

2. *Азов Г. Л.* Конкурентные преимущества фирмы. М.: ИНФРА-М, 2012. 256 с.

3. *Бургонов О. В., Ивлева Е. С.* Совершенствование управления предпринимательскими структурами на основе концепции управления стоимостью // Экономика и управление. 2016. № 4. С. 28–32.

4. *Торгунаков Е. А., Кошелева Т. Н., Бургонов О. В.* Подходы к оценке инвестиционной привлекательности с учетом жизненного цикла и конкурентоспособности организации // Экономика и управление. 2016. № 7. С. 33–37.

5. О защите конкуренции [Электронный ресурс]: Федеральный закон от 26 июля 2006 г. № 135-ФЗ (посл. ред.). URL: <http://www.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc&base=LAW&n=200913&fld=134&dst=1000000001,0&rnd=0.8299896739471098#0> (дата обращения: 28.03.2017).

*Голубева О. В., Ехилевский С. Г.,  
Пастухов Ю. Ф., Пастухов Д. Ф.,  
Лесовая Т. Ю., Зязюля П. В.  
Полоцкий государственный университет  
Полоцк, Республика Беларусь*

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ПОВЕДЕНИЯ РЕКЛАМНОГО АГЕНСТВА  
И ДВУХ КОНКУРИРУЮЩИХ ПРЕДПРИЯТИЙ**

**Аннотация.** Приведена математическая модель экспансии предприятия с низким качеством продукции и рекламного агентства на предприятие с высоким качеством продукции. Возможны два режима блокировки и отток большей доли покупателей города от предприятия с высоким качеством продукции — устойчивый фокус и устойчивый узел.

**Ключевые слова:** математическая модель, система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Рассмотрим два конкурирующих предприятия, выпускающих однотипную продукцию. Пусть у изделий первого предприятия качество выше по сравнению с качеством изделий второго предприятия. Вместо вкладывания средств в модернизацию производства второе предприятие решает воспользоваться услугами рекламного агентства для увеличения спроса на свой товар.

Динамику изменения числа  $N_1$  покупателей товара первого предприятия и числа  $N_2$  покупателей товара второго предприятия можно описать системой двух нелинейных безразмерных [1] дифференциальных уравнений первого порядка (усложненная модель А. А. Самарского [2] на случай двух переменных):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_1}{d\bar{t}} &= \bar{\alpha}_1 \bar{N}_1 - \bar{\beta}_1 \bar{N}_1 \bar{N}_2 - \bar{c}_1 \bar{N}_2 - 1, \\ \frac{d\bar{N}_2}{d\bar{t}} &= \bar{\alpha}_2 \bar{N}_2 - \bar{\beta}_2 \bar{N}_1 \bar{N}_2 - \bar{c}_2 \bar{N}_1 - 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\bar{N}_1 = \frac{N_1}{N_0}$ ;  $\bar{N}_2 = \frac{N_2}{N_0}$ ;  $\bar{t} = \frac{t}{T_0}$ ;  $0 \leq \bar{N}_1$ ;  $\bar{N}_2$ ;  $\bar{t} \leq 1$ ;  $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 T_0$ ;  $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 T_0$ ;  $\bar{\beta}_1 = \beta_1 T_0 N_0$ ;  $\bar{\beta}_2 = \beta_2 T_0 N_0$ ;  $\bar{c}_1 = c_1 T_0 N_0$ ;  $\bar{c}_2 = c_2 T_0 N_0$ ;  $\bar{t} = t / T_0$ ;

$N_0$  — население города с потенциальной возможностью покупки товара обоих предприятий;

$T_0$  — рассматриваемый промежуток времени ( $\bar{t}$  — безразмерное время);

$N_1, N_2$  — число покупателей товара первого и второго предприятий соответственно.

