

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Полоцкий государственный университет»

В. К. ЛИПСКИЙ  
Д. П. КОМАРОВСКИЙ

# ТЕХНИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение  
и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ»  
и слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности  
1-70 05 71 «Проектирование и эксплуатация газопроводов»

Под общей редакцией  
В. К. Липского

Новополоцк  
ПГУ  
2009

УДК 532(075.8)

ББК 30.123я73

Л61

Рекомендовано к изданию методической комиссией  
технологического факультета в качестве учебно-методического комплекса  
(протокол № 4 от 01.03.2009)

#### РЕЦЕНЗЕНТЫ:

д-р техн. наук, доцент, зав. каф. гидравлики  
УО «Белорусский национальный технический университет» И. В. КАЧАНОВ;  
д-р техн. наук, доцент каф. гидравлики  
УО «Белорусский национальный технический университет» И. В. ЮХНОВЕЦ;  
канд. техн. наук, доцент каф. трубопроводного транспорта и гидравлики  
УО «Полоцкий государственный университет» П. В. КОВАЛЕНКО

#### **Липский, В. К.**

Л61 Техническая гидромеханика : учеб.-метод. комплекс / В. К. Липский,  
Д. П. Комаровский; под. общ. ред. В. К. Липского. – Новополоцк : ПГУ,  
2009. – 296 с.

ISBN 978-985-418-900-0.

Имеет модульную структуру и состоит из конспекта лекций, методических указаний к выполнению лабораторных работ, примеров и задач для самостоятельного решения, контрольных вопросов.

Изложены основные вопросы курса «Техническая гидродинамика»: физические свойства жидкостей, гидростатика, общие законы и уравнения гидродинамики, гидравлические сопротивления и др.

Предназначен для студентов специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ», а также слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности 1-70 05 71 «Проектирование и эксплуатация газопроводов».

**УДК 532(075.8)**

**ББК 30.123я73**

**ISBN 978-985-418-900-0**

© Липский В. К., Комаровский Д. П., 2009

© УО «Полоцкий государственный университет», 2009

## МОДУЛЬ 0

### ВВЕДЕНИЕ В КУРС «ТЕХНИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА»

#### 1. ПРЕДМЕТ ГИДРАВЛИКИ И ГИДРОМЕХАНИКИ

Теоретическая механика, изучая простейшие механические формы движения и взаимодействия материальных тел, отвлекается от многих их действительных свойств и использует в качестве допустимой абстракции понятия материальной точки и системы материальных точек.

Материальная система может быть как дискретной, состоящей из отдельных материальных точек, например, в задачах движения планет солнечной системы, так и сплошной, представляющей непрерывное распределение вещества и физических характеристик его состояния и движения в пространстве. В этом случае систему называют сплошной материальной средой или, короче, сплошной средой.

Примером сплошной среды является неизменяемая среда или абсолютно твердое тело. Более общий образ изменяемой сплошной среды объединяет в механике как упругие и пластичные, так и жидкие и газообразные тела.

Раздел теоретической механики, занимающийся движениями данного ряда изменяемых сфер, носит наименование механики сплошных сред, а часть ее, относящаяся к жидким и газообразным телам – механики жидкости и газа. Этот термин является синонимом термина «гидромеханика».

Механика жидкости (гидромеханика) развивалась за рубежом и в России, а затем и в СССР, по двум направлениям:

- 1) по направлению, свойственному техническим наукам (изучаемым в технических учебных заведениях);
- 2) по математическому направлению (с использованием обширного и относительно сложного математического аппарата, изучаемого главным образом на механико-математических факультетах).

В связи с этим создалось положение, когда в области единой науки механики жидкости стали различать две разные науки (два разных метода исследования): «техническую механику жидкости» («техническую гидромеханику»), называемую часто «гидравликой» и «математическую механику жидкости» («математическую гидромеханику»).

Различие между этими науками, имеющими один и тот же объект исследования, заключается в следующем.

*В технической механике жидкости (гидравлике) при решении различных практических задач широко используются те или иные допущения*

и предположения, упрощающие рассматриваемый вопрос. Достаточно часто гидравлические решения основываются на результатах экспериментов, и потому в технической механике жидкости приводят относительно много различных эмпирических и полуэмпирических формул. При этом стремятся к оценке только главных характеристик изучаемого явления и часто оперируют теми или иными интегральными и осредненными величинами, которые дают достаточную для технических приложений характеристику рассматриваемых явлений. Например, в технической механике жидкости часто пользуются понятием средней скорости движения жидкости в том или другом поперечном сечении потока. По своему характеру техническая механика близка к известным дисциплинам – строительной механике и сопротивлению материалов, в которых под тем же углом зрения изучаются вопросы механики твердого тела. Следует учитывать, что гидравлика, являясь общетехнической дисциплиной, должна рассматриваться как «*профессиональная физика жидкого тела*», в которой, в частности, даются основы соответствующих гидромеханических расчетов, используемых при проектировании инженерных сооружений, конструкций, а также надлежащих технологических процессов.

*В математической механике жидкости*, как было отмечено, широко используется относительно сложный математический аппарат, не изучаемый в технических вузах. Этот аппарат прилагается также к несколько упрощенным схемам движения жидкости. Однако в этом методе исследования мы все же не прибегаем к различного рода допущениям и не оперируем различными осредненными величинами в такой мере, как в технической механике жидкости. Решения, получаемые в математической гидромеханике, оказываются более строгими в математическом отношении. По своему характеру математическая механика жидкости сходна с математической теорией упругости (рассматривающей вопросы механики твердого тела), изучаемой в университетах.

Как показал опыт, методы математической механики жидкости часто оказываются столь сложными, что большинство практических задач невозможно решить, следуя этим методам. Этим и объясняется возникновение и развитие технической, прикладной науки – технической механики жидкости, то есть гидравлики, которая стремится дать приближенные ответы на все те вопросы, связанные с движущейся или покоящейся жидкостью, которые ставит перед нами практика.

Можно сказать, что в технической гидромеханике (в гидравлике) приближенно решаются сложные задачи при помощи простых методов. В математической же гидромеханике относительно точно решаются только неко-

торые простейшие задачи при помощи сложных методов. Следует отметить, что в последнее время мы все чаще сталкиваемся с вопросами, которые приходится решать, сочетая методы технической и математической гидромеханики, причем иногда бывает трудно провести границу между ними.

Необходимо отметить, что техническая механика жидкости (гидравлика), представляющая собой обширную, самостоятельную, сложившуюся техническую науку, включает в себя много различных разделов, касающихся отдельных сторон рассматриваемой проблемы. Разумеется, эти разделы должны излагаться в курсах «Технической механики жидкости» для разных технических специальностей.

Из сказанного выше видно, что термины «гидравлика», «техническая гидромеханика» и «техническая механика жидкости» следует рассматривать как термины, имеющие одинаковое значение (как бы синонимы). Необходимо учитывать, что само слово «гидравлика» произошло от слияния двух греческих слов, из которых первое значит «вода», а второе – «труба», «канал», «струя». Как видно, ранее считали, что гидравлика занимается изучением движения или покоя только воды. Однако в настоящее время термин «гидравлика» (а также «гидромеханика») рассматривается в более широком смысле: объектом изучения в гидравлике является любая жидкость, а не только вода.

Мы в дальнейшем будем, в основном, пользоваться терминами гидравлика, хотя будем рассматривать целый ряд результатов, полученных в гидромеханике.

Гидравлика (техническая гидромеханика) делится на две части: гидростатику и гидродинамику. В гидростатике рассматриваются механические свойства жидкостей, законы равновесия жидкостей и действие их на соприкасающиеся с ними твердые тела.

В гидродинамике изучаются законы движения жидкостей и взаимодействия их с соприкасающимися твердыми телами.

## 2. КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ

Первым научным трудом в области гидравлики считается трактат Архимеда (287 – 212 гг. до н.э.) «О плавающих телах», хотя некоторые законы гидравлики были, видимо, известны и ранее, так как задолго до Архимеда строились оросительные каналы и водопроводы.

В древнем Египте, Индии, Китае были построены каналы и водохранилища грандиозных по тем временам размеров. Так, глубина некоторых

водохранилищ в Индии достигала 15 м, в Китае около 2500 лет назад был построен Великий канал длиной около 1800 км, который соединял приустьевые участки крупных рек страны. В Риме 2300 лет назад был построен первый водопровод.

На территории бывшего советского Союза также были построены многочисленные каналы и сооружения для добычи и транспортирования воды. Земледелие в районах Кавказа и Средней Азии велось с применением орошения. Некоторые из каналов, построенных в низовьях Амударьи около 2000 лет назад, используются и по сей день (естественно, после многократных ремонтов и реконструкций).

Старинные летописи и другие источники содержат много сведений о строительстве в России различных сооружений на реках, о развитии водных путей, о попытках создания механизмов, использующих энергию водного потока, и о многих других конструкциях, осуществление которых было бы невозможно без знания основ гидравлики. Так, еще в X – XI вв. на Руси существовали водопроводы из гончарных и деревянных труб, в 1115 г. был построен наплавной мост через Днепр у Киева. В XIV – XV вв. применялась добыча воды из подземных источников, оборудованных довольно совершенными водопроводными устройствами.

В средние века в России возводились многочисленные плотины на реках. Так, в 1516 г. была построена плотина из камня на р. Неглинке в Москве.

Подъем в развитии гидравлики начался только через 17 веков после Архимеда. В XV – XVI вв. Леонардо да Винчи (1452 – 1519) написал работу «О движении и измерении воды», которая была опубликована лишь через 400 с лишним лет после ее создания. С. Стевин (1548 – 1620) написал книгу «Начала гидростатики», Галилео Галилей (1564 – 1642) в 1612 г. в трактате «Рассуждение о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в

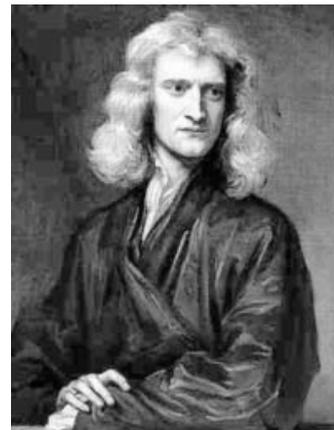


Блез Паскаль  
(1623 – 1662)

ней движутся» рассмотрел основные законы плавания и гидростатический парадокс, Е. Торричелли (1608 – 1647) получил формулу скорости истечения невязкой жидкости из резервуаров через отверстия, Б. Паскаль (1623 – 1662) открыл закон о передаче давления в жидкости, прямым следствием чего явилось появление в средние века большого количества простых гидравлических машин (гидравлические прессы, домкраты и т.п.), И. Ньютон (1643 – 1727) в 1686 г. сформулировал гипотезу о внутреннем трении в жидкости.

Однако перечисленные разработки и открытия касались только отдельных разделов гидравлики. Формирование гидравлики как науки на прочной теоретической основе стало возможным только после работ академиков Петербургской Академии наук М.В. Ломоносова (1711 – 1765), Д. Бернулли (1700 – 1782) и Э. Эйлера (1707 – 1783).

М.В. Ломоносов в 1760 г. в диссертации «Рассуждение о твердости и жидкости тел» сформулировал законы сохранения вещества и энергии.



Исаак Ньютон  
(1643 – 1727)



Даниил Бернулли  
(1700 – 1782)

Д. Бернулли (1700 – 1782) – выдающийся физик и математик – родился в Гронингене (Голландия). С 1725 по 1733 г. жил в Петербурге, являлся профессором и членом Петербургской Академии наук. В Петербурге он написал свой знаменитый труд «Гидродинамика», который был впоследствии опубликован (в 1738 г.) в г. Страсбурге. В этом труде он осветил ряд основополагающих гидравлических вопросов и в частности объяснил физический смысл слагаемых, входящих в современное уравнение установившегося движения (идеальной жидкости), носящее его имя.

Д. Бернулли в 1738 г. опубликовал выведенное им важнейшее уравнение, названное его именем. Это уравнение служит основой теоретических построений и практических расчетов в области гидравлики.

Л. Эйлер (1707 – 1783) – великий математик, механик и физик – родился в г. Базеле (Швейцария). Жил в Петербурге с 1727 до 1741 г. и с 1766 г. до конца жизни. Был членом Петербургской Академии наук. Эйлер не только подытожил и обобщил в безупречной математической форме работы предшествующих авторов, но составил известные дифференциальные уравнения движения и относительного равновесия жидкости, носящие его имя, а также опубликовал целый ряд оригинальных решений гидравлических задач, широко используя созданный к тому времени математический аппарат.



Леонард Эйлер  
(1707 – 1783)

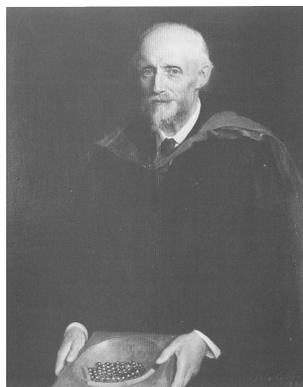
Л. Эйлер в 1755 г. вывел системы дифференциальных уравнений равновесия и движения жидкости.

Интересно, что наряду с гениальными теоретическими работами М.В. Ломоносова, Д. Бернулли и Л. Эйлера известны их исследования в области создания гидравлических приборов и устройств. М.В. Ломоносов изобрел универсальный барометр, вискозиметр (прибор для исследования вязкости жидкости), прибор для определения скорости течений в море. М.В. Ломоносов занимался также усовершенствованием гидравлических машин и устройств. Д. Бернулли изобрел водоподъемник, установленный в селе Архангельском под Москвой, и поднимавший воду на высоту 30 м. Л. Эйлер предложил конструкцию турбины, вывел так называемое «турбинное уравнение», создал основополагающие труды в теории корабля.

В 1791 г. в Петербурге А. Колмаков издал книгу «Карманная книжка для вычисления количества воды, протекающей через трубы, отверстия», которая явилась первым справочником по гидравлике.

Первое в России учебное пособие по гидравлике было выпущено в 1836 г. П.П. Мельниковым под названием «Основания практической гидравлики или о движении воды в различных случаях».

Перечисленные теоретические работы положили начало бурному развитию гидравлики. Велики заслуги ученых Д. Полени (1685 – 1761), который работал в области истечения через отверстия и водосливы; А. Шези



Осборн Рейнольдс  
(1842 – 1912)

(1718 – 1798), изучавшего равномерное движение жидкости; П. Дюбуа (1734 – 1809), занимавшегося движением наносов в реках, сопротивлениями движению воды в руслах; Д. Вентури (1746 – 1822), исследовавшего истечение через отверстия и насадки; Ю. Вейсбаха (1806 – 1871), в основном известными работами в области сопротивлений движению жидкости; А. Базена (1829 – 1897), изучавшего равномерное движение и истечение жидкости через водосливы; О. Рейнольдса (1842 – 1912), внесшего большой вклад в изучение ламинарного и турбулентного режимов движения.

Во второй половине XIX века в России появляются работы, оказавшие большое влияние на последующее развитие гидравлики. И.С. Громека (1851 – 1889) создал основы теории винтовых потоков и потоков с поперечной циркуляцией. Д.И. Менделеев (1834 – 1907) в своей работе «О сопротивлении жидкости и воздухоплавании» в 1880 г. привел важные выводы о наличии двух режимов движения жидкости (ламинарного и турбулентного). Далее Н.П. Петров (1836 – 1920) сформулировал закон внутрен-

него трения в жидкости. Н.Е. Жуковский (1847 – 1921) создал теорию гидравлического удара в водопроводных трубах, теорию движения наносов в реках и разработал основополагающие предложения в области фильтрации.

Труды академика Н.Н. Павловского (1884 – 1937) в области равномерного и неравномерного движения, фильтрации через земляные плотины и под гидротехническими сооружениями явились большим вкладом в развитие гидравлики и послужили основой, наряду с другими работами учеников и последователей Н.Н. Павловского, для создания инженерной гидравлики, широко используемой при расчетах в гидротехнике.



Николай Егорович  
Жуковский  
(1847 – 1921)

### 3. ЦЕЛЬ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дидактическая цель курса заключается в формировании у студентов теоретических и прикладных знаний необходимых для изучения специальных курсов по специальности «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ», а также для решения многих инженерных задач.

Целью преподавания является подготовка специалиста для производственно-технической, организационно-управленческой, проектно-конструкторской и исследовательской деятельности в области проектирования, сооружения и эксплуатации газонефтепроводов и газонефтехранилищ.

### 4. ЗАДАЧИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Задачами изучения дисциплины являются:

1. Теоретическая подготовка в области гидромеханики, позволяющая будущим инженерам ориентироваться в потоке научно-технической информации и обеспечивающая возможность использования ими гидромеханических методов в будущей специальности.

2. Формирование у студентов научного мышления в частности, правильного понимания границ применимости различных гидромеханиче-

ских понятий, законов, теорий и умение оценивать степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных и математических методов исследования или инженерных расчетов.

3. Усвоение основных гидромеханических явлений и законов, методов гидромеханических исследований применительно к различным задачам будущей специальности.

4. Выработка у студентов приемов и навыков решения конкретных задач из разных областей гидромеханики, помогающих студентам в дальнейшем решать инженерные задачи.

Настоящий учебно-методический комплекс составлен на основе различных учебников, учебных и учебно-методических пособий и предназначен для использования студентами специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ» при изучении дисциплины «Техническая гидромеханика» на кафедре трубопроводного транспорта и гидравлики.

Перечни литературных источников, которые были использованы при составлении учебно-методического комплекса, приводятся в конце каждого модуля.

## МОДУЛЬ 1

### ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Жидкостью называется физическое тело, обладающее весьма большой подвижностью частиц. В то время как для изменения формы твердого тела к нему нужно приложить конечные, иногда очень большие силы, изменение формы жидкости может происходить под действием даже самых малых сил. Жидкость сильно деформируется, не дробясь на частицы. Говорят, что она обладает текучестью. Деформация происходит даже под воздействием собственного веса, поэтому жидкость изменяет форму в сосуде, в котором она находится.

Жидкость, как и всякое физическое тело, имеет молекулярное строение, то есть состоит из отдельных частиц-молекул, объем пространства между которыми во много раз превосходит объем самих молекул.

Однако из-за чрезвычайной малости не только самих молекул, но и расстояний между ними (по сравнению с объемами, рассматриваемыми при изучении равновесия и движения жидкости) в механике жидкости ее молекулярное строение не рассматривается; предполагается, что жидкость заполняет все пространство, без образования каких либо пустот. Тем самым, вместо самой жидкости изучается ее модель, обладающая свойством непрерывности (эта модель реализует гипотезу, согласно которой жидкость представляет собой материальный континуум, то есть заполняет пространство сплошным образом).

Эта гипотеза упрощает исследование, так как позволяет рассматривать все механические характеристики жидкой среды (скорость, плотность, давление и т.д.) как функции координат точки в пространстве и времени, причем в большинстве случаев эти функции предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Эту модель можно использовать до тех пор, пока в достаточно малых объемах жидкости содержится большое количество молекул. К примеру, в кубике воздуха со стороной размером 0,001 мм находится  $2,7 \times 10^7$  молекул.

Жидкости с точки зрения механических свойств разделяются на два класса: малосжимаемые (капельные) и сжимаемые (газообразные).

Благодаря наличию в капельной жидкости некоторых сил молекулярного взаимодействия, величина их объема мало изменяется под действием внешних сил, то есть они мало сжимаемы. При атмосферном давлении сжимаемость воды в 14000 раз меньше сжимаемости воздуха.

Несмотря на различия молекулярных структур газов и капельных жидкостей, с точки зрения законов их движения между ними во многих случаях нет различия. Исследования показывают, что формулы гидромеханики, выведенные для несжимаемых жидкостей, справедливы и для газов, если скорость их движения не превосходит некоторого предела. Этот предел зависит от отношения скорости движения газа и скорости распространения звука. При величине отношения меньше 0,2 возможная погрешность в определении давления газа по формулам для несжимаемой жидкости составляет не более 1 %.

Поскольку скорость распространения звука в воздухе  $\sim 350$  м/сек, то при скоростях 70 – 75 м/сек законы движения капельных и газообразных жидкостей можно считать общими.

## 2. ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

### 2.1. Вязкость жидкости. Формула Ньютона

Любая реальная жидкость и газ обладают свойством вязкости. Вязкость является одной из причин, вызывающей сопротивление течению жидкости по трубам и каналам (внутренняя задача гидромеханики) и движению твердого тела в жидкости (внешняя задача гидромеханики).

Между слоями в потоке вязкой жидкости действуют силы, касательные к направлению их движения. При этом слои жидкости, расположенные ближе к стенке, подтормаживают верхние слои, что приводит к характерному виду эпюры скорости, изображенной на рис. 1.1.

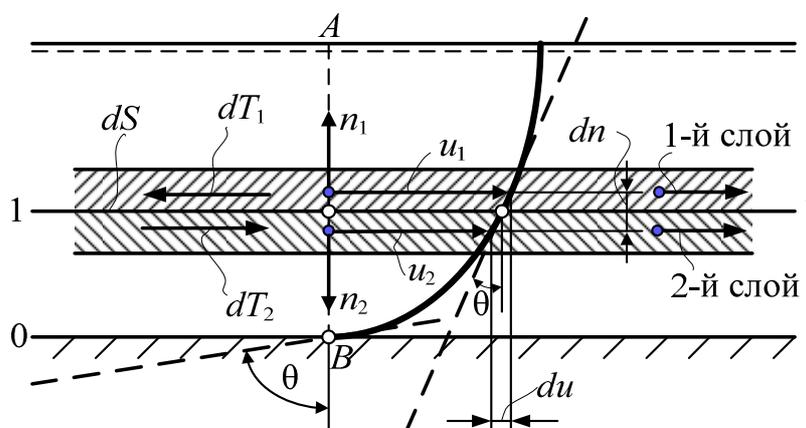


Рис. 1.1. К понятию вязкости жидкости

Силы трения, возникающие между движущимися друг относительно друга слоями жидкости с площадью соприкосновения  $dS$  (рис. 1.1), можно определить на основании формулы Ньютона:

$$dT = \mu \frac{du}{dn} dS \quad (1.1)$$

или, если отнести силу трения к площадке  $dS$  и обозначить получаемое при этом касательное напряжение через  $\tau$ ,

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}. \quad (1.2)$$

В этой формуле  $du/dn$  – производная, характеризующая изменение скорости в поперечном к слою направлении, которая согласно рис. 1.1  $du/dn = tg\beta$ ,  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости, зависящий от свойств жидкости. Формула (1.2), предложенная Ньютоном вначале в качестве гипотезы и подвергавшаяся в дальнейшем тщательной опытной проверке, в настоящее время общепринята в гидромеханике для расчета касательных напряжений при ламинарном течении жидкостей и именуется формулой Ньютона (законом внутреннего трения Ньютона).

Ламинарным, то есть слоистым, называется течение вязкой жидкости, при котором отсутствует перемешивание между ее слоями. Неупорядоченное движение вязкой жидкости с интенсивным перемешиванием частиц называется турбулентным. В случае турбулентного течения формула Ньютона неприменима.

Динамический коэффициент вязкости  $\mu$  зависит от рода жидкости, ее температуры и (в малой степени) от давления. Размерность  $\mu$  согласно (1.2)  $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$ .

В системе единиц СИ размерность  $[\mu] = \text{Н сек м}^{-2}$ , а в технической  $[\mu] = \text{кГ сек м}^{-2}$ .

Широкое применение в гидромеханике находит также кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , представляющий отношение  $\mu$  к плотности жидкости  $\rho$ .

$$\nu = \mu / \rho.$$

Размерность  $[\nu \mu] = L^2 T^{-1}$ , откуда следует, что в коэффициент  $\nu$  не входят динамические характеристики.

На рис. 1.2 показаны зависимости кинематического коэффициента  $\nu$  в функции от температуры – для воды и в функции от температуры и давления – для воздуха. Как видно из рисунка, для воды этот коэффициент

примерно на порядок меньше, чем для воздуха. Это означает, что вода относительно менее вязкая жидкость, нежели воздух. Коэффициенты вязкости  $\mu$  и  $\nu$  определяются опытным путем.

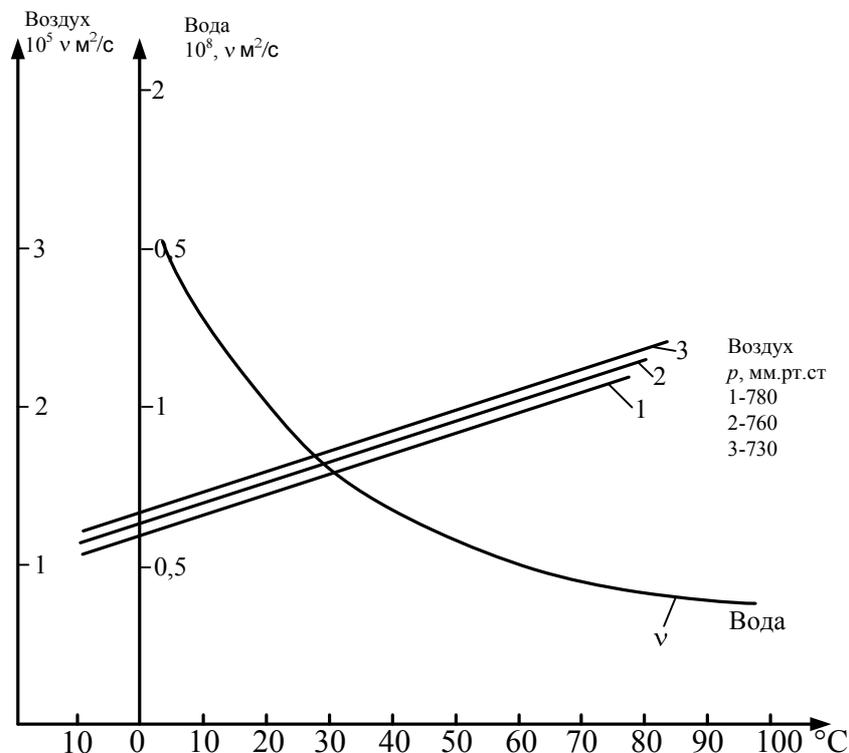


Рис. 1.2. Коэффициент кинематической вязкости для воды и воздуха

Выясним физическую причину возникновения вязкости на примере газа; для этого необходимо учесть его молекулярное строение. Молекулы движущегося газа совершают хаотическое тепловое движение, перескакивая из слоя в слой. При этом происходит обмен количеством движения между слоями.

Между слоями, согласно закону изменения количества движения, возникают силы, которые имеют характер сил сопротивления (трения). Этот обмен количествами движения совершается на «молекулярном уровне». Таким образом, вязкость обуславливается наличием молекулярного движения газа.

Вводя коэффициент вязкости  $\nu$ , как физическую характеристику жидкости и тем самым косвенно учитывая действие этого молекулярного движения в газе, можно в дальнейшем по-прежнему использовать гипотезу сплошности для вязкой жидкости, не прибегая к прямому учету молекулярных взаимодействий.

Касательное напряжение равно нулю, если  $\mu = 0$ , то есть если жидкость лишена свойств вязкости. Второй фактор, определяющий наличие касательных напряжений в жидкости, связан с существованием изменения скорости по нормали (градиент скорости). Если  $\partial v / \partial n = 0$ , то  $\tau = 0$  даже в вязкой жидкости.

Жидкости, подчиняющиеся закону внутреннего трения Ньютона, называются нормальными, или ньютоновскими. К ним относятся наиболее важные жидкости и газы, такие, как вода, воздух, нефтепродукты, ртуть и др.

Жидкости, в которых связь между напряжениями и градиентами скоростей не подчиняется формуле (1.2), называются аномальными, или неньютоновскими. К ним относятся некоторые смазочные масла при низких температурах, коллоидные растворы, масляные краски, глинистые растворы, а также растворы в воде некоторых высокомолекулярных соединений. Движение подобных аномальных жидкостей исследуется в реологии, а также в специальных разделах гидромеханики.

## 2.2. Плотность жидкости

Для характеристики распределения массы в пространстве, заполненном жидкостью или газом, обычно пользуются величиной, называемой плотностью распределения массой или, чаще, плотностью.

Среднее значение плотности среды в некотором малом объеме определяется по отношению массы  $\Delta m$ , заключенной в этом объеме, к самому объему  $\Delta V$ :

$$\rho_{cp} = \Delta m / \Delta V .$$

Часто пользуются не средним значением плотности вещества в некотором объеме, а величиной плотности среды в данной точке  $M$ , в которой

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} .$$

При этом точка  $M$  при  $\Delta V \rightarrow 0$  всегда остается внутри  $\Delta V$ .

Иногда для характеристики распределения массы в пространстве применяют величину, обратную плотности, называемую удельным объемом  $v$ .

$$v = 1/\rho .$$

Плотность движущейся среды зависит от температуры и давления, а последнее – от характера движения среды.

В общем случае плотность можно представить как функцию от координат и времени

$$\rho = f(x, y, z, t^0).$$

В технике пользуются понятием удельного веса  $\gamma$  определяемым как отношение силы тяжести, действующей на объем жидкости к величине этого объема (сила тяжести  $F$  приходящаяся на единицу объема жидкости):

$$\gamma = \frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{g \Delta m}{\Delta V} = \rho_{cp} g ;$$

$$\gamma = \rho_{cp} g .$$

Размерность плотности:

$$[\rho] = \frac{[M]}{[L^3]} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Размерность удельного веса:

$$; [\gamma] = [\rho] \cdot [g] = \frac{[M]}{[L^3]} \cdot \frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[M]}{[L^3] \cdot [T^2]} = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}.$$

### 2.3. Сжимаемость

Способность жидкости или газа под действием внешнего давления изменять свой объем и, следовательно, плотность, называется сжимаемостью. Сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия (сжимаемости)  $\beta_c$ ,  $\text{м}^2/\text{Н}$ , представляющим относительное изменение объема жидкости  $V$ ,  $\text{м}^3$ , при изменении давления  $p$ ,  $\text{Па}$ , на единицу:

$$\beta_c = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}.$$

Знак минус в формуле указывает, что при увеличении давления объем жидкости уменьшается.

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия – *модуль упругости жидкости*:

$$E_{жс} = \frac{1}{\beta_c}.$$

При относительно невысоких давлениях сжимаемостью жидкостей пренебрегают. При значительных изменениях давления сжимаемость капельных жидкостей следует учитывать.

Вследствие большой сжимаемости газообразных жидкостей их плотность и удельный вес в значительной степени зависят от температуры и давления.

Процессы сжатия и расширения газов подчиняются известным из физики законам Бойля – Мариотта и Гей – Люссака для идеальных газов.

Сжимаемость воды весьма незначительна, при увеличении давления на 9,8 МПа (на 100 атмосфер) объем воды уменьшается на 1/20000 первоначального объема.

Условия работы гидротехнических сооружений позволяют считать воду несжимаемой средой. Но не следует забывать, что такое допущение правомерно лишь в тех случаях, когда изменения давления невелики.

## 2.4. Поверхностное натяжение (капиллярность)

Известно, что молекулы жидкости, находящиеся на границе с газом, твердым телом или между двумя несмешивающимися жидкостями, находятся под воздействием сил взаимного притяжения. Вследствие этого вся свободная поверхность жидкости находится в состоянии равномерного поверхностного натяжения  $\sigma$ . Под влиянием поверхностного натяжения поверхность жидкости стремится принять форму, соответствующую наименьшей площади. Малые массы жидкости в воздухе стремятся к шарообразной форме, образуя капли.

Влияние поверхностного натяжения необходимо учитывать при изучении потоков с малой глубиной, при захвате окружающего воздуха движущейся жидкостью (аэрация жидкости), в капиллярах и т.д.

В трубках малого диаметра наблюдается подъем или опускание жидкости относительно нормального уровня, а также искривление свободной поверхности. Обратимся к рассмотрению жидкости в капиллярной трубке. Как видно из рис. 1.3, в районе примыкания поверхности жидкости к стенке трубки можем получить одну из следующих картин:

- если взаимное притяжение двух молекул жидкости велико по сравнению с притяжением молекул жидкости к частице твердой стенки, то получаем схему рис. 1.3, *а* (случай «несмачиваемой стенки»);
- если взаимное притяжение двух молекул жидкости мало по сравнению с притяжением молекул жидкости к частице твердой стенки, то получаем схему на рис. 1.3, *б* (случай «смачиваемой стенки»).

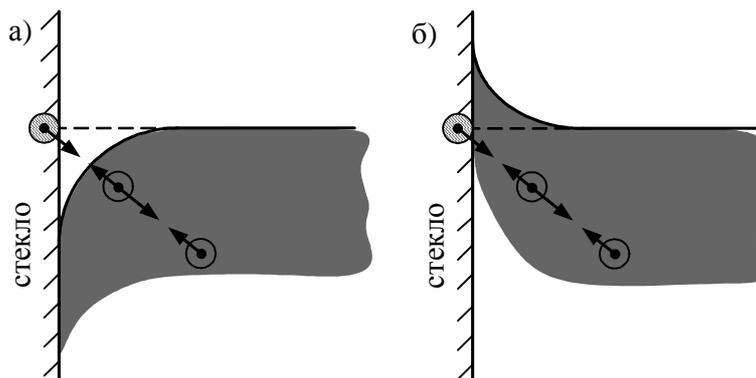


Рис. 4.1. «Несмачиваемая» (а) и «смачиваемая» (б) стенки

Высота подъема смачивающей жидкости (или опускание несмачивающей жидкости) в стеклянной трубке диаметром  $d$  определяется по формуле для полусферического мениска:

$$h = \frac{4 \cdot \sigma}{d \cdot \rho \cdot g} = \frac{k}{d},$$

где  $k$  имеет следующие значения: для воды  $k = 30 \text{ мм}^2$ ; для ртути  $k = -10,1 \text{ мм}^2$ ; для спирта  $k = 11,5 \text{ мм}^2$ .

Величина напряжений на границе раздела зависит от температуры жидкости; при увеличении температуры внутренняя энергия молекул возрастает, уменьшается напряжение в пограничном слое жидкости и, следовательно, уменьшаются силы поверхностного натяжения.

## 2.5. Растворимость газов в капельных жидкостях

В реальных жидкостях всегда находится газ в растворенном состоянии. Это может быть воздух, азот, углеводородный газ, углекислота, сероводород и др. Наличие газа растворенного в жидкости может оказывать как благоприятное воздействие (снижается вязкость жидкости, плотность и т.д.), так и неблагоприятные факторы. Так при снижении давления из жидкости выделяется свободный газ, который может стать источником такого нежелательного явления как кавитация.

Количество газа, которое может раствориться в капельной жидкости, зависит от физико-химических свойств самой жидкости и растворяемого в ней газа, а также от температуры и давления. Максимальное количество газа, которое может быть растворено в данной жидкости носит название предельной газонасыщенности для данного газа  $SO$ . Естественно, что величины предельной газонасыщенности для разных газов будут разными. Другой характеристикой процесса растворения газа в жидкости является

давление насыщенных паров  $p_{н.п.}$ , это такое минимальное давление в жидкости, при котором достигается насыщение капельной жидкости газом. Известно, что  $p_{н.п.}$  зависит от температуры и с увеличением ее повышается.

Если давление в жидкости  $p$  опустится ниже давления насыщенных паров ( $p < p_{н.п.}$ ), то растворенные в жидкости газы начнут из нее выделяться в виде пузырьков.

## 2.6. Кипение и кавитация

Как известно из курса физики, при снижении давления в жидкости или при повышении ее температуры растворенные в воде газы начинают выделяться из отдельных элементарных объемов воды, причем в воде образуются разрывы (газовоздушные пузыри).

Предположим, что мы имеем некоторый объем воды, сплошность которого не нарушена. Обозначим давление в этой воде через  $p$  и температуру через  $t$ .

Представим себе далее, что в силу тех или иных причин температура начинает увеличиваться или давление уменьшаться. Очевидно, что в некоторый момент времени можем получить  $p < p_{н.п.}$ . При таком соотношении в обычных условиях внутри рассматриваемого объема воды возникают пузырьки, заполненные «насыщенными парами» воды, происходит, как говорят «холодное кипение» воды. При этом мы получаем двухфазную систему (вода плюс пузырьки пара). Чтобы заставить эти пузырьки захлопнуться необходимо на достаточную величину или повысить давление  $p$  или понизить давление  $p_{н.п.}$  (за счет снижения температуры).

В случае появления в воде пузырьков пара различают два разных явления: кипение и кавитацию.

## 3. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

**Плотностью** называется величина, используемая для характеристики распределения массы в пространстве, заполненном жидкостью или газом.

**Сжимаемостью** называется способность жидкости или газа под действием внешнего давления изменять свой объем и, следовательно, плотность.

**Кипением жидкости** называется явление, когда пузырьки пара, появившиеся в жидкости всплывают и выходят из жидкости через ее свободную поверхность.

