УДК 512.64

Т.С. Рудькова, О.В. Голубева, Н.А. Гурьева

ПСЕВДОРЕШЕНИЯ И ИХ ПРОЕКЦИИ НА ПОДПРОСТРАНСТВО ПРАВЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ВЕКТОРОВ

Научный руководитель: С.Г. Ехилевский, доктор техн. наук, доцент
Полоцкий государственный университет
(Республика Беларусь, г. Новополоцк, t.s.rudkova@pdu.by, o.golubeva@psu.by)

Часто принятие глобальных решений связано с поисками компромисса. Поэтому, математические модели, описывающие нетривиальные явления, не имеют точных решений. Причина в том, что сами модели не вполне корректны, либо осознанно, либо в связи с отсутствием адекватного математического аппарата. Есть также не идеальные задачи, в которых ошибки априори неизбежны. В таких задачах можно лишь минимизировать издержки, связанные с отсутствием точных решений. В связи с изложенным, в математике и информатике актуальна задача поиска псевдорешений, отражающих упомянутый выше компромисс.

Проиллюстрируем это математическое моделирование на примере систем линейных алгебраических уравнений.

Найдем псевдорешения и их проекции на подпространство правых сингулярных векторов для системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 4, \\ x_2 + x_4 = -4, \\ x_3 + x_4 = 4. \end{cases} \tag{1}$$

Данную систему (1) можем представить в матричной форме:

$$AX = B, \tag{2}$$

где A – матрица из коэффициентов при неизвестных системы, X – матрица-столбец из неизвестных, B – матрица-столбец из свободных членов системы.

Таким образом, (2) есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Существует несколько способов нахождения псевдорешений, например метод наименьших квадратов. Согласно этому методу находят такие псевдорешения $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, при которых функция

$$F(X) = |AX - B|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - b_i \right|^2, \qquad (4)$$

имеет наименьшее значение. Здесь a_{ik} – элемент матрицы A, где $i = 1,2,3$, $k = 1,2,3,4$.

Для нахождения псевдорешений системы уравнений (1) построим функцию $F(X) = |AX - B|^2$:

$$\begin{aligned} &F(X) = (x_1 + x_4 - 4)^2 + (x_2 + x_4 + 4)^2 + (x_3 + x_4 - 4)^2 = \\ &x_1^2 + 2x_1x_4 + 3x_4^2 - 8x_1 + x_2^2 + 2x_2x_4 + 8x_2 + x_3^2 + 2x_3x_4 - 8x_3 - 8x_4 + 48 \end{aligned}. \qquad (5)$$

Найдём частные производные функции (5) по переменным x_1, x_2, x_3 и приравняем их к нулю. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_4, \\ x_2 = -4 - x_4, \\ x_3 = 4 - x_4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4 = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Решив её, найдем множество псевдорешений $X = (4 - x_4, -4 - x_4, 4 - x_4, x_4)^T$.

Для них $F(X) = 0$, что отражает факт совместности рассматриваемой системы. Заметим, что первые три уравнения последней системы можно трактовать как параметрическое задание прямой в трехмерном пространстве, где в качестве параметра x_4 может фигурировать время. При этом упомянутая прямая – траектория равномерного движения точки со скоростью $v = \sqrt{\dot{x}_1(x_4)^2 + \dot{x}_2(x_4)^2 + \dot{x}_3(x_4)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$.

Отметим, что нахождение псевдорешений с помощью метода наименьших квадратов сводится к матричному уравнению вида:

$$A^*AX = A^*B, \qquad (7)$$

где матрица A^* – матрица, полученная из матрицы A транспонированием и заменой элементов на комплексно-сопряжённые. Так как матрица A действительная, то $A^* = A^T$.

Найдём псевдорешения исходной системы уравнений вторым способом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad (8)$$

и из соотношения (7) снова получаем систему (6).

В радиус-векторе минимальной длины на множестве псевдорешений, содержится вся информация обо всех псевдорешениях. Поэтому, для того чтобы его определить, необходимо найти нормальное псевдорешение $X^0 = \left(x_1^{\,0}, x_2^{\,0}, \ldots, x_n^{\,0}\right)^T$, при котором функция $\varPhi(X) = |X|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$ имеет наименьшее значение.

Найдём его, составив функцию:

$$\varPhi(X) = |X|^2 = (4 - x_4)^2 + (-4 - x_4)^2 + (4 - x_4)^2 + x_4^{\,2} = 4x_4^{\,2} - 8x_4 + 48. \qquad (9)$$

Отсюда получаем $\varPhi'(X) = 8x_4 - 8$, $8x_4 - 8 = 0$ или $x_4 = 1$. Значит, что $X^0 = (3,-5,3,1)^T$ – нормальное псевдорешение.

