Голубева О. В., Ехилевский С. Г.
Полоцкий государственный университет
Полоцк, Республика Беларусь

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТЕВЫХ ПОТОКОВ В ТРАНСПОРТНОЙ ЛОГИСТИКЕ

Аннотация. *В статье предложен эффективный, практичный, наглядный способ решения актуальной прикладной задачи о нахождении максимума потока по транспортной сети с несколькими источниками и стоками.*

Ключевые слова: *орграф, сеть, разрез, теорема Форда — Фалкерсона.*

Многие прикладные задачи связаны с транспортировкой объектов различной природы. Например, перевозка груза, пассажиров по транспортным магистралям; перекачивание воды, нефти, газа по трубопроводам; передача электричества по электросетям; информации — по каналам связи.

Эти процессы имеют общие признаки: есть узлы и линии, их связывающие, линии имеют направления и пропускные способности. Поэтому такие процессы удобно представлять орграфами. Связный орграф без петель, вес каждой дуги которого есть натуральное число (пропускная способность дуги) назовем сетью. На практике пропускная способность дуги необязательно выражается натуральном числом. Ограничение на тип числа вызвано необходимостью математического моделирования реальной ситуации. Возникает вопрос: какова максимальная величина потока (машин, сообщений, жидкости и т. п.), который может войти в сетевую систему и выйти из нее за единицу времени?

Определим основные понятия. В сети выделим особые вершины: источник I — из него дуги только выходят и сток S — в него дуги только входят. Остальные вершины — транзитные. Реализацией потока назовем распределение по дугам объектов, пересылаемых от источника к стоку. Очевидно, что число объектов, пересылаемых по дуге в единицу времени (расход), ограничено ее пропускной способностью. Величиной потока F является количество объектов, пересылаемых при данной реализации от источника к стоку в единицу времени.

Из закона сохранения материи следует:

- сумма расходов дуг, выходящих из источника, равна сумме расходов дуг, входящих в сток;
- для транзитной вершины сумма расходов дуг, входящих в вершину, равна сумме расходов дуг, выходящих из нее;
- максимальный расход последовательно соединенных дуг равен наименьшей из их пропускных способностей.

Если расход по дуге равен ее пропускной способности, дугу назовем насыщенной. Любой путь от источника к стоку, содержащий такую дугу, также насыщенный. Наконец, реализация потока — насыщенная, если насыщены все формирующие ее пути. Разрезом называется множество R дуг сети, удаление которых блокирует все пути из источника в сток, а пропускной способностью $C(R)$ разреза R — сумма пропускных способностей $c(x;y)$ входящих в него дуг:

$$C(R) = \sum_{(x;y)\in R} c(x;y).$$

Разрез с наименьшей пропускной способностью $R_{\min}$ называется минимальным. Согласно теореме Форда — Фалкерсона $F_{\max} = C(R_{\min})$ [1, с. 158]. Доказательство данной теоремы конструктивно, т. е. является алгоритмом нахождения максимальной величины потока по сети с одним источником и одним стоком. Однако непосредственно применить этот алгоритм к сети с несколькими источниками и стоками невозможно.

Сведем такую сеть к сети с одним источником и одним стоком добавлением ко множеству имеющихся вершин двух фиктивных — субисточника I_0 и гиперстока S_{n+1}. Из I_0 выпустим по одной фиктивной дуге, соединяющей его с каждым фактическим источником. Пропускная способность каждой фиктивной дуги равна сумме пропускных способностей фактических дуг, исходящих из соответствующего источника. Аналогично поступаем с гиперстоком S_{n+1}. Это формальное расширение сети не изменит величину пропускаемого по ней потока.

Рассмотрим практический пример, иллюстрирующий предложенную схему решения подобных задач. Допустим, места добычи нефти расположены в трех географических пунктах. Из мест добычи I_0, I_1, I_2, I_3 нефть транспортируется на четыре нефтеперерабатывающих завода S_9, S_{10}, S_{11}, S_{12} через пять транзитных пунктов T_4, T_5, T_6, T_7, T_8 (рис. 1). Пропускные способности коммуникаций обозначены числами в круглых скобках. Найдем максимальное количество нефти, транспортируемой в единицу времени из мест добычи на нефтеперерабатывающие заводы.

