

*Голубева О. В., Ехилевский С. Г., Пастухов Ю. Ф.,  
Пастухов Д. Ф., Сорокин П. В.  
Полоцкий государственный университет  
Полоцк, Республика Беларусь*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ**

***Аннотация.** Разработан алгоритм поиска трещин в железобетонной балке по полю напряжения и полю деформации с малыми неразрушающими нагрузками. Показано, что поперечные трещины могут быть обнаружены только по полю напряжений в зонах локализации низкого напряжения на грани. Продольные трещины выявляются и по полю напряжений, и по полю деформаций с обязательным условием крутящего момента вдоль балки. Моделированием проверено и объяснено, что контактные зоны двух тел*

*с малой деформацией удовлетворяют принципу зеркальных изображений. Разработанный алгоритм экономит материальные средства в строительстве.*

**Ключевые слова:** *динамика трещинообразования, теория упругого контактного взаимодействия, моделирование систем, принцип зеркальных изображений.*

В работе показано, что моделирование нагруженной железобетонной балки в оболочке ANSYS, позволяющей учитывать нелинейные эффекты деформации и температурный режим взаимодействия нескольких десятков тел [1], приводит к тем же результатам, что и в теории упругости для контакта двух тел по Л. Д. Ландау [2; 3]. Моделированием обнаружен и обоснован интересный факт, связанный с тем, что области малой деформации двух тел вблизи контактной области подчиняются принципу зеркальных изображений. Оказалось, что продольные трещины можно выявить, прилагая крутящий момент вдоль балки. Поперечные трещины обнаруживаются только по полю напряжений. Выявление и устранение трещин при безопасных нагрузках приведет к значительной экономии материальных средств в строительстве. Область трещины можно усилить сварным бандажом, охватывающим балку.

Мы смоделировали лабораторную установку для проверки железобетонной балки на прочность. Края бетонной балки размерами  $0,25 \times 0,3 \times 3 \text{ м}^3$  опираются на два неподвижных цилиндра из закаленной стали (Structural Steel) диаметром  $m$ . Гидравлический пресс оказывает вертикальное усилие на расстояниях  $1/3$  и  $2/3$  от концов балки через бруски (Structural Steel)  $0,25 \times 0,1 \times 0,1 \text{ м}^3$ . Нижние цилиндры закреплены (обеспечивается функцией Fixed Support). Балка содержит три арматурных стержня (Stainless Steel) диаметром  $14 \text{ мм}$  и длиной  $3 \text{ м}$  на высоте  $1/3$  части от нижней грани, т. е. в области, где бетон и стержни работают на растяжение. Контакт между стержнями и бетоном Bonded-Solid To Solid (аналог склеенных деталей). Между балкой, брусками и цилиндрами установлен контакт No Separation-Solid To Solid. Арматурные стержни расположены симметрично относительно плоскости симметрии балки для визуализации поля напряжения в центральном стержне.

Для экономии ресурсов оперативной памяти компьютера на этапе создания геометрии была использована симметрия модели двумя плоскостями. В результате на рисунках изображена четвертая часть модели.

Для моделирования динамики трещины в дереве проекта Model (A4)FractureCrack (Semi-Elliptical) нами выбрана полуэллиптическая трещина. Трещина закреплялась на нижней грани балки. Продольная трещина вытянута вдоль балки (большая и малая полуоси 0,6 м и 0,08 м соответственно, большой радиус контура 0,01 м, число участков фронта 100, площадь трещины составляет 1/10 площади поперечного сечения балки, рис. 1б, 1в). Поперечная трещина ориентирована поперек балки (большая и малая полуоси 0,05 м и 0,02 м соответственно, большой радиус контура 0,005 м, число участков фронта 20, площадь трещины составляет приблизительно 1/50 площади поперечного сечения балки, рис. 1а).

На рис. 1а балка нагружена по лабораторной схеме двумя симметричными силами  $F = 600\,000H$ , что в десять раз меньше сил, необходимых для раскрытия трещины. На рис. 1а трещина не раскрыта (синий овал на нижней грани слева). Но поле напряжений на рис. 1а сильно неоднородно. Трещина локализует область пониженного напряжения на нижней грани балки. Трещину и область локального минимума напряжения можно найти, например, установкой тензорезисторных датчиков напряжений НПО «Импульс» на нижнюю грань балки. На рис. 1а видно, что арматурные стержни напряжены сильнее бетона и работают на растяжение (в них напряжение в десять раз больше, чем в бетоне). Масса балки с тремя стержнями составляет 140 кг. Отметим, что момент внешних сил и момент силы тяжести направлены вдоль фронта трещины.