**Кавитацией жидкости** называется явление, когда пузырьки пара (или паровоздушные пузырьки), появившиеся в движущейся жидкости, не выходят из нее, а захлопываются внутри жидкости.

## 4. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Материалы к лекции

Возможен следующий план лекции:

1. Вязкость жидкости. Формула Ньютона.
2. Плотность жидкости.
3. Сжимаемость.
4. Поверхностное натяжение (капиллярность).
5. Растворимость газов в капельных жидкостях.
6. Кипение и кавитация.

### 4.2. Задание к практическому занятию

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. «ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ ВИСКОЗИМЕТРОМ ЭНГЛЕРА»

#### **Цель работы:**

1. Определить динамическую вязкость исследуемой жидкости с помощью вискозиметра Энглера.
2. Установить зависимость вязкости исследуемой жидкости от температуры.

#### **Краткая теория**

*Жидкостью* называется тело, обладающее свойством текучести, то есть способное сколь угодно сильно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил, но в отличие от газа, весьма мало меняющее свою плотность при изменении давления.

*Жидкости* с точки зрения механических свойств *подразделяются* на 2 класса:

1. Капельные (малосжимаемые).
2. Газообразные (сжимаемые).

*Основные свойства жидкостей*, важные при рассмотрении задач механики жидкости: плотность и вязкость.

Плотностью жидкости называют массу жидкости в единице объема:

$$\rho = m/V, \quad (1)$$

где  $m$  – масса жидкости;

$V$  – объем жидкости.

*Вязкостью* жидкости называют свойство жидкости оказывать сопротивление сдвигу. И. Ньютон впервые высказал гипотезу о существовании трения в жидкостях. В дальнейшем его гипотеза была подтверждена многочисленными исследованиями. Н.П. Петровым на основании разработанной им теории трения в жидкостях для определения силы трения была предложена формула:

$$T = \pm\mu \cdot S \frac{du}{dy}, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь соприкосновения слоев жидкости;

$\mu$  – динамический коэффициент вязкости;

$du/dy$  – относительное изменение скорости, называемое градиентом скорости.

Из формулы (2) следует, что:

$$\tau = \frac{T}{S} = \pm\mu \frac{du}{dy}, \quad (3)$$

где  $\tau$  – сила трения, приходящаяся на единицу площади (касательное напряжение).

Величина динамического коэффициента вязкости характеризует сопротивляемость жидкости сдвигу. Так как на существование отношения (3) первое указание имеется у И. Ньютона, поэтому оно и называется законом трения Ньютона.

Наряду с понятием динамической или абсолютной вязкости в гидравлике находит применение понятие кинематической вязкости  $\nu$ :

$$\nu = \mu/\rho. \quad (4)$$

Вязкость жидкостей в большой степени зависит от температуры. При этом вязкость капельных жидкостей при увеличении температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает.

Для опытного определения величины вязкости жидкостей применяют приборы, называемые вискозиметрами. Имеется несколько типов вискозиметров: капиллярные, вискозиметры с двумя коаксиальными цилиндрами (ротационные), вискозиметры, основанные на затухании крутильных колебаний маятников в исследуемой жидкости или цилиндров с исследуемой жидкостью; вискозиметры, в которых вязкость жидкости определяется по скорости падения в ней твердого тела (например, стеклянного или металлического шарика) и т.д.

Широкое распространение для определения вязкости капельных жидкостей получил вискозиметр Энглера (рис. 1).

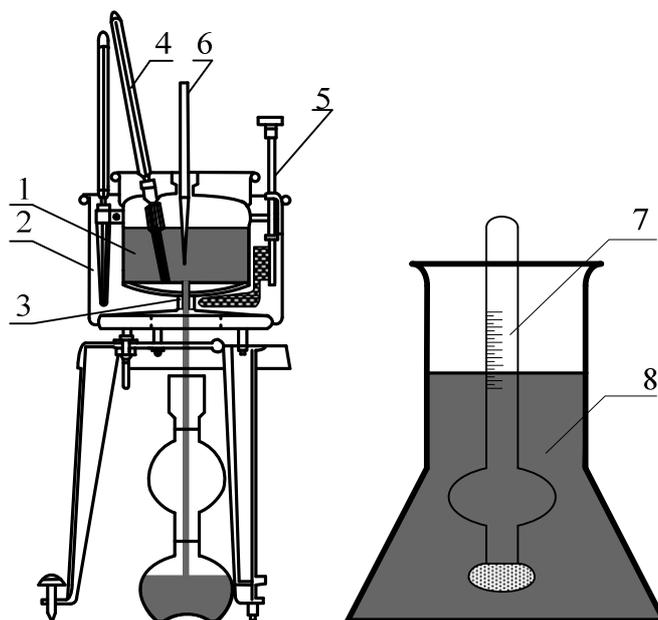


Рис. 1. Вискозиметр Энглера

### Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки представлена на рис. 1. Вискозиметр Энглера представляет собой сосуд 1, окруженный водяной ванной 2 с водой определенной температуры, которая нагревается с помощью электронагревателя. Ко дну резервуара припаяны латунная цилиндрическая трубка 3, в которую вставлен платиновый насадок. Размеры насадка, как и всего прибора стандартные. Температуру исследуемой жидкости измеряют термометром 4. Для перемешивания воды в ванне имеется мешалка 5. Стопорный стержень 6 служит для перекрытия отверстия насадка.

За вязкость жидкости по Энглеру принимается отношение времени  $t$  истечения  $200 \text{ см}^3$  испытуемой жидкости ко времени  $t_B$  истечения того же объема воды при температуре  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Таким образом, условная вязкость в градусах Энглера ( $E$ ), определяется зависимостью:

$${}^0-E = t/t_B. \quad (5)$$

Имеется также колба 7, заполненная той же исследуемой жидкостью, что и вискозиметр. В колбе находится прибор для измерения плотности жидкости, называемый ареометром 8. Ареометр представляет собой поплавок, в верхней части которого находится тонкая трубочка с делениями. Эти деления прямо показывают плотность жидкости.

### **Порядок проведения опыта**

1. Снять крышку 10 вискозиметра и убедиться в том, что внутренняя поверхность сосуда 1 и платиновой трубочки 3 чиста.

2. Вставить в отверстие трубочки 3 стержень 7 и в сосуд 1 налить столько исследуемой жидкости, чтобы ее свободная поверхность незначительно перекрыла острие крючков 9, расположенных на внутренней поверхности сосуда 1.

3. Вискозиметр закрыть крышкой 10 и в ее отверстие опустить термометр 5.

4. Включить электронагреватель 4 в сеть и нагреть жидкость до заданной температуры. Периодически мешалкой 6 перемешать воду для равномерного подогрева жидкости.

5. Пока исследуемая жидкость нагревается, определить плотность жидкости в колбе 11 с помощью ареометра.

6. Придерживая крышку вискозиметра, приподнять стержень 7 и одновременно включить секундомер.

7. Необходимо следить, чтобы вытекающая из насадка жидкость попадала на внутреннюю боковую стенку колбы 8. Это исключает возможность появления пены внутри колбы.

8. Когда уровень вытекающей жидкости достигнет деления в колбе, соответствующее  $200 \text{ см}^3$ , секундомер остановить. Полученное время  $t$  в секундах и есть время вытекания исследуемой жидкости.

9. Весь опыт повторить еще один раз, при другой заданной температуре.

### **Обработка результатов опыта**

1. По результатам измерений используя формулу (5), определить условную вязкость в градусах Энглера.

2. Переход от вязкости в градусах Энглера к кинематическому коэффициенту вязкости производится по эмпирическим формулам, одной из которых является формула Убеллоде:

$$\nu = \left( 0,0731 \cdot {}^0E - \frac{0,0631}{{}^0E} \right), \text{ см}^2/\text{с},$$

где  ${}^0E$  – вязкость в градусах Энглера.

3. При определении динамического коэффициента вязкости использовать выражение (4), из которого:

$$\mu = \nu \cdot \rho, \text{ Па}\cdot\text{с},$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;

$\rho$  – плотность исследуемой жидкости,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

4. Заполнить табл. 3, используя данные табл. 1 и табл. 2.

Таблица 1

Единицы измерения вязкости

Величина	Единица		
	СИ	СГС	МКГСС
Кинематическая вязкость	$\text{м}^2/\text{с}$	$\text{см}^2/\text{с}$ (Ст) – Стокс	$\text{м}^2/\text{с}$
Динамическая вязкость	$\text{Па}\cdot\text{с}$	П (Пуаз)	$\text{кгс}\cdot\text{с} / \text{м}^2$

Таблица 2

Связь между единицами динамической вязкости

Единица	$\text{Па}\cdot\text{с}$	П	$\text{кгс}\cdot\text{с}/\text{м}^2$
$\text{Па}\cdot\text{с}$	1	10	$9,81^{-1}$
П	$10^{-1}$	1	$98,1^{-1}$

Таблица 3

Экспериментальные данные и обработка результатов

№ опыта	Температура жидкости	Время истечения $200 \text{ см}^3, \text{ с}$		Вязкость исследуемой жидкости		
		Воды	Исследуемой жидкости	Условная ${}^0E$	Кинематическая	Динамическая

### Варианты заданий к практическим занятиям

**Пример.** Уксусная кислота в капиллярной трубке поднимается на высоту 30 мм. На какую высоту поднимется эфир в капиллярной трубке, диаметр которой вдвое больше?

**Решение.** Высота поднятия уксусной кислоты в капилляре с диаметром  $d_1$ :

$$h_1 = \frac{4 \cdot \sigma_1}{d_1 \cdot \rho_1 \cdot g},$$

а эфира в капилляре с диаметром  $d_2$ :

$$h_2 = \frac{4 \cdot \sigma_2}{d_2 \cdot \rho_2 \cdot g},$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  – коэффициенты поверхностного натяжения соответственно уксусной кислоты и эфира;

$\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности уксусной кислоты и эфира.

Отсюда:

$$h_2 = \frac{\sigma_2 \cdot \rho_1 \cdot d_1}{\sigma_1 \cdot \rho_2 \cdot d_2} h_1 = \frac{\sigma_2 \cdot \rho_1}{2\sigma_1 \cdot \rho_2} \cdot h_1;$$
$$h_2 = \frac{0,017 \cdot 1050}{2 \cdot 0,028 \cdot 710} \cdot 30 \approx 13,5 \text{ мм}$$

**Задача 1.** Определить удельный вес жидкости, если известна ее плотность  $\rho = 910 \text{ кг/м}^3$ , ускорение свободного падения  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:**  $\gamma = 8,93 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ .

**Задача 2.** Стальной барабан подвергается гидравлическому испытанию созданием избыточного давления 1,96 МПа. Определить какое количество воды дополнительно необходимо подать насосом в барабан, если его геометрическая емкость равна  $10 \text{ м}^3$ . Деформацией барабана пренебречь, коэффициент сжимаемости воды принять равным  $1/2,3 \cdot 10^3 \text{ МПа}$ .

**Ответ:**  $\Delta V = 8,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ .

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение жидкости.
2. Дайте определение капельной и газообразных жидкостей.
3. Дайте определение удельного веса жидкости.
4. Чем характеризуется сжимаемость жидкостей и газов?
5. В чем отличие сжимаемости жидкостей и газов?

6. Дайте определение вязкости жидкости.
7. Что вызывает вязкость жидкости при ее движении по трубам?
8. Сформулируйте гипотезу Ньютона.
9. Каков физический смысл динамического коэффициента вязкости?
10. Каков физический смысл кинематического коэффициента вязкости?
11. Как изменяется вязкость капельных жидкостей при изменении их температуры?
12. Как изменяется вязкость газов при изменении их температуры?
13. Как изменяется вязкость капельных жидкостей при изменении их давления?
14. Как изменяется вязкость газов при изменении их давления?
15. Какими приборами определяют вязкость капельных жидкостей?
16. Как изменяется коэффициент поверхностного натяжения жидкостей с изменением температуры?
17. Что такое давление насыщенных паров? Как оно зависит от температуры?
18. Что такое кавитация?

## 6. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Примеры расчетов по гидравлике: учеб. пособие для вузов. / под ред. А.Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
4. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
5. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
6. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Выш. шк., 1998. – 311 с.
7. Калицун, В.И. Гидравлика, водоснабжение и канализация: учеб. пособие для вузов / В.И. Калицун, В.С. Кедров, Ю.М. Ласков. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 2000. – 397 с.
8. Федяевский, К.К. Гидромеханика: учебник для вузов / К.К. Федяевский, Я.И. Войткунский, Ю.И. Фаддеев. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.

## МОДУЛЬ 2

### СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В ЖИДКОСТИ

#### 1. ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

##### 1.1. Классификация сил, действующих в жидкости

При изучении механики твердого тела обычно рассматривают две категории сил – сосредоточенные и распределенные. В жидкости, как правило, необходимо исследовать действие только распределенных сил, так как приложение к ней сосредоточенных сил обуславливает появление разрывов в жидкости.

Для классификации сил, действующих в жидкости, применим известный из курса сопротивления материалов метод сечений: выделим в движущейся жидкости произвольный жидкий объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 2.1), и мысленно отбросим всю жидкость вне этого объема. При этом внутренние силы, действующие между выделенной и отброшенной частями жидкости, перейдут в категорию внешних сил, распределенных по поверхности  $S$ . Таким образом, влияние отброшенной жидкости проявляется в виде поверхностных сил, приложенных к поверхности раздела  $S$ .

Кроме них, в любой точке объема  $V$  действуют массовые силы, пропорциональные массе жидкости, заключенной в элементарном объеме  $\Delta V$ , окружающем данную точку (рис. 2.1). Рассмотрим более подробно эти две категории сил.

Массовыми называются силы, приложенные к каждой частице жидкости и пропорциональные ее массе. Обозначим через  $\Delta f$  массовую силу, приложенную к жидкой частице с массой  $\rho\Delta V$ , и введем понятие напряжения массовой силы, характеризуемого в данной точке вектором  $\bar{F}$ , определяемым как предел отношения вектора массовой силы к массе частицы:

$$\bar{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{f}}{\rho \Delta V}. \quad (2.1)$$

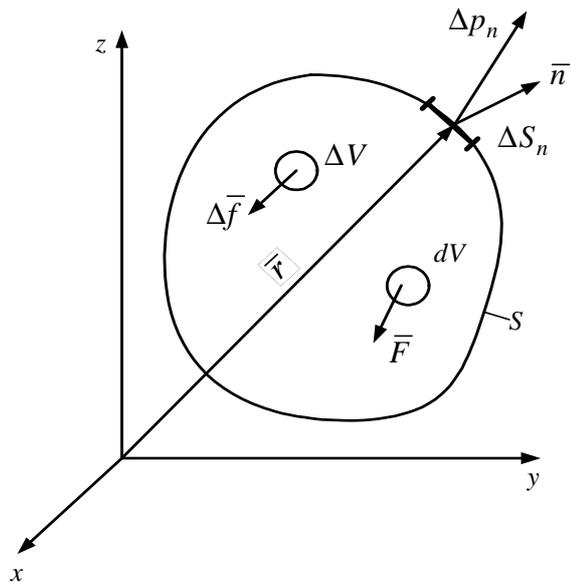


Рис. 2.1. К понятию сил, действующих в жидкости

Если вектор  $F$  постоянный, то напряжение массовых сил равно отношению массовой силы, действующей на объем, к массе этого объема.

Напряжение массовых сил имеет размерность ускорения  $[F] = LT^{-2}$ .

Составляющие вектора  $F$  на оси декартовых координат обозначим  $F_x, F_y, F_z$ . В общем случае  $F$  является функцией радиуса-вектора точки  $r$  и времени  $t$ ;  $F = F(r, t)$ .

К массовым силам относятся, например, силы тяжести, силы инерции и электромагнитные силы.

Определим вектор напряжения массовых сил в наиболее важном частном случае действия силы тяжести. Вес элементарной частицы  $\Delta P = \rho \Delta V g$ . При выборе направления оси  $z$  вверх массовая сила  $\bar{k}$ , где  $\bar{k} = \text{орт оси } z$ .

Получаем что

$$F = -kg \quad (2.2)$$

или

$$F_x = 0; F_y = 0; F_z = -g. \quad (2.3)$$

В ряде практически важных случаев массовые силы потенциальны. Обозначим через  $U$  потенциал напряжения массовых сил. При этом вектор их напряжения  $F$  можно определить как градиент скалярной функции  $U$ :

$$\bar{F} = \text{grad}U \quad (2.4)$$

или

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial U}{\partial x}; \\ F_y &= \frac{\partial U}{\partial y}; \\ F_z &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В случае, когда массовой силой является сила тяжести, согласно (2.3) и (2.5):

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -g,$$

откуда следует, что

$$U = -gz + C. \quad (2.6)$$

Произвольную постоянную  $C$  можно отбросить, так как ее величина не влияет на определение вектора  $F$ .

Таким образом, потенциал силы тяжести определяется выражением:

$$U = -gz. \quad (2.7)$$

Поверхностными называются силы, распределенные по поверхности  $S$ , ограничивающей выделенный объем жидкости (рис. 2.2).

Обозначим через  $\Delta p_n$  поверхностную силу, приложенную к площадке  $\Delta S$  с внешней нормалью  $n$ . В общем случае  $\Delta p_n$  действует под углом к внешней нормали. Введем понятие вектора напряжения поверхностных сил в данной точке поверхности, определяя его как предел отношения:

$$\overline{p_n} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta p_n}{\Delta S}. \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что вектор напряжения поверхностных сил представляет отношение поверхностной силы к величине элементарной площадки. Следовательно,  $p_n$  имеет размерность  $L^{-1} MT^{-2}$ .

В общем случае  $p_n$  не является обычным вектором. Его величина в данной точке зависит от ориентации площадки, выделенной внутри объема жидкости. Иными словами, если через данную точку провести одинаковые по величине, но различные по ориентации площадки, то действующие на них векторы  $p_n$  напряжения поверхностных сил будут различны. Поэтому в общем случае  $p_n$  зависит от радиуса-вектора точки, ориентации площадки и времени:

$$\overline{p_n} = \overline{p_n}(r, n, t). \quad (2.9)$$

Физическая величина, характеризующаяся в данной точке вектором  $p$ , принимающим бесчисленное множество значений в зависимости от ориентации площадки, называется тензорной.

Одной из важнейших задач гидромеханики является определение гидродинамических реакций, действующих со стороны жидкости на тело. Когда поверхность  $S$  в жидкости совпадает с поверхностью твердого тела, то это свидетельствует, что к ней со стороны жидкости приложены напряжения  $p_n$ . Следовательно, элементарная сила воздействия  $dR$  со стороны жидкости на площадку поверхности тела  $dS$  определится выражением:

$$dR = p_n dS,$$

а элементарный момент относительно начала координат:

$$d\overline{M} = \overline{r} \times d\overline{R} = \overline{r} \times \overline{p_n} dS,$$

где  $r$  – радиус-вектор центра площадки.

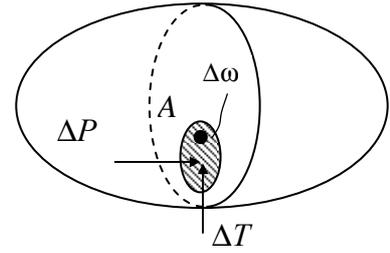


Рис. 2.2. К понятию поверхностных сил

Интегрируя  $dR$  и  $dM$  по поверхности  $S$  тела, получим общие формулы для результирующей  $R$  и момента  $M$  гидродинамических сил, действующих на тело:

$$\bar{R} = \oint_S \bar{p}_n dS; \quad (2.10)$$

$$\bar{M} = \oint_S \bar{r} \times \bar{p}_n dS. \quad (2.11)$$

Для использования общих выражений (2.10) и (2.11) требуется отыскать зависимости напряжений  $p_n$  от скорости течения жидкости, формы тела и физических свойств жидкости. Исследование этих зависимостей и явится одной из главных задач курса.

Подчеркнем, что массовые силы, действующие в жидкости, влияют на гидродинамические реакции, возникающие на теле, лишь через напряжения поверхностных сил.

## 1.2. Свойства напряжений внутренних сил, действующих в жидкости

Для исследования напряжений внутренних сил в жидкости установим связь между напряжением, действующим на произвольно ориентированную площадку и три другие взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через данную точку.

Выделим в движущейся жидкости элементарную жидкую частицу в форме тетраэдра (рис. 2.3). Вместо поверхностных сил на гранях тетраэдра изображены векторы напряжений, направленные произвольным образом к соответствующим граням.

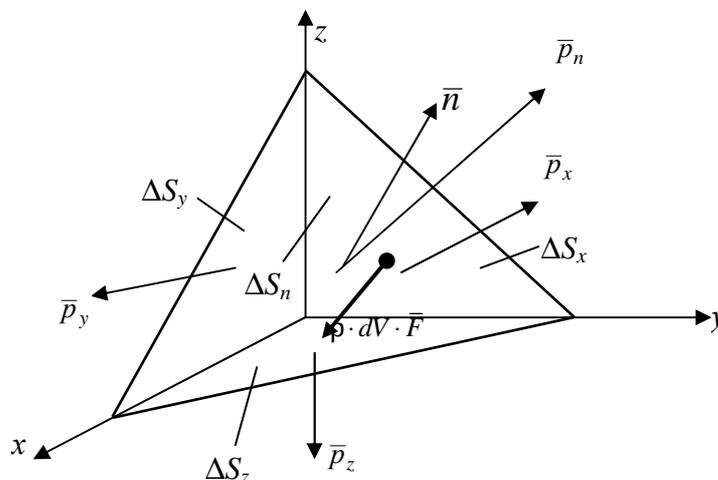


Рис. 2.3. Схема к выводу первого свойства напряжений поверхностных сил

Ускорение центра тяжести частицы обозначим  $du/dt$ , напряжение массовых сил –  $F$ . Напишем уравнение движения этой элементарной частицы в векторной форме:

$$\rho \Delta V \frac{du}{dt} = \rho \Delta V \bar{F} + \overline{p_n} \Delta S_n - \overline{p_x} \Delta S_x - \overline{p_y} \Delta S_y - \overline{p_z} \Delta S_z, \quad (2.12)$$

где  $\Delta S_x, \Delta S_y$  и  $\Delta S_z$  – площади граней тетраэдра, перпендикулярные соответствующим осям координат;

$p_n, p_x, p_y, p_z$  – векторы напряжений в центре площадок, обозначения которых соответствуют направлению нормалей к ним; знаки минус перед последними членами означают, что нормали к соответствующим площадкам направлены противоположно осям координат.

Из аналитической геометрии известно, что

$$\begin{aligned} \frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} &= \cos(n, x); \\ \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} &= \cos(n, y); \\ \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} &= \cos(n, z). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Разделим обе части уравнения (2.12) на  $\Delta S_n$  и используем (2.13):

$$\rho \frac{\Delta V}{\Delta S_n} \left( \frac{du}{dt} - \bar{F} \right) = \overline{p_n} - \overline{p_x} \cos(n, x) - \overline{p_y} \cos(n, y) - \overline{p_z} \cos(n, z). \quad (2.14)$$

Чтобы получить связь между напряжениями в точке, устремим объем тетраэдра к нулю, стягивая его в точку к началу координат. Очевидно,

что  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta S_n} = 0$ , с учетом чего связь между напряжениями запишется в

виде:

$$\overline{p_n} = \overline{p_x} \cos(n, x) + \overline{p_y} \cos(n, y) + \overline{p_z} \cos(n, z). \quad (2.15)$$

Проектируя  $p_n$  на оси координат, получим:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx} \cos(n, x) + p_{yx} \cos(n, y) + p_{zx} \cos(n, z) \\ p_{ny} &= p_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + p_{zy} \cos(n, z) \\ p_{nz} &= p_{xz} \cos(n, x) + p_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z) \end{aligned}$$

Первый индекс при проекциях напряжений в этих соотношениях соответствует площадке, в которой действует данное напряжение, а второй – оси, на которую оно проектируется. Скалярные величины  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  представляют нормальные напряжения, а  $p_{xy}$ ,  $p_{xz}$  – касательные напряжения, действующие в определенных площадках.

В дальнейшем будем обозначать касательные напряжения буквой  $\tau$ :

$$p_{xy} = \tau_{xy}; p_{xz} = \tau_{xz}; p_{yz} = \tau_{yz},$$

учитывая это, перепишем в виде:

$$p_{nx} = p_{xx} \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z);$$

$$p_{ny} = \tau_{xy} \cos(n, x) + p_{yy} \cos(n, y) + \tau_{zy} \cos(n, z);$$

$$p_{nz} = \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + p_{zz} \cos(n, z).$$

Нормальные и касательные напряжения, действующие на три взаимно перпендикулярные грани параллелепипеда, выделенного в жидкости, показаны на рис. 2.4. Применяя теорему моментов, взятых относительно начала координат для напряжений, действующих на грани параллелепипеда, легко доказать свойство взаимности касательных напряжений, в соответствии с которым

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

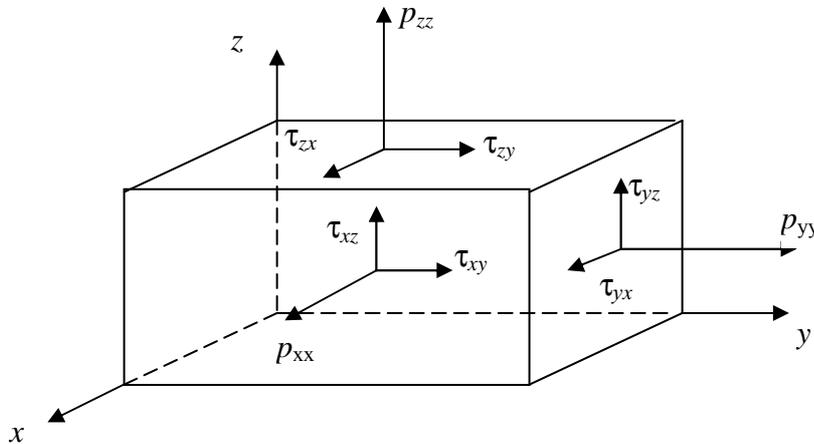


Рис. 2.4. Схема действия нормальных и касательных напряжений

Такие величины в математике и механике носят название *тензора*, таким образом первое свойство напряжений поверхностных сил состоит в том, что эти напряжения образуют *тензор напряжений*.

$$\begin{vmatrix} p_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, p_{yy}, \tau_{zy} \\ \tau_{xz}, \tau_{yz}, p_{zz} \end{vmatrix} - \text{тензор напряжений.}$$

На основании изложенного можно сделать вывод, что напряжения внутренних сил в данной точке жидкости, то есть напряженное состояние жидкости, характеризуются совокупностью девяти скалярных величин, образующих так называемый тензор напряжений. Вследствие свойства взаимности число независимых величин в нем сокращается до 6.

Выясним основные свойства напряжений в жидкости.

Возникновение в жидкости касательных напряжений  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  вызвано одновременным влиянием двух факторов: движения жидкости и ее вязкости.

Если жидкость неподвижна, то касательные напряжения в ней отсутствуют, что характерно как для вязкой, так и для невязкой жидкости. Таким образом, в покоящейся (вязкой и невязкой) и в движущейся невязкой жидкости:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

то есть действуют только нормальные напряжения  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$ . Соответствующие векторы напряжений:

$$\bar{p}_n = \bar{n}p_{nn}; \bar{p}_x = \bar{i}p_{xx}; \bar{p}_y = \bar{j}p_{yy}; \bar{p}_z = \bar{k}p_{zz}. \quad (2.16)$$

Подставляя в уравнение, получим:

$$\bar{n}p_{nn} = \bar{i}p_{xx} \cos(n, x) + \bar{j}p_{yy} \cos(n, y) + \bar{k}p_{zz} \cos(n, z). \quad (2.17)$$

Известно, что

$$\bar{n} = \bar{i} \cos(n, x) + \bar{j} \cos(n, y) + \bar{k} \cos(n, z). \quad (2.18)$$

Подставим (2.18) в левую часть (2.17):

$$\begin{aligned} p_{nn} \left[ \bar{i} \cos(n, x) + \bar{j} \cos(n, y) + \bar{k} \cos(n, z) \right] = \\ = \bar{i}p_{xx} \cos(n, x) + \bar{j}p_{yy} \cos(n, y) + \bar{k}p_{zz} \cos(n, z) \end{aligned}$$

Сравнивая в этом выражении коэффициенты при одинаковых ортах, найдем

$$p_{nn} = p_{xx}; p_{nn} = p_{yy}; p_{nn} = p_{zz} \quad (2.19)$$

или

$$p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}. \quad (2.20)$$

Эти равенства позволяют сформулировать теорему о свойстве нормальных напряжений: если в жидкости отсутствуют касательные напряжения, то нормальное напряжение в данной точке не зависит от ориентации площадки. Зависимость (2.20) выполняется при покое вязкой жидкости и при движении и покое невязкой жидкости.

Рассмотрим одно из основных свойств жидкости, связанное с нормальными напряжениями. Как видно из рис. 2.4,  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  направ-

лены в сторону внешней нормали, то есть нормальные напряжения – растягивающие, которым приписывается знак плюс.

Твердое тело одинаково воспринимает растягивающие и сжимающие нормальные напряжения, не меняя своего состояния; в нем при этом не образуется разрывов сплошности (пустот). Капельная жидкость, как показывает опыт, способна воспринять произвольные сжимающие усилия (отрицательные нормальные напряжения) без разрыва сплошности. Однако опыт показывает, что жидкость практически терпит разрыв при растяжении, то есть в ней могут проявляться лишь нормальные сжимающие усилия, называемые давлениями.

Назовем давлением  $p$  в жидкости при отсутствии касательных напряжений величину нормального напряжения, взятую с обратным знаком; тогда в соответствии с (2.20):

$$p = -p_{nn} = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}, \quad (2.21)$$

откуда следует, что величина давления не зависит от ориентации площадки.

Давление (и вообще напряжение) в системе единиц МКГСС измеряют в  $\text{кГ}/\text{м}^2$ ; его часто измеряют также в технических атмосферах (т.а):

$$1 \text{ т.а} = 1 \text{ кГ}/\text{см}^2 = 10000 \text{ кГ}/\text{м}^2.$$

В системе единиц СИ давление принято измерять в ньютонах на квадратный метр:

$$1 \text{ кГ}/\text{м}^2 = 9,806 \text{ н}/\text{м}^2.$$

Согласно (2.16) нормальное напряжение выражается через давление зависимостями:

$$\overline{p_n} = -p\overline{n}; \overline{p_x} = -p\overline{i}; \overline{p_y} = -p\overline{j}; \overline{p_z} = -p\overline{k}; \quad (2.22)$$

где знак минус указывает, что нормальное напряжение в жидкости всегда направлено противоположно внешней нормали и является сжимающим напряжением.

Давление в жидкости без нарушения ее сплошности, как показывает опыт, не падает ниже давления  $p_n$  насыщенных паров

$$p \geq p_n > 0. \quad (2.23)$$

Приведенное выше определение давления справедливо для покоящейся вязкой и невязкой жидкости, а также для движущейся невязкой жидкости. Отметим, что данное выше определение давления может с достаточной степенью точности применяться и при изучении движения маловязкой жидкости, например воды или воздуха.

### 1.3. Уравнения движения жидкости в напряжениях

Получим общие уравнения движения жидкости, устанавливающие связь между внешними и внутренними силами, действующими на нее.

Выделим в движущейся жидкости поверхностью  $S$  произвольный жидкий объем  $V$  (рис. 2.5), а внутри него – элементарную жидкую частицу с массой  $\rho dV$  и поверхностью  $dS$ . К этой частице приложены массовые силы с напряжением  $F$  и поверхностные силы с напряжением  $p_n$ . Запишем уравнение движения этой частицы, обозначая ускорение ее центра тяжести  $du/dt$ :

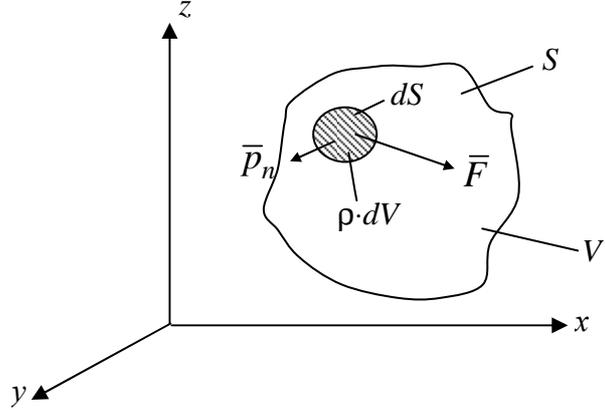


Рис. 2.5. Схема к выводу уравнения движения жидкости в напряжениях

$$\rho dV \frac{du}{dt} = \rho dV \bar{F} + \bar{p}_n dS. \quad (2.24)$$

Просуммируем левую и правую части уравнения (2.24). Суммирование первых двух членов сводится к интегрированию по объему, а третьего члена – по площадкам, которыми элементарные частицы соприкасаются друг с другом. Согласно третьему закону Ньютона поверхностные силы по всем внутренним площадкам взаимно уничтожатся и останутся только поверхностные силы по площади  $S$ , ограничивающей объем  $V$ :

$$\int_V \frac{du}{dt} \rho dV = \int_V \bar{F} \rho dV + \oint_S \bar{p}_n dS. \quad (2.25)$$

Здесь и в дальнейшем кратные интегралы будут различаться только индексом, по которому производится суммирование. Преобразуем третий член уравнения (2.25), используя для этого зависимость (2.15),

$$\oint_S \bar{p}_n dS = \oint_S \left[ \bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z) \right] dS. \quad (2.26)$$

Применим к правой части этого равенства известное преобразование Гаусса-Остроградского, устанавливающее связь между объемным и поверхностным интегралами,

$$\begin{aligned} \oint_S \bar{p}_n dS &= \oint_S \left[ \bar{p}_x \cos(n, x) + \bar{p}_y \cos(n, y) + \bar{p}_z \cos(n, z) \right] dS = \\ &= \int_V \left( \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) dV. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Подставляя правую часть (2.27) в уравнение (2.25), получим:

$$\int_V \frac{du}{dt} \rho dV = \int_V \bar{F} \rho dV + \int_V \left( \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) dV. \quad (2.28)$$

Все члены в уравнении (2.28) интегрируются по объему. Уравнения (2.25) и (2.28) являются уравнениями движения жидкого объема в интегральной форме. Их левая часть представляет главный вектор сил инерции, первый член правой части – главный вектор массовых сил, а второй – главный вектор поверхностных сил.

Получим дифференциальную форму уравнения движения, более удобную для изучения движения жидкости. Объединим все члены уравнения (2.28) под знаком интеграла, перенося силу инерции в правую часть,

$$\int_V \left[ -\frac{du}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) \right] \rho dV = 0.$$

Ввиду произвольности объема этот интеграл обращается в нуль только тогда, когда нулю тождественно равна подынтегральная функция:

$$-\frac{du}{dt} + \bar{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right) = 0.$$

В итоге получим дифференциальное уравнение движения жидкости в напряжениях:

$$\frac{du}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z} \right), \quad (2.29)$$

которое связывает ускорения с напряжениями массовых и поверхностных сил в данной точке потока и справедливо как для вязкой, так и невязкой жидкости.

Проектируя векторное уравнение (2.29) на оси координат, будем иметь:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = F_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right); \\ \frac{du_y}{dt} = F_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right); \\ \frac{du_z}{dt} = F_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (2.30)$$

Система уравнений (2.30) служит основой для разработки гидродинамики вязкой и невязкой жидкости.

## 2. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

**Массовые силы** – это силы, приложенные к каждой частице жидкости и пропорциональные ее массе.

**Тензорной** называется физическая величина, характеризующаяся в данной точке вектором  $p$ , принимающим бесчисленное множество значений в зависимости от ориентации площадки.

**Поверхностными** называются **силы**, распределенные по поверхности  $S$ , ограничивающей выделенный объем жидкости.

## 3. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Возможен следующий план лекции:

1. Классификация сил, действующих в жидкости.
2. Свойства напряжений внутренних сил, действующих в жидкости.
3. Уравнения движения жидкости в напряжениях

## 4. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие силы называются массовыми? Приведите примеры.
2. Что Вы понимаете под напряжением поверхностных сил?
3. Чему равно напряжение силы тяжести?
4. Какие силы называются поверхностными? Приведите примеры.
5. Какими напряжениями характеризуются поверхностные силы?
6. Сформулируйте первое свойство напряжений поверхностных сил.
7. Сформулируйте второе свойство напряжений поверхностных сил.
8. Сформулируйте третье свойство напряжений поверхностных сил.
9. В каких случаях в жидкости не действуют касательные напряжения?
10. Что такое давление?
11. Выведите уравнение движения жидкости в напряжениях.

