

Теоретико-вероятностный подход к моделированию респиратора на химически связанном кислороде



С.Г. Ехилевский,
д-р техн. наук, проф.,
ekhilevskiy@yandex.ru



О.В. Голубева,
канд. техн. наук,
доцент, декан



Е.П. Потапенко,
вед. инженер

Полоцкий государственный университет,
Новополоцк, Республика Беларусь

Производственное
республиканское
унитарное
предприятие
«Витебскоблгаз»,
Витебск, Республика
Беларусь

Для моделирования рабочего процесса респиратора на химически связанном кислороде развит метод формализма, основанный на описании с помощью теории вероятностей случайной координаты элементарного акта хемосорбции молекулы CO_2 гранулами надпероксида калия и случайного времени жизни этой молекулы в регенеративном патроне дыхательного аппарата. Показана симметрия плотности вероятности упомянутых случайных величин относительно перестановки аргументов, в качестве которых используются обезразмеренное время работы респиратора и расстояние от входа в регенеративный патрон до рассматриваемого слоя хемосорбента. Выделены асимптотика процесса при больших временах и поправки к ней, обусловленные асимметриями и эксцессами различных порядков.

Ключевые слова: теоретико-вероятностный подход, метод формализма, изолирующий дыхательный аппарат, регенерация воздуха, кислородсодержащий продукт, акт хемосорбции, асимптотика рабочего процесса респиратора, химически связанный кислород.

Для цитирования: Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Потапенко Е.П. Теоретико-вероятностный подход к моделированию респиратора на химически связанном кислороде // Безопасность труда в промышленности. — 2020. — № 10. — С. 7–15. DOI: 10.24000/0409-2961-2020-10-7-15

Введение

Изолирующие средства защиты дыхания, в отличие от фильтрующих, применяются при наличии в воздухе нескольких отравляющих веществ или при недостатке кислорода [1]. С этим приходится сталкиваться при аварийной утечке газа, пожаре в шахте, подводной лодке, бункере, когда выгорание или вытеснение кислорода сопровождается задымлением и выделением ядовитых продуктов горения.

Изолирующие дыхательные аппараты на химически связанном кислороде предпочтительнее баллонных [2]. В них выдыхаемый воздух регенерируется в процессе химической реакции $4\text{KO}_2 + 2\text{CO}_2 = 2\text{K}_2\text{CO}_3 + 3\text{O}_2 + 360 \text{ кДж}$ при фильтрации воздуха через регенеративный патрон, снаряженный гранулами кислородсодержащего продукта на основе надпероксида калия. Такие респираторы легче и компактнее баллонных, не нуждаются в индикаторе давления, ресивере, компрессорном оборудовании и всегда готовы к оперативному применению [3–5].

Обычно рабочий процесс в аппаратах на химически связанном кислороде моделируют методами

математической физики [6–8], решая задачу динамики сорбции. В результате при заданных граничных и начальных условиях концентрация молекул CO_2 в регенеративном патроне оказывается детерминированной функцией времени и координаты. Очевидно, что такой детерминизм — следствие закона больших (сравнимых с числом Авогадро) чисел, поскольку координата элементарного акта сорбции — случайная величина. Закон ее распределения эволюционирует по мере отработки поглотительного ресурса регенеративного патрона. Поэтому целесообразен теоретико-вероятностный подход к моделированию рабочего процесса респиратора на химически связанном кислороде. Это позволит, не решая уравнений баланса и кинетики сорбции молекул CO_2^* , выделить асимптотику процесса и вычислить параметры работающего слоя хемосорбента, подключив к исследованию динамики сорбции в качестве дополнительного ресурса основные положения теории вероятностей. Реализация такого подхода и посвящена данная работа.

* Что в нелинейных моделях сопряжено со значительными трудностями.

Рекуррентные полиномы в задаче динамики сорбции

Согласно [9] при постоянной концентрации CO₂ на входе в регенеративный патрон доля непоглощенных молекул ω описывается с помощью уравнения

$$-\omega'_\xi = e^{-\tau} \left(e^{-\xi} + \int_0^\tau e^{\tau'} d_\tau \omega \right), \quad (1)$$

где ξ, τ — безразмерные переменные¹; d_τ — частный дифференциал по τ;

$$\begin{aligned} \xi &= x\beta/v; \\ \tau &= \beta\gamma t, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь x — расстояние от входа в патрон до рассматриваемого слоя хемосорбента; β и γ — феноменологические постоянные, задающие скорость сорбции и ее ресурс; v — скорость фильтрации; t — время работы респиратора.

Стационарность граничного условия означает, что

$$\omega(0, \tau) = 1. \quad (3)$$

В начальный момент времени (τ = 0) из (1) и (3) следует:

$$\omega(\xi, 0) = e^{-\xi}. \quad (4)$$

Следовательно, пока поглотительный ресурс не тронут, вероятность элементарного акта сорбции в данном слое надпероксида калия пропорциональна его длине и не зависит от ξ.

С учетом (4) решение (1) следует искать в виде

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} P_n(\xi), \quad (5)$$

где n — индекс суммирования, P_n(ξ) — некоторые функции координат. Для их определения подставим (5) в (1) и после почленного интегрирования приравняем выражения при одинаковых степенях τ:

$$-P'_n(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} P_k(\xi). \quad (6)$$

Рекуррентное соотношение (6) дополним вытекающими из (3) и (4) условиями:

$$\left. \begin{aligned} P_0(0) &= 1; \\ P_n(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где n = 1, 2, ...