Гораздо сложнее подобрать нагрузку и обнаружить продольные трещины в образце. Сила тяжести в модели учитывалась с помощью функции (Static Structural A5)Standard Earth Gravity. Оказывается, что необходимо дополнительно приложить вращающий момент (Static Structural A5)Moment. На рис. 1б, 1в крутящий момент сил  $M = 10^6H \cdot м$  приложен к боковой грани балки и направлен вдоль большего ребра балки, что во много раз превышает момент силы тяжести балки (порядка  $10\,000H \cdot м$ ).

На рис. 16 показано поле деформаций с продольной трещиной вдоль большего ребра. Для визуализации граней балка повернута. Поле деформаций асимметрично относительно нижней и верхней сторон каждой грани. Как видно, деформация на верхнем берегу над трещиной (красный цвет) значительно превышает деформацию на нижнем ее берегу (синий цвет). Это свойство сохраняется вдоль всего фронта трещины. Такая несимметричность поля дает возможность обнаруживать продольные трещины по полю деформации лазерными методами (деформация составляет 2 мм). Например, для измерения деформации можно применить лазерную систему для неразрушающего контроля композитных изделий большой площади Q-800 (Dantec Dynamics).

Поле напряжений (рис. 16) более симметрично и однородно по сравнению с полем деформаций. Локально участки высокого напряжения на нижней грани видны в двух узлах, огранивающих фронт трещины, а на боковой грани более напряжена нижняя близкая к трещине часть, а именно, напряжение заметно вдоль всего фронта трещины.

Запишем уравнение равновесия упругой среды  $\phi(x,y)$  — потенциал Эри  $(x,y)$ :

$$\Delta\Delta\phi = \Delta^2\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 \phi = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right)\phi = 0. \quad (1)$$

Для суммы нормальных компонент тензора напряжений (следа тензора) верно:

$$\Delta\Delta\phi = 0, \quad \sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_x + \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \Delta\phi, \quad \Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2)$$

В трехмерном случае  $\Delta(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \approx \Delta\sigma_z = \Delta P_z(x,y) = 0$  для нормального к площадке контакта двух тел давления. Значит, след тензора удовлетворяет уравнению Лапласа (2). Потенциал в электростатике в области свободной от зарядов подчиняется уравнению Лапласа. Электрический потенциал  $\phi$  (его источник — электрические заряды) удовлетворяет также принци-

пу зеркальных изображений (принципу инверсии [3]):

$$\Delta\phi\left(\vec{r}\right)=0 \Rightarrow \left[\phi'\left(r'\right)=\frac{R}{r'}\phi\left(\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right)\right],$$

$$\Delta\frac{R}{r'}\phi\left(\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right)=0, \quad rr'=R^2.$$

Следовательно, компонента  $P_z(x, y)$  удовлетворяет и принципу зеркальных изображений

$$\Delta P_z\left(\vec{r}\right)=0 \Rightarrow \left[P_z'\left(r'\right)=\frac{R}{r'}P_z\left(\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right)\right],$$

$$\Delta\frac{R}{r'}P_z\left(\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'\right)=0, \quad rr'=R^2,$$

где  $r, r'$  — расстояния от зарядов до центра проводящей поверхности радиусом  $R$ .

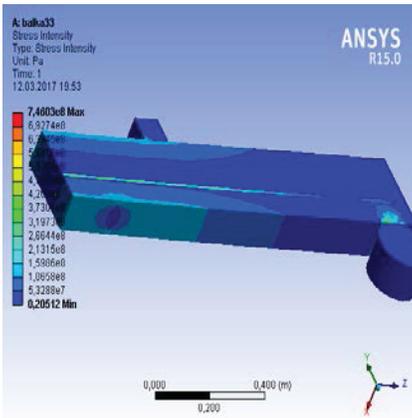


Рис. 1а. Скрытая поперечная трещина в поле напряжений балки с нагрузкой  $F = 600\,000\text{H}$

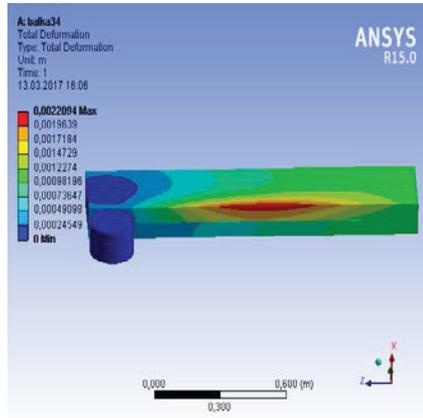


Рис. 1б. Поле деформаций четверти балки с учетом силы тягести и крутящего момента  $M = 10^6\text{H} \cdot \text{м}$  вдоль фронта продольной трещины