## 5. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Повх, И.Л. Техническая гидродинамика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
4. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
5. Федяевский, К.К. Гидромеханика: учебник для вузов / К.К. Федяевский, Я.И. Войткунский, Ю.И. Фаддеев. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.

## МОДУЛЬ 3

### ГИДРОСТАТИКА ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

*Гидростатика* – раздел гидромеханики, изучающий равновесие жидкости. Различают абсолютное равновесие жидкости, когда из массовых сил действует только сила тяжести, и относительное равновесие, когда на жидкость, кроме сил тяжести, действуют инерционные силы. В этом случае объем жидкости может двигаться не деформируясь, то есть как абсолютно твердое тело, в то время как движение частиц жидкости друг относительно друга отсутствует.

Здесь мы рассмотрим только гидростатику несжимаемой жидкости.

#### 2. ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

##### 2.1. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнение Эйлера)

Связь между массовыми силами и давлениями в жидкости, находящейся в равновесии, устанавливается уравнениями гидростатики для получения которых необходимо в уравнении движения жидкости в напряжениях приравнять к нулю производную скорости по времени.

В покоящейся жидкости касательные напряжения равны нулю и выполняется следующее условие:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

Полагая  $\frac{du}{dt} = 0$  и учитывая приведенное равенство, мы можем из дифференциального уравнения движения жидкости в напряжениях

$$\frac{du}{dt} = \bar{F} + \frac{1}{\rho} \cdot \left( \frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_y}{\partial y} + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right);$$

записать уравнение гидростатики в следующем виде:

$$\bar{F} - \frac{1}{\rho} \cdot \left( \bar{i} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial p_z}{\partial z} \right) = 0.$$

Знак « $\rightarrow$ » появился при переходе от напряжений к давлению.

Используя понятие градиента скалярной функции это уравнение можно записать в виде соотношения:

$$\rho \cdot \overline{F} = \text{grad } p,$$

представляющего собой уравнение равновесия жидкости в векторной форме. Полученное уравнение было выведено Эйлером и носит его имя. Оно справедливо как для абсолютного, так и для относительного равновесия жидкости.

## 2.2. Уравнения гидростатики и их интегрирование

Выявим условия интегрируемости уравнения Эйлера. Для этого применим к нему дифференциальную операцию  $\text{rot}$ , считая что  $\rho = \text{const}$ :

$$\text{rot } \rho \cdot \overline{F} = \rho \cdot \text{rot } \overline{F} = \text{rot } (\text{grad } p).$$

Как известно, вихрь потенциального вектора равен нулю, то есть

$$\text{rot } (\text{grad } p) \equiv 0;$$

тогда

$$\text{rot } \overline{F} = 0,$$

а раз вихрь вектора равен нулю, значит он потенциален, то есть поле направлений массовых сил обладает потенциалом  $U$ :

$$\overline{F} = \text{grad } U.$$

Таким образом, равновесие несжимаемой жидкости возможно только в случае действия на неё потенциальных массовых сил.

Чтобы интегрировать уравнение равновесия, подставим в него

$$\rho \cdot \overline{F} = \text{grad } p$$

Значение  $\overline{F}$ , выражаем через потенциал  $U$ :

$$\rho \cdot \text{grad } U = \text{grad } p$$

или

$$\text{grad } (p - \rho \cdot U) = 0. \quad (3.1)$$

Операция вычисления градиента аналогична дифференцированию по координатам  $x, y, z$ . Согласно (3.1) выражение, находящееся под знаком градиента, постоянно и не зависит от координат  $x, y, z$ . На основании этого получим интеграл уравнения равновесия

$$p - \rho \cdot U = C, \quad (3.2)$$

где постоянная  $C$  не зависит от координат, то есть одинакова для всех точек пространства. Определим эту постоянную, исходя из граничных условий.

Пусть при  $x_0, y_0, z_0$  известны значения  $U$  и  $p$ , то есть  $U = U_0, p = p_0$ , а значит:

$$p_0 - \rho \cdot U_0 = C.$$

Подставляя эти значения в найденный нами интеграл (3.2), получаем

$$p - p_0 = \rho \cdot (U - U_0). \quad (3.3)$$

Отсюда:

$$p = p_0 + \rho \cdot (U - U_0).$$

Величина  $\rho \cdot (U - U_0)$  представляет результат воздействия на жидкость только массовых сил и не зависит от давления  $p_0$ . В силу этого если в точках на границе жидкости увеличить давление  $p_0$  на некоторую величину, не нарушая при этом равновесие жидкости, то в соответствии с (3.3) во всех точках объёма, занятого жидкостью, давление увеличится на эту же величину. Это составляет закон Паскаля, согласно которому приложенное к поверхности жидкости давление передаётся жидкостью по всем направлениям одинаково.

Рассмотрим важный частный случай, когда на покоящуюся жидкость действует лишь сила тяжести. Ранее нами было получено, что потенциал силы тяжести равен

$$U = -gz.$$

Исходя из этого, выражение (3.3) можно записать в следующем виде

$$p - p_0 = \rho \cdot g(z_0 - z) = \gamma(z_0 - z)$$

или

$$p + \gamma \cdot z = p_0 + \gamma \cdot z_0 = C. \quad (3.4)$$

Мы получили основной закон гидростатики.

Совместим плоскость  $z_0$  со свободной поверхностью жидкости, то есть ( $z_0 = 0$ ). Давление на этой поверхности будет равно атмосферному, то есть  $p = p_a$ . Подставляя эти условия в уравнение (3.4), получаем

$$p = p_a - \gamma \cdot z.$$

Введя в это уравнение глубину погружения точки под свободной поверхностью  $h = -z$ , представим полученное нами уравнение в более удобном виде:

$$p = p_a + \gamma \cdot h,$$

где  $p$  – абсолютное давление,

$\gamma \cdot h = p_u$  – избыточное давление, так как этот член показывает, что в точке на глубине  $h$  давление больше атмосферного. Иногда  $\gamma \cdot h = p_u$  называют избыточным гидростатическим давлением.

Избыточное давление в технике часто условно выражают высотой столба жидкости:

$$h_u = p_u / \gamma.$$

Избыточное давление в 1 атм = 1000 кг/м<sup>2</sup> создается прямым столбом воды, высотой 10 м, или 736 мм рт. ст.

Введем понятие *поверхности равного давления*, то есть поверхности, в каждой точке которой, давление одинаково. Запишем уравнение поверхности равного давления, полагая в уравнении  $p = p_a - \gamma \cdot z$ , что  $p = \text{const}$ . Получим:

$$z = \frac{p_a - \text{const}}{\gamma} = C.$$

На основании этого равенства заключаем, что, при абсолютном равновесии жидкости, поверхности равного давления являются горизонтальными плоскостями, параллельными свободной поверхности.

Уравнение (3.4), основной закон гидростатики, допускает простую геометрическую интерпретацию. Для этого разделим обе части уравнения на удельный вес  $\gamma$ :

$$\frac{p}{\gamma} + z = \frac{C}{\gamma} = H_{abc}, \quad (3.5)$$

где  $z$  – геометрическая высота;

$p/\gamma$  – пьезометрическая высота, соответствующая абсолютному давлению  $p$ ;

$H_{abc}$  – гидростатический напор, соответствующий абсолютному давлению  $p$ ;

$H_{abc}$ , как следует из (3.5), при абсолютном равновесии жидкости постоянен во всех её точках.

Поясним это понятие на примере. В бак налита жидкость, на поверхности которой давление  $p_0$ . Будем считать плоскость  $OX$  плоскостью сравнения, от которой отсчитываются геометрические высоты. Введем в бак  $U$ -образную трубку, приняв давление в верхней её части  $p=0$ . Под воздействием давления, жидкость в коленах  $U$ -образной трубки поднимается на некоторую высоту.

Из (3.5) следует, что

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = H_{abc}$$

то есть высота уровней жидкостей в обоих коленах трубки одинакова.

Вычитаем из левой и правой частей уравнения (3.5) величину  $p_a/\gamma$  и вводим понятие *избыточного давления*, после чего наше выражение примет вид:

$$\begin{aligned} p_n/\gamma + z &= H; \\ H &= H_{абс} - p_a/\gamma, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $p_n/\gamma$  – пьезометрическая высота, соответствующая избыточному давлению;

$H$  – гидростатический напор, так же соответствующий избыточному давлению;

Выведем из бака сообщающиеся с атмосферой трубки, называемые *пьезометрическими*. Под воздействием давления жидкость в этих трубках поднимается на одинаковую (3.6) высоту  $H$ .

### 2.3. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики

Ордината  $z$  рассматриваемой точки жидкости отсчитывается от произвольной горизонтальной плоскости  $XOY$ , принятой в качестве координатной. В гидравлике эту плоскость называют *плоскостью сравнения*, а отсчитанную от нее координату  $z$  точки – *геометрической высотой точки* или *геометрическим напором* в данной точке жидкости.

Величина  $p/\rho g$  имеет линейную размерность и представляет собой геометрическую высоту, на которую поднимется жидкость под действием давления  $p$ . Указанную высоту можно измерить, если подсоединить к сосуду трубку, из которой полностью удален воздух. Жидкость в трубке поднимется на высоту  $p/\rho g$ . Если трубка открыта и давление на свободной поверхности равно атмосферному, то жидкость в трубке поднимется на высоту  $p_{изб}/\rho g$ , соответствующую избыточному давлению (рис. 3.1).

Высота  $p/\rho g$  соответствует давлению  $p$ . Высота  $p_{изб}/\rho g$  называется *пьезометрической высотой*. Высота, соответствующая давлению  $p_{вак}$ , называется *вакуумметрической высотой*. Эта высота может быть измерена с помощью простейшего вакуумметра (рис. 3.2).

Сумму высот  $z + p/\rho g$  называют *гидростатическим напором  $H$* . Пьезометрический напор  $H_n$  меньше гидростатического напора на высоту, соответствующую атмосферному давлению,  $p_{атм}/\rho g$ .

Отложив от плоскости сравнения по вертикали отрезки  $z + p/\rho g$  для различных точек покоящейся жидкости, обнаружим, что геометрическое

место концов таких отрезков будет представлять собой горизонтальную плоскость, расположенную на расстоянии  $z + p/\rho g$  от плоскости сравнения. Такая плоскость называется *плоскостью гидростатического напора*, а если откладывать отрезки  $z + p_{изб}/\rho g$ , – то *плоскостью пьезометрического напора*.

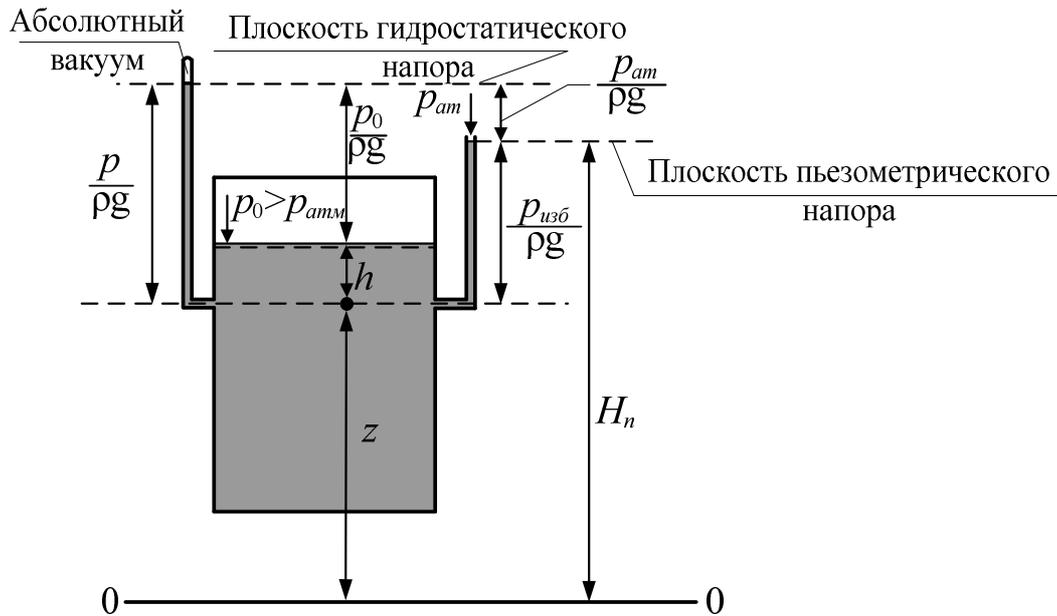


Рис. 3.1. Графическая иллюстрация напоров жидкости в сосуде при  $p_0 > p_{атм}$

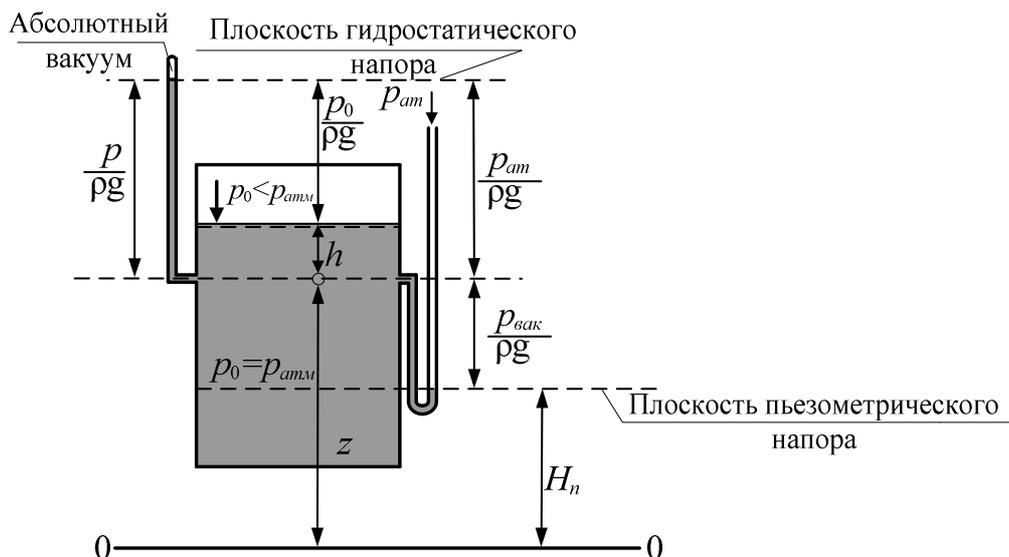


Рис. 3.2. Графическая иллюстрация напоров жидкости в сосуде при  $p_0 < p_{атм}$

## 2.4. Закон Паскаля и его практическое приложение. Графическое изображение давления

Применив основное уравнение гидростатики к двум точкам покоящейся жидкости  $z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g}$ , изменим давление в первой точке на  $\Delta p_1$ , не нарушая равновесия жидкости (рис 3.3). Тогда во второй точке давление должно измениться на некоторую величину  $\Delta p_2$ . Из основного уравнения гидростатики следует, что:

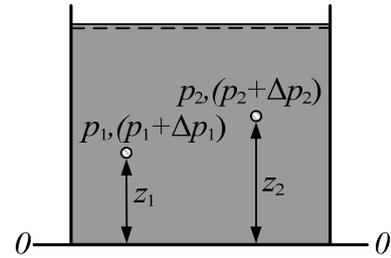


Рис. 3.3. Схема к выводу закона Паскаля

$$z_1 + \frac{p_1 + \Delta p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2 + \Delta p_2}{\rho \cdot g}$$

или  $\Delta p_1 = \Delta p_2$ , то есть изменение давления в любой точке покоящейся жидкости передается в остальные ее точки без изменений. Это положение называется *законом Паскаля*.

На этом законе основан принцип работы гидравлических машин. Рассмотрим одну из них.

*Гидравлический пресс* – это машина, которая используется для получения больших усилий при прессовании, штамповке, испытании материалов и т.п. Она состоит из двух сообщающихся цилиндров с поршнями малого  $d$  и большего  $D$  диаметров (рис. 3.4). Первый соединен с рычагом, дающим дополнительный выигрыш в силе. Если к рычагу приложена сила  $P_0$ , то на малый поршень передается сила

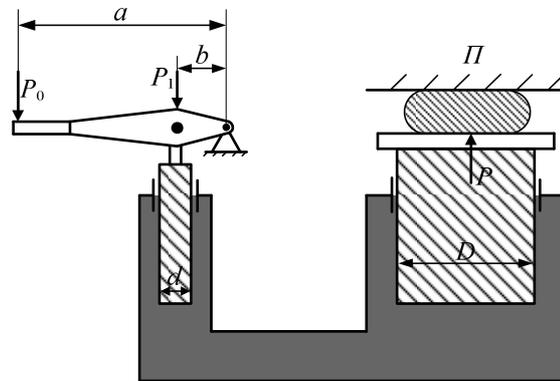


Рис. 3.4. Гидравлический пресс

$$P_1 = P_0 \cdot \frac{a}{b}.$$

Следовательно, в жидкости под поршнем давление увеличивается на величину

$$\Delta p = \frac{P_1}{\omega} = \frac{P_0 \cdot a/b}{\omega},$$

где  $\omega$  – площадь поперечного сечения малого поршня.

Изменение давления передается во все точки занятого жидкостью пространства, а значит, и под большой поршень. Пренебрегая практически незначительной поправкой на разность высотных положений нижней поверхности поршней, получаем силу давления на большой поршень:

$$P = \Delta p \cdot \Omega = P_0 \frac{a}{b} \cdot \frac{\Omega}{\omega},$$

где  $\Omega$  – площадь поперечного сечения большого поршня.

Отношение  $\Omega/\omega$  называют передаточным числом. Очевидно, для цилиндров  $\Omega/\omega = (D/d)^2$ .

Учитывая потери энергии на трение в движущихся частях введем КПД  $\eta$ , получаем расчетную формулу:

$$P = P_0 \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{D}{d}\right)^2 \cdot \eta.$$

Обычно  $\eta = 0,80 - 0,85$ . В современных гидравлических прессах развиваются усилия до 700 000 кН.

**Графическое изображение давления.** Графическое изображение изменения гидростатического давления вдоль плоской стенки в зависимости от глубины называется диаграммой распределения давления, или *эпюрой давления*.

Как следует из основного уравнения гидростатики, давление вдоль какой-либо вертикальной стенки изменяется по линейному закону:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h.$$

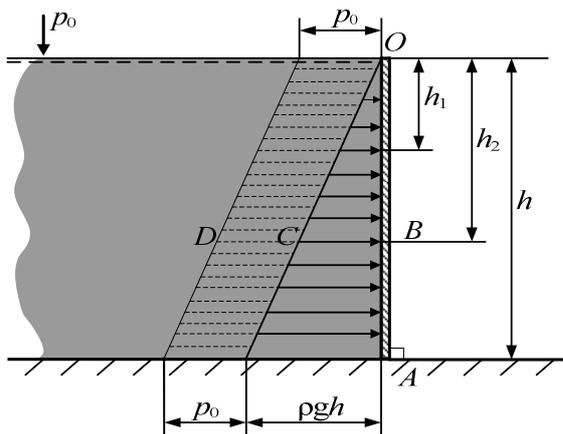


Рис. 3.5. Эпюра гидростатического давления на плоскую вертикальную стенку

Если манометрическое давление в точке на глубине  $h_1$  (рис. 3.5) равно  $p_{m1} = \rho \cdot g \cdot h_1$ , а в точке на глубине  $h_2$  равно  $p_{m2} = \rho \cdot g \cdot h_2$ , то:

$$\frac{p_{m1}}{p_{m2}} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Поскольку давление жидкости всегда направлено по внутренней нормали к площадке действия, отложив в соответствующих точках перпендикуляры, изображающие в масштабе манометрическое давление, и соединив их концы, можно получить

эпюру манометрического давления на данную стенку.

В качестве двух исходных точек для построения линейной графической зависимости удобнее взять точку  $O$  на свободной поверхности, где манометрическое давление равно нулю, и точку  $A$  на дне, где манометрическое давление  $p_{mA} = \rho \cdot g \cdot h$ .

Эпюра полного гидростатического давления изобразится трапецией (рис. 3.5), так как в каждой точке вдоль стенки абсолютное давление больше манометрического на величину  $p_0$ . Эпюра давления строится со стороны жидкости и штрихуется по направлению действия давления. Каждый отрезок эпюры гидростатического давления в масштабе изображает направление давления в данной точке и его значение, например отрезок  $CB$  изображает манометрическое давление в точке  $B$ , а отрезок  $DB$  – полное гидростатическое давление в той же точке.

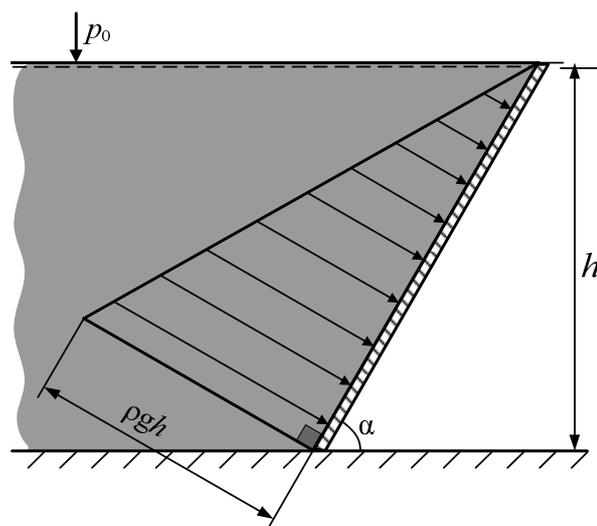


Рис. 3.6. Эпюра гидростатического давления на плоскую стенку наклоненную под углом  $\alpha$  к горизонту

На рис. 3.6 представлена эпюра манометрического давления на стенку, наклоненную к горизонту под углом  $\alpha$ . Ординаты эпюры давления всегда перпендикулярны площадке действия.

## 2.5. Абсолютное и манометрическое давление. Вакуум. Приборы для измерения давления

Применив основное уравнение гидростатики для двух точек, одна из которых расположена на свободной поверхности, получим:

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g}$$

или

$$p = p_0 + g \cdot \rho \cdot (z_0 - z),$$

где  $p_0$  – давление на свободной поверхности;

$z_0 - z = h$  – глубина погружения точки  $A$ .

Отсюда следует, что давление в жидкости увеличивается с глубиной погружения, а формула *абсолютного гидростатического давления* в точке покоящейся жидкости имеет вид:

$$P_{абс} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h. \quad (3.10)$$

Часто давление на свободной поверхности воды равно атмосферному давлению  $p_0 = p_{атм}$ , в этом случае абсолютное давление определяется как:

$$P_{абс} = p_{атм} + \rho \cdot g \cdot h, \quad (3.10^*)$$

а  $\rho \cdot g \cdot h$  называют *избыточным давлением* и обозначают  $p_{изб}$ .

Избыточное давление определяется как разность абсолютного и атмосферного давлений:

$$P_{изб} = P_{абс} - p_{атм} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h - p_{атм},$$

при  $p_0 = p_{атм}$ :

$$P_{изб} = \rho \cdot g \cdot h.$$

Абсолютное гидростатическое давление может быть меньше атмосферного, но всегда больше нуля. Избыточное давление может быть и больше, и меньше нуля.

Положительное избыточное давление называют *манометрическим давлением*  $p_{ман}$ :

$$P_{ман} = P_{абс} - p_{атм} \cdot (P_{абс} > p_{атм}).$$

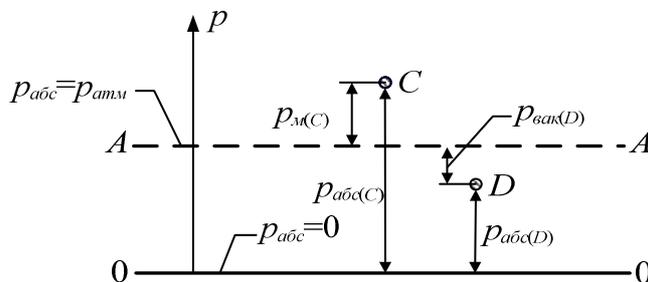


Рис. 3.7. Графическая иллюстрация давления

Манометрическое давление показывает, на сколько абсолютное давление превышает атмосферное (рис. 3.7).

Отрицательное избыточное давление называют *вакуумметрическим давлением*  $p_{вак}$ :

$$P_{вак} = p_{атм} - P_{абс} \cdot (P_{абс} < p_{атм}).$$

Вакуумметрическое давление показывает насколько абсолютное давление ниже атмосферного.

Практически наибольший вакуум в жидкости ограничен значением давления насыщенного пара жидкости при данной температуре.

Проиллюстрируем графически взаимосвязь между абсолютным, манометрическим и вакуумметрическим давлениями (см. рис. 3.7).

Представим плоскость, во всех точках которой абсолютное давление  $p_{абс} = 0$  (линия 0-0 на рис. 3.7). Выше этой плоскости на расстоянии, соответствующем атмосферному давлению, расположена плоскость, во всех точках которой  $p_{абс} = p_{атм}$  (линия A-A). Таким образом, линия 0-0 является

базой для отсчета абсолютного давления, а линия  $A-A$  – базой для отсчета манометрического давления и вакуума.

Если в точке  $C$  в жидкости абсолютное давление  $p_{абс(C)}$  больше атмосферного, то расстояние от точки  $C$  до линии  $A-A$  будет равно манометрическому давлению  $p_{м(C)}$  в точке  $C$ . Если в точке  $D$  в жидкости абсолютное давление  $p_{абс(D)}$  меньше атмосферного, то расстояние от точки  $D$  до линии  $A-A$  будет соответствовать вакуумметрическому давлению  $p_{(вак)D}$  в точке  $D$ .

Приборы для измерения гидростатического давления можно подразделить на две группы: *жидкостные* и *механические*. В основе жидкостных приборов для измерения давления лежит принцип сообщающихся сосудов.

Простейшим жидкостным прибором для измерения давления является пьезометр. Пьезометр представляет собой прозрачную трубку диаметром не менее 5 мм (для избежания капиллярности). Один ее конец присоединен к сосуду, в котором измеряется давление, а другой конец открыт. Схема установки пьезометра показана на рис. 3.8, *а*.

Абсолютное давление в сосуде в точке  $C$  присоединения пьезометра в соответствии с формулой (3.10\*) составляет:

$$p_C = p_{атм} + \rho \cdot g \cdot h_n, \quad (3.11)$$

где  $h_n$  – высота подъема жидкости в пьезометре (пьезометрическая высота).

Из уравнения (3.11) находим, что:

$$h_n = \frac{p_{абс} - p_{атм}}{\rho g} = \frac{p_m}{\rho g}.$$

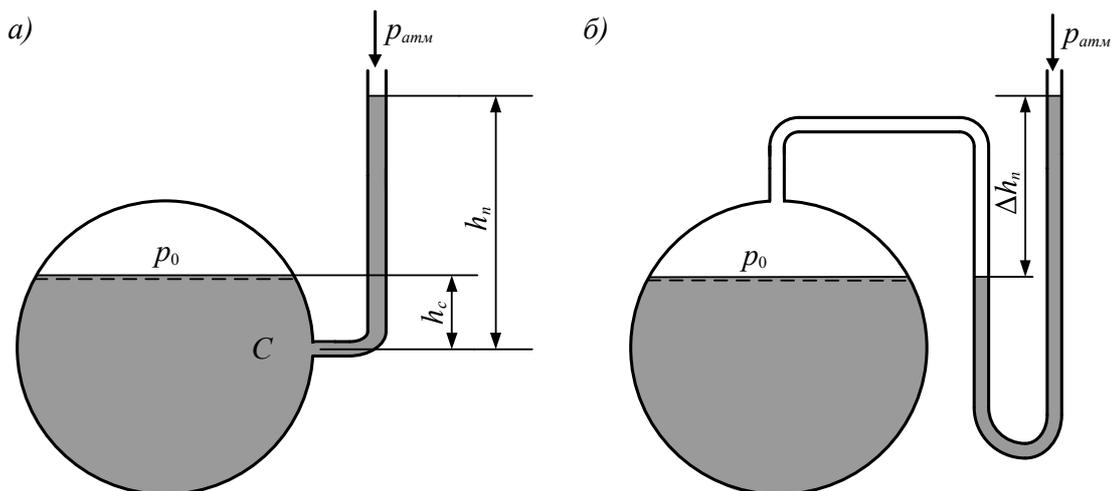


Рис. 3.8. Схема установки пьезометров: а – для измерения давления в точке присоединения; б – для измерения давления в сосуде над свободной поверхностью

Таким образом, высота подъема жидкости в пьезометре определяется избыточным (манометрическим) давлением в точке  $C$ . Измерив высоту

подъема жидкости в пьезометре, можно определить избыточное давление в точке его присоединения.

С помощью пьезометра можно определить давление  $p_0$  в сосуде над свободной поверхностью. Давление в точке  $C$ :

$$p_C = p_0 + \rho \cdot g \cdot h_c, \quad (3.12)$$

где  $h_c$  – глубина погружения точки  $C$  относительно уровня жидкости в сосуде.

Из уравнений (3.11) и (3.12) находим:

$$p_0 = p_{атм} + \rho g (h_n - h_c) = p_{атм} + \rho g \Delta h_n.$$

В этом случае для удобства определения разности  $h_n - h_c$  схема установки пьезометра может быть такой, как на рис. 3.8, б.

Пьезометр является очень чувствительным и точным прибором, однако он удобен только для измерения небольших давлений; при больших давлениях трубка пьезометра получается, чрезмерно длинной, что осложняет измерения. В этих случаях применяют так называемые жидкостные манометры, в которых давление уравнивается не той же жидкостью, что и жидкость, находящаяся в сосуде, как это имеет место в пьезометре, а жидкостью большего удельного веса; обычно такой жидкостью является ртуть. Так как удельный вес ртути больше удельного веса воды в 13,6 раза, то при измерении одних и тех же давлений трубка ртутного манометра оказывается значительно короче пьезометрической трубки и сам прибор получается более компактным.

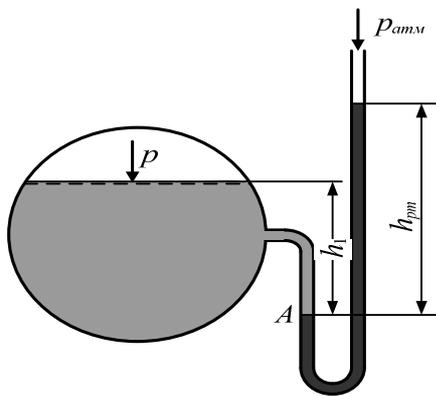


Рис. 3.9. Ртутный манометр

*Ртутный манометр* (рис. 6.3) представляет собой обычно U-образную стеклянную трубку, изогнутое колено которой заполняется ртутью. Под действием давления  $p$  в сосуде уровень ртути в левом колене манометра понижается, а в правом – повышается. При этом гидростатическое давление в точке  $A$ , взятой на поверхности ртути в левом колене, по аналогии с предыдущим, определяется следующим образом:

$$p_A = p + \rho_{жс} g h_1 = p_{атм} + \rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт},$$

где  $\rho_{жс}$  и  $\rho_{рт}$  – плотности соответственно жидкости в сосуде и ртути.

Отсюда:

$$p = p_{атм} + \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_{жс} g h_1.$$

В тех случаях, когда необходимо измерить не давление в сосуде, а разность давлений в двух сосудах или же в двух точках жидкости в одном

и том же сосуде, применяют *дифференциальные манометры*. Дифференциальный манометр, присоединенный к двум сосудам  $A$  и  $B$ , представлен на рис. 3.10. Здесь для давления  $p$  на уровне поверхности ртути в левом колене имеем:

$$p = p_A + \rho_{жс} g h_1 = p_B + \rho_{жс} g h_2 + \rho_{рт} g h,$$

откуда:

$$p_A - p_B = \rho_{жс} g (h_2 - h_1) + \rho_{рт} g h,$$

или, так как  $h_2 - h_1 = -h$ ,

$$p_A - p_B = (\rho_{рт} - \rho_{жс}) g h .$$

Таким образом, разность давлений определяется разностью уровней в двух коленах дифференциального манометра.

Для повышения точности измерений, а также при измерении незначительных давлений применяются *микроманометры*.

Микроманометр состоит из резервуара  $A$ , присоединяемого к сосуду, в котором измеряется давление, и манометрической трубки  $B$ , угол наклона  $\alpha$  к горизонту которой можно менять. Одна из конструкций микроманометра, так называемый наклонный микроманометр, изображена на рис. 3.11.

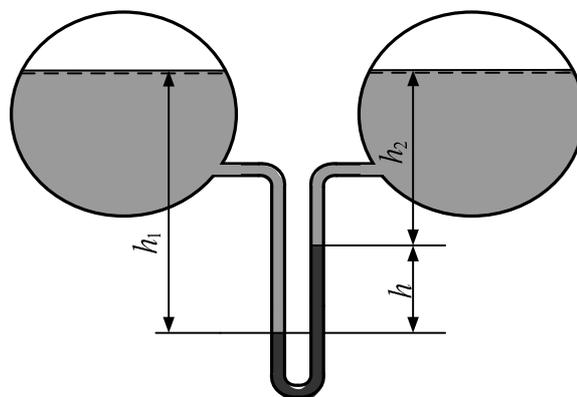


Рис. 3.10. Дифференциальный манометр

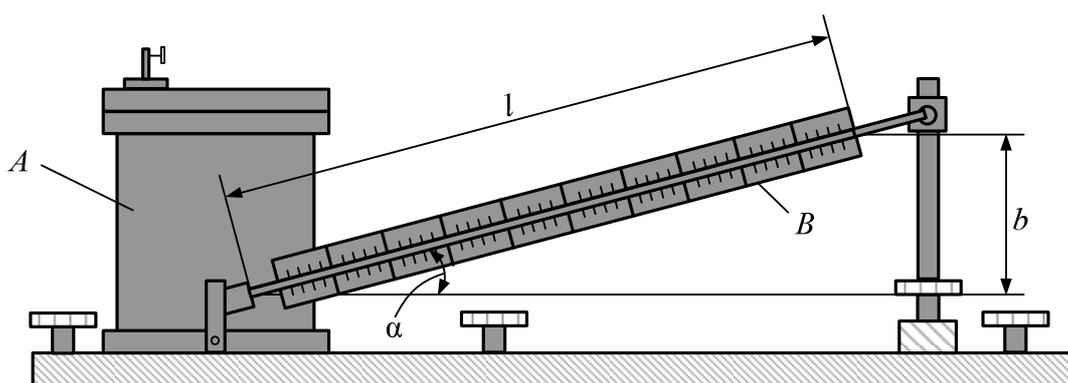


Рис. 3.11. Микроманометр

Давление у основания трубки, измеряемое микроманометром, определяется выражением:

$$p = \rho g l \sin \alpha .$$

Микроманометр обладает большей чувствительностью, так как он позволяет вместо малой высоты  $h$  отсчитывать длину  $l$  тем большую, чем меньше угол  $\alpha$ .

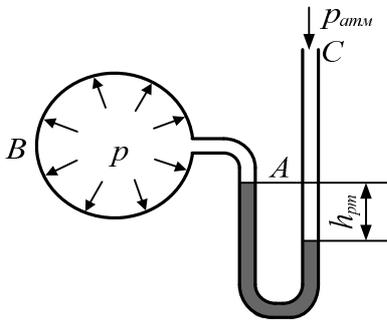


Рис. 3.12. Вакуумметр

Для измерения давления меньше атмосферного (в сосуде имеется вакуум) служат приборы, называемые *вакуумметрами*. Однако вакуумметры обычно измеряют не непосредственно давление, а вакуум, то есть недостаток давления до атмосферного. Принципиально они ничем не отличаются от ртутных манометров и представляют собой заполненную ртутью изогнутую трубку (рис. 3.12), один конец которой  $A$  соединяется с сосудом  $B$ , где измеряется давление  $p$ , а другой конец  $C$  открыт. Пусть, например, измеряется давление газа в сосуде  $B$ , в этом случае получаем:

$$p_{атм} = p + \rho_{рт} g h_{рт}, \quad p = p_{атм} - \rho_{рт} g h_{рт}.$$

Высоту

$$h_{рт} = \frac{p_{атм} - p}{\rho_{рт} g},$$

соответствующую вакууму в сосуде называют *вакуумметрической высотой* и обозначают  $h_{вак}$ .

Когда необходимо измерять большие давления, применяют приборы второго типа – механические. Наибольшим распространением пользуется на практике *пружинный манометр* (рис. 3.13, а). Он состоит из полый тонкостенной изогнутой латунной трубки (пружины)  $A$ , один конец которой запаян и соединен при помощи цепи  $B$  с зубчатым механизмом  $C$ ; второй конец трубки – открытый – сообщается с сосудом, в котором замеряется давление. Через этот конец в трубку  $A$  поступает жидкость. Под действием давления пружина частично распрямляется и посредством зубчатого механизма приводит в движение стрелку, по отклонению которой судят о величине давления. Такие манометры обычно снабжаются градуированной шкалой, показывающей давление в атмосферах, а иногда оборудуются и самописцами.