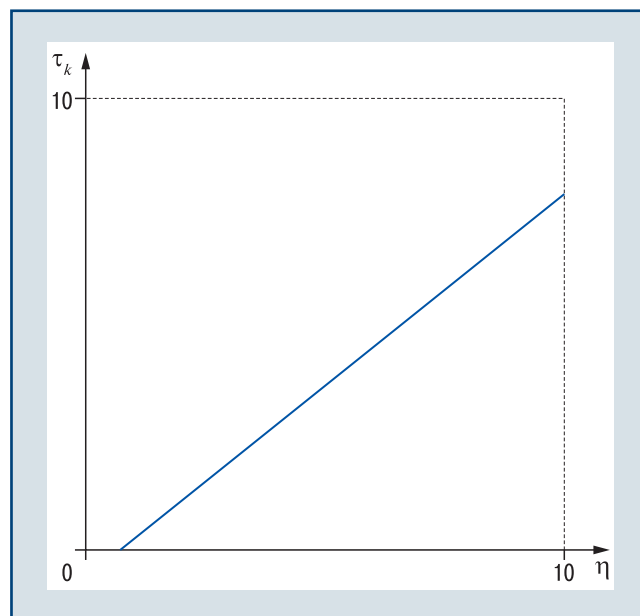
¹ Использование безразмерных переменных делает описание универсальным (пригодным для моделирования респираторов с различным защитным ресурсом и в любом режиме эксплуатации).

С помощью соотношений (6) и (7) можно последовательно найти все P_n до какого угодно номера. В частности, для n = 0 получим P₀(ξ) = 1. Полагая, что в (6) n = 1, и подставив в его правую часть полученное ранее выражение P₀(ξ), найдем P₁(ξ) = ξ. Действуя по указанной схеме (P₂(ξ) = ξ²/2 - ξ; P₃(ξ) = ξ³/6 - ξ² + ξ и т.д.), можно убедиться, что

$$\begin{aligned} P_n(\xi) &= \sum_{k=0}^n P_{nk} \xi^k; \\ P_{nk} &= \frac{1}{k!} \sum_{l=k}^n C_n^l (-1)^{n-l}, \end{aligned} \quad (8)$$

где k — индекс суммирования, C_n^l — число сочетаний из n объектов по l штук.

Срок защитного действия респиратора τ_κ определяется из условия критического проскока CO₂ ω(η, τ_κ) = 0,375 [10], в котором η — безразмерная длина патрона (0 ≤ ξ ≤ η). На рис. 1 видно, что τ_κ линейно связан с η. Согласно (4), если e^{-η} > 0,375, проскок CO₂ с самого начала превышает критический и τ_κ = 0 (прямая на рис. 1 не проходит через начало координат). Поэтому в существующих аппаратах 3 < η < 60 [11]. Согласно экспериментальным данным, (βγ)⁻¹ ≈ 10³ [11]. Таким образом, следуя формуле (2), чтобы оценить срок защитного действия респиратора в секундах, τ_κ необходимо умножить на 1000.



▲ Рис. 1. Срок защитного действия респиратора τ_κ как функция безразмерной длины патрона η
▲ Fig. 1. The period of protective action of the respirator τ_κ as a function of the non-dimensionalized cartridge length η

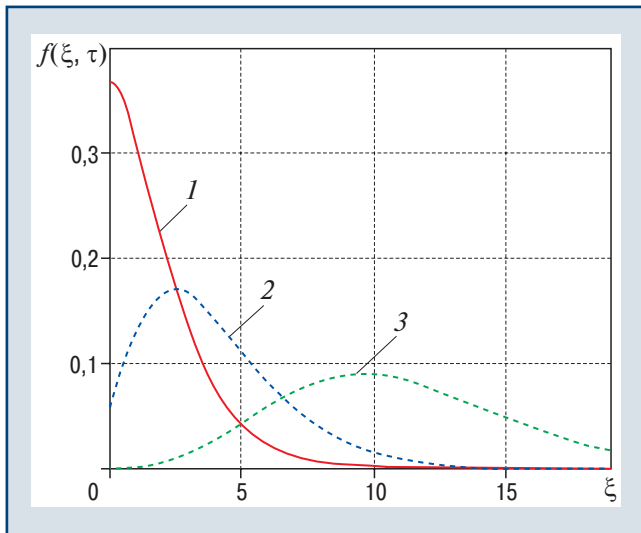
Симметрия плотности вероятности координаты элементарного акта сорбции

Соотношения (5) и (8) позволяют достоверно предсказать концентрацию примеси в любой мо-

мент времени в любом месте патрона. Вместе с тем координата любого элементарного акта сорбции — величина существенно случайная. Исходя из смысла $\omega(\xi; \tau)$ как доли молекул примеси, проникающих к моменту времени τ в патрон на глубину ξ , разность $1 - \omega(\xi, \tau)$ можно трактовать как статистическую вероятность того, что в указанный момент времени молекула примеси будет поглощена не дальше, чем на расстояние ξ от входа в регенеративный патрон. При этом плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции

$$f(\xi, \tau) = -\omega'_\xi(\xi, \tau). \quad (9)$$

Построенные с помощью соотношений (5), (8), (9) и представленные на рис. 2 (здесь 1 — зависимость $f(\xi, \tau)$ от координаты при $\tau = 1$; 2 — при $\tau = 3$; 3 — при $\tau = 10$) и рис. 3 (здесь 1 — зависимость $f(\xi, \tau)$ от времени при $\xi = 1$; 2 — при $\xi = 3$; 3 — при $\xi = 10$) зависимости показывают, что плотность вероятности не меняется при перестановке аргументов:



