой сорбционной активности./Ехилевский С.Г., Альховко В.В. // Вестн. Полоц. гос.ун-та. Сер. C, Фундаментальные науки. – 2005.-№4.- С.110-116.

5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 400с.

6. Ехилевский С.Г. Моделирование динамическиой сорбционной активности надпероксидов щелочных металлов/ Ехилевский С.Г., Голубева О.В. .// Вестн. Полоц. гос.ун-та. Сер. F, Строительство. Прикладные науки. – 2008.-№6.- С.119-128.

Надійшла до редколегії 12.02.2009