Второй множитель в правой части системы (1)  $1 - \overline{N}_1 - \overline{N}_2$  равен оставшейся доле потенциальных покупателей в городе. При действии рекламы первого порядка скорость осуществления покупок товара второго предприятия  $\frac{d\overline{N}_2}{dt}$  пропорциональна  $1 - \overline{N}_1 - \overline{N}_2$  с коэффициентом  $\overline{\alpha}_2$ . Аналогично, скорость осуществления покупок товара первого предприятия  $\frac{d\overline{N}_1}{dt}$  пропорциональна  $1 - \overline{N}_1 - \overline{N}_2$  с коэффициентом  $\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2$  (рекламное агентство превозносит достоинства товара второго предприятия в ущерб товару первого предприятия).

Реклама второго порядка генерируется покупателями. При действии рекламы второго порядка скорость осуществления покупок товара второго предприятия  $\frac{d\overline{N}_2}{dt}$  пропорциональна  $\overline{N}_2$  с коэффициентом  $\overline{\beta}_2$ . Аналогично, скорость осуществления покупок товара первого предприятия  $\frac{d\overline{N}_1}{dt}$  пропорциональна  $\overline{N}_1$  с коэффициентом  $\overline{\beta}_1 - 0$ .

Коэффициенты  $\overline{c}_1, \overline{c}_2$  моделируют отношение покупателей товара одного предприятия к товару противоположного предприятия (также реклама второго порядка). Покупатели товара первого предприятия с долей  $\overline{N}_1$  хвалят свою покупку и осуждают качество товара второго предприятия (коэффициенты  $\overline{\beta}_1, -\overline{c}_2$  соответственно). Покупатели  $\overline{N}_2$ , недовольные низким качеством товара второго предприятия, предполагают высокое качество товара первого предприятия (коэффициенты  $\overline{\beta}_2, \overline{c}_1$

соответственно). В выбранной нами модели безразмерные коэффициенты порядка единицы (так как коэффициенты в левой части (1) равны 1, иначе некоторые слагаемые в системе (1) можно удалить) отражают стоимость, качество товара и отношение покупателей  $\bar{\alpha}_1 = 0,7$ ,  $\bar{\alpha}_2 = 0,7$ ,  $\bar{\beta}_1 = 0,75$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0,97$ ,  $\bar{c}_1 = 1,07$ ,  $\bar{c}_2 = 0,9$ .

Предположим, что поворот точки с фазовыми координатами  $(\bar{N}_1, \bar{N}_2)$  на угол  $2\pi$  происходит раньше истечения гарантийного срока. Магазины принимают возвращенный товар от покупателей по первому их требованию до истечения гарантийного срока, т. е.

возможна ситуация  $\frac{d\bar{N}_1}{dt} < 0$ ,  $\frac{d\bar{N}_2}{dt} < 0$ . Определим [3] стационарную точку  $(\bar{N}_{01}, \bar{N}_{02})$  для системы уравнений (1):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{N}_1}{dt} = 0 & \quad \bar{\alpha}_1 \bar{N}_{10} \bar{\beta}_1 - \bar{c}_1 \bar{N}_{20} = 0, & \bar{N}_{10} & \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{c}_1}{\bar{c}_1 \bar{c}_2} \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_2}{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} = 0,297, \\ \frac{d\bar{N}_2}{dt} = 0 & \quad \bar{\alpha}_2 \bar{N}_{20} \bar{\beta}_2 - \bar{c}_2 \bar{N}_{10} = 0, & \bar{N}_{20} & \frac{\bar{\alpha}_1 \bar{c}_2}{\bar{c}_1 \bar{c}_2} \frac{\bar{\alpha}_2 \bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2} = 0,446. \end{aligned} \quad (2)$$