▲ Рис. 2. Зависимость $f(\xi, \tau)$ от координаты в различные моменты времени

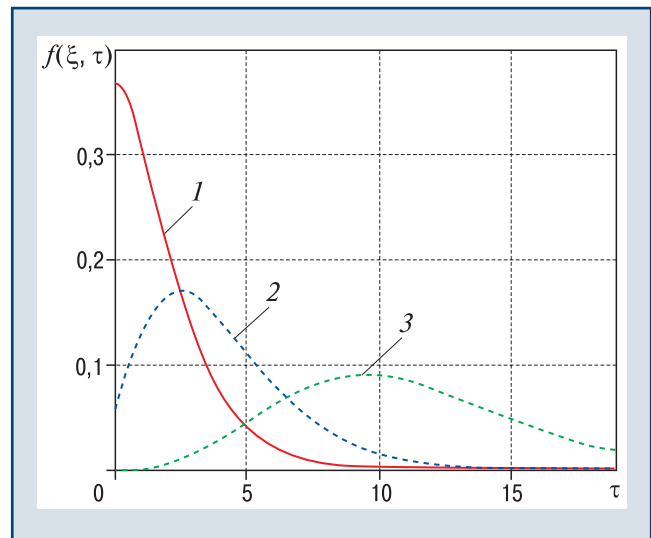
▲ Fig. 2. Dependence of $f(\xi, \tau)$ on the coordinate at different times

$$f(\xi, \tau) = f(\tau, \xi). \quad (10)$$

Это позволяет выразить $\omega(\xi, \tau)$ через семейство временных рекуррентных полиномов, связанных с начальными статистическими моментами случайной координаты элементарного акта сорбции. Подставив (5) и (8) в (9), получим

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) &= -\left[e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} P_n(\xi) \right]_{\xi} = \\ &= e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left[P_n(\xi) - P_n(\xi)' \right], \end{aligned}$$

а с учетом (10):



▲ Рис. 3. Зависимость $f(\xi, \tau)$ от времени при различных значениях координаты

▲ Fig. 3. Dependence of $f(\xi, \tau)$ on time for different values of the coordinate

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) &= e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \left[P_n(\tau) - P_n(\tau)' \right] = \\ &= e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} Q_n(\tau), \end{aligned} \quad (11)$$

где, согласно (8), $P_n(\tau)$ — полиномы по τ с коэффициентами (8). Таким образом, для полиномов $Q_n(\tau) = P_n(\tau) - P_n(\tau)'$ с помощью приведенных выше выражений $P_0(\xi), P_1(\xi), P_2(\xi), P_3(\xi)$ получим $Q_0(\tau) = 1; Q_1(\tau) = \tau - 1; Q_2(\tau) = \tau^2/2 - 2\tau + 1; Q_3(\tau) = \tau^3/6 - 3\tau^2/2 + 3\tau - 1$, что позволяет заметить общую закономерность:

$$Q_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{k!} (-1)^{n-k} \tau^k. \quad (12)$$

Подставив (12) в (11), получим

$$f(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} \tau^k}{(n-k)!(k!)^2}. \quad (13)$$

Полиномы $Q_n(\tau)$ также являются рекуррентными. Чтобы выяснить это, подставим (11) в (9) и выполним интегрирование по ξ :

$$\begin{aligned} 1 - \omega(\xi, \tau) &= \int_0^{\xi} f(\xi, \tau) d\xi = \\ &= e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} Q_n(\tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставив (14) в (1), выполнив интегрирование по τ , разложив $e^{-\xi}$ в ряд Маклорена и приравняв слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ξ , получим

$$Q_n(\tau) = -Q_{n-1}(\tau) + \int_0^{\tau} Q_{n-1}(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где $n = 1, 2, \dots$.

Достаточно легко убедиться, что найденные ранее $Q_0(\tau)$, $Q_1(\tau)$, $Q_2(\tau)$ и $Q_3(\tau)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (15).

Связь плотности вероятности с начальными моментами случайной величины

Выясним смысл введенных полиномов и природу симметрии плотности вероятности относительно перестановки аргументов. Для этого с помощью (1), не решая самого уравнения, найдем начальные статистические моменты координаты элементарного акта сорбции:

$$v_n(\tau) = \int_0^\infty \xi^n f(\xi, \tau) d\xi. \quad (16)$$

С учетом (9) проинтегрируем полученное выражение (16) по частям:

$$v_n(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} [-\xi^n \omega(\xi, \tau)] + nJ_{n-1}(\tau); \quad (17)$$

$$J_k(\tau) = \int_0^\infty \xi^k \omega(\xi, \tau) d\xi. \quad (18)$$

Для вычисления несобственного интеграла $J_k(\tau)$ в соотношении (9) потребуется еще одна связь (учитывающая специфику модели) между $f(\xi, \tau)$ и $\omega(\xi, \tau)$. Подставив (9) в (1) и продифференцировав это выражение по τ , получим $\omega'_\xi(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) + f'_\tau(\xi, \tau)$.

С учетом последнего равенства скорость изменения $J_k(\tau)$ представим в виде:

$$J'_k(\tau) = \int_0^\infty \xi^k \omega'_\tau(\xi, \tau) d\xi = \int_0^\infty \xi^k [f(\xi, \tau) + f'_\tau(\xi, \tau)] d\xi = v_k(\tau) + v'_k(\tau). \quad (19)$$

Подставив (4) в (18), выполним n -кратное интегрирование по частям: $J_k(0) = k!$.

С помощью полученного начального условия и уравнения (19) выведем:

$$J_k(\tau) = \int_0^\tau v_k(\tau) d\tau + v_k(\tau) - v_k(0) + k!. \quad (20)$$

Таким образом, несобственный интеграл в (18) сходится. Это значит, что в подынтегральном выражении $\omega(\xi, \tau)$ при больших ξ убывает быстрее, чем ξ^{-n} , и предел в (17) равен нулю.