Кроме того, существуют так называемые *мембранные манометры* (рис. 3.13, б), в которых жидкость воздействует на тонкую металлическую (или из прорезиненной материи) пластинку – мембрану. Получающаяся при этом деформация мембраны посредством системы рычагов передается стрелке, указывающей величину давления.

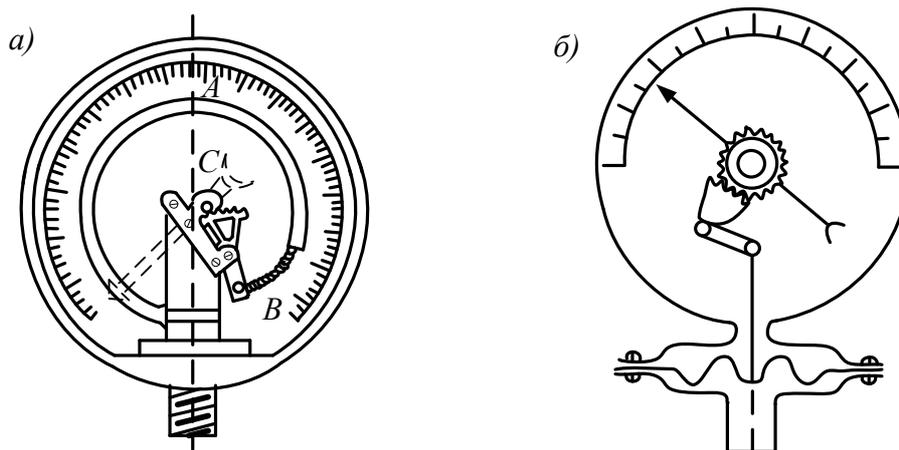


Рис. 3.13. Пружинный (а) и мембранный (б) манометры

## 2.6. Давление жидкости на плоские стенки

Рассмотрим жидкость, покоящуюся относительно Земли. Выберем в жидкости горизонтальную площадку  $\omega$ . Все точки этой площадки находятся на одинаковой глубине и испытывают одинаковое давление со стороны покоящейся жидкости. Если свободная поверхность жидкости открыта в атмосферу ( $p_0 = p_{am}$ ), то сила избыточного давления на площадку  $\omega$  определяется по формуле:

$$P_{изб} = \rho \cdot g \cdot h \cdot \omega,$$

то есть численно равна весу жидкости, заключенной в вертикальной призме основанием  $\omega$  и высотой  $h$ .

Сила  $P_{изб}$  направлена со стороны жидкости перпендикулярно стенке. Линия действия силы пересекает площадку  $\omega$  в центре тяжести, так как давление распределено по площадке равномерно.

При равенстве давлений на свободную поверхность жидкости в сосудах  $p_0$  (рис. 3.14), плотностей  $\rho$ , площадей основания  $\omega$  и глубин  $h$  независимо от формы сосуда сила давления на горизонтальное дно будет одной и той же (гидростатический парадокс).

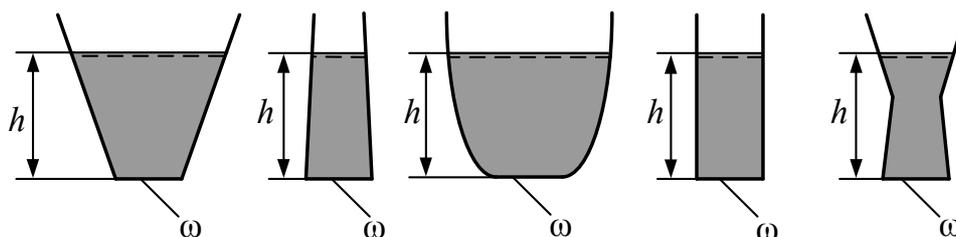


Рис. 3.14. Гидравлический парадокс

Рассмотрим плоскую стенку с площадью смоченной части  $\omega$ , наклоненную к горизонту под углом  $\theta$  (рис. 3.15). Гидростатическое давление жидкости не остается постоянным в пределах смоченной части стенки. Раз-

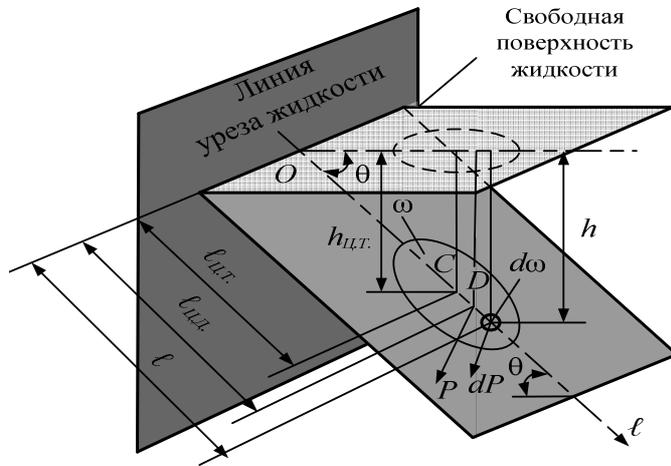


Рис. 3.15. Схема к определению силы давления на плоскую наклонную стенку

бив площадь  $\omega$  на элементарные площадки  $d\omega$  и считая в пределах  $d\omega$  давление  $p$  неизменным, выразим значение силы давления  $dP$  на элементарную площадку как  $dP = p d\omega$ . Вектор  $dP$  направлен со стороны жидкости по нормали к площадке. Суммарное воздействие жидкости сведется к равнодействующей силе  $P$ , значение которой определяется по соотношению:

$$P_{abc} = \int_{\omega} (p_0 + \rho \cdot g \cdot h) \cdot d\omega = p_0 \cdot \omega + \int_{\omega} \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega. \quad (3.13)$$

Так как расстояние  $l$ , измеряемое по стенке от линии уреза воды (от оси  $OY$ ) до элементарной площадки  $d\omega$ , равно  $l = h/\sin \theta$ , то при  $\rho \cdot g = \text{const}$  получим:

$$\int_{\omega} \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \int_{\omega} l \cdot d\omega.$$

Интеграл  $\int_{\omega} l \cdot d\omega$  представляет собой статический момент площади  $\omega$  относительно оси  $OY$ , то есть в данном случае относительно линии уреза жидкости. Статический момент равен произведению площади  $\omega$  на плечо  $l_{ц.м.}$  момента:

$$\int_{\omega} h \cdot d\omega = \sin \theta \int_{\omega} l \cdot d\omega = \sin \theta \cdot l_{ц.м.} \cdot \omega = h_{ц.м.} \cdot \omega.$$

Выражение (3.13) примет вид:

$$P_{abc} = (p_0 + \rho \cdot g \cdot h_{ц.м.}) \cdot \omega.$$

Сила давления покоящейся жидкости на плоскую наклонную стенку равна произведению площади  $\omega$  на давление жидкости в центре тяжести смоченной части стенки. Сила направлена со стороны жидкости по нормали к стенке.

При  $p_0 = p_{atm}$  сила избыточного давления равна:

$$P_{изб} = \rho \cdot g \cdot h_{ц.м.} \cdot \omega.$$

Далее силу избыточного давления (при  $p_0 = p_{am}$ ) будем обозначать  $P$  (без индекса).

Линия действия силы  $P$  пересекает площадку в точке  $D$  (см. рис. 3.15), которая называется центром давления.

Центр давления не совпадает с центром тяжести площади  $\omega$ , поэтому необходимо определять координаты центра давления.

Сила  $P_0 = p_0\omega$ , связанная с действием в каждой точке смоченной площади  $\omega$  одного и того же давления  $p_0$ , приложена в центре тяжести смоченной площади (точке  $C$ ). Сила  $P$  приложена в другой точке, не совпадающей с точкой  $C$ .

Если необходимо найти точку приложения суммарной силы  $P_{abc}$ , то ее определяют по правилу сложения сил.

Обычно для расчетов гидротехнических сооружений представляет интерес сила избыточного давления  $P$  (при  $p_0 = p_{am}$ ) и координаты точки ее приложения.

Пусть рассматриваемая площадь  $\omega$  имеет ось симметрии (линия  $Ol$  на рис. 3.15). Тогда центр давления  $D$  будет расположен на оси симметрии и для определения его положения достаточно найти расстояние от линии уреза жидкости до точки  $D$ , то есть  $l_{ц.д.}$ .

Воспользуемся теоремой моментов: момент равнодействующей относительно произвольной оси силы равен сумме моментов составляющих сил относительно той же оси. За ось моментов в данном случае примем линию уреза жидкости, то есть ось  $OY$ . Тогда

$$P \cdot l_{ц.д.} = \int_{\omega} l \cdot dP. \quad (3.14)$$

Помня, что

$$P = \rho \cdot g \cdot h_{ц.м.} \cdot \omega; \quad dP = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot l \cdot d\omega,$$

подставим эти значения в (3.14):

$$\rho \cdot g \cdot h_{ц.м.} \omega \cdot l_{ц.д.} = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \int_{\omega} l^2 d\omega = \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot J_y, \quad (3.15)$$

где  $J_y$  – момент инерции смоченной площади  $\omega$  относительно оси, совпадающей с линией уреза жидкости (оси  $OY$ ).

Из (3.15) имеем

$$l_{ц.д.} = \sin \theta \cdot J_y / \omega \cdot h_{ц.м.} = J_y / \omega \cdot l_{ц.м.} \quad (3.16)$$

Перенесем ось момента инерции в центр тяжести площади. Моменты инерции относительно параллельных осей связаны между собой соотношением:

$$J_y = J_0 + \omega \cdot l_{ц.м.}^2$$

где  $J_0$  – момент инерции смоченной площади относительно оси, проходящей параллельно линии уреза жидкости через центр тяжести  $C$  этой площади.

Подставив значение  $J_y$  в (3.16), получим:

$$l_{ц.д} = l_{ц.м} + J_0 / \omega \cdot l_{ц.м}$$

или

$$l_{ц.д} = l_{ц.м} + J_0 / S,$$

где  $S = \omega \cdot l_{ц.м.}$  – статический момент смоченной площади относительно линии уреза жидкости.

Центр давления силы избыточного давления на плоскую наклонную площадку расположен ниже центра тяжести смоченной площади, считая по оси симметрии (по наклону) стенки, на  $J_0 / (\omega \cdot l_{ц.м.})$ .

## 2.7. Давление жидкости на цилиндрические стенки

Рассмотрим (рис. 3.16) некоторую ограниченную часть твердой цилиндрической поверхности, которую назовем цилиндрической стенкой. Пусть рассматриваемая стенка находится под односторонним воздействием покоящейся жидкости, которое сводится к тому, что в каждой точке на стенку действует давление жидкости. Разобьем стенку на элементарные площадки. В силу малости площадок будем считать их плоскими и выразим элементарную силу давления на них в общем виде  $dP = pd\omega$ . Силы  $dP$  уже не будут направлены параллельно друг другу, их линии действия могут не пересекаться в одной точке, и их сумма может не сводиться к одной равнодействующей.

Для шаровой или круговой цилиндрической стенки элементарные силы давления, будучи нормальными к элементарным площадкам на этих поверхностях, направлены по радиусам и, следовательно, пересекутся в центре сферы или в центре круга (поперечного сечения цилиндра).

Определение сил давления на цилиндрические и шаровые поверхности имеет большое значение, так как в гидротехнических сооружениях

обычно применяются конструкции с такими поверхностями (секторные, сегментные, вальцовые и шаровые затворы, водонапорные баки и т.п.).

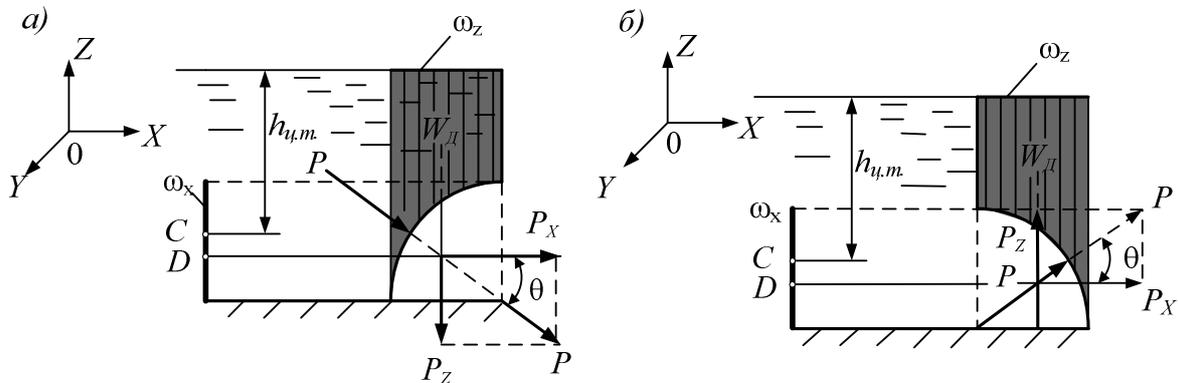


Рис. 3.16. Схема к определению силы давления жидкости на цилиндрическую стену

Рассмотрим цилиндрические стенки, находящиеся под односторонним воздействием покоящейся жидкости. Определим силу избыточного давления. При этом условимся одну из осей координат направлять вдоль образующей цилиндрической поверхности.

**Цилиндрическая поверхность с горизонтальной образующей.** Направим ось  $OY$  параллельно образующей (см. рис. 3.16), а ось  $OZ$  – вертикально вверх.

Значение силы давления на цилиндрическую поверхность в данном случае определяется следующим образом:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}, \quad (3.17)$$

где  $P_x$  и  $P_z$  – горизонтальная и вертикальная составляющие силы давления.

Выделим на цилиндрической поверхности элементарную площадку  $d\omega$ , на которую действует направленная по нормали элементарная сила  $dP = \rho g h d\omega$ . Найдем горизонтальную  $dP_x$  и вертикальную  $dP_y$  составляющие силы  $dP$ :

$$dP_x = dP \cdot \cos(\widehat{dP, OX}) = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OX}),$$

$$dP_z = dP \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}) = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}).$$

Учитывая, что

$$d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OX}) = d\omega_x$$

$$d\omega \cdot \cos(\widehat{dP, OZ}) = d\omega_z,$$

И  
имеем

$$dP_x = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega_x;$$

$$dP_z = \rho \cdot g \cdot h \cdot d\omega_x,$$

где  $d\omega_x$  – проекция элементарной площадки  $d\omega$  на плоскость, перпендикулярную оси  $OX$ ;

$d\omega_z$  – проекция элементарной площадки  $d\omega$  на плоскость, перпендикулярную оси  $OZ$ .

Проинтегрировав, получим для горизонтальной составляющей силы  $P$ :

$$P_x = \rho \cdot g \cdot h'_{ц.м} \omega_x, \quad (3.18)$$

где  $\omega_x$  – проекция всей цилиндрической поверхности на плоскость, нормальную к оси  $OX$ ;

$h'_{ц.м}$  – глубина центра тяжести проекции  $\omega_x$  под пьезометрической плоскостью.

Для вертикальной составляющей получим:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z.$$

Интеграл  $\int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z$  представляет собой объем призмы, ограниченной

снизу цилиндрической поверхностью, а сверху – ее проекцией  $\omega_z$  на пьезометрическую плоскость. Направляющие этой призмы – вертикальные прямые. Полученное таким образом тело называется *телом давления*. *Тело давления* – это объемная фигура, ограниченная снизу цилиндрической поверхностью, по бокам – вертикальными плоскостями, проходящими через крайние точки цилиндрической поверхности, и сверху – горизонтальной плоскостью, совпадающей с пьезометрической.

Вертикальная составляющая  $P_z$  численно равна весу жидкости в объеме тела давления:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z = \rho \cdot g \cdot W_\partial, \quad (3.19)$$

где  $W_\partial = \int_{\omega_z} z \cdot d\omega_z$  – объем тела давления.

На рис. 3.16 тело давления заштриховано вертикальными линиями.

Горизонтальная составляющая  $P_x$  проходит через центр давления проекции  $\omega_x$ , а вертикальная составляющая  $P_z$  проходит через центр тяжести тела давления.

Направление вертикальной составляющей  $P_z$  для схемы, изображенной на рис. 3.16, *а* – вниз, а на рис. 3.16, *б* – вверх.

Направление линии действия силы  $P$  определяется направляющими косинусами:

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{P, OX}) &= P_x / P; \\ \cos(\widehat{P, OZ}) &= P_z / P.\end{aligned}\tag{3.20}$$

## 2.8. Закон Архимеда

Рассмотрим полностью погруженное в жидкость твердое тело, объем которого  $W_m$ , а форма такова, что любая прямая пересекает поверхность этого тела только в двух точках (рис. 3.17). Для определения силы  $P$  давления жидкости на тело воспользуемся результатами предыдущего пункта.

Горизонтальные составляющие силы  $P_x$  и  $P_y$  взаимно уравниваются. Вертикальная составляющая силы давления  $P_z$  равна весу жидкости в объеме тела.

Действительно, в данном случае имеем два тела давления:  $ABMNAEF$ , соответствующее давлению на верхнюю часть тела, и  $AKMFE$ , соответствующее давлению на нижнюю часть тела. Объем первого тела давления равен  $W_1$ , объем второго тела давления  $W_2$ , причем  $W_2 = W_1 + W_m$ .

Вертикальная составляющая  $P_{z_1}$ , равна весу жидкости в объеме  $W_1$ , то есть  $\rho g W_1$ , и направлена по вертикали вниз. Вертикальная составляющая  $P_{z_2}$ , равна весу жидкости в объеме  $W_2$ , то есть  $\rho g W_2$ , и направлена по вертикали вверх.

Равнодействующая сила давления равна разности указанных составляющих:

$$P_z = P_{z_2} - P_{z_1}$$

или

$$P_z = \rho \cdot g \cdot W_m$$

Силу  $P_z$  называют *архимедовой силой*.

Так как  $P_x = P_y = 0$ , то  $P = P_z$ .

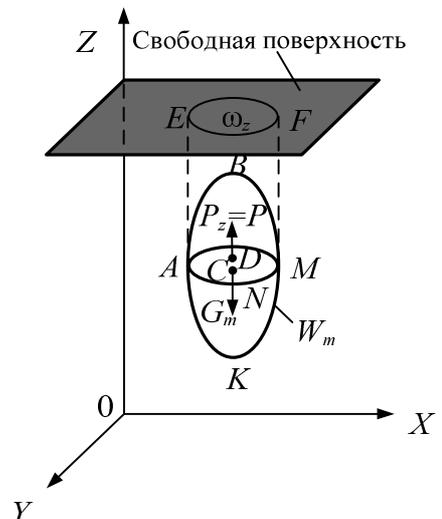


Рис. 3.17. Схема к выводу закона Архимеда

Сила давления покоящейся жидкости на погруженное в нее тело – *архимедова сила* – равна весу жидкости  $\rho g W$  в объеме, вытесненном телом, направлена по вертикали вверх и приложена в центре тяжести этого объема. Это и есть *закон Архимеда*.

### 3. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

**Гидростатика** – раздел гидромеханики, изучающий равновесие жидкости.

**Абсолютное равновесие жидкости** – равновесие, при котором на жидкость из массовых сил действует только сила тяжести.

**Относительное равновесие жидкости** – равновесие, при котором на жидкость кроме сил тяжести действуют инерционные силы.

**Поверхностью равного давления** называется поверхность, давление во всех точках которой одинаково.

**Гидравлический пресс** – это машина, которая используется для получения больших усилий при прессовании, штамповке, испытании материалов и т.п.

**Тело давления** – это объемная фигура, ограниченная снизу цилиндрической поверхностью, по бокам вертикальными плоскостями, проходящими через крайние точки цилиндрической поверхности, и сверху горизонтальной плоскостью, совпадающей с пьезометрической.

**Архимедова сила** – сила давления покоящейся жидкости на погруженное в нее тело.

**Избыточным давлением** называется разность между абсолютным и атмосферным давлениями.

## 4. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Материалы к лекции

Возможен следующий план лекции:

1. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнение Эйлера).
2. Поверхности равного давления.
3. Основное уравнение гидростатики.
4. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики.

5. Закон Паскаля и его практическое приложение. Графическое изображение давления.

6. Абсолютное и манометрическое давление. Вакуум. Приборы для измерения давления.

7. Давление жидкости на плоские стенки.

8. Давление жидкости на цилиндрические стенки.

9. Закон Архимеда.

#### 4.2. Задание к лабораторному занятию

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2 «ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ. ИЗМЕРЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РТУТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ДИФМАНОМЕТРА»

#### Цель работы:

1. Ознакомиться с приборами для измерения давления.
2. Освоить методики измерения избыточного давления (манометрического, вакуумметрического) с помощью дифференциального ртутного манометра.

#### Общие сведения

Гидростатическое давление представляет собой напряжение сжатия в точке, расположенной внутри покоящейся жидкости (рис. 1).

Если  $\Delta P$  – сила, действующая на площадку  $\Delta \omega$  на произвольно выбранной плоскости, проходящей через заданную точку в покоящейся жидкости, то  $\Delta P / \Delta \omega$  – сила, приходящаяся на единицу площади, то есть напряжение. Так как при равновесии жидкости сила  $\Delta P$  может быть только сжимающей силой, то это напряжение представляет собой среднее для данной площадки напряжение сжатия. Для получения значения напряжения в точке надо определить предел отношения  $\Delta P / \Delta \omega$  при  $\Delta \omega \rightarrow 0$ :

$$p = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta \omega}. \quad (1)$$

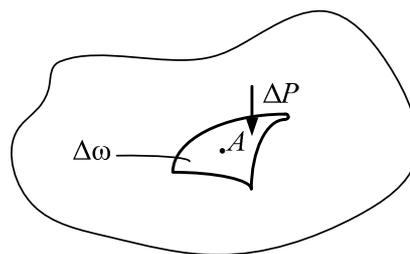


Рис. 1. К понятию давления

Записанное выражение является определением гидростатического давления. Фактическое гидростатическое давление, действующее в точке называется, обычно, *абсолютным давлением*:

$$P_{абс} = P_0 + \gamma h, \quad (2)$$

где  $P_0$  – давление на свободной поверхности жидкости;

$\gamma$  – удельный вес жидкости,  $\gamma = \rho \cdot g$  ;

$h$  – глубина погружения точки под уровень свободной поверхности.

Выражение (2) называется основным законом гидростатики.

Если  $P_0 = P_{абс}$  (атмосферное давление), то уравнение (2) принимает вид:

$$P_{абс} = P_{атм} + \gamma h. \quad (3)$$

Разность между абсолютным и атмосферным давлениями называется *избыточным давлением*:

$$P_{изб} = P_{абс} - P_{атм} = \gamma h. \quad (4)$$

Избыточное давление, как разность  $P_{абс} - P_{атм}$  может быть и больше, и меньше нуля. Если избыточное давление больше нуля ( $P_{абс} > P_{атм}$ ), то оно называется *манометрическим давлением*:

$$P_{ман} = P_{абс} - P_{атм}. \quad (5)$$

Если избыточное давление меньше нуля ( $P_{абс} < P_{атм}$ ), то оно называется *вакуумметрическим давлением*:

$$P_{вак} = -P_{изб} = P_{атм} - P_{абс}. \quad (6)$$

Таким образом, манометрическое давление показывает, насколько абсолютное давление больше атмосферного, а вакуумметрическое давление – насколько атмосферное давление больше абсолютного.

Для измерения давления используют различные единицы измерения, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Единицы измерения давления

Единица	атм	мм вод. ст.	Па	мм рт. ст.
1 мм рт. ст	$1,32 \cdot 10^{-3}$	13,6	$1,33 \cdot 10^2$	1
1 атм	1	$1,03 \cdot 10^4$	$1,01 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^{-2}$
1 Па	$9,87 \cdot 10^{-6}$	0,102	1	$7,50 \cdot 10^{-3}$
1 кгс/см <sup>2</sup>	0,968	$10^4$	$9,81 \cdot 10^4$	$7,36 \cdot 10^2$

В зависимости от необходимости измерения атмосферного, абсолютного, манометрического или вакуумметрического давления существуют несколько видов приборов для измерения давления.

Приборы, предназначенные для измерения атмосферного давления, называются *барометрами*, для измерения манометрического давления – *манометрами*, для измерения вакуума – *вакуумметрами*. Приборы, позволяющие измерять избыточное давление и вакуум, называются *мановакууметрами*. В некоторых случаях бывает достаточно знать разницу давлений в двух различных точках. Измерение разницы давления может быть выполнено с помощью дифференциального манометра.

По принципу действия все приборы можно разделить на *жидкостные, механические, грузопоршневые, электрические* и *комбинированные*.

К жидкостным, относятся приборы, в которых измеряемое давление уравнивается давлением столба жидкости, высота которого служит мерой давления: например, ртутные барометры, дифференциальные манометры, пьезометры с наклонной шкалой и т.д.

В пружинных приборах действию измеряемого давления подвергается упругий элемент (трубка, мембрана, сильфон). Под воздействием давления возникает деформация упругого элемента, величина которого служит мерой давления.

Действие электрических приборов основано на изменении под действием давления омического или емкостного сопротивления элементов или на использовании пьезометрического эффекта.

В грузопоршневых приборах гидростатическое давление, действующее на поршень, уравнивается приложенной к нему внешней силой (обычно грузом).

Жидкостные манометры – пьезометры – применяются для измерения избыточного давления и представляют собой (рис. 2) стеклянную, установленную строго вертикально трубку 1 с открытым в атмосферу верхним концом. Нижний конец трубки соединяется с местом измерения давления. Под действием давления жидкость поднимается на высоту  $h$ , измеряемого по линейно шкале. Избыточное давление в точке  $A$  равно:

$$p_{изб} = \gamma \cdot (h + h_1),$$

где  $h_1$  – глубина точки  $A$  по отношению нулю шкалы прибора.

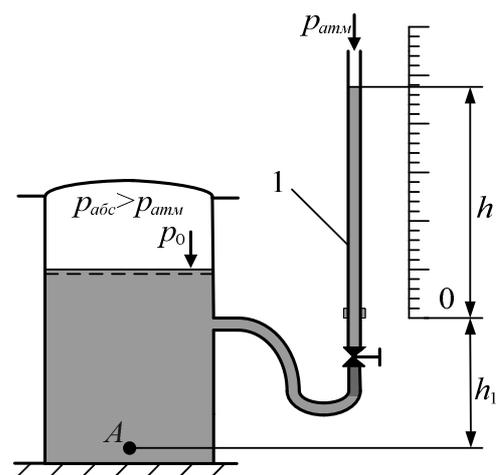


Рис. 2. Пьезометр

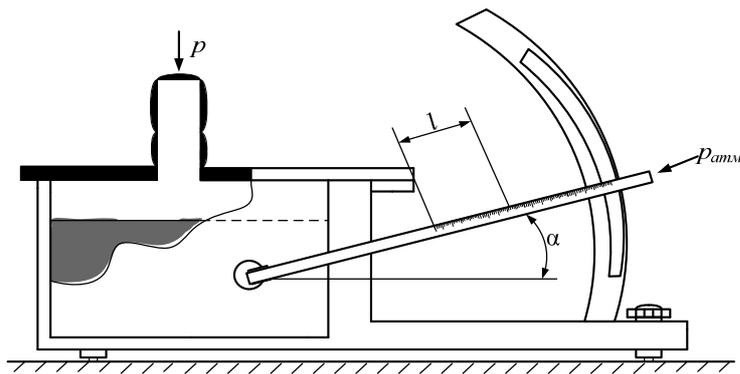


Рис. 3. Микроманометр

Для измерения малых давлений могут применяться микроманометры с наклонной шкалой (рис. 3). По шкале наклонного микроманометра вместо малой высоты  $h$  отсчитывается большая величина  $l$ , причем

$$h = l \cdot \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол наклона шкалы.

Угол наклона манометрической трубки может изменяться, при этом уменьшению угла наклона соответствует увеличение чувствительности прибора.

Наиболее широкое распространение в технике получили пружинные манометры. Устройство манометра показано на рис. 4. Основной деталью прибора является полая трубка 1, имеющая в сечении овальную форму и согнутая по дуге окружности так, чтобы большая ось овала была перпендикулярна плоскости трубки. Открытый конец трубчатой пружины 1 вставлен в держатель 2, который укреплен в корпусе манометра и выполнен как одно целое со штуцером 9.

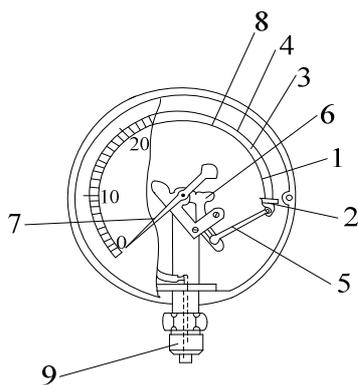


Рис. 4. Пружинный манометр

Основной деталью прибора является полая трубка 1, имеющая в сечении овальную форму и согнутая по дуге окружности так, чтобы большая ось овала была перпендикулярна плоскости трубки. Открытый конец трубчатой пружины 1 вставлен в держатель 2, который укреплен в корпусе манометра и выполнен как одно целое со штуцером 9.

Передаточный механизм состоит из зубчатого сектора 6. С одной стороны сектор 6 связан через поводок 5 со свободным концом трубчатой пружины, с другой стороны с указательной стрелкой 7, передвигающейся по шкале 8. Подобные приборы могут измерять как избыточное, так и вакуумметрическое давление.

Вакуумметрическое давление может быть измерено с помощью прибора, изображенного на рис. 5. В резервуаре 1 абсолютное давление меньше атмосферного:

$$P_{абс} < P_{атм}.$$

На основании уравнения (6) имеем:

$$-P_{изб} = P_{вак} = \gamma h_{вак},$$

здесь  $h_{вак}$  называется вакуумметрической высотой:

$$h_{вак} = -\frac{P_{изб}}{\gamma} = -\left(\frac{P_{абс}}{\gamma} - \frac{P_{атм}}{\gamma}\right) = \frac{P_{атм} - P_{абс}}{\gamma}.$$

В тех случаях, когда необходимо измерить не давление в сосуде, а разность давлений в двух сосудах или же в двух точках жидкости в одном и том же сосуде, применяют *дифференциальные манометры*. Дифференциальный манометр, присоединенный к двум сосудам *A* и *B*, представлен на рис. 6. Здесь для давления  $p$  на уровне поверхности ртути в левом колене имеем:

$$p = p_A + \rho_{жс} g h_1 = p_B + \rho_{жс} g h_2 + \rho_{рт} g h,$$

откуда:

$$p_A - p_B = \rho_{жс} g (h_2 - h_1) + \rho_{рт} g h,$$

или, так как  $h_2 - h_1 = -h$ :

$$p_A - p_B = (\rho_{рт} - \rho_{жс}) g h .$$

Таким образом, разность давлений определяется разностью уровней в двух коленах дифференциального манометра.

### Описание опытной установки

Опытная установка (рис. 7) состоит из двух резервуаров (*A*, *B*), заполненных воздухом, ручного насоса и дифференциального ртутного манометра, предназначенного для измерения перепада давлений. Дифференциальный ртутный манометр (рис. 8) состоит из верхней 1 и нижней 2 колодок, сообщающихся между собой стеклянными трубками. Вверху трубки входят два штуцера 3, ввинченные в ртутоуловители 4, а внизу – штуцера 5, ввинченные в нижнюю колодку.

В нижней колодке стеклянные трубки сообщаются каналом, который с правой стороны закрыт конусным клапаном 6. Отверстие, закрытое клапаном 6, служит для наполнения дифманометра ртутью. В верхней колодке стеклянные трубки сообщаются уравнительным каналом и запираются

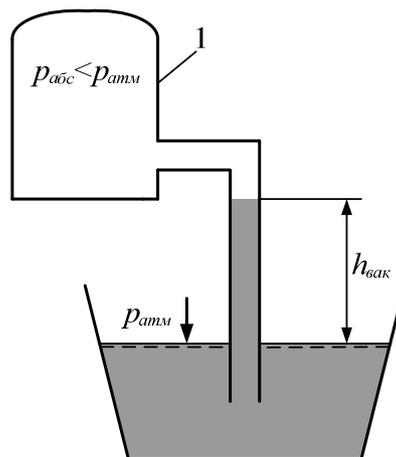


Рис. 5. Вакуумметр

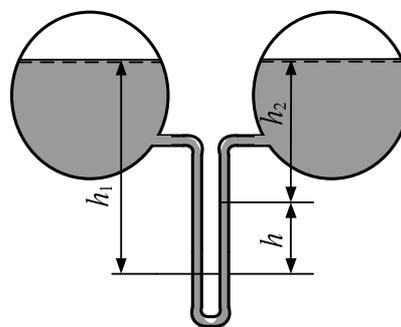


Рис. 6. Дифференциальный манометр

вентилем 7, называемым регулятором уровня. Жидкость под давлением подводится к трубке через рабочие вентили 8 и каналы верхней колодки.

В верхней колодке имеются так же каналы, перекрытые вентилями 9 (продувочными), для удаления воздуха в атмосферу из соединительных трубок и манометра. Между стеклянными трубками расположена шкала 10, градуированная в миллиметрах. По шкале перемещаются два визира 11, служащие для точного отсчета показаний прибора.

Отсчет показаний прибора производится путем определения разности высот уровней ртути, для чего с помощью визиров измеряется расстояние от нулевого давления шкалы до уровней ртути в каждой из трубок, и полученные результаты складываются.

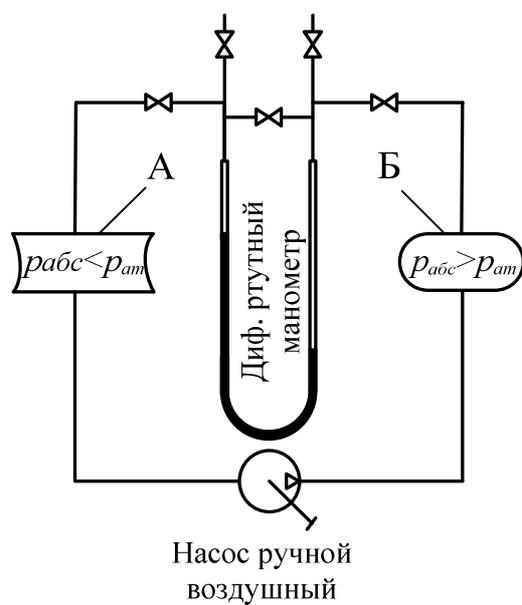


Рис. 7. Схема установки

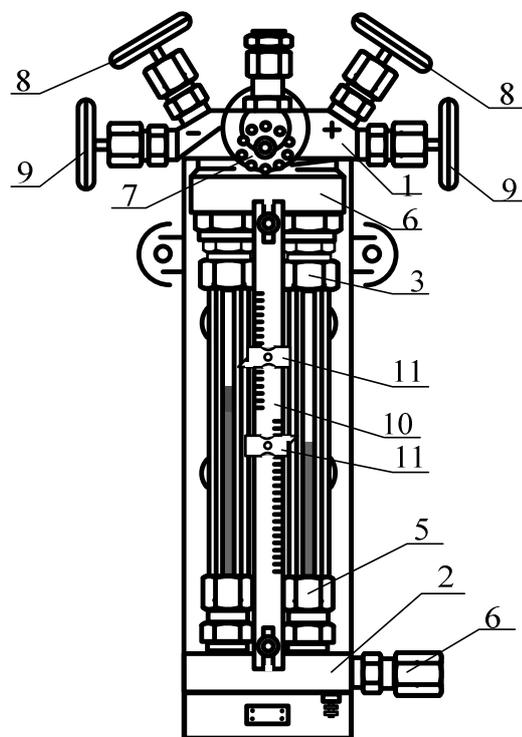


Рис. 8. Дифференциальный ртутный манометр

## Порядок проведения работы

### Первый этап

а. Открыв продувочные 9 и рабочие 8 вентили дифференциального манометра выравниваем давление в резервуарах А и Б, сравнив его с атмосферным.

б. Закрываем вентили 7, 8, 9.

в. При помощи ручного насоса создаем разность давлений в резервуарах А и Б, делая 15 оборотов маховика насоса.

В левом резервуаре А создается давление  $P_{абс(А)} < P_{атм}$ , в правом Б –  $P_{абс(Б)} > P_{атм}$ .

г. Открываем рабочие вентили 8. Разность давлений в коленах дифманометра, отсчитываемая с помощью визиров 11, показывает нам разность давлений:

$$\Delta p_1 = P_{абс(Б)} - P_{абс(А)} = P_{изб(Б)} - P_{изб(А)} = \Delta h(\gamma_{рт} - \gamma_в),$$

где  $\Delta h_1$  – разность уровней в коленах дифманометра;

$\gamma_{рт}$  – удельный вес ртути,  $\gamma_{рт} = \rho_{рт} \cdot g$  ( $\rho_{рт} = 13600 \text{ кг/м}^3$ );

$\gamma_в$  – удельный вес воды,  $\gamma_в = \rho_в \cdot g$  ( $\rho_в = 1000 \text{ кг/м}^3$ ).

