Список использованных источников

1. Рудный Д.А. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в каналах с учетом теплофизических свойств газа [Текст]. Монография / Д.А. Рудный, Архангельск: САФУ, 2014. 122 с.
2. Andries P., Tallec P. Lr., Perlat J., Perthame B. The Gaussian-BGK model of Boltzmann equation with small Prandtl numbers // European Journal of Mechanics B Fluids. 2000. Vol. 19. No 6. P. 813-830.
3. Шарипов, Ф.М. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах / Ф.М. Шарипов, В.Д. Селезнев. – Екатеринбург: УрО РАН, 2008. - 230с.

УДК 519.21; 519.22

Т.С. Рудькова, О.В. Голубева

ЭКСТРЕМАЛЬНОСТЬ ЭНТРОПИИ, ФОРМУЛА СТИРЛИНГА И ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Научный руководитель: С.Г. Ехилевский, доктор техн. наук, доцент
Полоцкий государственный университет
(Республика Беларусь, г. Новополоцк, t.s.rudkova@pdu.by, o.golubeva@psu.by)

При моделировании различных теоретических и практических задач возникает ситуация, когда известны лишь некоторые ограничения, накладываемые на случайную величину. Чаще всего такими ограничениями являются значения моментов распределений, но могут быть и другие условия, например, ограничение области возможных значений случайной величины. В рамках определенной математической модели в качестве такого критерия предлагается принцип экстремума энтропии, согласно которому из всех подходящих распределений следует выбирать то, которое обладает максимальной энтропией в данных условиях [1]. Это позволяет получить нетривиальные результаты синтетическими методами, минуя громоздкое математическое моделирование задач.

Проиллюстрируем сказанное на примере получения асимптотического выражения для факториалов, известного как формула Стирлинга.

С помощью n-кратного интегрирования по частям $\left(dV = e^{-x}dx\right)$ и правила Лопиталя можно убедится в справедливости цепочки равенств:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \ldots = n!. \qquad (1)$$

Разделив левую и правую части (1) на $n!$, получим равенство:

$$\int_0^\infty \frac{1}{n!} x^n e^{-x} dx = 1, \qquad (2)$$

которое можно интерпретировать как условие нормировки для плотности вероятности некоторой неотрицательной случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} \qquad (3)$$

С помощью (1) и (3) найдем её математическое ожидание дисперсию и среднеквадратическое отклонение:

$$M(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \qquad (4)$$

$$M(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty x^{n+2} e^{-x} dx = \frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2),$$

$$D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = (n+1)(n+2) - (n+1)^2 = n+1,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{n+1}. \qquad (5)$$

Заметим, что при $n = 0$ распределение (3) переходит в экспоненциальное с единичным параметром. Аддитивная зависимость $M(X)$ от номера n (4) позволяет (с учетом свойств математического ожидания) сделать вывод, что (3) задает плотность вероятности суммы $n+1$ экспоненциально распределенного слагаемого, известную как γ-распределение с $n+1$ степенью свободы.

Согласно (4) и (5) при больших n слева от матожидания в области возможных значений X помещается сколько угодно среднеквадратических отклонений:

$$\left(M(X)-0\right)/\sigma(X)=\sqrt{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty. \qquad (6)$$

То есть, область возможных значений X из полубесконечной $\left(x\in[0,\infty)\right)$ при $n\to\infty$ превращается как бы в бесконечную. На ней максимум энтропии обеспечивается нормальным распределением

$$S=M(\ln f(X)) \qquad (7)$$

$$f(x)=\frac{1}{n!}x^n e^{-x}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)}e^{-\frac{(x-M(x))^2}{2\sigma(x)^2}}, \qquad (8)$$

где x принадлежит интервалу, обеспечивающему для нормального закона практически весь вклад в энтропию (7). Выполнив в (7) и (8) замену переменной $y=(x-M(X))/\sigma(X)$ (9)

при $n\to\infty$ получим:

$$\begin{aligned}S&=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\\&=\ln\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\ln\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}\end{aligned} \qquad (10)$$

При получении (10) учтено условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1\approx\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad (11)$$

и единичность дисперсии приведенной случайной величины Y:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1\approx\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=-\sqrt{2/\pi}ce^{-\frac{c^2}{2}}+\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \qquad (12)$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться интегрированием по частям $\left(U=y^2\right)$.

Согласно неравенству Чебышева, погрешности приближенных равенств в (11) и (12) оцениваются величинами $1/c^2$ и $\sqrt{2/\pi}ce^{-\frac{c^2}{2}}+1/c^2\sim 1/c^2$, которые быстро убывают с ростом c:

$$\int_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=0{,}99994...\approx1,\ \int_{-4}^{4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=0{,}99887\approx1. \qquad (13)$$

С учетом (9), это позволяет для

$$x \in \left(M(X) - c\sigma(X), M(X) + c\sigma(X)\right) \tag{14}$$

совместить критерий справедливости асимптотики (8) ($1/c^2 << 1$) с условием квазибесконечности области возможных значений $c\sigma(X) << M(X)$:

$$1 << c^2 << \left(\frac{M(x)}{\sigma(X)}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{n}{2}. \tag{15}$$

Подставив в (8) любое x из интервала (14) (например $x = M(X)$) и учитывая (4) и (5), получим:

$$\frac{1}{n!}(n+1)^n e^{-(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}. \tag{16}$$

Откуда, пренебрегая в скобках единицами (16) по сравнению с n, получим асимптотическое выражение для факториалов с большими аргументами, известное как формула Стирлинга:

$$n! \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{17}$$

Список использованных источников

1. Гельгор А.Л. Теоретико-информационные основы телекоммуникационных систем: учеб. пособие / А.Л. Гельгор, Е.А. Попов — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – 288 с.

2. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятности и математической статистики / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. –404 с.