Согласно (17) и (20) имеет место рекуррентное соотношение:

$$v_n(\tau) = n \left[v_{n-1}(\tau) + \int_0^\tau v_{n-1}(\tau) d\tau \right]. \quad (21)$$

Вместе с условием нормировки $v_0(\tau) = 1$ оно позволяет последовательно определить

$$\left. \begin{aligned} v_1(\tau) &= \tau + 1; \\ v_2(\tau) &= \tau^2 + 4\tau + 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Чтобы выявить общую закономерность, воспользуемся ранее полученным семейством полиномов (12). Соотношения (15) и (21) имеют сходную структуру, что позволяет установить связь полиномов (12) с начальными моментами:

$$Q_n(\tau) = \frac{1}{n!} v_n(-\tau) (-1)^n. \quad (23)$$

Подставив (12) в (23), получим зависимость от времени всех начальных моментов координаты элементарного акта сорбции:

$$v_n(\tau) = (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{\tau^k}{(k!)^2 (n-k)!}, \quad (24)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Из теории вероятностей [6] известно, что знание всех моментов эквивалентно знанию закона распределения случайной величины. Подставив (23) в (11), получим

$$f(\xi, \tau) = e^{-\tau} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\xi)^n}{(n!)^2} v_n(-\tau). \quad (25)$$

Разложения (5) и (11) не позволяют непосредственно убедиться в нетривиальном свойстве (10). Симметрией относительно перестановки аргументов обладает их сумма. Поэтому решение (1) следует искать в виде:

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^\infty \frac{\tau^n}{n!} g_n(\xi), \quad (26)$$

где $g_n(\xi)$ — новые (неизвестные) полиномы. В частности, из (3) и (4) следует, что

$$\left. \begin{aligned} g_n(0) &= 1; \\ g_0(\xi) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Для определения остальных полиномов подставим (26) в (1) и продифференцируем полученное выражение по ξ и τ , после чего разделим равенство на $e^{-\xi-\tau}$ и проинтегрируем его по τ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty \frac{\tau^n}{n!} [g_n(\xi) - g'_n(\xi)] &= \\ = 1 + \sum_{n=0}^\infty \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} [g_{n+1}(\xi) - g_n(\xi)]. \end{aligned}$$

С помощью (27) преобразуем сумму в левой части полученного равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^\infty \frac{\tau^n}{n!} [g_n(\xi) - g'_n(\xi)] &= \\ = 1 + \sum_{n=0}^\infty \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} [g_{n+1}(\xi) - g'_{n+1}(\xi)]. \end{aligned}$$

Из идентичности левых частей двух последних равенств следует, что $g'_{n+1}(\xi) = g_n(\xi)$.

Проинтегрировав последнее равенство с учетом (27), получим:

$$g_{n+1}(\xi) = 1 + \int_0^\xi g_n(\xi) d\xi. \quad (28)$$

Старт рекуррентной процедуре дает подстановка под интеграл в (28) $g_0(\xi) = 1$ согласно (27). В результате найдем $g_1(\xi) = 1 + \xi$, которое проинтегрируем в (28) на втором шаге $g_2(\xi) = 1 + \xi + \xi^2/2$. По аналогии $g_3(\xi) = 1 + \xi + \xi^2/2 + \xi^3/6$, что позволяет выявить общую закономерность и с учетом (26) записать:

$$\omega(\xi, \tau) = e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) &= -\omega'(\xi, \tau) = \\ &= e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{k!} - \sum_{k=1}^n \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \right) = \\ &= e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tau\xi)^n}{(n!)^2}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь явно выражена симметрия плотности вероятности $f(\xi, \tau)$ координаты ξ элементарного акта сорбции в момент времени τ относительно перестановки аргументов.

То обстоятельство, что в правой части (30) получился одинарный, а не двойной, как в (13), ряд, существенно (в 10–100 раз) повышает скорость численных экспериментов. Заметим, что в связи с постоянством скорости фильтрации координата элементарного акта сорбции пропорциональна времени жизни частицы примеси в патроне. Очевидно, оно зависит от положения работающего слоя кислородсодержащего продукта, характеризующего математическим ожиданием $M(\xi) = v_1(\tau) = \tau + 1 \geq 1$ координаты элементарного акта сорбции (см. (22)). С учетом этого, если под $\xi \geq 0$ понимать разность $M(\xi) - 1$, задаваемую правой частью (30), функцию $f(\theta/\gamma, \xi)/\gamma$ можно трактовать как плотность вероятности обезразмеренного времени жизни частицы примеси $\theta = \beta\gamma x/v = \zeta\gamma$ в патроне с данным приростом $M(\xi)$ в процессе эксплуатации. Согласно наклону графика на рис. 1 γ^{-1} показывает, во сколько раз срок защитного действия респиратора превосходит время жизни частицы примеси θ или сколько порций заполняющего патрон воздуха он может регенерировать.

С учетом симметрии $f(\tau, \xi)$ начальные моменты приведенного времени жизни $\tau = \theta/\gamma$ примут вид (24), в котором τ с учетом изложенного следует заменить на ξ :

$$v_n(\xi) = (n!)^2 \sum_{k=0}^n \frac{\xi^k}{(k!)^2 (n-k)!}, \quad (31)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

В соответствии с (25) плотность вероятности τ связана с $v_n(\xi)$ соотношением

$$f(\tau, \xi) = e^{-\xi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{(n!)^2} v_n(-\xi),$$

что позволяет (см. (11) связать начальные моменты $v_n(\xi)$ с полиномами $P_n(\xi)$:

$$P_n(\xi) = -e^\xi \int_0^\xi e^{-\xi} \frac{1}{n!} v_n(-\xi) (-1)^n d\xi$$

и с помощью (31) еще раз убедиться в справедливости выражения (8).

И в заключение запишем долю частиц примеси v , доживающих в фильтре с заданным приростом $M(\xi)$ до приведенного момента времени, не меньшего τ :

$$\begin{aligned} v(\tau, \xi) &= 1 - \int_0^\tau f(\tau, \xi) d\tau = \\ &= e^{-\xi-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} \sum_{l=0}^n \frac{\tau^l}{l!}. \end{aligned} \quad (32)$$

Правая часть (32) получается из (29) простой перестановкой аргументов в связи с симметрией последнего выражения в (30) и аналогичностью исходных равенств в (32) и (14).