### Второй этап

а. Для измерения манометрического давления в правом резервуаре Б, закрываем левый рабочий вентиль 8 и открываем левый продувочный вентиль 9.

б. Разность уровней в коленах дифманометра  $\Delta h_2$  отсчитываем опять с помощью визиров 11:

$$\Delta p_2 = P_{абс(Б)} - P_{атм} = \Delta h_2(\gamma_{рт} - \gamma_в).$$

в. Разность между  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_2$  дает величину вакуумметрического давления в левом резервуаре.

### Третий этап

а. Закрываем левый продувочный вентиль 9 и снова открываем левый рабочий вентиль 8. Устанавливается первоначальная разность уровней.

б. Закрываем правый рабочий вентиль 8 и открываем продувочный 9. Устанавливается разность уровней  $\Delta h_3$ , которая покажет нам величину вакуумметрического давления в левом резервуаре:

$$P_{вак} = P_{атм} - P_{абс(А)} = \Delta h_3(\gamma_{рт} - \gamma_в).$$

в. Разность  $\Delta h_1 - \Delta h_3 = \Delta h_2$  дает нам представление о манометрическом давлении в правом резервуаре.

г. Весь опыт повторить, начиная с первого этапа, делая 10 оборотов маховика насоса.

Результаты поместить в табл. 2.

Таблица 2

## Экспериментальные данные и обработка результатов

Номера опытов	Разность уровней			Определение давления в СИ			Давления $p$ , $p_{ман}$ , $p_{вак}$										
	$\Delta h$ 1	$\Delta h$ 2	$\Delta h$ 3	Разность абсолютных давлений	Манометрическое давление	Вакуумметрическое давление	кгс/см <sup>2</sup>			мм вод. ст			мм рт. ст				
1																	
2																	

Таблица 3

## Размерность давления

Единицы давления в системах			
СИ	СГС	МКГСС	Внесистемные единицы давления
Паскаль ( $Па$ )	Дина на квадратный сантиметр (дин/см <sup>2</sup> )	кгс/м <sup>2</sup>	физическая (нормальная) атмосфера (атм); техническая атмосфера (ат); миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.)

Таблица 4

## Связь между единицами давления

Единица	Па	дин/см <sup>2</sup>	кгс/м <sup>2</sup>	кгс/см <sup>2</sup>	атм	мм рт. ст
1 Па	1	10	0,102	1,02	$9,87 \cdot 10^{-6}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$
1 дин/см <sup>2</sup>	0,1	1	1,02	$1,02 \cdot 10^{-6}$	$9,87 \cdot 10^{-7}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
1 кгс/м <sup>2</sup>	9,81	98,1	1	$10^{-4}$	$9,68 \cdot 10^{-5}$	$7,36 \cdot 10^{-2}$
1 кгс/см <sup>2</sup>	$9,81 \cdot 10^4$	$9,81 \cdot 10^5$	$10^4$	1	0,968	$7,36 \cdot 10^2$
1 атм	$1,01 \cdot 10^5$	$1,01 \cdot 10^6$	$1,03 \cdot 10^4$	1,03	1	$7,5 \cdot 10^2$
1 мм рт.ст.	$1,33 \cdot 10^2$	$1,33 \cdot 10^3$	13,6	$1,36 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-3}$	1

### 4.3. Задание к практическому занятию

**Указания к решению задач.** При решении задач по гидростатике прежде всего нужно хорошо усвоить и не смешивать такие понятия, как давление  $p$  и сила давления  $P$ .

При решении задач на определение давления в той или иной точке неподвижной жидкости следует пользоваться основным уравнением гидростатики (3.8) либо его второй формой (3.9). Нужно иметь в виду, что второй член в правой части уравнения (3.9) может быть как положительным, так и отрицательным. Очевидно, что при увеличении глубины давление возрастает, а при подъеме – уменьшается.

Необходимо твердо различать давления абсолютное, избыточное и вакуум и обязательно знать связь между давлением, удельным весом и высотой, соответствующей этому давлению.

**Пример 1.** В резервуаре с дизельным топливом ( $\rho_d = 870 \text{ кг/м}^3$ ) (рис. 9) уровень осевшей в отстойнике воды ( $\rho_e = 1000 \text{ кг/м}^3$ )  $H_1 = 150 \text{ мм}$ . Показатели водяного пьезометра  $h_e = 500 \text{ мм}$ . Определить уровень топлива  $H_2$ , если давление в резервуаре по манометру равно  $p_m = 0,0005 \text{ МПа}$ .

**Решение:** Эту задачу будем решать в абсолютных давлениях. Так, абсолютное давление на дно резервуара со стороны пьезометра  $p_{абс(п)}$  определится как:

$$p_{абс(п)} = p_{атм} + \rho_e g h_e.$$

Абсолютное давление на дно резервуара со стороны резервуара  $p_{абс(р)}$  определится как:

$$p_{абс(р)} = (p_m + p_{атм}) + \rho_d g H_2 + \rho_e g H_1.$$

Здесь следует учесть то, что манометр  $M$  показывает избыточное манометрическое давление. Решая задачу в абсолютных давлениях необходимо к показанию манометра прибавить значение атмосферного давления.

Составляя уравнение равновесия относительно дна резервуара, получим:

$$p_{абс(п)} = p_{абс(р)}$$

или

$$p_{атм} + \rho_e g h_e = (p_m + p_{атм}) + \rho_d g H_2 + \rho_e g H_1.$$

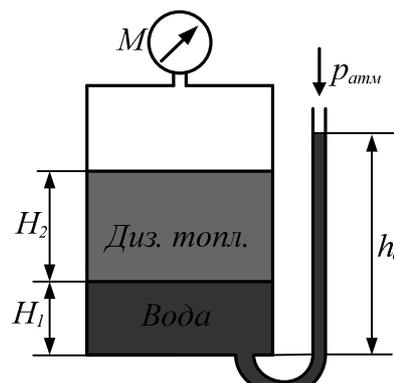


Рис. 9. К примеру 1

Отсюда:

$$H_2 = \frac{\rho_v g h_v - p_m - \rho_v g H_1}{\rho_d g} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,5 - 0,0005 \cdot 10^6 - 10^3 \cdot 9,81 \cdot 0,15}{870 \cdot 9,81} = 0,34 \text{ м.}$$

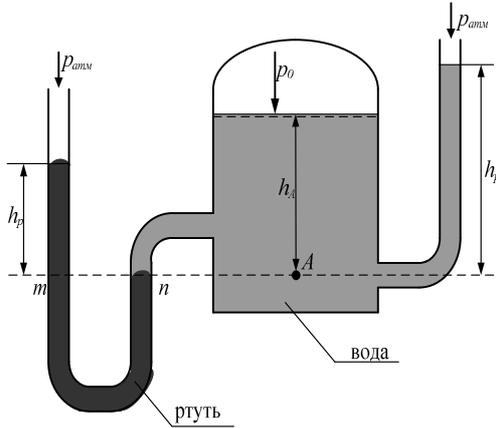


Рис. 10. К примеру 2

**Пример 2.** Определить абсолютное и избыточное гидростатическое давление в точке  $A$  (рис. 10), расположенной в воде на глубине  $h_A = 2,5$  м, и пьезометрическую высоту для точки  $A$ , если абсолютное гидростатическое давление на поверхности  $p_0 = 147,2$  кПа.

**Решение:** Согласно основного уравнения гидростатики абсолютное гидростатическое давление в точке  $A$  определится:

$$p_{абс(A)} = p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h_A = 147,2 + \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 2,5}{1000} = 171,7 \text{ кПа.}$$

Избыточное давление в точке  $A$  равно:

$$p_{изб(A)} = p_{абс(A)} - p_{атм} = 171,7 - 98,1 = 73,6 \text{ кПа.}$$

Пьезометрическая высота для точки  $A$  равна:

$$h_p = \frac{p_{изб(A)}}{\rho_v \cdot g} = \frac{73,6 \text{ кН/м}^2}{1 \text{ т/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = 7,5 \text{ м.}$$

Определить эти же величины U-образным манометром, заполненным ртутью. По поверхности раздела  $m-n$  ртути и воды давления со стороны резервуара и открытого конца манометра будут одинаковы:

$$p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h_A = p_{атм} + \rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт}.$$

Следовательно, избыточное давление в точке  $A$  уравновешивается весом столба ртути высотой  $h_{рт}$  над поверхностью раздела  $m-n$ :

$$\rho_{рт} \cdot g \cdot h_{рт} = p_0 + \rho_v \cdot g \cdot h_A - p_{атм} = 147,2 + 1 \cdot 9,81 \cdot 2,5 - 98,1 = 73,6 \text{ кН/м}^2.$$

Находим высоту ртутного столба  $h_{рт}$ :

$$h_{рт} = \frac{p_{изб}}{\rho_{рт} \cdot g} = \frac{73,6}{13,6 \cdot 9,81} = 0,55 \text{ м,}$$

где  $\rho_{рт} = 13,6 \text{ т/м}^3$  – плотность ртути.

**Пример 3.** Построить эпюру манометрического давления на затвор  $OA$ , если глубина воды перед затвором  $H = 2$  м, а за затвором  $h = 1$  м (рис. 11).

**Решение:** эпюра гидростатического давления слева изображается треугольником  $OAB$  с основанием:

$$AB = \rho \cdot g \cdot H = 9,81 \cdot 2 = 19,62 \text{ кПа},$$

справа – треугольником  $O_1AC$  с основанием:

$$AC = \rho \cdot g \cdot h = 9,81 \cdot 1 = 9,81 \text{ кПа}.$$

Часть гидростатического давления на затвор слева уравновешивается направленным в противоположную сторону давлением справа.

Результирующая эпюра изображается трапецией  $OAED$  с основаниями  $OA = H$ ,  $DE = h$  и высотой  $AE = \rho g (H - h) = 9,81$  кПа.

**Пример 4.** Найти начальное подъемное усилие  $T$ , если сила тяги действует нормально к плоскости прямоугольного затвора шириной  $b = 4$  м (рис. 12). Глубина воды перед затвором  $h_1 = 3$  м, за ним  $h_2 = 1,2$  м. Расстояние от шарнира до уреза воды  $a = 0,8$  м. Угол наклона затвора к горизонту  $\alpha = 60^\circ$ , масса затвора 2 т. Трением в шарнире пренебречь.

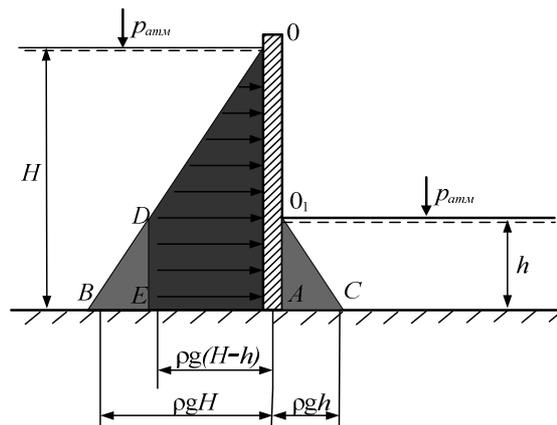


Рис. 11. К примеру 3

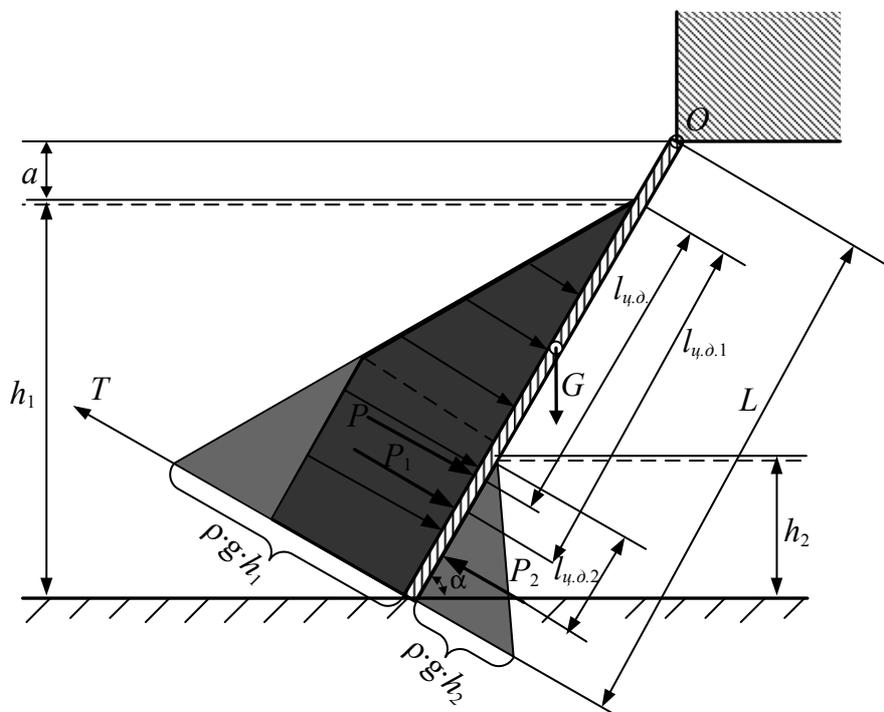


Рис. 12. К примеру 4

**Решение:** силы манометрического давления на плоский затвор, действующие слева и справа, определяются по формуле:

$$P = \rho \cdot g \cdot h_{y.m} \cdot \omega.$$

Сила давления слева:

$$P_1 = g \cdot \rho \cdot \frac{h_1}{2} \cdot \frac{h_1}{\sin \alpha} \cdot b = 9,81 \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{0,866} \cdot 4 = 203,8 \text{ кН.}$$

Сила давления справа:

$$P_2 = g \cdot \rho \cdot \frac{h_2}{2} \cdot \frac{h_2}{\sin \alpha} \cdot b = 9,81 \cdot 1 \cdot \frac{1,2}{2} \cdot \frac{1,2}{0,866} \cdot 4 = 32,7 \text{ кН.}$$

Равнодействующая равна разности параллельных и направленных в противоположные стороны сил давления:

$$P = P_1 - P_2 = 203,8 - 32,7 = 171,1 \text{ кН.}$$

Расстояние от свободной поверхности до центра давления левой силы определяется по формуле:

$$l_{y.d} = l_{y.m} + \frac{J_0}{\omega \cdot l_{y.m}}$$

**Определим необходимые величины:**

*Слева от затвора:*

– расстояние до центра тяжести:

$$l_{y.m.1} = \frac{h_1}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{3}{2 \cdot 0,866} = 1,73 \text{ м;}$$

– момент инерции:

$$J_0^1 = \frac{b \cdot \left( \frac{h_1}{\sin \alpha} \right)^3}{12} = \frac{4 \cdot \left( \frac{3}{0,866} \right)^3}{12} = 13,85 \text{ м}^4;$$

– площадь смоченной стенки:

$$\omega_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha} \cdot b = \frac{3}{0,866} \cdot 4 = 13,85 \text{ м}^2;$$

– расстояние до центра давления:

$$l_{y.d.1} = l_{y.m.1} + \frac{J_0^1}{\omega_1 \cdot l_{y.m.1}} = 1,73 + \frac{13,85}{13,85 \cdot 1,73} = 2,31 \text{ м.}$$

Справа от затвора:

– расстояние до центра тяжести:

$$l_{y.m.2} = \frac{h_2}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1,2}{2 \cdot 0,866} = 0,69 \text{ м};$$

– момент инерции:

$$J_0^2 = \frac{b \cdot \left(\frac{h_2}{\sin \alpha}\right)^3}{12} = \frac{4 \cdot \left(\frac{1,2}{0,866}\right)^3}{12} = 0,69 \text{ м}^4;$$

– площадь смоченной стенки:

$$\omega_2 = \frac{h_2}{\sin \alpha} \cdot b = \frac{1,2}{0,866} \cdot 4 = 5,54 \text{ м}^2;$$

– расстояние до центра давления:

$$l_{y.d.2} = l_{y.m.2} + \frac{J_0^2}{\omega_2 \cdot l_{y.m.2}} = 0,69 + \frac{0,88}{5,54 \cdot 0,69} = 0,92 \text{ м}.$$

Воспользуемся теоремой механики о моменте равнодействующей и составим уравнение моментов относительно линии уреза:

$$P \cdot l_{y.d.} = P_1 \cdot l_{y.d1} - P_2 \left( l_{y.d2} + \frac{h_1 - h_2}{\sin \alpha} \right).$$

Отсюда после подстановки числовых значений координата равнодействующей равна  $l_{y.d.} = 2,18 \text{ м}$ .

Кроме сил давления, на затвор действуют сила тяжести, приложенная в его центре тяжести; архимедова (выталкивающая) сила, действие которой в начальный момент не учитывается; реакции шарнира.

Составив уравнение моментов всех действующих сил относительно шарнира 0, можно, не определяя реакции в шарнире, вычислить искомое начальное подъемное усилие  $T$ :

$$T \cdot L - P \left( l_{y.d.} + \frac{a}{\sin \alpha} \right) - G \frac{L}{2} \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$\text{Здесь } L = \frac{a + h_1}{\sin \alpha} = \frac{0,8 + 3}{0,866} = 4,39 \text{ м};$$

$$G = 2 \cdot 9,81 = 19,62 \text{ кН}.$$

Подставив числовые значения, получим:

$$T = 126 \text{ кН}.$$

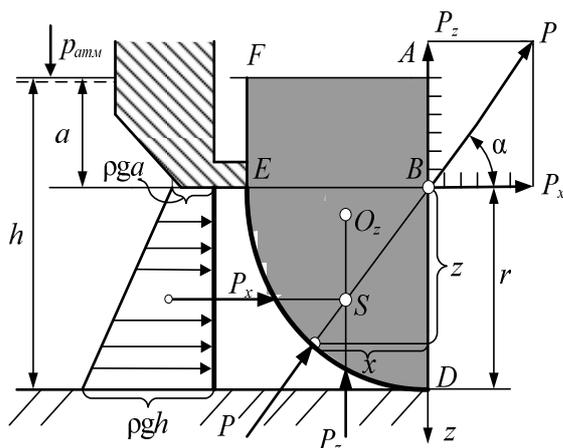


Рис. 13. К примеру 5

**Пример 5.** Определить силу давления воды на затвор и положение центра давления, если глубина воды перед затвором  $h = 3$  м, радиус затвора  $r = 2$  м, ширина пролета  $b = 6$  м (рис. 13).

**Решение.** Определяем горизонтальную составляющую силы давления на затвор:

$$P_x = g\rho(h - r/2)rb = 9,81 \cdot 1 \cdot (3 - 2/2) \cdot 2 \cdot 6 = 235,4 \text{ кН.}$$

Объем тела давления в данном случае равен объему тела с сечением  $ABDEF$ :

$$W_\partial = \frac{\pi \cdot r^2}{4} \cdot b + r(h - r) \cdot b = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 6 + 2 \cdot (3 - 2) \cdot 6 = 30,84 \text{ м}^3.$$

Следовательно, вертикальная составляющая силы давления на затвор определится как:

$$P_z = \rho \cdot g \cdot W_\partial = 1 \cdot 9,81 \cdot 30,84 = 302,5 \text{ кН}$$

и направлена вверх.

Равнодействующая  $P$  вычисляется по формуле (3.17):

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{235,4^2 + 302,5^2} = 383,2 \text{ кН.}$$

Эпюра давления на вертикальную проекцию цилиндрической поверхности представляет собой трапецию с основаниями  $\rho g a$  и  $\rho g h$ . Горизонтальная составляющая  $P_x$  проходит через центр тяжести трапеции на расстоянии от свободной поверхности:

$$l_{y,\partial} = l_{y,m} + \frac{J_0}{l_{y,m} \cdot \omega} = h - \frac{r}{2} + \frac{b \cdot r^3}{12 \cdot \left(h - \frac{r}{2}\right) \cdot b \cdot r} = 2,17 \text{ м.}$$

Вертикальная составляющая  $P_z$  проходит через центр тяжести фигуры  $ABDEF$ .

Равнодействующая  $P$  наклонена к горизонту под углом  $\alpha$ , функции которого равны:

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P} = 0,614, \quad \sin \alpha = \frac{P_z}{P} = 0,790.$$

Точка, в которой линия действия силы  $P$  пересекается с криволинейной поверхностью, называется центром давления. Поскольку эта линия,

нормальная к поверхности, всегда проходит по радиусу через центр кривизны  $B$ , а угол наклона ее к горизонту известен из (3.20), координаты центра давления можно вычислить по формулам:

$$x = r \cdot \sin \alpha, \quad z = r \cdot \cos \alpha.$$

Тогда получим:

$$x = 2 \cdot 0,614 = 1,228 \text{ м}, \quad z = 2 \cdot 0,790 = 1,580 \text{ м}.$$

**Задача 1.** Определить манометрическое давление на дно сосуда, наполненного двумя жидкостями (рис. 14). Слой воды  $h_2 = 0,5$  м, слой керосина ( $\rho = 760 \text{ кг/м}^3$ )  $h_1 = 0,7$  м.

**Ответ:**  $p_m = 10\,124 \text{ Па}$ .

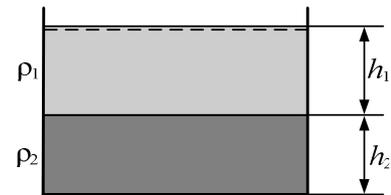


Рис. 14. К задаче 1

**Задача 2.** Определить манометрическое давление в точке  $A$  трубопровода, если высота столба ртути по пьезометру  $h_p = 0,25$  м. Центр трубопровода расположен на  $h = 0,4$  м ниже линии раздела между водой и ртутью (рис. 15, а).

**Ответ:**  $p_{mA} = 37\,278 \text{ Па}$ .

**Задача 3.** Определить, на какой высоте  $h$  установится уровень ртути в пьезометре, если при манометрическом давлении в трубе, заполненной водой,  $p_{mA} = 39\,240 \text{ Па}$  и показании  $h_p = 0,25$  м система находится в равновесии (рис. 15, б).

**Ответ:**  $h = 0,6 \text{ м}$ .

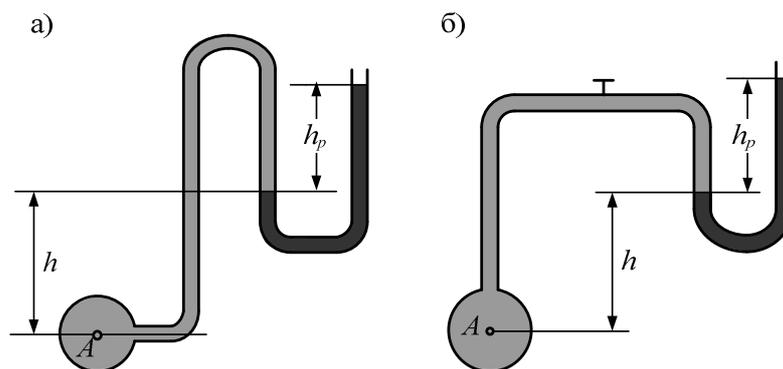


Рис. 15. К задачам 2 и 3

**Задача 4.** Определить силы давления на дно  $P_{\text{дн}}$  и стенки сосуда  $P_1$  и  $P_2$ , наполненного водой (рис. 16). Ширина сосуда по дну  $b = 5$  м, по верху

$B = 7,31$  м, длина боковой стенки  $l = 3$  м. Давление на свободной поверхности атмосферное. Глубина воды в сосуде  $h = 2$  м.

**Ответ:**  $P_{\text{он}} = 294,3$  кН,  $P_1 = 113,1$  кН;  $P_2 = 680$  кН.

**Задача 5.** Определить, на каком расстоянии  $x$  от дна надо расположить ось вращения плоского прямоугольного затвора шириной  $b = 1$  м, чтобы при увеличении глубины в верхнем бьефе  $h_1$  он открывался автоматически (рис. 17). Затвор закрыт при  $h_1 = 2$  м и глубине в нижнем бьефе  $h_2 = 0,9$  м.

**Ответ:**  $x = 0,76$  м.

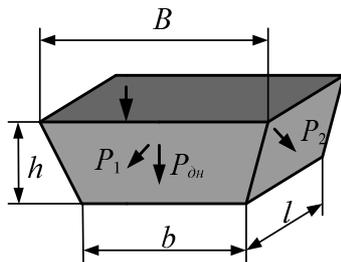


Рис. 16. К задаче 4

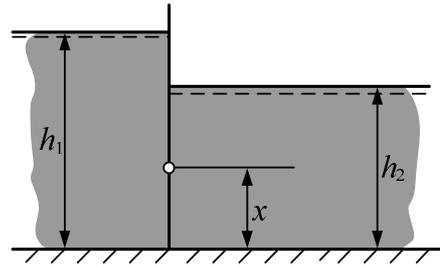


Рис. 17. К задаче 5

**Задача 6.** Определить тяговые усилия  $T_1$  и  $T_2$  для круглых плоских затворов диаметром  $d = 1,2$  м (рис. 18). Глубина погружения верхней кромки затворов  $a = 0,8$  м.

**Ответ:**  $T_1 = 6,93$  кН,  $T_2 = 8,58$  кН.

**Задача 7.** На гребне водосливной части плотины установлен сегментный затвор (рис. 19), поддерживающий напор  $H = 3,03$  м. Радиус затвора  $r = 3,5$  м, угол  $\alpha = 60^\circ$ . Ширина пролета  $b = 10$  м. Определить силу давления на затвор  $P$  и координаты центра давления  $x$  и  $z$ .

**Ответ:**  $P = 582$  кН,  $x = 2,71$  м,  $z = 2,22$  м.

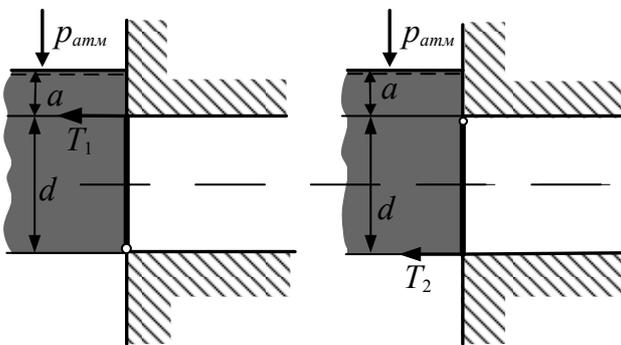


Рис. 9. К задаче 6

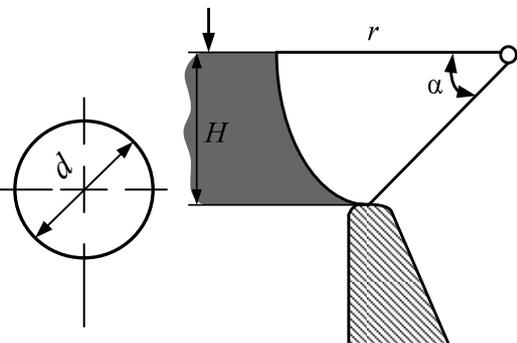


Рис. 18. К задаче 7

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что изучает гидростатика?
2. Какое равновесие называют абсолютным?
3. Какое равновесие называют относительным?
4. Укажите, при каких условиях из дифференциального уравнения движения в напряжениях можно получить уравнение гидростатики.
5. Запишите уравнение Эйлера.
6. Что называется поверхностью равного давления? Запишите дифференциальное уравнение поверхности равного давления.
7. Для случая покоящейся жидкости получите уравнение равного давления.
8. Для случая движущейся жидкости с постоянным ускорением получите уравнение равного давления.
9. Для случая вращающейся жидкости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью получите уравнение равного давления.
10. Запишите основное уравнение гидростатики.
11. Что такое пьезометрическая высота?
12. Что такое вакуумметрическая высота?
13. Что называют гидростатическим напором?
14. Дайте формулировку закона Паскаля.
15. По какому закону изменяется давление с увеличением глубины погружения жидкости?
16. Что называется эпюрой давления?
17. Какое давление называется абсолютным?
18. Какое давление называется манометрическим?
19. Какое давление называется вакуумметрическим?
20. Покажите взаимосвязь между абсолютным, манометрическим и вакуумметрическим давлениями.
21. Каким прибором можно измерить разность давлений?
22. Как определить силу давления и точку ее приложения на плоскую наклонную стенку?
23. Как найти силу давления жидкости на цилиндрическую стенку?
24. Сформулируйте закон Архимеда.

## 6. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Примеры расчетов по гидравлике: учеб. пособие для вузов. / под ред. А.Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1977. – 256 с.
4. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
5. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
6. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Высш. шк., 1998. – 311 с.
7. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.
8. Федяевский, К.К. Гидромеханика: учебник для вузов / К.К. Федяевский, Я.И. Войткунский, Ю.И. Фаддеев. – Л.: Судостроение, 1968. – 568 с.

## МОДУЛЬ 4

### КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Кинематика жидкости – раздел гидродинамики, в котором изучается только геометрические свойства движения жидкости без учёта влияния сил, вызывающих это движение. В силу этого все основные выводы кинематики справедливы для любой жидкости, как вязкой, так и невязкой.

В основу изучения кинематики жидкости положена гипотеза о непрерывности изменения кинематических параметров (скоростей, ускорений). Иными словами скорость жидкости предполагается непрерывной от координат, а функции, описывающие движение жидкости – дифференцируемыми.

Иногда свойство непрерывности кинематических параметров может нарушаться – в точке, на линии, на поверхности. Эти области непрерывности скорости называются особыми точками, линиями разрыва и поверхностями разрыва.

Для удобства исследования любой жидкости объем можно представить состоящим из большого числа жидких частиц. В соответствии с этим к исследованию движения жидкой частицы возможен такой же подход, как и к исследованию движения точки в механике. При этом частицу отождествляют с материальной точкой, рассматриваемой в теоретической механике.

*Жидкая частица* – часть жидкости, малая по сравнению с объемом рассматриваемой жидкости, и в то же время объем частицы велик по сравнению с объемом молекулы жидкости. В частице содержится так много молекул, что жидкость в пределах частицы можно считать сплошной средой – *континуумом*.

В общем случае движение жидкости можно считать определенным, если известны законы движения всех частиц, то есть положение каждой частицы задано как функция времени.

#### 2. ДВА МЕТОДА ИЗУЧЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Для удобства исследования любой жидкости объем можно представить состоящим из большого числа жидких частиц. В соответствии с этим к исследованию движения жидкой частицы возможен такой же подход, как и к исследованию движения точки в механике. При этом

частицу отождествляют с материальной точкой, рассматриваемой в теоретической механике.

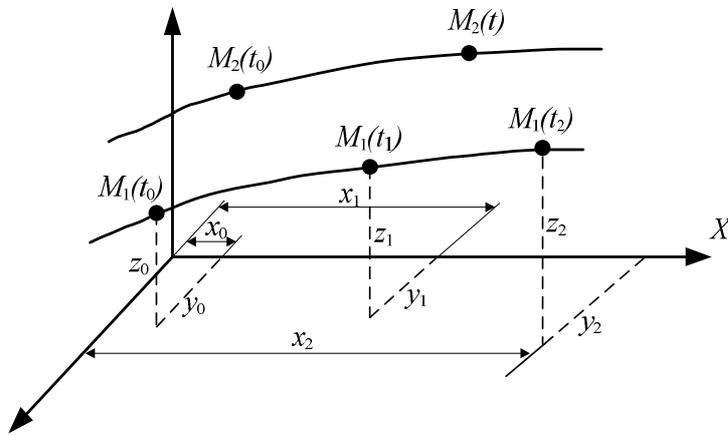


Рис. 4.1. Метод Лагранжа

Такой подход получил название *метода Лагранжа* (рис. 4.1).

В начальный момент времени выделим в жидкости фиксированную частицу с координатами  $x_0, y_0, z_0$ . Движение этой частицы известно, если известны законы изменения координат, характеризующих положение частицы с течением времени:

$$\begin{cases} x = x(t, x_0, y_0, z_0) \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0) \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0) \end{cases} \quad (4.1)$$

Исключая из этих уравнений время  $t$ , получим уравнение траектории, то есть след движения частицы в пространстве. Переменные  $x_0, y_0, z_0$  и  $t$  называют *переменными Лагранжа*.

Проекции скоростей частиц жидкости определяются зависимостями:

$$v_x = \partial x / \partial t; \quad v_y = \partial y / \partial t; \quad v_z = \partial z / \partial t,$$

где  $x_0, y_0, z_0$  – рассматриваются как параметры, а ускорения – зависимостями

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Для описания движения жидкого объема, содержащего  $N$  частиц, следует задать соответствующее число систем уравнений типа (4.1), что создает большие математические трудности.

В чистом виде метод Лагранжа используется редко. Он позволяет проследить за движением любой фиксированной частицы, однако это излишне, поскольку все частицы практически одинаковы. Метод Лагранжа находит применение при решении ряда специальных задач, например волновых движений.

Широкое применение для исследования получил *метод Эйлера* (рис. 4.2). По этому методу рассматривают поле скоростей в точках про-

странства, занятого движущейся жидкостью, и исследуют характер изменения скорости в этих точках в зависимости от времени. Под скоростью в точке пространства понимают скорость жидкой частицы, которая в данный момент времени находится в этой точке. Поле скоростей по этому методу создается в виде:

$$\begin{cases} u_x = u_x(x, y, z, t) \\ u_y = u_y(x, y, z, t) \\ u_z = u_z(x, y, z, t) \end{cases}$$

или

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{r}, t),$$

где  $x, y, z$  – координаты точки пространства, а не жидкой частицы.

Скорость  $u$  называется *мгновенной местной скоростью*. Совокупность мгновенных местных скоростей представляет собой векторное поле, называемое *полем скоростей*. В общем случае поле скоростей может изменяться во времени и по координатам. Переменные  $x, y, z, t$  называют *переменными Эйлера*.

Как известно, чтобы задать движение твердого тела, необходимо знать скорости трех его точек (не лежащих на одной прямой). Если же нужно задать движение жидкости, то есть тела легко деформируемого, требуется знать скорость во всех точках занимаемого пространства. Число этих точек в пределе стремится к бесконечности.

Метод Эйлера проще метода Лагранжа, так как в нем используется хорошо разработанный математический аппарат теории поля. Применяя метод Эйлера, который не позволяет учесть индивидуальность каждой частицы, следят за поведением различных частиц, проходящих через фиксированную точку пространства.

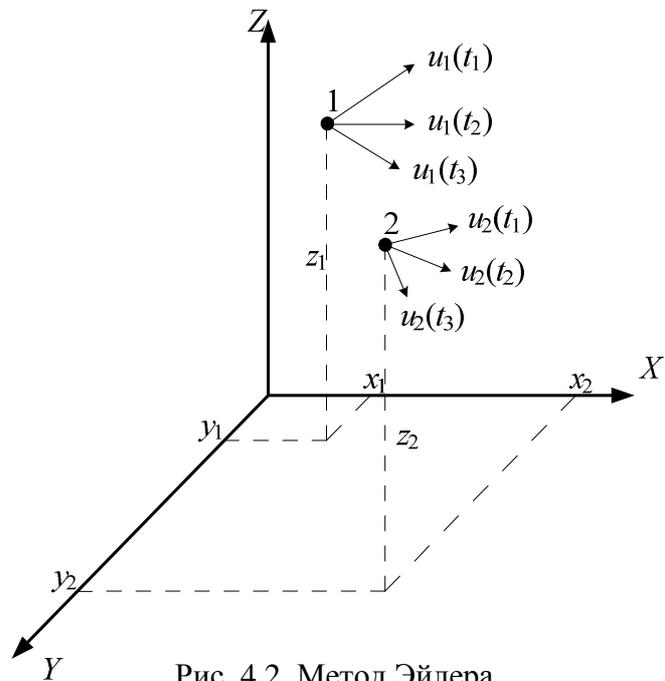


Рис. 4.2. Метод Эйлера

### 3. ЛИНИЯ ТОКА И ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СТРУЙКА

С методом Эйлера тесно связано понятие линии тока. Выделим в потоке в фиксированный момент времени ряд точек. Проведем линию, касательные к которой совпадали бы с направлением векторов скорости жидких частиц, находящихся в этих точках. Эта линия называется *линией тока* (рис. 4.3).