В новых переменных  $\bar{n}_1 = \bar{N}_1 - \bar{N}_{10}$ ,  $\bar{n}_2 = \bar{N}_2 - \bar{N}_{20}$  из (1) в окрестности особой точки  $(0,0)$  получим систему уравнений (3):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{n}_1}{dt} & \quad \bar{n}_1 \bar{\beta}_1 - \bar{c}_1 \bar{n}_2 - 1 \bar{N}_{10} \bar{N}_{20} \bar{n}_1 \bar{n}_2 - \bar{n}_1 \bar{\beta}_1 - \bar{c}_1 \bar{n}_2 - 1 \bar{N}_{10} \bar{N}_{20}, \\ \frac{d\bar{n}_2}{dt} & \quad \bar{n}_2 \bar{\beta}_2 - \bar{c}_2 \bar{n}_1 - 1 \bar{N}_{10} \bar{N}_{20} \bar{n}_1 \bar{n}_2 - \bar{n}_2 \bar{\beta}_2 - \bar{c}_2 \bar{n}_1 - 1 \bar{N}_{10} \bar{N}_{20}. \end{aligned} \quad (3)$$

Характеристическое уравнение  $\det A - \lambda I = 0$  для собственных значений (3) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & 1 & \overline{N}_{10} & \overline{N}_{20} & \lambda & c_1 & 1 & \overline{N}_{10} & \overline{N}_{20} \\ c_2 & 1 & \overline{N}_{10} & \overline{N}_{20} & \beta_2 & 1 & \overline{N}_{10} & \overline{N}_{20} & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 - \overline{N}_{10} - \overline{N}_{20} - \frac{\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2)^2 - 4\overline{c}_1\overline{c}_2}}{2}.$$

Если особая точка  $(n_1 = 0, n_2 = 0)$  является устойчивым фокусом (в линейном приближении) [там же], то  $\overline{\beta}_2 > \overline{\beta}_1$ ,

$$\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 > 2\sqrt{\overline{c}_1\overline{c}_2}, \quad \overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2 < \sqrt{\overline{c}_1\overline{c}_2}, \quad \overline{c}_1\overline{c}_2 > 0, \quad \overline{N}_{10} > 0, \quad \overline{N}_{20} > 0, \quad \frac{\overline{\beta}_2}{\overline{c}_1} > \frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\alpha}_1} > \frac{\overline{c}_2}{\overline{\beta}_1}, \quad \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 > \overline{c}_1\overline{c}_2.$$

Численно решим нелинейную систему уравнений (3) методом Рунге — Кутты четвертого порядка (рис. 1а).

Если особая точка  $(n_1 = 0, n_2 = 0)$  — устойчивый узел [там же], то

$$\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2 > \sqrt{(\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2)^2 - 4\overline{c}_1\overline{c}_2}, \quad \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 > \overline{c}_1\overline{c}_2, \quad \overline{\beta}_1 > \frac{\overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2}{2}, \quad \sqrt{\overline{c}_1\overline{c}_2} > \sqrt{\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2},$$

$$\overline{N}_{10} > 0, \quad \overline{N}_{20} > 0, \quad \frac{\overline{\beta}_2}{\overline{c}_1} > \frac{\overline{\alpha}_2}{\overline{\alpha}_1} > \frac{\overline{c}_2}{\overline{\beta}_1}, \quad \overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 > \overline{c}_1\overline{c}_2$$

$$\left( \overline{N}_{10} = 0,144, \overline{N}_{20} = 225 \right).$$

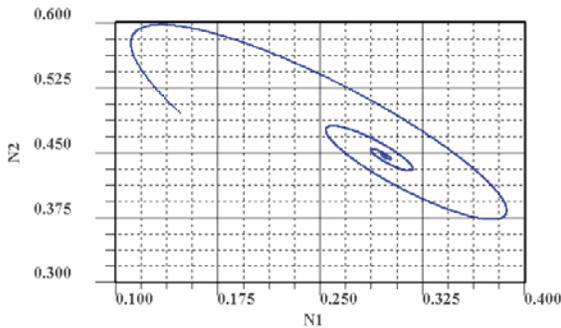


Рис. 1а. Зависимость  $\overline{N}_2$  ( $\overline{N}_1$ ):  $\overline{\alpha}_1 = 0,7$ ,  $\overline{\alpha}_2 = 0,7$ ,  $\overline{\beta}_1 = 0,75$ ,  $\overline{\beta}_2 = 0,97$ ,  $\overline{c}_1 = 1,07$ ,  $\overline{c}_2 = 0,9$  с начальными условиями  $\overline{n}_1 = -0,15$ ,  $\overline{n}_2 = 0,05$  и временным шагом  $h_t = 0,03$  (устойчивый фокус)