Асимптотика динамической сорбционной активности при больших временах

Согласно (4) и (9) при $\tau = 0$ плотность вероятности координаты элементарного акта сорбции убывает по мере удаления от входа в патрон по экспоненциальному закону. Чтобы выяснить, во что он эволюционирует, используем зависимость от времени центральных статистических моментов координаты элементарного акта сорбции:

$$\begin{aligned} \mu_n(\tau) &= \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i C_{n-i}^{n-i} v_{n-i}(\tau) v_1^i(\tau) + \\ &+ (-1)^n (1-n) v_1^n(\tau). \end{aligned} \quad (33)$$

В частности, из (24) и (33) следует:

$$\left. \begin{aligned} \mu_2(\tau) &= 1 + 2\tau = \sigma^2(\tau); \\ \mu_3(\tau) &= 2 + 6\tau; \\ \mu_4(\tau) &= 9 + 36\tau + 12\tau^2, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где σ — среднеквадратическое отклонение.

Согласно (22) и (34) $\sigma(0) = v_1(0)$, как это и должно быть при экспоненциальном распределении случайной величины ξ . Далее $\sigma(\tau)$ растет медленнее, чем математическое ожидание $m(\tau) = v_1(\tau)$. Критическим является условие $3\sigma(\tau) \leq m(\tau)$, по достижении которого ($\tau \geq 18$) патрон из полубесконечного превращается

как бы в бесконечный. Левее точки $\xi = m(\tau) - 3\sigma(\tau)$, в соответствии с правилом трех сигм [12], функция $f(\xi, \tau)$ практически не отличается от нуля. Это приводит к новому качеству, так как экстремальность энтропии на всей числовой оси обеспечивается уже не экспоненциальным, а нормальным распределением случайной величины [12] (см. рис. 2):

$$f(\xi, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} f_N(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(\tau)} e^{-\frac{[\xi - m(\tau)]^2}{2\sigma(\tau)^2}}. \quad (35)$$

В справедливости последних рассуждений можно убедиться непосредственно, вычислив с помощью (34) и (35) асимметрии и эксцессы функции распределения:

$$\left. \begin{aligned} A_3(\tau) &= \frac{\mu_3(\tau)}{\sigma^3(\tau)} = \frac{3}{\sigma(\tau)} - \frac{1}{\sigma^3(\tau)}; \\ A_5(\tau) &= \frac{\mu_5(\tau)}{\sigma(\tau)^5} = \frac{30}{\sigma(\tau)} + \frac{50}{\sigma(\tau)^3} - \frac{36}{\sigma(\tau)^5}; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} E_4(\tau) &= \frac{\mu_4(\tau)}{\sigma^4(\tau)} - 3 = \frac{12}{\sigma^2(\tau)} - \frac{6}{\sigma^4(\tau)}; \\ E_6(\tau) &= \frac{\mu_6(\tau)}{\sigma^6(\tau)} - 15 = \frac{270}{\sigma^2(\tau)} + \frac{210}{\sigma^4(\tau)} - \frac{230}{\sigma^6(\tau)}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Из (34), (36), (37) следует, что асимметрии и эксцессы являются бесконечно малыми при $\tau \rightarrow \infty$, как и должно быть в случае нормального распределения ξ . Зависимость от времени параметров асимптотики (35) определяется рекуррентным соотношением (21), являющимся следствием линейности модели (1). По этой причине нормальный закон для координаты элементарного акта хемосорбции должен формироваться и в неоднородно снаряженном патроне [13] по мере удаления работающего слоя сорбента от места скачка диаметра гранул кислородсодержащего продукта.

Согласно (35)–(37)

$$f(\xi, \tau) = f_N(\xi, \tau) \times \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n[x(\xi, \tau)]}{\sigma^n(\tau)} \right\}, \quad (38)$$

где $x(\xi, \tau) = [\xi - m(\tau)]/\sigma(\tau)$, (39)

а $\varphi_n(x)$ — некоторые функции, подлежащие определению с помощью $\mu(\tau)$:

$$\frac{\mu_i(\tau)}{\sigma(\tau)^i} \equiv \int_{\frac{m(\tau)}{\sigma(\tau)}}^{\infty} x^i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\sigma^n(\tau)} \right) dx. \quad (40)$$

Тождество (40) должно выполняться в любой момент времени, в том числе и в бесконечно удаленный. При этом, согласно (22) и (34), на нижнем пределе возникает $-\infty$.

Согласно (36) и (37) $\varphi_{2n}(x)$ обеспечивают эксцессы, а $\varphi_{2n-1}(x)$ — асимметрии, поэтому они должны раскладываться по четным и нечетным степеням x соответственно. Приравнявая выражения при одинаковых степенях $\sigma(\tau)$ в левой и правой частях (40), можно записать нужное число уравнений для определения коэффициентов разложения. Старшая степень полиномов $\varphi_n(x)$ равна $3n$, поскольку коэффициенты при более высоких степенях оказываются равными нулю. В частности:

$$\varphi_1(x) = c_{11}x + c_{13}x^3. \quad (41)$$

Подставив (41) в (40), проинтегрируем полученное выражение:

$$I_m = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x^{2m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1), & m = 1, 2, \dots; \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

и приравняем коэффициенты при σ^{-1} в левой и правой частях равенства. В результате для $i = 1$ и $i = 3$ с учетом (36) получим первое и второе уравнения системы:

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_{11} = -3/2 \\ c_{13} = 1/2 \end{cases}. \quad (42)$$