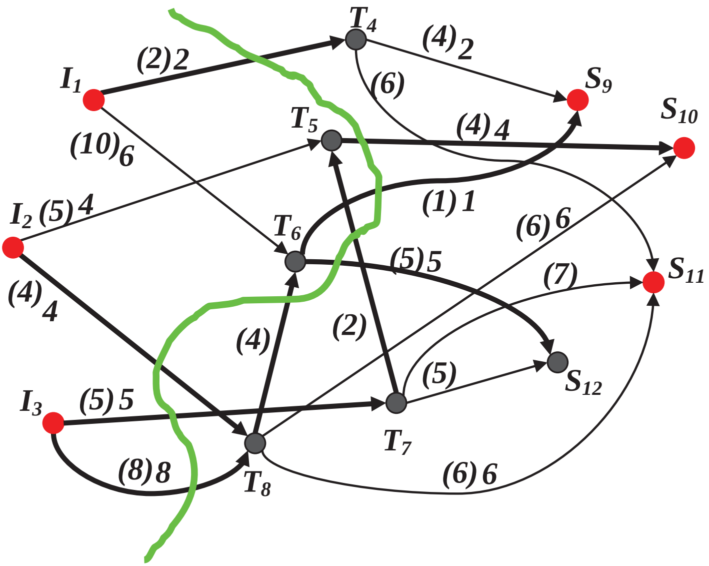

Рис. 1. Транспортная сеть

Решим эту задачу в три этапа. Первый — расширение сети, второй — создание насыщенного потока, третий — определение минимального разреза и его пропускной способности, а следовательно, и максимальной величины потока.

Первый этап. Вводим субисточник I_0. Строим фиктивную дугу $(I_0;I_1)$ с пропускной способностью $c(I_0;I_1) = c(I_1;T_4) + c(I_1;T_6) = 2 + 10 =$ $= 12$. Аналогично $c(I_0;I_2) = 9$ и $c(I_0;I_3) = 13$. Вводим гиперсток S_{13}. Фиктивная дуга $(S_9;S_{13})$ имеет пропускную способность $c(S_9;S_{13}) =$

$= c(T_4;S_9) + c(T_6;S_9) = 4 + 1 = 5$. Аналогично $c(S_{10};S_{13}) = 10$, $c(S_{11};S_{13}) = 19$, $c(S_{12};S_{13}) = 10$.

Второй этап. Формируем начальный поток. По пути $I_0 \to I_1 \to T_4 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный $\min\{12;2;4;5\} = 2$ единицам, по пути $I_0 \to I_1 \to T_6 \to S_9 \to S_{13}$ пропускаем поток, равный $\min\{12–1;10;1;5–2\} = 1$ единице и т. д. Сформированный таким образом поток — насыщенный, так как каждый путь содержит насыщенную дугу.

Третий этап. Чтобы выяснить, является ли величина насыщенного потока максимальной, находим ненасыщенные дуги, а для них — соответствующие разности пропускной способности дуги и проходящего по ней потока. Вершины I_0 и S_{13} связаны дугами. Специальным образом пометим вершины: I_0 пометим $-I_0$, смежную ей вершину I_1 пометим $+I_0$ (так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_1$), вершину T_6 помечаем $+I_1$ (так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_1 \to T_6$). Пометка вершины T_8 невозможна, так как дуга $T_6 \leftarrow T_8$, имеющая направление, обратное потоку, пустая. Вершину I_2 помечаем $+I_0$, так как эти вершины соединяет ненасыщенная дуга $I_0 \to I_1$, вершину T_5 помечаем $+I_2$, так как дуга $I_2 \to T_5$ — ненасыщенная. Дальнейшая пометка вершин невозможна, так как дуга $T_5 \leftarrow T_7$, входящая в вершину T_5, пустая. Вершина S_{13} оказалась непомеченной, поэтому поток имеет максимальную величину. Чтобы ее найти, вычислим пропускную способность минимального разреза $C(R_{\min})$ данной сети.