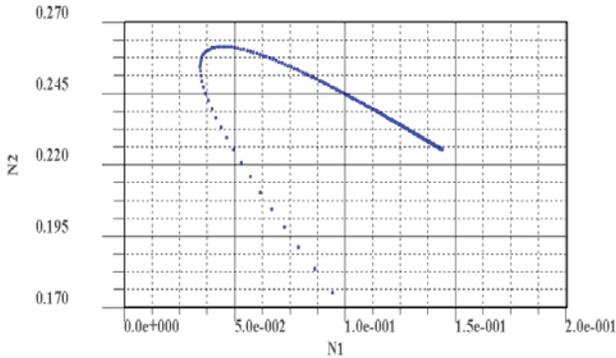


Рис. 1б. Зависимость  $\overline{N_2}$  ( $\overline{N_1}$ ):  $\overline{\alpha_1} = 0,8$ ,  $\overline{\alpha_2} = 0,8$ ,  $\overline{\beta_1} = 0,8$ ,  $\overline{\beta_2} = 2,88$ ,  $\overline{c_1} = 1,05$ ,  $\overline{c_2} = 3,04$  с начальными условиями  $\overline{n_1} = -0,05$ ,  $\overline{n_2} = -0,05$  и шагом сетки  $h_t = 0,03$  (устойчивый узел)

Из рис. 1а и 1б видно, что фазовая траектории решения системы уравнений (3) попадает в предельную стационарную точку из любой начальной точки, удаленной от стационарной по каждой переменной не более чем на 0,15 (рис. 1а), не более чем на 0,05 (рис. 1б). Стационарная точка — устойчивое состояние системы в течение длительного времени, из которого оба предприятия уже не могут выйти при сохранении действия рекламы первого порядка. В стационарной точке  $\overline{N_2} / \overline{N_1} \approx 2$ .

Приведена математическая модель экспансии предприятия с низким качеством товара и рекламного агентства на предприятие с высоким качества товара. Возможны два режима блокировки и отток большей доли покупателей от предприятия с высоким качеством продукции — устойчивый фокус и устойчивый узел. В последнем случае разорение предприятия с высоким качеством продукции происходит скорее.

### Литература

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука; Физматлит, 1977. 435 с.

2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

3. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М: Наука; Физматлит, 1992. 128 с.

*Golubeva O., Ehilevskiy S., Pastuhov Y.,  
Pastuhov D., Lesovaya T., Zazulya P.*

### MATHEMATICAL MODEL OF THE BEHAVIOR OF AN ADVERTISING AGENCY AND TWO COMPETING COMPANIES

**Abstract.** *The mathematical model of the expansion of an enterprise with a low quality of products and an advertising agency for an enterprise with high quality products is given. There are two modes of blocking and outflow of a larger proportion of city buyers from the enterprise with high quality products — a stable focus and a stable knot.*

**Keywords:** *mathematic model, system of the nonlinear differential first-order equations.*

*Голубева О. В., Ехилевский С. Г., Пастухов Ю. Ф.,  
Пастухов Д. Ф., Сорокин П. В.  
Полоцкий государственный университет  
Полоцк, Республика Беларусь*

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ

**Аннотация.** *Разработан алгоритм поиска трещин в железобетонной балке по полю напряжения и полю деформации с малыми неразрушающими нагрузками. Показано, что поперечные трещины могут быть обнаружены только по полю напряжений в зонах локализации низкого напряжения на грани. Продольные трещины выявляются и по полю напряжений, и по полю деформаций с обязательным условием крутящего момента вдоль балки. Моделированием проверено и объяснено, что контактные зоны двух тел*