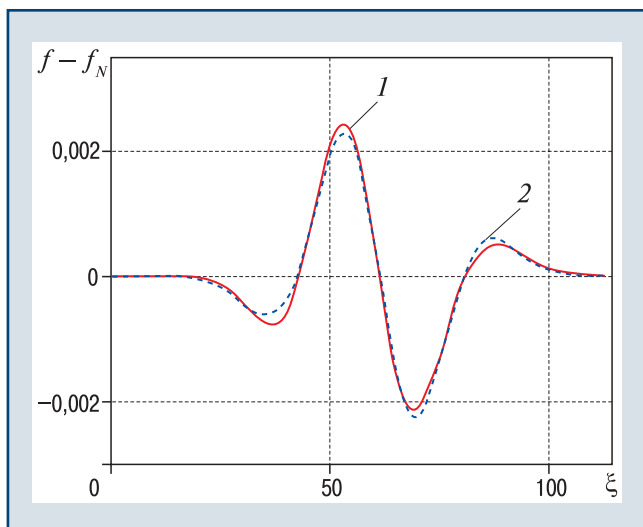
Если при вычислении $\varphi_1(x)$ к правой части (41) добавить слагаемое более высокой нечетной степени, чем третья ($\varphi_1(x) = c_{11}x + c_{13}x^3 + c_{15}x^5$), то для определения неизвестных коэффициентов потребуются три уравнения (40) с нечетными i . Приравняв в них коэффициенты при $\sigma(\tau)^{-1}$, вместо (42) получим систему:

$$\begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_2 & I_3 & I_4 \\ I_3 & I_4 & I_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{13} \\ c_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 30 \end{pmatrix},$$

из которой следует, что $c_{15} = 0$, после чего вернемся к выражению (41).

Определяемая формулами (37), (38), (41) и (42) поправка первого порядка по σ^{-1} хорошо описывает отклонение $f(\xi, \tau)$ от нормального закона (рис. 4). Приравняв в (40) для $i = 0, 2, 4, 6$ коэффициенты при $\sigma(\tau)^{-2}$, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} I_0 & I_1 & I_2 & I_3 \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_4 & I_5 \\ I_3 & I_4 & I_5 & I_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{20} \\ c_{22} \\ c_{24} \\ c_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 270 \end{pmatrix},$$



▲ Рис. 4. Отклонение $f(\xi, 60)$ от нормального закона (сплошная кривая) и вклад в него поправки первого порядка по σ^{-1} (пунктирная кривая)
 ▲ Fig. 4. Deviation of $f(\xi, 60)$ on the normal law (solid curve) and the contribution to it of the first-order correction on σ^{-1} (dashed curve)

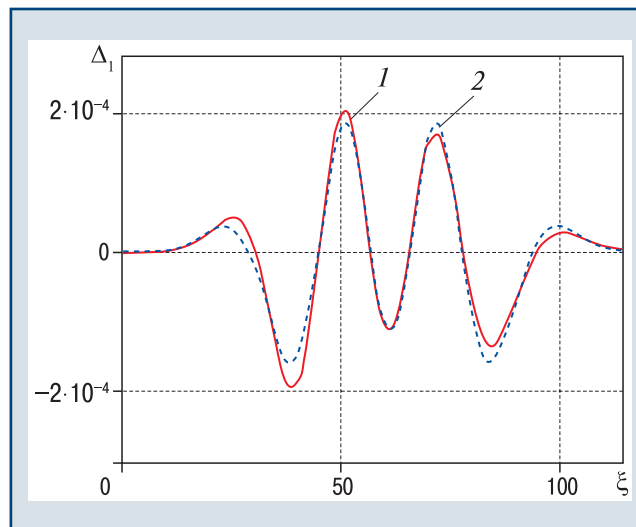
решение которой дает коэффициенты:

$$\varphi_2(x) = (-3 + 21x^2 - 11x^4 + x^6)/8. \quad (43)$$

Построенная с помощью (35), (38), (39) и (43) пунктирная кривая $f_N \sigma^{-2} \varphi_2$ (рис. 5) адекватно приближает отклонение Δ_1 первого приближения $f_N(1 + \sigma^{-1}\varphi_1)$ от плотности вероятности $f(\xi, 60)$. Рисунки 4, 5 подтверждают, что для $\tau = 60$ каждое учитываемое в разложении (38) слагаемое на порядок уменьшает относительную погрешность вычисления $f(\xi, \tau)$, поскольку, согласно (34), $\sigma(60) = 11$. Благодаря этому (38) сходится быстрее, чем (30). В случае необходимости: $\varphi_3(x) = (69x - 248x^3 + 150x^5 - 24x^7 + x^9)/48$; $\varphi_4(x) = (147 - 1674x^2 + 4119x^4 - 2612x^6 + 549x^8 - 42x^{10} + x^{12})/384$.

Заключение

Таким образом, для моделирования рабочего процесса респиратора на химически связанном кислороде развит метод формализма, основанный на описании с помощью теории вероятностей случайной координаты элементарного акта хемосорбции молекулы CO_2 гранулами надпероксида калия и случайного времени жизни этой молекулы в регенеративном патроне дыхательного аппарата. Установлена эволюция статистических моментов упомянутых величин. Показана симметрия их плотности вероятности относительно перестановки обезразмеренных аргументов, в качестве которых используются время работы респиратора и расстояние от входа в регенеративный патрон до рассматриваемого слоя хемосорбента. Наличие симметрии на один-два порядка повышает скорость численных экспериментов. Выделены гауссова асимптотика процесса при больших временах и поправки к ней



▲ Рис. 5. Погрешность первого приближения (сплошная кривая) и вклад в нее поправки второго порядка по σ^{-1} (пунктирная кривая)
 ▲ Fig. 5. Error of the first approximation (solid curve) and the contribution to it of the second order correction on σ^{-1} (dashed curve)

по обратным степеням среднеквадратического отклонения, обусловленные асимметриями и эксцессами различных порядков. Это дополнительно повышает скорость численных экспериментов при моделировании рабочего процесса респиратора на химически связанном кислороде.