Сначала определим дуги, образующие минимальный разрез сети. Для этого все вершины разобьем на два непересекающихся множества: помеченные вершины $A = \{I_0;I_1;I_2;T_5;T_6\}$ и непомеченные вершины $B = \{I_3;T_4;T_5;T_7;T_8;S_9;S_{10};S_{11};S_{12};S_{13}\}$.

Минимальный разрез образуют дуги, исходящие из вершин множества A и входящие в вершины множества B, а также дуги, исходящие из вершин B и входящие в вершины A: $R = \{(I_0;I_3), (I_1;T_4), (I_2;T_8), (T_5;S_{10}), (T_6;S_9), (T_6;S_{12}), (T_7;T_5), (T_8;T_6)\}$.

Минимальный разрез найден для расширенной сети, в него попала фиктивная дуга $(I_0;I_3)$, которой соответствуют две фактические дуги $(I_3;T_7)$ и $(I_3;T_8)$. Также в минимальный разрез попали две дуги с началом в вершинах множества и концом в вершинах множества A: $(T_8;T_6)$, $(T_7;T_5)$. В общем случае при вычислении пропускной способности минимального разреза $C(R_{min})$ величина потока, проходящего по таким дугам, берется со знаком «минус». В нашем случае $c(T_8;T_6) = c(T_7;T_5) = 0$. В итоге имеем $F_{max} = C(R_{min}) = 5 + 8 + 2 + 4 + 4 + 1 + 5 = 29$ (единиц). Обозначим полученный поток максимальной величины жирными стрелками, минимальный разрез сети — жирной кривой (рис. 1).

Литература

1. *Иванов Б. Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы: учеб. пособие. М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. 288 с.

Golubeva O. V., Ekhilevskiy S. G.

Mathematical models of optimization network flow in transport logistics

Abstract. *This paper proposes an efficient, practical, intuitive way to solve the actual applied problem of finding maximum flow in transportation networks with multiple sources and sinks.*

Keywords: *directed graph, the network, the cut, the Ford — Fulkerson theorem.*

Голубева О. В., Ехилевский С. Г., Федченко Т. Н., Лесовая Т. Ю., Зязюля П. В., Пастухов Ю. Ф., Пастухов Д. Ф.

Полоцкий государственный университет
Новополоцк, Республика Беларусь

МЕТОД ПОДОБИЯ В ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация. *Симплекс-методом решена задача максимального ослабления проникающего гамма-излучения многослойной стеной помещения (укрытия) с ограниченной стоимостью одного 1 м²*

УДК 338.2
ББК 65.6(2Рос)
М74

М74 **Модернизация российской экономики. Прогнозы и реальность:** сборник научных трудов II Международной научно-практической конференции. — СПб.: Издательство Санкт-Петербургского академического университета, 2016. — 540 с.; ил.

ISBN 978-5-94047-301-5

В работе II Международной научно-практическая конференции «Модернизация российской экономики. Прогнозы и реальность» приняли участие специалисты из стран ближнего и дальнего зарубежья: Белоруссии, Казахстана, Италии, Украины, Монголии, а также представители образовательных учреждений и предприятий Санкт-Петербурга, Мурманска, Владимира, Владивостока, Екатеринбурга и др.

Сборник научных трудов представляет основные темы обсуждения: актуальные проблемы государственного и муниципального управления, вклад реального сектора экономики в устойчивое развитие макрорегиона Северо-Запада, экономическая сбалансированность регионального развития, оценка эффективности ИТ-проектов; опыт регионов и муниципалитетов по институционализации стратегических решений, перевод стратегических приоритетов в реальные программы действий, создание механизмов реализации стратегий для экономической модернизации, реформирование и повышение эффективности государственного и муниципального управления.

УДК 338.2
ББК 65.6(2Рос)

ISBN 978-5-94047-301-5