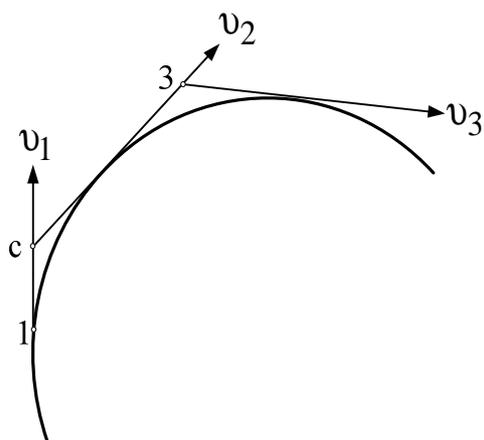


Рис. 4.3. Линия тока

Иными словами линия тока касательная к векторам скоростей. Она соединяет отдельные жидкие частицы в один и тот же момент времени, чем существенно отличается от траектории, представляющей след движения одной частицы.

*Траекторией* называется путь, проходимый данной частицей жидкости в пространстве за определенный промежуток времени. При установившемся движении форма траекторий не изменяется во время движения. При неустановившемся

движении непрерывно изменяются и величины, и направления скорости движения. Траектории движения частиц в этом случае также непрерывно изменяются во времени.

Получим дифференциальные уравнения линий тока, учитывая, что их векторный элемент  $d\vec{r}$  совпадает с направлением вектора скорости  $\vec{v}$ , то есть  $\vec{v} \parallel d\vec{r}$ .

Воспользовавшись тем, что векторное произведение двух векторов равно нулю, запишем дифференциальное уравнение линии тока в векторном виде:

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0$$

Раскрывая векторное произведение, получим

$$\vec{i}(v_y dz - v_z dy) + \vec{j}(v_z dx - v_x dz) + \vec{k}(v_x dy - v_y dx) = 0$$

или, приравнивая множители при ортах нулю,

$$\begin{cases} v_y dz - v_z dy = 0 \\ v_z dx - v_x dz = 0 \\ v_x dy - v_y dx = 0 \end{cases}$$

Поделив первый член этой системы на  $v_y v_z$ , второй на  $v_x v_z$ , третий на  $v_x v_y$ , представим ее в виде

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y}; \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z}; \quad \frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x}.$$

Это соотношение может быть записано более компактно:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Необходимо иметь в виду различие между траекторией частицы жидкости и линией тока. В то время как траектория относится лишь к одной определенной частице жидкости и показывает путь, проходимый этой частицей в пространстве за некоторый промежуток времени, линия тока связывает между собой различные лежащие на ней частицы и характеризует направление их движения в данный момент времени.

Линии тока соответствуют состоянию поля скоростей в движущейся жидкости в данный момент времени. Если в следующий момент поле скоростей изменится, то изменится и положение линий тока.

Однако в случае установившегося движения, характеризуемого неизменяемостью поля скоростей во времени, частицы жидкости будут следовать вдоль неизменных линий тока; таким образом, линии тока и траектории частиц жидкости совпадают между собой только при установившемся движении.

Линии тока и траектории можно сделать видимыми, чем широко пользуются в лабораторной практике при различного рода экспериментальных исследованиях и наблюдениях над движением жидкости. Для этого, например, на поверхности жидкости рассеивают мелкие частицы какого-нибудь вещества, нерастворимого в жидкости, и при помощи фотографического аппарата производят съемку. При съемке с короткой выдержкой эти частицы дают на пластинке короткие черточки (штрихи), которые при достаточно большом количестве частиц сливаются и показывают общую картину линий тока (рис. 4.4).

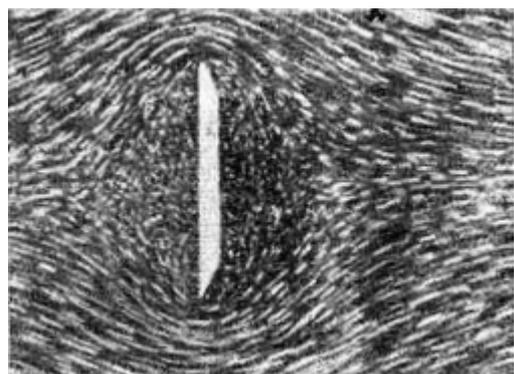


Рис. 4.4. Обтекание жидкостью пластинки

Введем понятие трубки тока. Выделим в жидкости замкнутый контур, не являющийся линией тока. Через каждую точку этого контура про-

ведем линию тока и получим трубчатую поверхность тока – *трубку тока*. Жидкость, заключенная внутри контура тока, называется *жидкой стружкой*. В общем случае скорости жидкости по поперечному сечению струйки различны. *Элементарной* называют жидкую стружку, в которой можно пренебречь изменением скорости по ее поперечному сечению.

#### 4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТОКОВ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим зависимость поля скоростей потока от времени (признак классификации).

**Установившимся** называют такое движение, при котором скорость потока в любой точке пространства не зависит от времени.

В противном случае движение жидкости называется **неустановившимся**.

Поле скоростей при установившемся движении не зависит от времени.

$$v_x = v_x(x, y, z), \quad v_y = v_y(x, y, z), \quad v_z = v_z(x, y, z)$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}).$$

Если рассмотреть определенную точку пространства с координатами  $x_i, y_i, z_i$ , через которую с течением времени проходят различные частицы жидкости, то все они обладают одинаковой скоростью  $\bar{v}(x_i, y_i, z_i)$  вне зависимости от времени. Но в разных точках пространства скорости различны, и поля скоростей неоднородны.

При установившемся движении жидкости траектории и линии тока совпадают.

Рассмотрим частицу жидкости, находящуюся в момент времени  $t_0$  в точке  $A$  (рис. 4.5). Линия  $ABC$  есть линия тока в момент времени  $t_0$ . За время  $\Delta t$  частица переместится по касательной к вектору скорости  $\bar{v}_1$ , в точку  $B$  вдоль линии тока. В точке  $B$  величина скорости через время  $\Delta t$  останется неизменной как по величине, так и по направлению, вследствие чего частица жидкости будет передвигаться далее в точку  $C$  вдоль линии тока. Повторяя далее эти рассуждения, убеждаемся, что траектория частицы, в начальный момент времени занимавшей точку  $A$ , будет при установившемся движении совпадать с линией тока.

При неустановившемся движении скорость в точке  $B$  в момент времени  $t + \Delta t$  изменится по величине и направлению, и частица жидкости, попав

в эту точку, в дальнейшем будет двигаться по касательной к новой, измененной скорости, сойдя с Линии  $ABC$ , являвшейся линией тока в момент времени  $t_0$ .

Рассмотрим классификацию потоков жидкости по их геометрическим признакам.

Введем понятие пространственного, плоскопараллельного и осесимметричного течения жидкости. Методы исследований этих течений в ряде случаев различны.

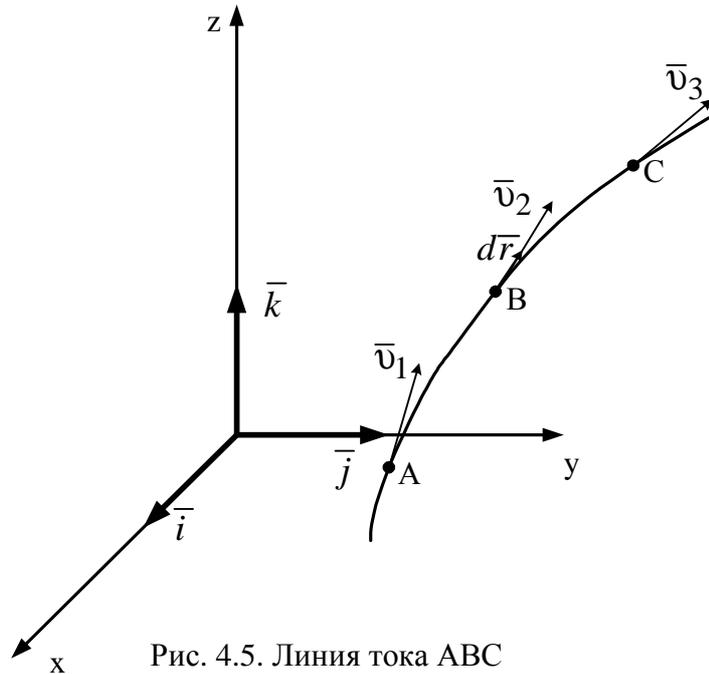


Рис. 4.5. Линия тока ABC

**Пространственное (трехмерное) движение** характеризуется тем, что поле скорости в нем зависит от трех декартовых координат  $x, y, z$ .

В соответствии с этим в пространственном течении имеются три проекции скорости на оси координат:

$$v_x = v_x(x, y, z, t); \quad v_y = v_y(x, y, z, t); \quad v_z = v_z(x, y, z, t);$$

**Плоскопараллельным** называется такое движение жидкости, при котором картины течения в плоскостях, перпендикулярных некоторой оси, одинаковы.

В сходственных точках, лежащих в параллельных плоскостях, скорости одинаковы и не зависят от координаты  $z$ .

Иными словами

$$v_x = v_x(x, y, t); \quad v_y = v_y(x, y, t); \quad v_z = 0.$$

Следовательно, при изучении плоскопараллельного движения можно ограничиться исследованием течения только в плоскости  $xy$ ; это случай решения плоской задачи гидромеханики. В чистом виде плоскопараллельное движение не наблюдается.

**Осесимметричным** называется движение жидкости, при котором поле скорости одинаково в любых плоскостях, проходящих через некоторую прямую, называемую осью симметрии потока.

## 5. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Любой поток должен удовлетворять закон сохранения массы. Уравнение сплошности или неразрывности представляет собой гидромеханическое выражение закона сохранения массы.

Рассмотрим жидкую частицу объемом  $V$  (рис. 4.6). Ее масса равна  $\rho V$ . Согласно закону сохранения материи, производная от массы этой частицы

$$\frac{d}{dt}(\rho V) = 0.$$

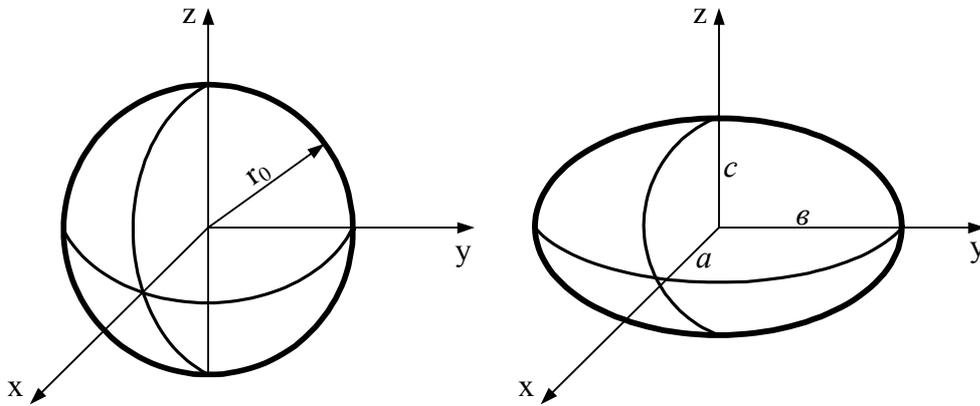


Рис. 4.6. К выводу уравнения неразрывности

Взяв производную и разделив результат на массу  $\rho V$ , получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0.$$

Полагая жидкость несжимаемой и однородной  $\frac{d\rho}{dt} = 0$ , приходим к следующему математическому выражению для закона сохранения материи:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = 0. \tag{4.2}$$

Из этого выражения следует, что для несжимаемой жидкости закон сохранения массы переходит в закон сохранения объема частиц. Величина  $\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dt}$  представляет собой относительную скорость изменения объема.

Для этого рассмотрим жидкую частицу, первоначально имевшую форму шара радиуса  $r_0$ . Размеры частицы предполагаем малыми. Предположим, что оси декартовых координат совпадают с главными осями деформации. Под их воздействием сфера деформируется в эллипсоид. Если  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  –

относительная скорость линейных деформаций, то выражение для полуосей эллипсоида  $a, b, c$  через элементарное время деформации  $dt$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned} a &= r_0 + r_0 \varepsilon_x dt = r_0 (1 + \varepsilon_x dt); \\ b &= r_0 (1 + \varepsilon_y dt); \\ c &= r_0 (1 + \varepsilon_z dt). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Начальный объем частицы –  $V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$ , а конечный, после деформации –  $V = \frac{4}{3} \pi abc$ .

Приращение объема  $\Delta V \approx dV$  с учетом (4.3) составит

$$\Delta V = V - V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3 (1 + \varepsilon_x dt)(1 + \varepsilon_y dt)(1 + \varepsilon_z dt) - \frac{4}{3} \pi r_0^3.$$

Ограничиваясь малыми первого порядка, находим

$$\Delta V \approx dV = \frac{4}{3} \pi r_0^3 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dt = V_0 (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dt.$$

Подставляя полученное выражение в закон сохранения массы (4.2), получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (4.4)$$

Сумма  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  называется относительной скоростью объемного расширения, согласно (4.4), у несжимаемой жидкости равна нулю. То есть объем частицы до и после деформации не изменяется.

Зависимость (4.4) можно представить в виде

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0. \quad (4.5)$$

Выражения (4.4) и (4.5) представляют собой уравнения неразрывности в дифференциальной форме.

Получим интегральную форму уравнения неразрывности.

Предварительно введем понятие *расхода жидкости через поверхность*, понимая под ним количество жидкости, протекающее в единицу времени через незамкнутую поверхность. Различают объемный расход  $Q$  (размерность  $L^3 T^{-1}$ ), массовый расход  $Q_m$  ( $MT^{-1}$ ) и весовой расход ( $LMT^{-3}$ ).

Между этими величинами в однородной жидкости существует соотношение:

$$Q = \frac{Q_m}{\rho} = \frac{Q_G}{\gamma}.$$

В дальнейшем будем оперировать понятием объемного расхода. Для получения общего выражения расхода рассмотрим течение жидкости через поверхность  $S$ . Выделим на ней элементарную площадку  $dS$ . Вектор скорости в центре площадки разложим на нормальную  $v_n$  и касательную  $v_\tau$  составляющие. Очевидно, касательная составляющая  $v_\tau$  не дает расхода жидкости через площадку. За время  $dt$  через  $dS$  протечет объем жидкости  $dQ_t = (v_n dt) dS$ . Элементарный расход  $dQ$  будет равен отношению  $dQ_t / dt$  (количество жидкости, отнесенное к единице времени), то есть

$$dQ = v_n \cdot dS.$$

Суммируя расходы по элементарным площадкам, что сведено к интегрированию по поверхности, получим выражение для расхода жидкости через поверхность  $S$ :

$$Q = \int_S v_n \cdot dS \quad (4.6)$$

Выделим в жидкости поверхность  $S$  произвольного объема  $V$ . Возьмем элементарный объем  $dV$  и умножим его на  $\text{div } \bar{v} = 0$ .

Физически количество  $\text{div } \bar{v} dV = 0$  характеризует, согласно (4.2)  $\left[ \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \right) = 0 \right]$ , изменение величины элементарного объема  $dV$  вследствие деформации. Проинтегрируем количество  $\text{div } \bar{v} dV = 0$  по объему и воспользуемся формулой Гаусса – Остроградского, переводящей объемный интеграл в поверхностный.

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } \bar{v} dV &= \int_V \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \\ &= \oint_S [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y) + v_z \cos(n, z)] dS = \int_S v_n dS = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

В этой формуле введена нормальная составляющая скорости  $v_n$ . Согласно (4.6)  $\left[ Q = \int_S v_n dS \right]$ , интеграл в правой части представляет собой расход жидкости через замкнутую поверхность, равный в соответствии с (4.7)

$$Q = \oint_S v_n dS = 0. \quad (4.8)$$

Это выражение представляет математическую формулировку уравнения неразрывности в интегральной форме. Физически оно истолковывается следующим образом: расходы втекающей и вытекающей жидкости через произвольную замкнутую поверхность должны быть равны. При этом внутри жидкости не происходит ни накопления жидкости, ни образования пустот.

**Живым сечением потока** называется поверхность, нормальная к векторам скоростей. Если  $S$  поверхности живого сечения, то расход через нее выражается как

$$Q = \int_S v dS.$$

Введем среднюю по живому сечению скорость. Под ней понимается фиктивная, постоянная по живому сечению скорость  $v_{cp}$ , обеспечивающая одинаковый с заданным расход. Из этого определения следует, что

$$Q = \int_S v dS = v_{cp} \cdot S.$$

Средняя скорость равна расходу, деленному на площадь живого сечения:

$$v_{cp} = Q / S.$$

Рассмотрим поток жидкости (рис. 4.7) конечных размеров, ограниченный с боков твердыми стенками  $S_{бок}$ . Проведем два произвольных живых сечения  $S_1$  и  $S_2$ . Расход жидкости через замкнутую поверхность  $S_1 + S_2 + S_{бок}$ , согласно предыдущим выводам, равен нулю.

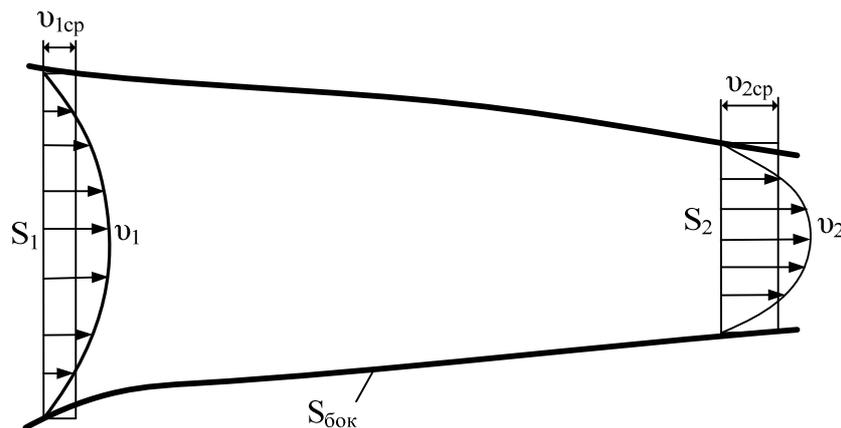


Рис. 4.7. Поток жидкости

Считая поток вытекающей жидкости положительным, а втекающей – отрицательным, запишем

$$-Q_1 + Q_{бок} + Q_2 = 0$$

и поскольку  $Q_{бок} = 0$ , то  $Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}$ , то есть расход жидкости вдоль потока конечных размеров постоянен. С учетом введения понятия средних скоростей последнее равенство может быть записано в виде:

$$v_{cp1}S_1 = v_{cp2}S_2 = v_{cp}S = \text{const}.$$

Уравнение неразрывности в такой форме находит широкое применение при исследовании течений жидкости.

## 6. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ ЧАСТИЦЫ

Классификация движений жидкости на основании зависимости скоростей потока от времени позволяет дать лишь внешнее описание их особенностей. Чтобы выявить внутренние особенности течения, необходимо исследовать распределение скоростей внутри жидкой частицы. Это позволит судить о ее движении в целом.

При рациональном методе исследования какого-либо явления его сравнивают с другим, более простым явлением, определяя особенности более сложного явления по сравнению с простым.

Сравним движение жидкой частицы с известным из теоретической механики движением абсолютно твердого тела. Движение жидкой частицы носит более сложный характер, поскольку она в отличие от твердого тела может деформироваться, причем очень значительно по сравнению с упругим телом.

В курсе теоретической гидромеханики аналитически показано, что

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_{деф},$$

то есть скорость любой точки жидкой частицы складывается из скорости полюса  $\bar{v}_0$ , скорости вращения вокруг собственной оси, проходящей через полюс  $(\bar{\omega} \times \bar{r})$  и скорости деформированного движения  $\bar{v}_{деф}$ .

Это положение представляет собой формулировку теоремы Коши – Гельмгольца.

Впервые полеченная формула отличается от аналогичной формулы для твердого тела только наличием члена  $\bar{v}_{деф}$ .

Однако член, характеризующий вращение  $(\bar{\omega} \times \bar{r})$  лишь по форме совпадает с аналогичным членом для твердого тела. Жидкая частица с течением времени деформируется, изменяет свою форму. Поэтому член

$(\bar{\omega} \times \bar{r})$  описывает вращение жидкой частицы как отвердевшего тела лишь в данный момент времени, так как по прошествии этого времени она изменяет свою форму.

Дальнейший анализ формулы Коши – Гельмгольца показывает, что в произвольном случае движения жидкости скорость можно представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых является потенциальным вектором, а другое имеет вихревую природу:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_{\text{def}} + \bar{\omega} \times \bar{r} = \text{grad } \varphi + \bar{\omega} \times \bar{r},$$

где  $\bar{v}_0 + \bar{v}_{\text{def}} = \text{grad } \varphi$ .

Если угловые скорости вращения равны нулю, то скорость является потенциальным вектором:

$$\bar{v} = \text{grad } \varphi.$$

Подобное движение образует класс безвихревых или потенциальных движений.

Если  $\bar{\omega}$  не равно нулю, движение жидкости называется **вихревым**.

Таким образом, на основании формулы Коши – Гельмгольца, все течение жидкости можно разделить на вихревое и потенциальное. Методы исследования этих течений существенно различаются.

## 7. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИХРЕВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

**Вихревым** называется такое движение жидкости, при котором вектор угловой скорости  $\bar{\omega}$  отличен от нуля.

**Вихревой линией** называют линию, в каждой точке которой в данный момент времени вектор угловой скорости совпадает с касательной к этой линии.

*Дифференциальное уравнение вихревой линии:*

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

где  $dx, dy, dz$  – проекции элемента вихревой линии;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции угловой скорости.

Аналогично понятию трубки тока вводится понятие вихревой трубки.

**Вихревая трубка** – часть жидкости, ограниченная вихревыми линиями, проведенными через точки произвольного замкнутого контура.

**Элементарной вихревой трубкой** называют такую, для которой применением угловой скорости по искомому сечению можно пренебречь.

Воздействие вихревой трубки на окружающую жидкость характеризуется ее интенсивностью.

Под **интенсивностью вихревой трубки** понимается удвоенный поток вектора угловой скорости через произвольные поперечные сечения вихревой трубки:

$$J = 2 \int_S \bar{\omega} \cdot \bar{n} dS = \int_S \text{rot } \bar{v} \cdot \bar{n} dS.$$

Можно показать, что  $\text{rot } \bar{v} = 2\bar{\omega}$  – интенсивность элементарной вихревой трубки.

$$J = 2\bar{\omega} \cdot \bar{n} dS = 2\omega_n dS.$$

Введем фундаментальное в гидромеханике понятие **циркуляции скорости**  $\Gamma$ . Она представляет собой криволинейный интеграл по замкнутому контуру  $L$  от скалярного произведения вектора скорости  $\bar{v}$  на дифференциал радиус-вектора точки контура  $d\bar{r}$ .

$$\Gamma = \oint_L \bar{v} d\bar{r}.$$

Связь между интенсивностью и циркуляцией устанавливается *теоремой Стокса*. Формулируется эта теорема так: поток вектора вихря через произвольную замкнутую поверхность равен циркуляции скорости по контуру, на который опирается эта поверхность.

Смысл теоремы состоит в том, что интенсивность вихревой трубки равна циркуляции скорости по контуру, на который опирается площадь поперечного сечения трубки:

$$I = \Gamma.$$

Понятие интенсивности и циркуляции является чисто кинематическими, следовательно, теорема Стокса одинаково справедлива для течения как вязкой, так и невязкой жидкости.

## МОДУЛЬ 5

### ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

*Динамика жидкости* – раздел гидромеханики, который изучает законы движения жидкостей в зависимости от приложенных к ним сил.

При заданных внешних силах задача динамики жидкости сводится к определению напряжений и кинематических параметров движения в каждой точке жидкости в любой момент времени, а также к определению гидродинамических сил воздействия потока на тела.

В механике жидкости для облегчения решения некоторых задач используется понятие об идеальной жидкости.

Под идеальной жидкостью подразумевают такую условную жидкость, которая обладает абсолютной несжимаемостью, абсолютной подвижностью частиц, а также отсутствием сил сцепления между ними. Вязкость идеальной жидкости равна нулю. Таким образом, идеальная жидкость перемещается по трубам и каналам без сопротивлений (без потери энергии на трение). Когда реальная жидкость находится в покое, в ней не проявляются силы вязкости и она имеет свойства, близкие к свойствам идеальной жидкости. Следовательно, рассмотрение при решении гидравлических задач идеальной жидкости вместо реальной вполне допустимо. Такое рассмотрение позволяет применять точный математический анализ для решения технических задач в гидравлике.

Нормальные напряжения в движущейся идеальной жидкости обладают теми же свойствами, что и в покоящейся жидкости, то есть в данной точке их значения не зависят от направления действия. Таким образом, напряженное состояние движущейся невязкой жидкости может быть охарактеризовано в каждой точке значением нормального напряжения. Поскольку это значение не зависит от направления действия, его, как и при равновесии жидкости, называют давлением.

## 2. ОСНОВЫ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ ПО МОДУЛЮ

### 2.1. Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости в форме Эйлера

Для решения задачи о движении невязкой жидкости нужно составить уравнения движения, связывающие между собой скорости, давления и массовые силы, действующие в жидкости.

Чтобы получить эти уравнения, используем векторное уравнение движения жидкости, выраженное через напряжения

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right).$$

В невязкой жидкости действуют только нормальные напряжения, связь которых с давлениями имеет вид:

$$\vec{P}_x = -iP; \quad \vec{P}_y = -jP; \quad \vec{P}_z = -kP.$$

Подставляя эти значения в уравнение в напряжениях, получим уравнение:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \left( \vec{i} \frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial P}{\partial z} \right).$$

Или используя понятие градиента скалярной функции  $P$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P \quad (5.1)$$

Полученное уравнение называется дифференциальным уравнением движения невязкой жидкости в форме Эйлера.

Получим уравнение в скалярной форме, спроецировав его на оси координат:

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}; \\ \frac{dv_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y}; \\ \frac{dv_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В уравнениях Эйлера считаются известными плотность и вектор напряжения массовых сил  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_z$ . Искомыми в этих уравнениях являются три проекции скорости  $v_x(x, y, z, t)$ ,  $v_y(x, y, z, t)$ ,  $v_z(x, y, z, t)$  и дав-

ления  $P(x, y, z, t)$ , то есть четыре неизвестных функции. Чтобы привести в соответствие число уравнений и число неизвестных, к уравнениям Эйлера (5.2) следует добавить уравнение неразрывности:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

## 2.2. Интеграл Бернулли для линии тока

В общем случае уравнение движения жидкости не интегрируются. Для частных случаев их интегрирование возможно, если принять некоторые допущения.

Рассмотрим случай *установившегося движения* вдоль линии тока. В этом случае режим движения жидкости в каждой точке пространства не изменяется с течением времени. Линии тока при установившемся движении совпадают с траекториями жидких частиц.

Умножая скалярно основное уравнение движения:

$$\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P$$

на элементарное перемещение жидкой частицы  $\vec{v} \cdot dt$  вдоль линии тока получаем:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt - \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt = \frac{1}{\rho} (\operatorname{grad} P d \cdot \vec{v} \cdot dt)$$

или

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz - d \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right).$$

Так как при установившемся движении  $\partial P / \partial t = 0$ , то выражение  $\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$  является полным дифференциалом  $dP$  и можно написать:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz - d \left( \frac{v^2}{2} \right) = \frac{dP}{\rho}.$$

Это уравнение может быть проинтегрировано при соблюдении двух условий:

1. Если массовые силы имеют потенциал.
2. Если жидкость баротропная, то есть ее плотность зависит только от давления.

По первому условию:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad \text{и} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU.$$

$$dU - d\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{dP}{\rho} \quad \text{или} \quad -dU + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dP}{\rho} = 0.$$

Это уравнение можно интегрировать, интегралом будет

$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{P}{\rho} = C. \quad (5.3)$$

Полученное уравнение называется интегралом Бернулли. Константа  $C$  в правой части постоянна только вдоль линии тока. При переходе к другим линиям тока значение постоянной в интеграле Бернулли изменяется.

Рассмотрим наиболее важный частный случай, когда в жидкости действует сила тяжести, то есть  $U = -gz$ , и запишем для него интеграл уравнения движения. Одновременно умножим обе части уравнения на плотность  $\rho$  и учтем, что  $\rho g = \gamma$ .

Тогда получим:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \gamma z + P = C \quad (5.4)$$

Интеграл Бернулли в такой записи часто называют уравнение Бернулли.

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \gamma z_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \gamma z_2 + P_2 = \text{const.}$$

Все члены, входящие в это уравнение, имеют размерность давления.

Три формы уравнения Бернулли:

1-ая форма уравнения Бернулли в напорах:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g};$$

2-ая форма уравнения Бернулли в давлениях

$$z_1 \rho g + p_1 + \frac{\rho u_1^2}{2} = z_2 \rho g + p_2 + \frac{\rho u_2^2}{2};$$

3-я форма уравнения Бернулли в квадратах скоростей

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2}.$$

*Рассмотрим энергетический смысл уравнения Бернулли.*

Рассмотрим частицу жидкости, с массой  $\Delta m$ , которая движется вдоль линии тока. Определим величину полной энергии, которой обладает части-

ца сечения I и II. Кинетическая энергия соответственно  $\frac{\Delta m v_1^2}{2}$  и  $\frac{\Delta m v_2^2}{2}$ .  
 Потенциальная энергия равна весу частицы на высоту подъема ее. В сечении I высота подъема  $z_1 + \frac{P_1}{\gamma}$ ; в сечении II –  $z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$ .

В сечении I потенциальная энергия

$$\gamma \cdot \Delta V \cdot \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right),$$

где  $\Delta V$  – объем частицы;  
 $\gamma$  – объемный вес.

Потенциальная энергия частицы может быть записана

$$\gamma \cdot \Delta V \cdot \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) = g \cdot \Delta m \cdot \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right).$$

Так как  $\gamma \cdot \Delta V = g \cdot \Delta m$ , то

$$A \left\{ \begin{array}{l} \Delta E_1 = \frac{\Delta m v_1^2}{2} + g \cdot \Delta m \cdot \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right) \\ \Delta E_2 = \frac{\Delta m v_2^2}{2} + g \cdot \Delta m \cdot \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} \right) \end{array} \right\},$$

где  $\Delta E_1$  – полная энергия частицы в сечении I;

$\Delta E_2$  – полная энергия частицы в сечении II;

Разделив почленно на вес частицы  $g \cdot \Delta m$ , определим полную энергию, которая заключается в единице веса жидкости. Это удельная энергия ( $\mathcal{E}$ ).

Удельная энергия, отнесенная к единице веса

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathcal{E}_1 = \frac{\Delta E}{g \cdot \Delta m} = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \\ \Delta \mathcal{E}_2 = \frac{\Delta E}{g \cdot \Delta m} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \end{array} \right\},$$

где  $\frac{v_1^2}{2 \cdot g}$  и  $\frac{v_2^2}{2 \cdot g}$  – удельная кинетическая энергия;

$P_1/\gamma$  и  $P_2/\gamma$  – удельная потенциальная энергия давления;

$z_1$  и  $z_2$  – удельная потенциальная энергия положения.

Разделим уравнения (A) на единицу объема.

Для этого представим массу в уравнении (A), как  $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$ .

Уравнения (А) перепишутся:

$$\frac{\rho \cdot \Delta V \cdot v_1^2}{2} + g \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} \right);$$

Делим выражение на  $\Delta V$ :

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \gamma \cdot z_1 + P_1.$$

Разделим уравнения (А) на единицу массы и получим:

$$\frac{v_1^2}{2} + g \cdot z_1 + \frac{P_1}{\rho}.$$

Поскольку сумма кинетической и потенциальной энергии равна полной механической энергии, интеграл Бернулли можно истолковать следующим образом: вдоль линии тока механическая удельная энергия частицы жидкости постоянна. Это есть одно из выражений закона сохранения энергии, который в данных условиях выражается интегралом Бернулли.

Весьма часто в практических задачах представляет интерес не все давление  $P$ , а лишь гидродинамическая добавка к нему, вызванная движением жидкости, то есть так называемое избыточное гидродинамическое давление.

Рассмотрим, например, поток со свободной поверхностью, которую примем за плоскость сравнения. Гидростатическое давление равно  $P_{гидр} = -\gamma \cdot z$ . Введем избыточное гидродинамическое давление  $P_u$  как разность между давлением  $P$  в этой точке и гидростатическим давлением:

$$P_u = P - P_{гидр} = P + \gamma \cdot z.$$

Подставляя выражение для  $P_u$  в уравнение (5.4), приведем его к виду

$$P_u + \frac{\rho \cdot v^2}{2} = C.$$

Из этого выражения следует, что в тех точках потока, где скорость больше, давление уменьшается.

### 2.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости

При движении вязкой жидкости в ней возникают не только нормальные, но и касательные напряжения, так как вязкая жидкость обладает способностью оказывать сопротивление относительному сдвигу своих слоев и частиц.

Рассмотрим элементарную струйку вязкой жидкости также при установившемся движении.

При движении элементарной струйки вязкой жидкости общий запас удельной механической энергии не может оставаться постоянным, как это рассматривалось при движении идеальной жидкости. Дело в том, что при движении вязкой жидкости вследствие ее вязкости возникают сопротивления движению, на преодоление которых затрачивается часть механической энергии.

При продвижении вниз по течению от одного сечения к другому удельная энергия в струйке (а значит, и напор) будет уменьшаться. Энергия в первом (вышерасположенном по течению) сечении при движении вязкой жидкости всегда больше, чем во втором (нижерасположенном) сечении на величину потерь удельной энергии между этими сечениями. Потери удельной энергии можно выразить через потери напора на трение  $h_{mp}$ . Как и все остальные члены уравнения,  $h_{mp}$  имеет линейную размерность. Окончательно уравнение Бернулли для струйки вязкой жидкости имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{mp}.$$

В этом случае напорная линия (линия удельной энергии) будет снижаться по направлению движения.

## 2.4. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

Запишем уравнение Бернулли для двух точек 1 и 2 вдоль линии тока в невязкой жидкости:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}.$$

Однако при движении вязкой жидкости от точки 1 к точке 2 вдоль линии тока будет происходить процесс диссипации энергии, связанный с преодолением сил трения. Следовательно, записанное равенство следует заменить неравенством, в котором правая часть меньше левой вследствие рассеивания части энергии на пути частицы жидкости:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} > z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}.$$

Или можно записать, что

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \right) = h_n,$$

где  $h_n$  – удельная потеря энергии в вязкой жидкости между двумя точками линии тока.

Таким образом, в вязкой жидкости при установившемся движении вдоль линии тока справедливо следующее соотношение для удельных энергий:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_n. \quad (5.5)$$

В настоящее время нет эффективных расчетных формул для вычисления величины  $h_n$ . Соотношение (5.5) можно распространить на случай потока вязкой жидкости. Для этого будем рассматривать сечения 1 и 2 потока вязкой жидкости с плавно изменяющимся в них течением.

Скорость  $v_1$  в живом сечении, как и скорость  $v_2$  в живом сечении  $S_2$  невелика, и законы распределения скорости в обоих сечениях могут быть различными. Поэтому в рассматриваемых сечениях течение плавно изменяющееся, давление в них распределяется по гидростатическому закону:

$$z + P/\gamma = \text{const}.$$

Вычислим разность потоков энергии, переносимой жидкостью через 1 и 2 сечения.

Для вычисления потока энергии следует удельную энергию в данной точке линии тока, проходящей через сечение, умножить на весовой расход жидкости через площадку  $dS$ , в центре которой проходит соответствующая линия тока. Этот расход равен  $\gamma \cdot v \cdot dS$ .

Полный поток энергии получим интегрированием по соответствующим сечениям. Для определения полной потери энергии интегрируем во втором сечении элементарные потери энергии вдоль линии тока  $h_n \cdot \gamma \cdot v \cdot dS$  на пути жидкости от первого сечения ко второму:

$$\int_{S_1} \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \right) \cdot \gamma \cdot v_1 \cdot dS - \int_{S_2} \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \right) \cdot \gamma \cdot v_2 \cdot dS = \int h_n \cdot \gamma \cdot v_2 \cdot dS.$$

Учитывая, что  $\int_S v \cdot dS = Q$  и вдоль потока соблюдается условие неразрывности  $Q_1 = Q_2$  или  $v_{1cp} \cdot S_1 = v_{2cp} \cdot S_2$ , а также, что в данных сечени-

ях справедливо соотношение  $z + P/\gamma = \text{const}$  и соответствующие суммы можно вынести за знак интегралов, получим:

$$\left(z_1 + \frac{P_1}{\gamma}\right)Q_1 + \frac{1}{2g} \int_{S_1} v_1^3 dS - \left(z_2 + \frac{P_2}{\gamma}\right)Q_2 - \frac{1}{2g} \int_{S_2} v_2^3 dS = \int_{S_2} h_n v_2 dS. \quad (5.6)$$

Интегралы вида  $\int_S v^3 dS$ , образующие поток кинетической энергии жидкости в данном сечении, выразим через среднюю скорость, введя для этого коэффициент, учитывающий влияние неравномерности распределения скорости по сечению на величину кинетической энергии, вычисленную по средней скорости потока.

$$\alpha_K = \frac{\int v^3 dS}{v_{cp}^3 S} = \frac{\int v^3 dS}{v_{cp}^2 Q}, \quad (5.6)$$

Отсюда видно, что значение  $\alpha_K$  зависит от закона распределения скорости по сечению и, если  $v = v_{cp} = \text{const}$ , то  $\alpha_K = 1$ .