Список литературы

1. *Изолирующие дыхательные аппараты и основы их проектирования*: учеб. пособие/ С.В. Гудков, С.И. Дворецкий, С.Б. Путин, В.П. Таров. — М.: Машиностроение, 2008. — 188 с.
2. *Гудков С.В., Матвейкин В.Г., Шаповалов Г.Г.* Преимущества использования изолирующих самоспасателей с химически связанным кислородом в угольных шахтах// *Безопасность труда в промышленности*. — 2012. — № 11. — С. 40–44.
3. *BS EN 13794:2002*. Respiratory protective devices. Self-contained closed-circuit breathing apparatus for escape. Requirements, testing, marking. URL: <https://shop.bsigroup.com/ProductDetail/?pid=000000000019972741> (дата обращения: 20.05.2020).
4. *Jolson J.* Underground Self-Rescuer Technology, Past, Present, and Future// 3rd SCSR Workshop at the MSHA Training Academy. — Arlington, 2006.
5. *Patent № 2741079 EP, G01N 27/74. PCT/JP 2012/069697.* Porosity Measurement Apparatus and Porosity Measurement Method/ М. Kawano, Н. Watarai. Applied: August 2, 2012. Published: June 11, 2014. Bulletin № 24.
6. *Майстренко А.В., Майстренко Н.В., Ерохин О.И.* Моделирование изолирующих дыхательных аппаратов на химически связанном кислороде// *Научные ведомости Белгородского государственного университета. История. Политология. Экономика. Информатика*. — 2014. — № 1 (172). — Вып. 29/1. — С. 81–87.

7. Ехилевский С.Г., Голубева О.В., Потепенко Е.П. Моделирование рабочего процесса дыхательного аппарата на химически связанном кислороде после изменения режима его эксплуатации// Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2015. — № 1. — С. 35–41.

8. Балабанов П.В., Кримиштейн А.А., Пономарев С.В. Идентификация параметров математических моделей регенерации воздуха средствами защиты изолирующего типа// Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2010. — Т. 6. — № 7. — С. 68–73.

9. Ехилевский С.Г., Ольшаников С.А., Потепенко Е.П. Влияние переменных краевых условий на квазистационарный профиль концентрации CO₂ в регенеративном патроне шахтного респиратора// Известия высших учебных заведений. Горный журнал. — 2013. — № 3. — С. 46–53.

10. Диденко Н.С. Регенеративные респираторы для горно-спасательных работ. — М.: Недра, 1990. — 160 с.

11. Ехилевский С.Г. Повышение ресурса эффективности дыхательных аппаратов на химически связанном кислороде: автореф. дис. ... д-ра техн. наук. — Днепропетровск, 2002. — 35 с.

12. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков: учеб. пособие. — М.: Изд-во Московского университета, 1983. — 256 с.

13. Ехилевский С.Г. Оптимизация респиратора на химически связанном кислороде// Безопасность труда в промышленности. — 2019. — № 8. — С. 85–91.

ekhilevskiy@yandex.ru

Материал поступил в редакцию 14 апреля 2020 г.
Доработанная версия — 24 мая 2020 г.

«Bezopasnost Truda v Promyshlennosti»/ «Occupational Safety in Industry», 2020, № 10, pp. 7–15.
DOI: 10.24000/0409-2961-2020-10-7-15

Probability-theoretic Approach to Modeling a Respirator on Chemically Bound Oxygen

S.G. Ekhilevskiy, Dr. Sci. (Eng.), Prof.,
ekhilevskiy@yandex.ru

O.V. Golubeva, Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Prof., Head of Department

Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

E.P. Potapenko, Lead Engineer

Production republican unitary enterprise «Vitebskoblغاز», Vitebsk, Republic of Belarus

Abstract

At present, the main prospects for improving the insulating means of respiratory protection are related to the chemical method of oxygen reservation. The arguments in favor of this choice are the high density of oxygen packaging and its self-regulating supply, depending on the physical activity of the person.

Usually, the working process in devices on chemically bound oxygen is modeled using mathematical physics methods that solve the so-called sorption dynamics problem. As a result, under given boundary and initial conditions, the concentration of CO₂ mole-

cules in the regenerative cartridge turns out to be a deterministic function of time and coordinates. However, the coordinate of the elementary act of sorption is essentially a random variable. The law of its distribution evolves as the absorbing resource of the regenerative cartridge is consumed. Taking into account the above, a probability-theoretic approach to modeling the working process of an insulating breathing apparatus based on chemically bound oxygen was developed. The approach is based on the description by probability theory methods of the random coordinate of the elementary act of chemisorption of a CO₂ molecule by potassium peroxide granules and the random lifetime of this molecule in the regenerative cartridge of the respiratory apparatus. The evolution of the initial and central statistical moments of these values is established. The symmetry of their probability density with respect to the permutation of dimensionless arguments is shown, which are the time and distance from the entrance to the regenerative cartridge to the considered layer of chemisorbent. The presence of symmetry increases the speed of numerical experiments by one or two orders of magnitude. Gaussian asymptotics of the process at long times and corrections to it by inverse degrees of dispersion due to asymmetries and excesses of different orders are revealed. This further increases the speed of numerical experiments in computer simulation of the working process of an insulating respirator on chemically bound oxygen.

Key words: probabilistic-theoretical approach, formalism method, isolation breathing apparatus, air regeneration, oxygen-containing product, chemisorption act, asymptotics of the respirator working process, chemically bound oxygen.

References

1. Gudkov S.V., Dvoretzkiy S.I., Putin S.B., Tarov V.P. Self-contained breathing apparatus and the basics of their design: textbook. Moscow: Mashinostroenie, 2008. 188 p. (In Russ.).