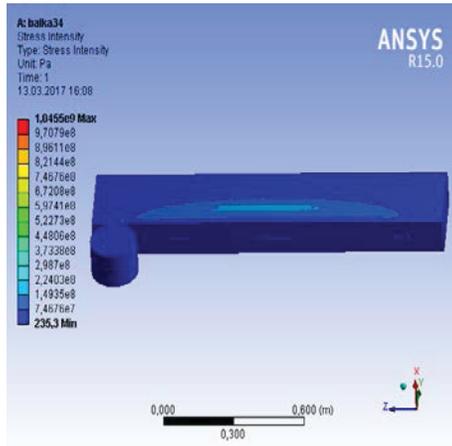


Рис. 1в. Поле напряжений в балке с крутящим моментом  $M = 10^6 \text{H} \cdot \text{м}$  вдоль фронта продольной трещины

В нашем случае это расстояния от центров эллипсоидов нормальной компоненты тензора напряжений до центра кривизны контактной поверхности двух тел. Суммарная деформация двух контактирующих тел определяется по формуле Ландау [2]:

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \iint_{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \leq 1} \frac{P_z(x', y')}{r} dx' dy',$$

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (3)$$

где  $\sigma'$  — коэффициент Пуассона для бетона;

$E'$  — модуль упругости бетона;

$\sigma$  — коэффициент Пуассона для стали;

$E$  — модуль упругости стали, область интегрирования — эллипс с полуосями  $a, b$  ( $a, b$  — функции от кривизны тел в зоне контакта).

Пусть  $a = b = R$ . Оценим по формуле (3) связь между деформацией и напряжением:

$$\begin{aligned}
\phi(0,0) &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \iint_{\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} \leq 1} \frac{P_z(x',y')}{r} dx' dy' = \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \int_0^R \frac{P_z(r) 2\pi r dr}{r} = \\
&= 2 \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) \overline{P_z} R \Leftrightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r) = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma'^2}{E'} \right) P_z(0) r = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Более точно численными методами двойной интеграл по эллиптической области можно посчитать алгоритмами [4; 5].

По Л. Д. Ландау [2]:

$$P_z(r) = P_z(0) \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \Leftrightarrow \overline{P_z}(r) = \frac{1}{R} \int_0^R P_z(r) dr = P_z(0) \int_0^R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{\pi}{4} P_z(0).$$

То есть средняя величина давления  $\overline{P_z}(r)$  близка к ее значению в центре контакта (рис. 1а)  $P_z(0)$ . Измерения деформаций в зоне контакта также подтверждают закон  $rr' = R^2$  (рис. 1б).

Показано, что напряженные контактные зоны двух тел совпадают с областями малых деформаций (4). Потенциал напряжений Эри удовлетворяет бигармоническому уравнению. Нормальная компонента давления удовлетворяет уравнению Лапласа (2) и принципу зеркальных изображений. Для центров эллипсоидов напряжений (осей цилиндров напряжений в двумерном случае) контактных тел справедлива формула  $rr' = R^2$ . Вместе с тем и для центров зон с малой деформацией также справедлив принцип зеркальных изображений  $rr' = R^2$ . Скрытые поперечные трещины в балке можно выявить только по полю напряжений. Для выявления же продольных трещин можно использовать как поле напряжений, так и поле деформаций с добавлением к лабораторной схеме крутящего момента вдоль балки.

## Литература

1. Матвеев В. Н., Шаблий Л. С., Кривцов А. В. Опыт применения стерео литографических моделей при газодинамических исследованиях // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. акад. С. П. Королёва (национального исследовательского университета). 2015. Т. 14. № 3-2. С. 296–304.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц М. Е. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц М. Е. Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 662 с.
4. Голубева О. В. [и др.]. Аппроксимация двойных и тройных интегралов во внутренних задачах математической физики // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С: Фундаментальные науки. 2016. № 12. С. 125–133.
5. Голубева О. В. [и др.]. Об эффективном поиске безусловного экстремума гладких функционалов в конечномерных задачах // Там же. 2016. № 4. С. 119–131.

*Golubeva O., Ehilevskiy S., Pastuhov Y,  
Pastuhov D., Sorokin P.*

## SIMULATION OF CRACKING IN THE REINFORCED CONCRETE BULK

**Abstract.** *The algorithm for searching for cracks in a reinforced concrete beam along the stress field and deformation field with small non-destructive loads has been developed by modeling. It is shown that transverse cracks can be detected only on the stress field in the zones of localization of low voltage on the face. Longitudinal cracks are revealed both in the stress field and in the field of deformations with the necessary condition of the torque along the beam. Simulation has been verified and explained that the contact zones of two bodies with small deformation satisfy the principle of mirror images. The developed algorithm will save material resources in construction.*

**Keywords:** *fracture dynamics, the theory of elastic contact interaction, system modeling, the principle of mirror images.*