Интеграл, стоящий в правой части уравнения (5.5), можно представить, пользуясь теоремой о среднем, в следующем виде:

$$\int_{S_2} h_n v_2 dS = H \int_{S_2} v_2 dS. \quad (5.7)$$

Подставляя в (5.5) соотношения (5.6) и (5.7), учитывая уравнение неразрывности ( $Q_1 = Q_2 = Q$ ) и сокращая  $Q$  в левой и правой части, получим:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_{K1} \cdot \frac{v_{1cp}^2}{2g} - \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \alpha_{K2} \cdot \frac{v_{2cp}^2}{2g} \right) = H \quad (5.9)$$

или 
$$\gamma \cdot z_1 + P_1 + \alpha_{K1} \cdot \frac{\rho \cdot v_{1cp}^2}{2} = \gamma \cdot z_2 + P_2 + \alpha_{K2} \cdot \frac{\rho \cdot v_{2cp}^2}{2} + \gamma \cdot H. \quad (5.10)$$

Соотношение (5.10) называется *уравнением Бернулли для потока вязкой жидкости*. Его применение возможно только для сечений, где движение можно рассматривать как плавно изменяющееся.

Между сечениями 1 и 2 поток по своей структуре может быть и не плавно изменяющимся. Это не препятствует применению уравнения (5.10), так как слагаемое  $\gamma \cdot H$  учитывает все потери энергии на пути от первого сечения ко второму.

Величина  $H$ , согласно (5.9), представляет полную удельную потерю энергии, отнесенную к единице веса жидкости, протекающей через второе сечение потока в единицу времени.

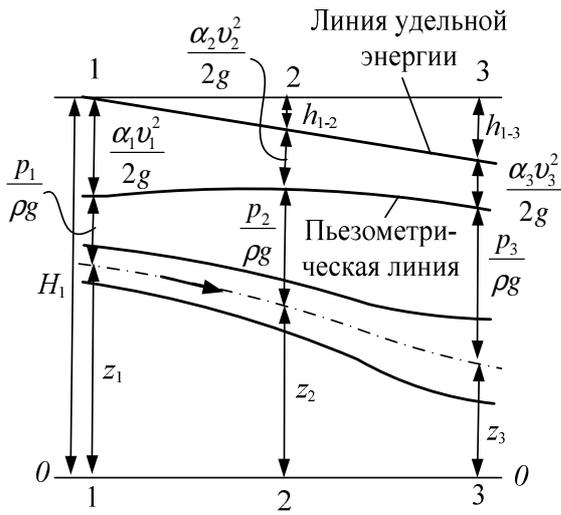


Рис. 5.1. Геометрический смысл уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости

Так как все слагаемые формулы (5.9) имеют размерность высот, можно зависимость изменения потерь по длине потока изобразить графически (рис. 5.1).

Последовательно откладывая на диаграмме от плоскости сравнения данного начального сечения геометрическую высоту  $z_1$ , пьезометрическую высоту  $P_1/\gamma$  и высоту приведенного скоростного напора  $\alpha_{K1} \frac{v_1^2}{2g}$ , получим полный гидродинамический напор в начальном сечении, равный сумме  $z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \alpha_{K1} \frac{v_1^2}{2g}$ .

Для любого другого сечения соответствующая сумма высот будет уменьшаться в связи с появлением потерь напора  $H$ , которые определяются с помощью диаграммы, которая называется диаграммой Бернулли.

## 2.5. Условия применения уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли весьма часто применяется в различных разделах гидравлики, с его помощью выводятся расчетные формулы и решаются важные практические задачи. При помощи уравнения Бернулли могут быть выведены формулы для скорости и расхода жидкости при истечении из отверстий и насадков, для расхода, проходящего через водослив, расчета сопряжения ниспадающей струи с потоком в нижнем бьефе гидротехнических сооружений (то есть на участке, расположенном ниже сооружения по течению) и других случаев.

Но применять уравнение Бернулли в практических расчетах следует с соблюдением определенных условий.

Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости было выведено применительно к условиям плавно изменяющегося установившегося движения, и оно может быть применено только для сечений, в которых удовлетворяются все признаки такого движения.

Тот факт, что давления при плавно изменяющемся движении распределяются по гидростатическому закону, позволяет при написании уравнения Бернулли выбирать точки, для которых записываются высоты положения  $z$  и давления  $p$ , в любом месте назначенных сечений, то есть на дне, на свободной поверхности, в центре живого сечения, на оси трубы и т.п. Выбранные точки могут не принадлежать одной и той же линии тока. Однако удобнее назначать эти точки или на свободной поверхности (в этом случае чаще всего  $p_1 = p_2 = p_{atm}$ ), или в центре тяжести живых сечений, тогда может быть несколько сокращен объем вычислений.

Если в уравнение Бернулли войдут две неизвестные величины, то следует применить также уравнение неразрывности для потока.

### 3. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

**Динамика жидкости** – раздел гидромеханики, который изучает законы движения жидкостей в зависимости от приложенных к ним сил.

**Давлением** называют напряженное состояние движущейся невязкой жидкости, характеризующееся в каждой точке значением нормального напряжения.

## 4. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Материалы к лекции

Возможен следующий план лекции:

1. Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости в форме Эйлера.
2. Интеграл Бернулли для линии тока.
3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости.
4. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.
5. Условия применения уравнения Бернулли.

## 4.2. Задание к практическому занятию

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. «ПОСТРОЕНИЕ ДИАГРАММЫ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ»

#### Вводная часть

Если в потоке несжимаемой жидкости действуют из массовых сил только силы тяжести, то выражение полной удельной энергии в любой точке можно представить в следующих трех вариантах:

$$E_G = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{u^2}{2g}; \quad (1)$$

$$E_V = \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{u^2 \rho}{2}; \quad (2)$$

$$E_m = g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}, \quad (3)$$

где  $z$  – превышение рассматриваемой точки над выбранной плоскостью отсчета (сравнения);

$p$ ,  $u$  – соответственно гидростатическое давление и скорость движения жидкости в этой точке.

Формула (1) выражает, энергию, приходящуюся на единицу веса (м), (2) – на единицу объема (Па), (3) – на единицу массы жидкости ( $\text{м}^2/\text{с}^2$ ).

В гидравлике широко применяется запись (1). Три составляющие правой части этого уравнения имеют следующий физический смысл:

$z$  – удельная потенциальная энергия положения точки над плоскостью сравнения;

$\frac{p}{\rho \cdot g}$  – удельная потенциальная энергия давления жидкости в точке (пьезометрический напор);

$u/2g$  – удельная кинетическая энергия (скоростной напор).

Уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии в потоке жидкости. Оно устанавливает связь между удельными энергиями в двух любых сечениях потока. Если использовать запись (1) применительно не к точкам, а к сечениям потока, то уравнение Бернулли представляется в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{mp}, \quad (4)$$

где  $v_1$ ,  $v_2$  – средние скорости движения жидкости в первом и втором сечениях потока;

$\alpha_1, \alpha_2$  – коэффициенты кинетической энергии в этих сечениях;

$h_{mp}$  – потери энергии при движении жидкости от первого сечения ко второму.

Полная удельная энергия в первом сечении потока отличается от полной удельной энергии во втором сечении на величину потерь  $h_{mp}$ .

При изменении положения и площади сечения потока происходит преобразование одного вида энергии в другой. Уравнение (4) позволяет находить одну из неизвестных составляющих полной удельной энергии, если известны все остальные.

Уравнение Бернулли можно изобразить на графике, называемом диаграммой уравнения Бернулли.

Для построения диаграммы уравнения Бернулли от произвольно выбранной плоскости сравнения 0-0 (рис. 1) откладываем вверх  $z$  (ординаты). От ординаты  $z$  откладываем вверх значения пьезометрического напора  $p/\gamma$  и получаем линию  $b'-c'-d'-f'-h'$ , называемую пьезометрической линией. Откладывая далее вверх от пьезометрической линии значения скоростного напора  $u^2/2g$ , получаем линию гидравлического напора  $a-b-c-d-f-h$ , расстояние от которой до плоскости сравнения 0-0 дает значение гидродинамического напора (полной удельной энергии) в соответствующих сечениях струйки.

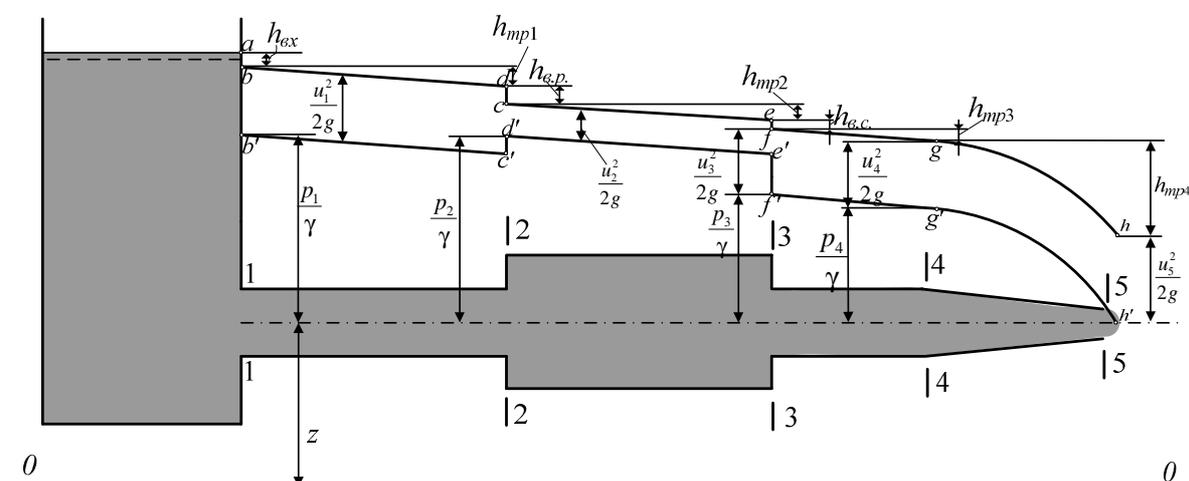


Рис. 1 Построение диаграммы уравнения Бернулли

### Цель работы:

Изучение различных составляющих удельной энергии потока при движении жидкости по трубопроводу переменного сечения и направления и характера изменения энергии потока по его длине.

### Краткое описание установки

Опытная установка представляет собой трубопровод переменного сечения, на характерных участках которого, то есть при переходе труб из одного диаметра к другому и на повороте, установлены пьезометры. Все пьезометры размещены на специальных щитах.

Нуль шкалы пьезометров совпадает с осью трубопровода, которая находится в плоскости сравнения ( $z = 0$ ).

Движение воды по трубопроводу осуществляется за счет напора, создаваемого водонапорным баком, уровень воды в котором поддерживается постоянным.

Расход воды регулируется вентилем. Для измерения расхода воды установлен мерный бак с уровнемером.

### Порядок выполнения лабораторной работы

1. Начертить схему экспериментальной установки с указанием мест подключения пьезометров. Пронумеровать линейные участки трубопровода и местные сопротивления.

2. Составить таблицу для занесения экспериментальных данных с указанием показаний пьезометра отдельных для каждого линейного участка и местного сопротивления и результатов вычислений (табл. 1).

3. Установить в трубопроводе произвольный расход жидкости и измерить его. С помощью пьезометров измерить пьезометрические напоры в сечениях, где выведены устья пьезометров.

4. По известным размерам трубопровода и измеренному расходу жидкости вычислить скорость напора в сечениях потока, в которых изменялся пьезометрический напор в тех же сечениях. Вычислить потери напора на линейных участках и в местных сопротивлениях.

5. По результатам измерений и вычислений построить пьезометрическую линию и линию гидродинамического напора.

Длины участков, см					Диаметры участков, мм		Напор, см $H$	Показания пьезометров, см												Объем, см <sup>3</sup> $V$	Время, с $t$		
$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_5$	$d_1$	$d_2$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12				

### Обработка экспериментальных данных

1. Определить расход воды в трубопроводе по формуле  $Q = V/t$ , см<sup>3</sup>/с.
2. Определить площади живых сечений по формуле  $\omega = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ , см<sup>2</sup>.
3. Вычислить среднюю скорость движения воды по участкам трубопровода по формуле  $v = Q/\omega$ , см/с.
4. Вычислить скоростной напор  $v^2/2g$  на каждом из участков.
5. Определить полный напор в каждом из сечений трубопровода по формуле:

$$H = \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g}.$$

### Варианты заданий к практическим занятиям

**Указания к решению задач.** При применении уравнения Бернулли важно правильно выбрать те два сечения, для которых оно записывается.

В качестве сечений рекомендуется брать:

- свободную поверхность жидкости в резервуаре (баке), где  $v = 0$ ;
- выход в атмосферу, где  $p_{изб} = 0$ ;  $p_{абс} = p_{атм}$ ;
- сечение, где присоединен тот или иной манометр, пьезометр или вакуумметр;
- неподвижный воздух вдалеке от входа в трубу, в которую происходит всасывание из атмосферы.

Коэффициент Кориолиса следует учитывать лишь при ламинарном режиме течения, когда  $\alpha = 2$ . Для турбулентных потоков можно принимать  $\alpha = 1$ .

Уравнение Бернулли рекомендуется сначала записать в общем виде, а затем переписать с заменой его членов заданными буквенными величинами и исключить члены, равные нулю.

При этом необходимо помнить следующее:

- вертикальная ордината  $z$  всегда отсчитывается от произвольной плоскости вверх;
- давление  $p$ , входящее в правую и левую части уравнения, должно быть задано в одной системе отсчета (абсолютной или избыточной);
- суммарная потеря напора  $\Sigma h_{mp}$  всегда пишется в правой части уравнения Бернулли со знаком «+».

**Пример 1.** Из отверстия в боковой стенке сосуда по горизонтальной трубе переменного сечения (рис. 2) вытекает вода.

Определить расход воды  $Q$ , а также средние скорости и давления в сечениях трубопровода 1, 2 и 3, предполагая уровень в сосуде постоянным и пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, при следующих данных:  $H = 2$  м,  $d_1 = 7,5$  см,  $d_2 = 25$  см,  $d_3 = 10$  см.

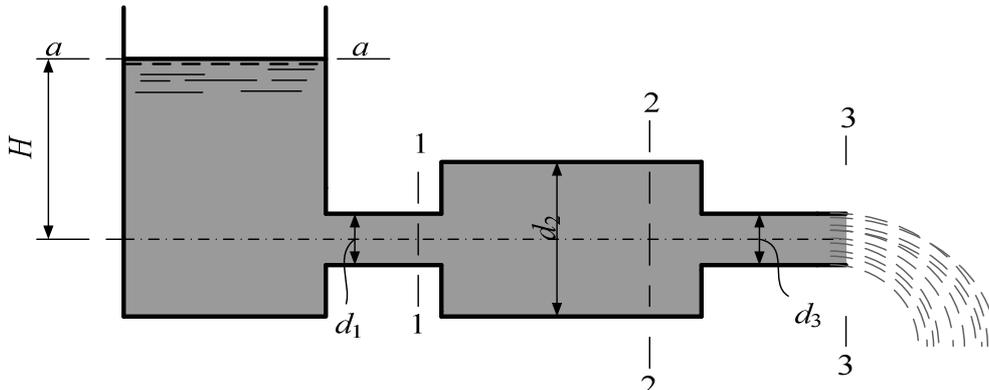


Рис. 2. К примеру 1

Составим уравнение Бернулли для двух сечений: сечения свободной поверхности жидкости в сосуде  $a-a$  и выходного сечения трубы 3-3, принимая за плоскость сравнения горизонтальную плоскость, проходящую через ось трубопровода. Имеем:

$$H + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}.$$

Ввиду значительных размеров сосуда по сравнению с поперечными размерами трубопровода скорость  $v_0$  будет весьма мала, и ею можно пренебречь. Учтем также, что  $p_0 = p_3$  (атмосферное давление). Тогда получаем:

$$H = v_3^2 / 2g.$$

Отсюда находим:

$$v_3 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2} = 6,27 \text{ м/с},$$

и

$$Q = v_3 \cdot \omega_3 = v_3 \cdot \frac{\pi \cdot d_3^2}{4} = 6,27 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} = 0,0492 \text{ м}^3/\text{с} = 49,2 \text{ л/с}.$$

Далее, по уравнению расхода определяем средние скорости в сечениях 1 и 2:

$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4}} = \frac{0,0492}{\frac{3,14 \cdot 0,075^2}{4}} = 11,1 \text{ м/с};$$

$$v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot d_2^2}{4}} = \frac{0,0492}{\frac{3,14 \cdot 0,25^2}{4}} = 1,0 \text{ м/с.}$$

Затем по уравнению Бернулли, составляемому для сечений 1 и 3 и сечений 2 и 3, находим давления в сечениях 1 и 2, имеем:

$$\frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} \text{ и}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} = \frac{98100}{1000 \cdot 9,81} + \frac{6,27^2}{2 \cdot 9,81} - \frac{1,0^2}{2 \cdot 9,81} = 11,95 \text{ м;}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{v_3^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g} = \frac{98100}{1000 \cdot 9,81} + \frac{6,27^2}{2 \cdot 9,81} - \frac{11,1^2}{2 \cdot 9,81} = 5,7 \text{ м.}$$

Найдем абсолютное давление в точках 1 и 2:

$$p_1 = 5,7 \cdot \gamma = 5,7 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 55917 \text{ Па;}$$

$$p_2 = 11,95 \cdot \gamma = 11,95 \cdot 1000 \cdot 9,81 = 117230 \text{ Па.}$$

Так как абсолютное давление в сечении 1 меньше атмосферного, то в сечении имеет место вакуум (разряжение).

**Пример 2.** Определить расход воды, протекающей по трубопроводу, соединяющему резервуар *A* и сосуд *B* (рис. 3), разность уровней в которых составляет  $H = 15$  м. В резервуаре поддерживается избыточное давление  $p = 250$  кПа; вакуумметр *C*, установленный на сосуде *B*, показывает  $p_{\text{вак}} = 50$  кПа. Диаметр резервуара  $D = 5$  м, диаметр сосуда  $d = 0,3$  м. Потеря напора во всей системе  $h_{A-B} = 12$  м.

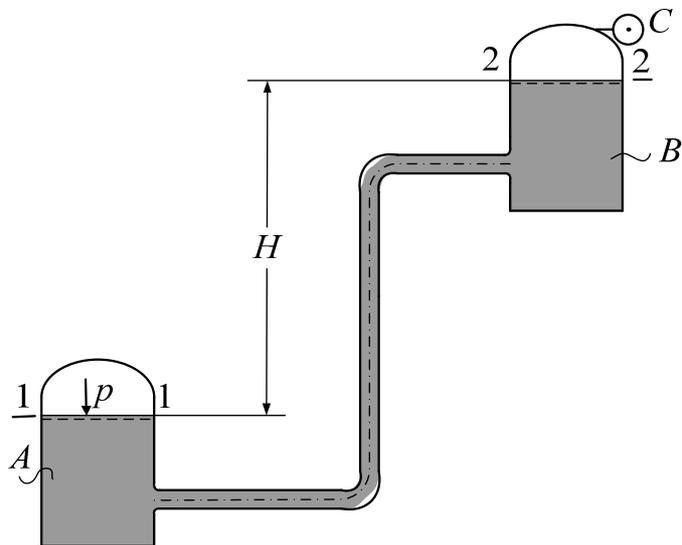


Рис. 3. К примеру 2

Составим уравнение Бернулли для сечений 1 и 2, совпадающих со свободными поверхностями жидкости в резервуаре *A* и сосуде *B*:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{A-B}.$$

Примем за плоскость сравнения поверхность жидкости в резервуаре  $A$ . Тогда  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = H$ . Учтем также, что абсолютное давление в сечении 1-1 определится как  $p_1 = p + p_{атм}$ , а абсолютное давление в сечении 2-2 будет равно  $p_2 = p_{атм} - p_{вак}$ . При этом получим:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H - \frac{p_{вак}}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{A-B}.$$

Воспользуемся далее уравнением постоянства расхода:

$$Q = v_1 \cdot \omega_1 = v_2 \cdot \omega_2,$$

откуда

$$v_1 = Q / \omega_1, \quad v_2 = Q / \omega_2,$$

где

$$\omega_1 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 5^2}{4} = 19,6 \text{ м}^2, \quad \omega_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} = 0,07 \text{ м}^2.$$

Подставив полученные значения в уравнение Бернулли, получим:

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \cdot \omega_1^2} = H - \frac{p_{вак}}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \cdot \omega_2^2} + h_{A-B},$$

или

$$\frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) = \frac{p}{\gamma} + \frac{p_{вак}}{\gamma} - H - h_{A-B}.$$

Отсюда находим:

$$Q = \sqrt{\frac{2g \left( \frac{p}{\gamma} + \frac{p_{вак}}{\gamma} - H - h_{A-B} \right)}{\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \left( \frac{250 \cdot 1000}{1000 \cdot 9,81} + \frac{50 \cdot 1000}{1000 \cdot 9,81} - 15 - 12 \right)}{\frac{1}{0,07^2} - \frac{1}{19,6^2}}} = 0,59 \text{ м}^3/\text{с}.$$

**Пример 3.** Определить мощность, необходимую для работы центробежного насоса, установленного по схеме, изображенной на рис. 4. Насос перекачивает жидкость плотностью  $\rho = 900 \text{ кг/м}^3$  из открытого резервуара  $A$  в напорный резервуар  $B$ , разность уровней в которых  $H = 20 \text{ м}$ . В резервуаре  $B$  поддерживается манометрическое давление  $p_B = 120 \text{ кПа}$ . Про-

изводительность насоса  $Q = 50$  л/сек, его коэффициент полезного действия  $\eta = 0,8$ , потери напора во всасывающем и нагнетательном трубопроводах  $h_{A-B} = 8$  м.

Составляем уравнение Бернулли для сечений 1 и 2, совпадающих со свободными поверхностями жидкости в резервуарах  $A$  и  $B$ . При этом следует учесть, что напор в сечении 2 будет больше, чем напор в сечении 1, на величину напора  $H_n$ , развиваемого насосом и сообщаемого им жидкости, и меньше на потерю напора  $h_{A-B}$  между этими сечениями. Таким образом, имеем:

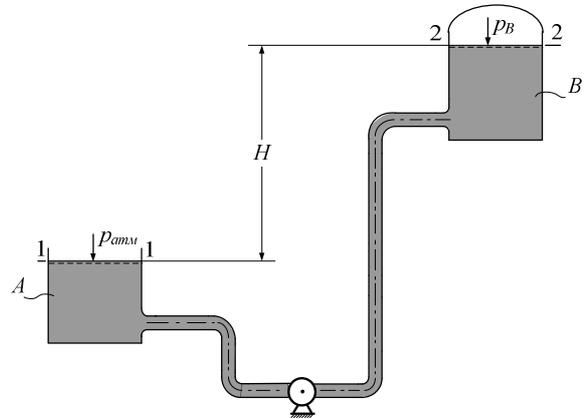


Рис. 4. К примеру 3

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} - H_n + h_{A-B}.$$

Отсюда, принимая за плоскость сравнения поверхность жидкости в резервуаре  $A$  и имея в виду, что  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = H$ ,  $p_1 = p_{атм}$ ,  $p_2 = p_B + p_{атм}$ , и пренебрегая скоростными напорами  $v_1^2/2g$  и  $v_2^2/2g$  ввиду их малости по сравнению с остальными величинами, получаем:

$$H_n = H + \frac{p_B}{\gamma} + h_{A-B} = 20 + \frac{120 \cdot 1000}{900 \cdot 9,81} + 8 = 41,6 \text{ м.}$$

После этого по формуле находим мощность, потребляемую насосом:

$$N = \frac{\rho \cdot g \cdot Q \cdot H_n}{\eta} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 0,05 \cdot 41,6}{0,8} = 25506 \text{ Вт.}$$

**Задача 1.** Из напорного бака вода течет по трубе диаметром  $d_1 = 20$  мм и затем вытекает в атмосферу через насадок (брандспойт) с диаметром выходного отверстия  $d_2 = 10$  мм. Избыточное давление воздуха в баке  $p_0 = 0,18$  МПа; высота  $H = 1,6$  м. Пренебрегая потерями энергии, определить скорости течения воды в трубе  $v_1$  и на выходе из насадка  $v_2$ .

**Ответ:**  $v_1 = 4,96$  м/с,  $v_2 = 19,8$  м/с.

**Задача 2.** Определить расход керосина, вытекающего из бака по трубопроводу диаметром  $d = 50$  мм, если избыточное давление воздуха в баке

$p_0 = 16$  кПа; высота уровня  $H_0 = 1$  м; высота подъема керосина в пьезометре, открытом в атмосферу,  $H = 1,75$  м. Потерями энергии пренебречь. Плотность керосина  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>.

**Ответ:**  $v = 5$  м/с,  $Q = 9,8$  л/с.

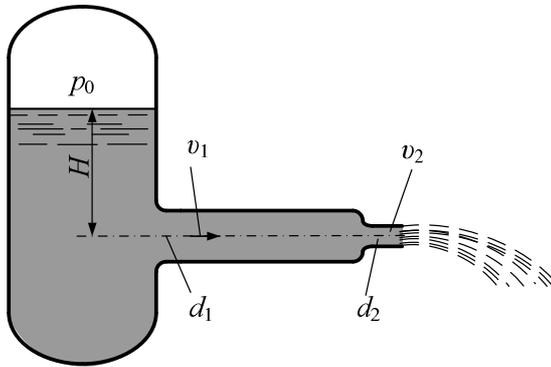


Рис. 7. К задаче 1

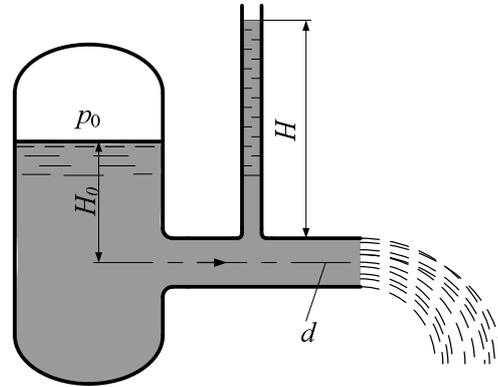


Рис. 2. К задаче 2

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что изучает динамика?
2. Запишите уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости?
3. Запишите уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости?
4. Запишите уравнение Бернулли для потока реальной жидкости?
5. Какие параметры потока жидкости связывает между собой уравнение Бернулли?
6. В чем состоит энергетический смысл уравнения Бернулли?
7. В чем состоит геометрический смысл уравнения Бернулли?
8. Можно ли записать уравнение Бернулли в единицах давления?
9. Для какого движения жидкости применимо уравнение Бернулли?
10. Что такое пьезометрический уклон?
11. Что такое гидравлический уклон?
12. Почему напорная линия всегда нисходящая?
13. Почему пьезометрическая линия бывает нисходящей и восходящей?

14. На каком расстоянии друг от друга располагаются напорная и пьезометрическая линии?

15. Могут ли напорная и пьезометрическая линии пересекаться?

16. В каком случае пьезометрическая линия может проходить ниже оси трубопровода?

17. Как изменится расстояние между напорной и пьезометрическими линиями при увеличении расхода жидкости в трубопроводе?

18. Что такое напор жидкости, пьезометрический, скоростной и полный напор? Взаимосвязь между ними с точки зрения сохранения энергии жидкости.

## 6. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.

2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.

3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.

4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.

5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Высш. шк., 1998. – 311 с.

## МОДУЛЬ 6

### РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Течение реальной жидкости характеризуется различными режимами ее движения, которые могут переходить один в другой при определенных условиях. Экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений показывают, что потери напора (потери энергии) зависят от существующего в потоке режима движения.

В этом модуле рассмотрены режимы движения жидкости, дано их качественное описание и количественная оценка.

#### 2. ЛАМИНАРНЫЙ И ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА И ЕГО КРИТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Течение реальной жидкости характеризуется различными режимами ее движения, которые могут переходить один в другой при определенных условиях. Экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений показывают, что потери напора (потери энергии) зависят от существующего в потоке режима движения.

В этом модуле рассмотрены режимы движения жидкости, дано их качественное описание и количественная оценка.

Экспериментальные исследования показали, что потери энергии при движении жидкости существенно зависят от характера движения частиц жидкости в потоке, от режима движения жидкости.

В природе существует два режима движения вязкой жидкости: ламинарный и турбулентный. Еще в 1880 г. Д.И. Менделеев в работе «О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании» указал на наличие различных видов движения жидкости, которые отличаются друг от друга характером зависимостей сил трения от скорости движения.

Более подробно эти виды движения жидкостей изучил английский физик О. Рейнольдс в 1883 г. и опубликовал результаты своих исследований с окрашенной струйкой жидкости.

Наглядно особенности режимов движения можно наблюдать на специальной опытной установке, схема которой показана на рис. 6.1. К баку *Б* достаточно больших размеров, наполненному жидкостью, присоединена

стеклянная труба  $T$ , вход в трубу сделан плавным; в конце трубы установлен кран  $K$  для регулирования расхода потока. Измерение расхода выполняется с помощью мерного бака  $M$  и секундомера.



Над баком  $B$  расположен сосуд  $C$ , наполненный раствором краски, плотность которого близка к плотности жидкости в потоке. По трубе  $T$  краска вводится в поток. Расход краски регулируется краном  $P$ .

При открытом кране  $K$  в трубе  $T$  установится некоторая скорость потока. Если открыть кран  $P$ , то в трубу  $T$  начнет поступать краска. При малой скорости  $v$  потока в трубе  $T$  краска образует прямолинейную и резко выделяющуюся не смешивающуюся с окружающей жидкостью струйку. Заметного обмена частицами между окрашенной струйкой и окружающей ее жидкостью не происходит. Если ввести в жидкость краску несколькими струйками, то все они будут двигаться, не смешиваясь с остальной массой жидкости. Это свидетельствует о том, что в прямой стеклянной трубе  $T$  при данном открытии крана жидкость движется отдельными не перемешивающимися между собой слоями. Линии тока при этом прямолинейны и устойчивы (рис. 6.2,  $a$ ).

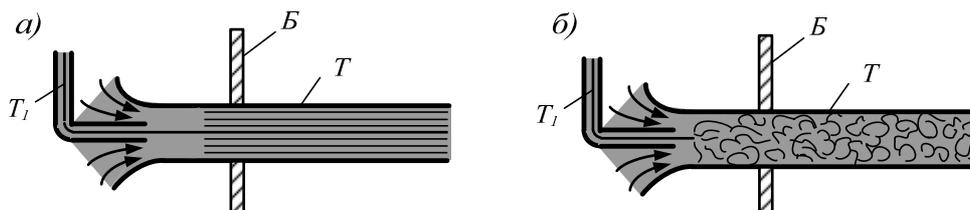


Рис. 6.2. Режимы движения жидкости:  
а – ламинарный режим, б – турбулентный режим

При некотором большем открытии крана  $K$  окрашенная струйка начинает искривляться и становится волнообразной. Это может происходить только в результате изменений во времени (пульсации) векторов местных скоростей в потоке.

При дальнейшем увеличении скорости потока в трубе струйка распадается на отдельные хорошо видимые вихри, происходит перемешивание окрашенной струйки со всей массой текущей жидкости (рис. 6.2, б).

Движение жидкости, при котором отсутствуют изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости, называют *ламинарным* (от лат. *lamina* – слой).

Движение жидкости, при котором происходят изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости, называют *турбулентным* (от лат. *turbulentus* – беспорядочный).

Применяются также термины *ламинарный режим движения*, *турбулентный режим движения*.

При постепенном закрывании крана явление повторяется в обратном порядке. Однако переход от турбулентного режима к ламинарному происходит при скорости, меньшей чем та, при которой наблюдается переход от ламинарного движения к турбулентному. Скорость потока, при которой происходит смена режима движения жидкости, называется *критической*. Рейнольдсом было обнаружено существование двух критических скоростей: одной – при переходе ламинарного режима движения в турбулентный режим, она называется *верхней критической скоростью*  $v_{в.кр}$ , другой – при переходе турбулентного режима движения в ламинарный режим, она называется *нижней критической скоростью*  $v_{н.кр}$ . Опытным путем доказано, что значение верхней критической скорости зависит от внешних условий опыта: постоянства температуры, уровня вибрации установки и т.д. Нижняя критическая скорость в широком диапазоне изменения внешних условий остается практически неизменной. В опытах было показано, что нижняя критическая скорость для потока в цилиндрической трубе круглого сечения пропорциональна кинематической вязкости  $\nu$  и обратно пропорциональна диаметру трубы  $d$ :

$$v_{н.кр} = k \cdot \nu / d .$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  оказался одинаковым для различных  $\nu$  и  $d$ :

$$k = v_{н.кр} \cdot d / \nu = 2320 .$$

В честь Рейнольдса этот коэффициент был назван *критическим числом Рейнольдса* и обозначен  $Re_{кр}$ .

Для любого потока по известным  $v$ ,  $d$ ,  $\nu$  можно составить и вычислить число Рейнольдса  $Re = vd/\nu$  и сравнить его с критическим значением  $Re_{кр}$ . Если  $Re < Re_{кр}$ , то  $v < v_{н.кр}$  и режим движения жидкости ламинарный; если  $Re > Re_{кр}$ , то  $v > v_{н.кр}$  и режим движения, как правило, турбулентный. Однако создание специальных условий движения жидкости (плавный вход в трубу, изоляция от динамических воздействий и т.п.) позволяло в лабораторных условиях получать и наблюдать ламинарное движение в трубах при числах  $Re$ , доходивших до  $(40 - 50) \cdot 10^3$  и более. Но такое ламинарное движение очень неустойчиво, и достаточно воздействия малого возмущения, чтобы произошел переход в турбулентное движение.

Таким образом, в общем случае режим движения жидкости определяется безразмерным комплексом:

$$\frac{v \cdot l}{\mu / \rho} = \frac{v \cdot l}{\nu},$$

составленным из четырех величин: динамической вязкости  $\mu$ , плотности жидкости  $\rho$ , характерного геометрического размера живого сечения  $l$  и средней скорости потока  $v$ .

Этот комплекс называется числом Рейнольдса и обозначается символом  $Re$ .

Физический смысл числа Рейнольдса состоит в том, что оно выражает отношение сил инерции к силам вязкости:

$$Re = \frac{F_{ин}}{F_{вяз}}; F_{ин} = m \cdot a = \rho \cdot L^3 \cdot \frac{v^2}{L} = \rho \cdot L^2 \cdot v^2;$$

$$F_{вяз} = \mu \cdot S \cdot \frac{du}{dy} = \rho \cdot \nu \cdot L^2 \cdot \frac{v}{L} = \rho \cdot \nu \cdot L \cdot v;$$

$$Re = \frac{\rho \cdot L^2 \cdot v^2}{\rho \cdot \nu \cdot L \cdot v} = \frac{v \cdot L}{\nu}.$$

При преобладании сил вязкости – режим ламинарный, при преобладании сил инерции – режим турбулентный.

Многочисленные экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений показывают, что между ними и скоростью движения жидкости имеется зависимость  $h_l = f(v)$  (рис. 6.3).

Если опытные данные нанести на график в логарифмических координатах, то можно выявить три области: ламинарную (линия  $AB$ ), турбулентную (линия  $CD$ ) и неустойчивую, расположенную между точками  $B$  и  $C$ . Точки  $B$  и  $C$  называются критическими, то есть точками, в которых про-

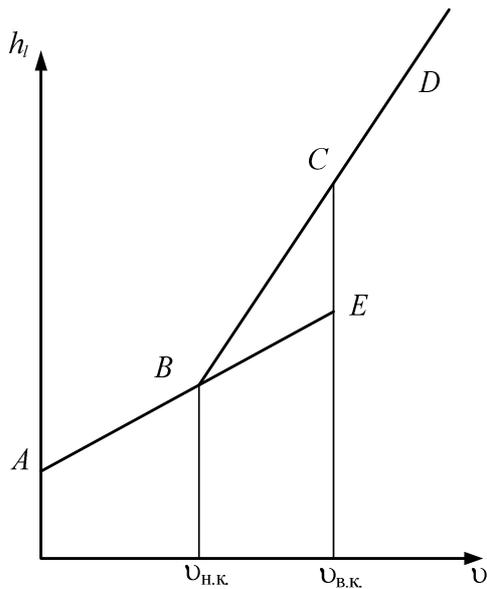


Рис. 6.3. Переход ламинарного режима движения жидкости в турбулентный

исходит изменение режима. Точка *B* называется нижней критической точкой. Скорости, соответствующие этим точкам, называются критическими скоростями. При изменении скоростей от малых к большим, ламинарный режим может удерживаться до точки *E*. При изменении скоростей от больших к малым, турбулентный режим может удерживаться до точки *B*.