2. Gudkov S.V., Matveykin V.G., Shapovalov G.G. Advantage of Using Isolating Self-Rescuers with Chemically Fixed Oxygen in the Coal Mines. *Bezopasnost truda v promyshlennosti = Occupational Safety in Industry*. 2012. № 11. pp. 40–44. (In Russ.).

3. BS EN 13794:2002. Respiratory protective devices. Self-contained closed-circuit breathing apparatus for escape. Requirements, testing, marking. Available at: <https://shop.bsigroup.com/ProductDetail/?pid=000000000019972741> (accessed: May 20, 2020).

4. Jolson J. Underground Self-Rescuer Technology, Past, Present, and Future. 3rd SCSR Workshop at the MSHA Training Academy. Arlington, 2006.

5. Kawano M., Watarai H. Patent № 2741079 EP, G01N 27/74. PCT/JP 2012/069697. Porosity Measurement Apparatus and Porosity Measurement Method. Applied: August 2, 2012. Published: June 11, 2014. Bulletin № 24.

6. Maystrenko A.V., Maystrenko N.V., Erokhin O.I. Simulation of self-contained breathing apparatus on chemically bound oxygen. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika = Research Bulletin of Belgorod State University. History. Political Science. Economics. Information Technologies* 2014. № 1 (172). Iss. 29/1. pp. 81–87. (In Russ.).

7. Ekhilevskiy S.G., Golubeva O.V., Potapenko E.P. Simulation of the working process of the breathing apparatus on chemi-

cally bound oxygen after changing the mode of its operation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal = News of the Higher Institutions. Mining Journal*. 2015. № 1. pp. 35–41. (In Russ.).

8. Balabanov P.V., Krimshteyn A.A., Ponomarev S.V. Identification of the parameters of air regeneration mathematical models by means of insulating type protection. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2010. Vol. 6. № 7. pp. 68–73. (In Russ.).

9. Ekhilevskiy S.G., Olshaniikov S.A., Potapenko E.P. Influence of variable boundary conditions on the quasi-stationary profile of CO₂ concentration in the regenerative cartridge of a mine respirator. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Gornyy zhurnal = News of the Higher Institutions. Mining Journal*. 2013. № 3. pp. 46–53. (In Russ.).

10. Didenko N.S. Regenerative respirators for mining and rescue operations. Moscow: Nedra, 1990. 160 p. (In Russ.).

11. Ekhilevskiy S.G. Increasing the resource efficiency of breathing apparatus on chemically bound oxygen: abstract of the thesis... Doctor of Technical Sciences. Dnepropetrovsk, 2002. 35 p. (In Russ.).

12. Pytev Yu.P., Shishmarev I.A. The course of probability theory and mathematical statistics for physicists: textbook. Moscow: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1983. 256 p. (In Russ.).

13. Ekhilevskiy S.G. Optimization of Chemically Bound Oxygen Respirator. *Bezopasnost truda v promyshlennosti = Occupational Safety in Industry*. 2019. № 8. pp. 85–91. (In Russ.).

Received April 14, 2020

In final form — May 24, 2020



ТИТКО Валерий Леонидович (к 55-летию со дня рождения)

21 сентября 2020 г. исполнилось 55 лет Валерию Леонидовичу Титко, заместителю начальника управления — начальнику отдела по надзору за объектами трубопроводного транспорта Управления по надзору за объектами нефтегазового комплекса Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору.

В 1986 г. В.Л. Титко окончил Ульяновское высшее военно-техническое училище им. Богдана Хмельницкого. Свой долгий путь служения Отечеству начал в Пули-Хумри (Исламская Республика Афганистан) в должности командира взвода 276-й трубопроводной бригады, а прослужившему год лейтенанту доверили в подчинение роту солдат. Затем В.Л. Титко продолжил службу в Управлении ракетного топлива и горючего Министерства обороны Российской Федерации в должности заместителя начальника 1-го представительства Министерства обороны. В 1991 г. В.Л. Титко назначен на должность начальника Управления ракетного топлива и горючего Министерства обороны Российской Федерации. В 2002 г. ему досрочно присвоено очередное воинское звание — полковник.

В центральном аппарате Ростехнадзора начал работать в 2008 г. в должности консультанта отдела по надзору за объектами трубопроводного транспорта и транспортирования опасных веществ Управления по надзору в химической и нефтеперерабатывающей промышленности. В настоящее время трудится в должности заместителя начальника управления — начальника отдела по надзору за объектами трубопроводного транспорта Управления по надзору за объектами нефтегазового комплекса.

Валерий Леонидович — активный участник совершенствования нормативно-правовой базы, регулирующей требования промышленной безопасности для объектов магистрального трубопроводного транспорта, участвует в работе секции Научно-технического совета Ростехнадзора «Безопасность объектов нефтегазового комплекса». Кроме этого, он является членом межведомственных рабочих групп, деятельность которых направлена на реализацию основ государственной политики в области промышленной безопасности.

За многолетнюю эффективную военную и гражданскую службу награжден орденом «За службу Родине в Вооруженных Силах СССР» III степени, юбилейной медалью «70 лет Вооруженных Сил СССР», медалями «За боевые заслуги», «За отвагу», «В память 850-летия Москвы», «За отличие в военной службе» I степени, «За воинскую доблесть» I степени, юбилейной медалью «290 лет Ростехнадзору», нагрудным знаком «Почетный работник Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору», почетной грамотой Ростехнадзора.

Коллектив Федеральной службы по экологическому, технологическому и атомному надзору, редколлегия и редакция журнала «Безопасность труда в промышленности» сердечно поздравляют Валерия Леонидовича с 55-летием, желают здоровья, счастья, удачи во всех начинаниях и дальнейшей плодотворной деятельности.