Любая модель наиболее проста в системе координат, учитывающей симметрию описываемого явления. Поэтому дальнейшим шагом решения задачи будет нахождение проекции нормального псевдорешения $X^0 = (3,-5,3,1)^T$ на подпространство правых сингулярных векторов матрицы A

Согласно определению, левые сингулярные векторы матрицы линейного преобразования A – собственные векторы матрицы AA^*, соответственно правые сингулярные векторы – собственные векторы матрицы A^*A.

Для того чтобы найти собственные векторы линейного оператора необходимо решить матричное уравнение $(A - \lambda E)X = 0$, где λ – соответствующее вектору X собственное значение матрицы A.

Решив матричное уравнение в виде системы однородных уравнений,

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + (2-\lambda)x_2 + x_3 = 0,\\ x_1 + x_2 + (2-\lambda)x_3 = 0.\end{cases} \qquad (10)$$

получим множество собственных векторов (левых сингулярных базисов) заданной матрицы $AA*$:

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1{,}1{,}1)^T,\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1{,}0)^T,\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1{,}1,-2)^T, \qquad (11)$$

где f_1, f_2, f_3 – левые сингулярные векторы этой матрицы.

Аналогично найдем множество правых сингулярных базисов матрицы $A*A$, решив систему однородных уравнений вида:

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1 + x_4 = 0,\\ (1-\lambda)x_2 + x_4 = 0,\\ (1-\lambda)x_3 + x_4 = 0,\\ x_1 + x_2 + x_3 + (1-\lambda)x_4 = 0.\end{cases} \qquad (12)$$

И получим:

$$e_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1{,}1{,}1{,}3)^T,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1{,}0{,}0)^T,\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1{,}1,-2{,}0)^T,\ e_4 = \frac{1}{2}(1{,}1{,}1,-1)^T. \quad (13)$$

Здесь e_1, e_2, e_3, e_4 – правые сингулярные векторы матрицы.

Определим сингулярные числа как решение матричных уравнений $Ae_i = \rho f_j$ и $Af_i = \rho e_i$, где e_i, f_j – соответственно правые и левые сингулярные векторы, ρ – сингулярные числа исходной матрицы. Для матрицы A данной системы множество сингулярных чисел $\rho_1 = 2, \rho_2 = \rho_3 = 1$.

Векторы e_i образуют ортонормированный базис в пространстве $X^{(4)}$ $(e_i, e_j) = \begin{cases}1, i = j\\ 0, i \neq j\end{cases}$. Это значит, что X^0 можно представить разложением:

$$X^0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4. \qquad (14)$$

Обозначим через X^1 проекцию X^0 на подпространство $X^{(3)}$, которое будет определено векторами e_1, e_2, e_3, то есть $X^{(3)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Тогда X^0 как вектор из $X^{(3)}$ представится в виде $X^1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$.

В этом случае:

$$X^0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + Z \,. \qquad (15)$$

Здесь $Z = a_4 e_4$ ортогонален подпространству $X^{(3)}$.

Итак, чтобы найти проекцию X^0 на подпространство $X^{(3)}$, следует найти координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого умножим обе части равенства (15) скалярно на векторы e_1, e_2, e_3 и, учитывая ортонормированность базиса, получим:

$$\left(X^0, e_i\right) = \left(e_i, e_i\right) a_i = a_i \text{, или } a_1 = 2/\sqrt{3}\,,\ a_2 = -8/\sqrt{2}\,,\ a_3 = -8/\sqrt{6}\,. \qquad (16)$$

Таким образом, проекция X^1 вектора X^0 на подпространство $X^{(3)} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ имеет вид $X^1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}} e_1 - \dfrac{8}{\sqrt{2}} e_2 - \dfrac{8}{\sqrt{6}} e_3$.

Заметим, что

$\left|X^1\right| = \left(2/\sqrt{3}\right)^2 + \left(-8/\sqrt{2}\right)^2 + \left(-8/\sqrt{6}\right)^2 = 44 = 3^2 + \left(-5\right)^2 + 3^2 + 1^2 = \left|X^0\right|$, т.к. $a_4 = \left(X^0, e_4\right) = \dfrac{1}{2}\left(3 - 5 + 3 - 1\right) = 0$. То есть, в базисе правых сингулярных векторов, учитывающих симметрию задачи, нормальному псевдорешению отвечает начальный момент «времени» $a_4 = 0$, а не промежуточный $x_4 = 1 \neq 0$ как в исходном базисе.

Таким образом, на примере систем линейных алгебраических уравнений продемонстрирована идеология и способы построения псевдорешений. Их описание оптимизировано переходом к базису правых сингулярных векторов, учитывающих симметрию задачи. Для четырехмерного случая найдена проекция нормального псевдорешения на подпростарнство трех декартовых координат. Предложены наглядные интерпретации полученных результатов.

Список использованных источников

1. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра / Е.Е. Тыртышников. – Москва: МГУ, 2004-2005. – 372 с.

2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра / В. А. Ильин – М.: Наука, 1999. – 296 с.

3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ / Р. Хорн. – М.: Мир, 1989. – 655 с.