Анализ графика позволяет сделать выводы:

– в области ламинарного движения (прямая *AB*) существует линейная связь между потерей энергии и скоростью движения, так как  $\alpha = 45^\circ$ :

$$h_l = Av;$$

$$\lg h_l = \lg A + \lg v;$$

– в области турбулентного режима движения (прямая *CD*) зависимость между скоростью и потерями энергии графически изображается прямой наклонной к горизонту под углом  $\alpha > 45^\circ$ .

Аналитически данная зависимость приводится к соотношению

$$h_l = Bv^n$$

или

$$\lg h_l = \lg B + n \lg v.$$

Для области устойчивого турбулентного движения  $n \approx 2$ .

В гидравлике между средними скоростями движения и потерями энергии принята квадратичная зависимость  $h_l = Bv^2$  (для турбулентного режима).

Для переходной области  $n$  изменяется в пределах  $1 < n < 2$ . Показатель  $n$  увеличивается с повышением степени турбулентности.

Поскольку характерный размер живого сечения выбирается произвольно, число Рейнольдса имеет нижний индекс, указывающий выбранную характерную линейную величину. Чаще всего в качестве характерных линейных величин принимают диаметр трубы  $d$ , гидравлический радиус  $R$  или глубину жидкости в открытом русле (канале)  $h$ .

$$\text{Тогда} \quad Re_d = \frac{v \cdot d}{\nu}; \quad Re_R = \frac{v \cdot R}{\nu}; \quad Re_h = \frac{v \cdot h}{\nu}.$$

Число  $Re_d$  в дальнейшем будем обозначать как  $Re$  без индекса.

В расчетах обычно принимают для цилиндрических круглых труб  $Re_{кр} = 2320$ .

На конфузорных (сужающихся) участках труб значение  $Re_{кр} > 2320$ , а на расширяющихся участках (диффузор)  $Re_{кр} < 2320$ . Для открытых русел

$$Re_{кр} = \frac{v \cdot R}{\nu} = 580.$$

В опытах Рейнольдса было обнаружено, что переход ламинарного движения в турбулентное происходит не мгновенно и не одновременно по всей длине трубы. При числах  $Re$ , близких к  $Re_{кр}$  (но меньше  $Re_{кр}$ ), на отдельных участках трубы периодически возникают турбулентные области («пробки»), которые сносятся вниз по направлению движения. На месте возникновения «пробки» вновь восстанавливается ламинарное движение. Происходит перемежающаяся смена ламинарного и турбулентного движений в данном сечении. При дальнейшем увеличении числа  $Re$  участки турбулентного движения полностью заполняют трубу.

В природе и технике турбулентное движение жидкости наблюдается чаще, чем ламинарное. Области ламинарного движения – движение вязких жидкостей типа масел по трубам и в механизмах, движение грунтовых вод (но оно может также быть и турбулентным), движение в капиллярах (в том числе и движение крови в живых организмах).

### 3. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПОТОКИ. ОСРЕДНЕННЫЕ СКОРОСТИ И НАПРЯЖЕНИЯ. ПУЛЬСАЦИОННЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Отличительной особенностью турбулентного движения жидкости является хаотическое движение частиц в потоке.

Однако при этом часто можно наблюдать и некоторую закономерность в таком движении. С помощью термогидрометра, прибора позволяющего фиксировать изменение скорости в точке замера, можно снять кривую скорости. Если выбрать интервал времени достаточной продолжительности, то окажется, что колебания скорости наблюдаются около некоторого уровня и этот уровень сохраняется постоянным при выборе различных интервалов времени. Величина скорости в данной точке в данный момент времени носит название мгновенной скорости. График изменения мгновенной скорости во времени  $u(t)$  представлен на рис. 6.4. Если выбрать на кривой скоростей некоторый интервал времени и провести интегрирование кривой скоростей, а затем найти среднюю величину, то такая величина носит название осредненной скорости  $\bar{u}$ .

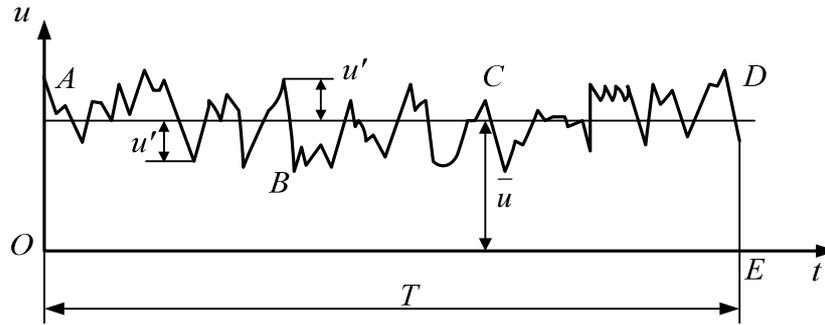


Рис. 6.4. График пульсации местных мгновенных скоростей

Изменение местных скоростей, носит ярко выраженный пульсационный характер – значения составляющих скорости «пульсируют» около некоторых осредненных значений.

Рейнольдс предложил рассматривать мгновенные значения параметров турбулентного движения в виде суммы осредненных (во времени) значений и пульсационных составляющих (добавок).

При этом мгновенные значения проекций скорости и напряжений записывают в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \bar{u}_x + u'_x; & u_y &= \bar{u}_y + u'_y; & u_z &= \bar{u}_z + u'_z; \\ p &= \bar{p} + p'; & \tau &= \bar{\tau} + \tau'. \end{aligned} \right\}$$

Все величины с чертой наверху представляют собой осредненные по времени значения параметров.

При турбулентном движении пульсирующими величинами являются не только составляющие (проекции) скорости, но и нормальные напряжения  $p$ , и касательные напряжения  $\tau$ .

При рассмотрении турбулентного движения принимается, что интервал времени осреднения  $T$  достаточно велик, вследствие чего осредненное значение пульсирующей составляющей не изменяется, если выполнить повторное осреднение.

Пульсации мгновенных значений кинематических и динамических параметров обуславливают то обстоятельство, что в строгом понимании турбулентное движение является неустановившимся (даже если осредненные характеристики его не изменяются во времени).

Необходимо четко различать осредненную (по времени, в данной точке) и среднюю в данном живом сечении скорость.

## Ламинарное движение жидкости по трубам

В потоке жидкости, движущейся равномерно ( $v = \text{const}$ ), между сечениями 1 и 2 выделим цилиндрический столбик жидкости с малым поперечным сечением  $S$ , со стенками параллельными направлению движения.

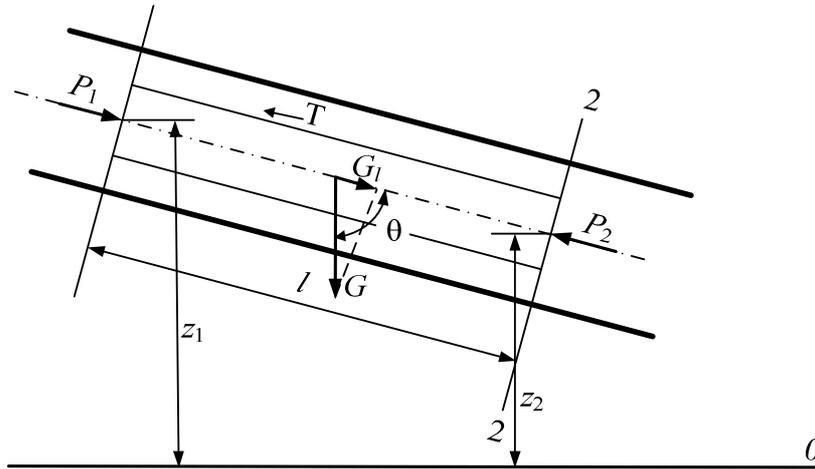


Рис. 6.5. Схема к выводу формулы касательных напряжений

Составим уравнение Бернулли для сечений 1 и 2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + h_{\Pi}.$$

Перепишем его так:

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) = h_{\Pi}.$$

На выделенный цилиндр в направлении движения действуют следующие силы: сила давления  $P = (P_1 - P_2)S$ , сила трения  $T = \tau Lp = \chi$  (где  $\chi$  – периметр сечения цилиндра); проекция силы веса  $G_L = G \sin \alpha = \gamma S L \sin \alpha$ .

При равномерном движении эти силы находятся в равновесии

$$\bar{P} + \bar{G}_e - \bar{T} = 0;$$

$$\sin \alpha = \frac{z_1 - z_2}{L};$$

$$(P_1 - P_2)S + \gamma S (z_1 - z_2) - \tau L \chi = 0.$$

Разделим это равенство на  $\gamma S$

$$\left( \frac{P_1}{\gamma} + z_1 \right) - \left( \frac{P_2}{\gamma} + z_2 \right) = \frac{\tau L \chi}{\gamma S}$$

$$\text{Отсюда } h_{\Pi} = \frac{\tau L \chi}{\gamma S}$$

Отношение  $S/\chi = R$  – гидравлический радиус.

Разделим полученное выражение на  $L$  и введем  $R$ :

$$I = h_n / L = \tau / \gamma R,$$

то есть касательные напряжения при равномерном течении равны

$$\tau = i \gamma R$$

### Поле скоростей и потери напора

В ламинарном потоке выделим тонкостенный цилиндрический слой с внутренним радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 7.6).

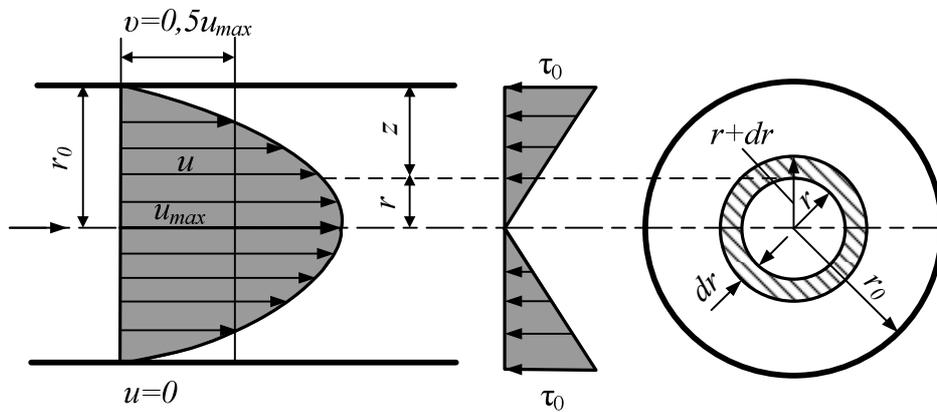


Рис. 6.6. Распределение местных скоростей по живому сечению потока жидкости в цилиндрической трубе при ламинарном режиме движения

Для этого слоя можно написать уравнение в виде

$$\tau = -\mu \frac{dv}{dr},$$

а также  $\tau = \frac{1}{2} i \gamma r$ .

Приравняем правые части уравнений и разделим переменные:

$$dv = -\frac{1}{2} \frac{i \gamma}{\mu} r dr.$$

Проинтегрировав, получим

$$v = -\frac{i \gamma}{4 \mu} r^2 + c.$$

Постоянную интегрирования  $C$  найдём из граничных на стенке.

На стене  $r = r_0$ , а  $v = 0$ .

$$c = \frac{i\gamma}{4\mu} r_0^2.$$

$$\text{Тогда } v = \frac{i\gamma}{4\mu} (r_0^2 - r^2) = \frac{i\gamma}{4\mu} r_0^2 \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$$

Это уравнение параболы. Таким образом, поле скоростей в живом сечении трубы представляет собой параболоид вращения равной максимальной (осевой) скорости  $v_{\max}$ .

Этот параболоид в это же время является телом расхода при ламинарном движении в круглой цилиндрической трубе.

Для нахождения максимальной скорости  $v_{\max}$  положим  $r = 0$ , тогда  $v_{\max} = \frac{i\gamma}{4\mu} r_0^2$ , тогда отсюда уравнение получит другой вид:

$$v = v_{\max} \left( 1 - r^2 / r_0^2 \right).$$

Становится ясным физический смысл постоянной интегрирования:

$$c = v_{\max}.$$

Теперь найдем расход и среднюю скорость.

Известно, что  $Q = \int dQ$ ,  $dQ = v \cdot dS$ .

Расход через кольцевое сечение радиуса  $r$  и толщиной  $dr$  будет равен

$$dQ = v \cdot 2\pi r dr = \frac{i\gamma}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr$$

Полный расход

$$Q = \int_0^{r_0} \frac{i\gamma}{4\mu} (r_0^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$Q = \frac{i\gamma\pi r_0^4}{4\mu} = \frac{i\gamma\pi r_0^4}{128 \cdot \mu}$$

Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{Q}{F} = \frac{i\gamma r_0^2}{8\mu} = \frac{i\gamma d^2}{32\mu}. \quad (6.1)$$

Сравнивая выражения для  $v_{cp} = \frac{1}{2} v_{\max}$ .

Теперь из равенства (6.1), имея ввиду, что  $i = h_{\Pi} / l$ , найдем потерю напора (формула Пуазейля):

$$h_{\Pi} = \frac{32\mu l v_{cp}}{\gamma d^2}.$$

Выражение показывает, что при ламинарном режиме потери на трение пропорциональны нулевой степени скорости.

Сделаем некоторые преобразования в формуле Пуазейля.

$$\text{Заменим } \mu = \nu\rho = \frac{\nu\gamma}{g}.$$

Помножим числитель и знаменатель на  $2\nu_{cp}$ :

$$h_{\Pi} = \frac{64}{\nu_{cp} \cdot d} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\nu_{cp}^2}{2g} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{\nu_{cp}^2}{2g}.$$

Это уравнение носит название уравнения Дарси – Вейсбаха. Первый множитель называется коэффициентом трения или коэффициентом Дарси.

$$\lambda = 64/Re;$$

$$h_{\Pi} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\nu^2}{2g}.$$

Хотя уравнение выведено для ламинарного движения, оно используется при упрощенных расчетах и для турбулентного движения с другими значениями  $\lambda$ .

## **Турбулентное движение жидкости Природа потерь при турбулентном движении**

Как было определено ранее, турбулентным называется течение жидкости, характеризующееся неупорядоченным движением частиц. То есть фактически в каждой точке пространства движения не установившееся (все время изменяется величина и направление скорости, а значит и давления).

Поэтому при изучении турбулентных потоков удобнее рассматривать не мгновенные, мгновенно изменяющиеся скорости в данной точке пространства, а осредненные их значения на основании регистрации (записи) мгновенных скоростей, в течение некоторого, достаточно продолжительного промежутка времени, называемого осреднением  $T$ .

$$\bar{v}_X = \frac{\int_0^T v_X dt}{T}; \quad \bar{v}_Y = \frac{\int_0^T v_Y dt}{T}; \quad \bar{v}_Z = \frac{\int_0^T v_Z dt}{T}$$

Принцип осреднения турбулентных потоков в кинематическом отношении эквивалентен разделению турбулентного потока на два потока – осредненный и пульсирующий, потери наложены друг на друга.

Мгновенные значения скоростей турбулентного потока в данной точке пространства можно представить в виде сумм

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad v_z = \bar{v}_z + \bar{v}_z,$$

где  $v'_x, v'_y, v'_z$  – мгновенные изменения скорости относительно осреднённой скорости турбулентного потока.

Наличие пульсационных составляющих скоростей частиц вызывает обмен количеством движения между массами жидкости в живом сечении потока. Отсюда возникают силы сопротивления движению (силы трения).

Для нахождения силы турбулентного трения рассмотрим два соседних условных слоя в движущейся жидкости с площадью соприкосновения  $F$  (рис. 6.7).

Введем новые обозначения для скоростей. Пусть осевая скорость  $v$ , а радиальная  $u$ .

Пусть в слое 1 сосредоточены частицы, имеющие осевую скорость  $\bar{u}$ , а в слое 2 частицы, имеющие соответственные скорости  $\bar{v} + \bar{v}$  и  $\bar{u} + \bar{u}'$ . Ввиду избытка скорости  $\bar{u}'$ , из слоя 2 в слой 1 за время  $t$  будет радиальном направлении переходить некоторая масса жидкости  $\bar{m}_u$ , определяемая величиной пульсационной составляющей радиальной скорости  $u'$ :

$$m_u = \rho Q_u t = \rho u' F t,$$

где  $Q_u$  – расход жидкости в радиальном направлении через площадку  $F$ .

Природа касательных напряжений, возникающих в турбулентном потоке, более сложна, чем в ламинарном. В процессе турбулентного перемешивания массы жидкости из центральной части трубы попадает в область потока у стенок, и наоборот, частицы, движущиеся у стенок – в центральную область потока. Масса, перемещающаяся из центральной части потока к периферии, обладает большими продольными скоростями, чем масса, перемещающаяся от периферии в центральную часть потока, так как осреднённая местная скорость больше в центральной части потока. Массы, движущиеся с меньшими скоростями, попадают в область больших осреднённых скоростей, тормозят движение жидкости в этой области. Таким образом, обмен массами жидкости в потоке в поперечном направлении приводит к соответственному обмену количеством движения.

Возвращаемся к рассматриваемой схеме, отмечаем, что каждая частица, попавшая в слой 1 из слоя 2, обладает некоторым избытком количе-

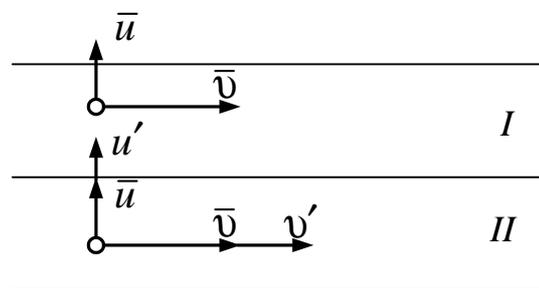


Рис. 6.7. К определению касательных напряжений в турбулентном потоке

ства движения пропорциональным  $\bar{v}'$ . В результате движение в слое 1 ускоряется. Это усиленно действует на слой 2 со стороны слоя 1 силы, направленной против течения.

Суммарный импульс силы трения  $T$  равен суммарному избыточному количеству движения вplyвшими частицами слоя 2 в слой 1:

$$Tt = m_u v'.$$

Сила турбулентного трения:

$$T = \frac{m_u}{t} v' = -\rho u' v' F.$$

Отсюда находим касательные напряжения при турбулентном течении:

$$\tau_T = T / F = -\rho u' v'.$$

Записанное уравнение получил Рейнольдс в 1883 году.

Величина  $\tau_T$  скорости. Поэтому для её определения нужно найти зависимость пульсационных добавок от определённых характеристик потока. Эта зависимость весьма сложна и не до конца изучена.

Статические теории пока что результата не дают.

Используют эмпирические теории в основу которых положена идея Буссинеска о том, чтобы записывать касательные напряжения, вызванные перемешиванием в виде, аналогичном закону Ньютона.

Наибольшее распространение получила теория Л. Прандтля.

По теории Л. Прандтля абсолютные пульсационные составляющие  $N'$  и  $u'$  пропорциональны одной и той же величине:

$$v' \approx u' \approx l_* \frac{dv}{dn},$$

где  $l_*$  – длина пути перемещения, или то расстояние, которое должна пройти частица в поперечном направлении  $n$ , пока не израсходует избытка количества движения, а ее скорость выровняется со скоростью окружающих частиц.

Выражение для  $\tau_T$  записывается так:

$$\tau_T = \rho l_*^2 \left( \frac{dv}{dn} \right)^2 = \left( \rho l_*^2 \frac{dv}{dn} \right) \frac{dv}{dn}.$$

Величина, стоящая в скобках обуславливается  $\epsilon_T$  и называется коэффициентом турбулентности

$$\epsilon_T = \rho l_*^2 \frac{dv}{dn};$$

$$\tau_T = \epsilon_T \frac{dv}{dn}.$$

Фактор турбулентного обмена  $\epsilon_T$  имеет ту же размерность, что и  $\mu$  и играет ту же роль в определении численного значения силы трения. Однако физическая природа  $\epsilon_T$  и  $\mu$  совершенно различна.  $\epsilon_T$  зависит от переменных гидродинамических характеристик потока и не может считаться физической характеристикой жидкости. Условно  $\epsilon_T$  по аналогии называют коэффициентом турбулентной вязкости.

Полученная формула определяет касательные напряжения, возникающие в турбулентном потоке благодаря поперечному переносу избыточного количества движения при перемешивании.

Общие напряжения трения принято определять как сумму напряжений, вызванных вязкостью и турбулентностью:

$$\tau = \tau_{\Lambda} + \tau_T = -\mu \frac{dv}{dn} - \epsilon_T \frac{dv}{dn}.$$

### Поле скоростей при турбулентном движении. Ламинарный слой

Рассмотрим поле скоростей в круглой трубе при турбулентном движении (рис. 6.8).

По оси абсцисс отложена величина относительного радиуса  $r/r_0$ , а по ординатам относительной скорости  $v/v_{\max}$ .

Построение графика в таких безразмерных координатах позволяет придать ему общий характер, отвечающий значительному диапазону скоростей и диаметров труб. На изображенной на графике кривой имеются три отличные друг от друга участка.

Участок 1-2 характеризуется линейным возрастанием скорости.

Здесь в виду близости путей перемешивания  $l_*$  пропорциональна расстоянию  $y$  до стенки, стремиться к нулю

$$l_* = 0,435y \rightarrow 0.$$

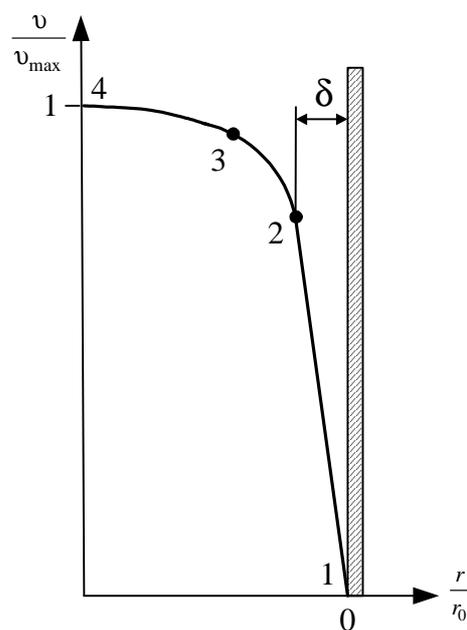


Рис. 6.8. Поле скоростей в трубе при турбулентном движении

Поэтому  $\tau_T$  также стремится к нулю и суммарное напряжение определяется только вязкостью

$$\tau = \tau_\Lambda = -\mu \frac{dv}{dn},$$

то есть в тонком слое толщиной  $\delta$  отсутствуют условия для возникновения перемешивания жидкости. Следовательно, движение в этом слое ламинарное. Поэтому этот участок называется пограничным ламинарным слоем.

Толщина пограничного ламинарного слоя зависит от диаметра трубы и критерия Рейнольдса:

$$\delta = 64,2 \frac{d}{\text{Re}^{7/8}}.$$

Абсолютное значение его толщины невелико и увеличивается с увеличением критерия Рейнольдса.

На участке 3-4 сильно возрастает длина пути перемешивания  $l_*$ , но еще больше снижается градиент скорости  $dv/dn$ .

Поэтому вязкостные напряжения здесь равны нулю ( $\tau_\Lambda = 0$ ), а суммарные турбулентным напряжениям ( $\tau = \tau_T$ ).

Это участок, в котором не сказывается вязкость, носит название турбулентного ядра.

Но здесь надо сравнивать (соотносить) значения  $\tau_\Lambda$  и  $\tau_T$ . В  $\tau_T$  входит  $\epsilon_T$ , в которую в свою очередь  $l_*$  входит в квадрате  $\left( \epsilon_T = l_*^2 \frac{dv}{dn} \right)$ . Так что, мало того, что  $l_*$  в этой зоне велико, но оно еще в квадрате, поэтому  $\tau_T \gg \tau_\Lambda$ .

На участке 2-3 в равной мере действует и вязкость и турбулентность. Здесь  $\tau = \tau_\Lambda + \tau_T$ .

#### 4. СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

**Ламинарное движение** – движение жидкости, при котором отсутствуют изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости.

**Турбулентное движение** – движение жидкости, при котором происходят изменения (пульсации) местных скоростей, приводящие к перемешиванию жидкости.

Скорость потока, при которой происходит смена режима движения жидкости, называется **критической**.

**Верхняя критическая скорость** – это скорость при переходе ламинарного режима движения в турбулентный режим.

**Нижняя критическая скорость** – это скорость при переходе турбулентного режима движения в ламинарный режим.

**Длина перемешивания** – геометрическая величина, которая характеризует внутреннюю структуру потока при турбулентном движении, ее рассматривают как один из масштабов турбулентности.

## 5. МАТЕРИАЛЫ, ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

### 5.1. Материалы к лекции

Возможен следующий план лекции:

1. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса и его критическое значение.
2. Турбулентные потоки. Осредненные скорости и напряжения. Пульсационные составляющие.
3. Двухслойная модель турбулентного потока.
4. Полуэмпирическая теория турбулентности Л. Прандля.

### 5.2. Материалы к лабораторному занятию

#### Лабораторная работа № 4.

#### «Исследование режимов движения жидкости в круглой трубе»

##### Цель работы:

1. Наблюдение ламинарного и турбулентного движения жидкости.
2. Определение значений числа  $Re$  при ламинарном и турбулентном движении.
3. Определение критического значения числа  $Re_{кр}$

#### Общие сведения

Рядом исследователей (Хагеном в 1839, 1854 гг., Д.И. Менделеевым в 1880 г.) было отмечено существование принципиально различных режимов движения жидкости. Исследования англичанина Рейнольдса (1883 г.) позволили выяснить сущность этих различий.

Установка О. Рейнольдса представляла резервуар (рис. 1) из которого по стеклянной трубе диаметром  $d$  вытекала вода, среднюю скорость  $v$  которой можно было регулировать. В эту трубу из сосуда  $A$  по трубке малого диаметра подавалась краска. В результате опытов было установлено:

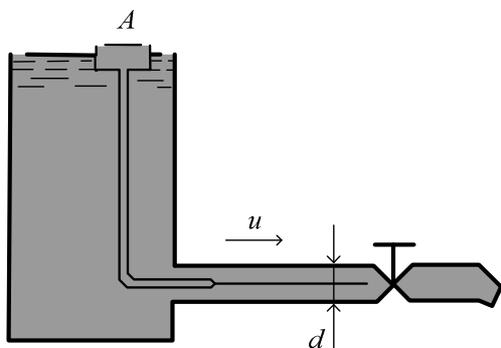


Рис. 1

1) при  $v < v_k$  краска, перемещаясь с водой, движется или тонкой струйкой или отдельными слоями. Такое движение было названо *ламинарным*;

2) при  $v > v_k$  краска равномерно распределяется по всему объему жидкости. Движение частиц жидкости в этом случае носит неустановившийся характер и называется *турбулентным*.

Скорость  $v_k$ , при которой в данной трубе происходила смена режимов движения, была названа *критической*.

О. Рейнольдс установил, что в трубах различного диаметра для жидкостей с различной вязкостью смена режимов осуществляется при одном и том же значении безразмерного комплекса *критерия Рейнольдса*  $Re$  определяемого по формуле:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu},$$

где  $d$  – диаметр трубопровода;

$\nu$  – кинематический коэффициент вязкости жидкости.

Скорость, при которой происходит переход турбулентного режима в ламинарный, называется *нижней критической скоростью*  $v_k^H$ , а число Рейнольдса, соответствующее критической скорости называется *критическим числом*  $Re_k^H$  и принимает значение 2320:

$$Re_k^H = \frac{v_k^H \cdot d}{\nu} = 2320.$$

В случаях, когда живое сечение потока отличается от круглого, а так же при наличии близко расположенных местных сопротивлений (вентилей, поворотов, золотников, клапанов и т.д.) может быть меньше 2320.

Но учитывая, что  $Re_k^H$  найденное для  $v_k^H$  всегда меньше или равно 2320, это значение принимается при расчетах за критическое.

Таким образом, для  $Re < 2320$  движение принято считать ламинарным, а для  $Re > 2320$  – турбулентным.

При различных режимах движения имеют место различные зависимости между потерями напора и средними скоростями движения. При ламинарном движении потери напора пропорциональны первой степени скорости, а при турбулентном – скорости в степени  $m$ , причем  $1,75 < m < 2$ .

### Описание опытной установки

Опытная установка (рис. 2) состоит из напорного бака 1 с водой, сосуда 8 с краской и стеклянной трубки 4. Вода из бака после открытия крана 3 поступает в стеклянную трубку 4, при этом в трубках пьезометров 5 вода устанавливается на некотором уровне определяемом степенью сжатия воздуха в колене 6. Из сосуда 8 в трубку 4, при освобождении зажима 9 может поступать краска по тонкой трубке 10, находящейся внутри трубки 4. Кран 11 служит для регулирования скорости движения жидкости, мерный стакан 12 – для определения расхода жидкости.

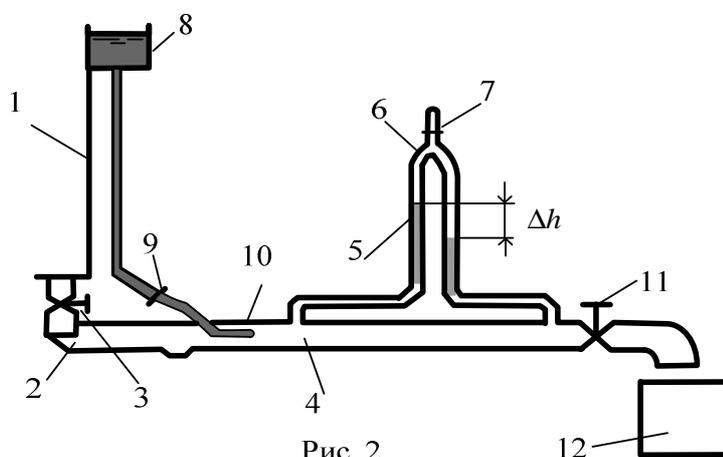


Рис. 2

### Порядок выполнения работы

Открыть кран 3, заполнить трубку 4 и пьезометры 5 водой. Выпустить часть воздуха из колена 6 с помощью зажима 7 с таким расчетом, чтобы вода в пьезометрах 5 достигала произвольного уровня. С помощью крана 11 установить небольшой расход  $Q$  жидкости в трубке 4. Краном 9 пустить краску тонкой струйкой. Если краска перемешивается, то режим движения турбулентный. Для перехода к ламинарному режиму движения следует уменьшить степень открытия крана 11.

Замечая с помощью секундомера время  $t$ , с, заполнить мерный стакан 12 объемом  $V$ . Заметить разность уровней жидкости  $\Delta h$  в пьезометрах 5.

Увеличивая расход  $Q$  сделать 3 аналогичных замера при ламинарном и 5 замеров при турбулентном движении. Определить расход жидкости  $Q_k^e$

в момент перехода ламинарного движения в турбулентное. Закончив измерения, закрыть кран 9, зажимом 3 перекрыть трубку 2, открыв краны 7 и 11 освободить трубку 4 от воды. Закрыть кран 7 и 11.

### Обработка опытных данных

1. Определить расход  $Q$ , зная время  $t$ , с, заполнения мерного стакана 12 объемом  $V$  по формуле:

$$Q = V / t.$$

2. Определить скорости движения воды в трубе 4 зная, что:

$$v = Q / \omega,$$

где  $\omega = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$  – площадь поперечного сечения трубы.

3. Определить значение числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu},$$

где  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости при данной температуре  $t$ :

$$\nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337 \cdot t + 0,000221 \cdot t^2}.$$

4. Данные занести в табл. 1 и построить на миллиметровой бумаге зависимость  $\Delta h = f(v)$  в прямоугольных координатах.

Таблица 1

#### Экспериментальные данные и обработка результатов

Величины	Ед. изм.	Номера опытов						
		1	2	3	4	5	6	7
Объем воды, $V$	см <sup>3</sup>							
Время наполнения, $t$	с							
Расход, $Q = V / t$	см/с							
Диаметр, $d$	см							
Площадь, $\omega = \pi d^2 / 4$	см <sup>2</sup>							
Скорость, $v = Q / \omega$	см/с							
Температура, $t$ °С	градус							
Вязкость, $\nu$	см <sup>2</sup> /с							
Число Рейнольдса, $Re = v \cdot d / \nu$	б. р.							
Потери напора, $\Delta h$	см							

5. По графику определить скорость  $v_k$  в момент перехода линейной зависимости  $\Delta h = f(v)$  в криволинейную и сравнить ее с величиной  $v_k^6$  полученной путем измерения как:

$$v_k^6 = \frac{Q_k^6}{\omega}$$

6. Вычислить  $Re_k$  для  $v_k$  определенной по графику.

7. Привести пример расчета.

## 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение ламинарного течения жидкости.
2. Дайте качественное описание ламинарного течения жидкости.
3. Дайте определение турбулентного течения жидкости.
4. Дайте качественное описание турбулентного течения жидкости.
5. Какую скорость называют критической?
6. Как определить режим движения жидкости?
7. При каких числах Рейнольдса наблюдается ламинарный режим движения жидкости?
8. При каких числах Рейнольдса наблюдается турбулентный режим движения жидкости?
9. В чем состоит физический смысл числа Рейнольдса?
10. Докажите, что число Рейнольдса представляет соотношение сил инерции и сил вязкости.
11. Для решения, каких задач необходимо знать режим движения жидкости?
12. Во сколько раз изменится число Рейнольдса, если диаметр изменить в 2 раза, а расход и температура не меняются?
13. Как изменится число Рейнольдса, если температура жидкости увеличится?
14. Возможен ли переход турбулентного режима в ламинарный при повышении температуры жидкости?
15. Возможен ли переход ламинарного режима в турбулентный при понижении температуры?

16. Как изменится скорость течения жидкости, если ламинарный режим движения жидкости перейдет в турбулентный, а температура жидкости останется постоянной?

17. Как изменится расход жидкости, если турбулентный режим движения жидкости перейдет в ламинарный, а температура жидкости останется постоянной?

18. Происходит ли изменение местных мгновенных скоростей с течением времени при турбулентном движении жидкости?

19. Опишите двухслойную модель турбулентного потока.

## 7. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.

2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.

3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.

4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.

5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Высш. шк., 1998. – 311 с.

6. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.

## МОДУЛЬ 7

### ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

#### 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТЕРЬ НАПОРА

Потери удельной энергии (напора), затрачиваемой на преодоление сопротивлений движению вязкой жидкости (гидравлических сопротивлений), слагаются из потерь двух видов:

1) потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений по длине, пропорциональных длине участков трубы, по которым движется жидкость, – *потерь по длине*  $h_{дл}$ ;

2) потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений в пределах коротких участков в непосредственной близости к тем или иным местным конструктивным устройствам труб, (вход, выход, расширение, сужение, поворот, трубопроводная арматура, фасонные части и т.п.) – *местных потерь напора*  $h_m$ .

Принимается, что *общие потери* напора в системе труб равны сумме потерь напора по длине отдельных участков и всех местных потерь напора:

$$h_{мп} = \sum h_{дл} + \sum h_m . \quad (7.1)$$

Эти потери энергии (в данном случае удельной) обусловлены переходом механической энергии потока в тепловую. Процесс этот необратим.

Наличие гидравлических сопротивлений при движении вязкой жидкости связано с работой сил трения внутри жидкости. Только благодаря силам трения механическая энергия может перейти в теплоту.

Механизм действия сил сопротивления очень сложен. Аналитически пока не удалось получить универсальные соотношения для их вычисления. Потери напора по длине различны для разных видов движения. Поэтому при расчетах потерь напора используют, как правило, эмпирические зависимости.

Приведем классификацию движений по характеру поля скоростей (ограничимся здесь только *установившимся движением*):

1) равномерное движение с постоянными по длине средней скоростью и эпюрой скоростей: ламинарное и турбулентное;

2) неравномерное движение с постоянной по длине средней скоростью и изменяющейся по длине эпюрой скоростей (участки стабилизации эпюры скоростей): ламинарное и турбулентное;

3) неравномерное плавно изменяющееся движение: ламинарное и турбулентное;

4) неравномерное движение с изменением средней скорости и эпюры скоростей в пределах коротких участков, обычно называемых местными сопротивлениями: ламинарное и турбулентное.

Различие кинематической структуры для каждого из перечисленных видов движения определяет различие в расчетных зависимостях для потерь напора по длине. Для турбулентного движения в указанных выше случаях рассматриваются обычно эпюры осредненных скоростей.

**1. Равномерное движение.** Различие в характере поля скоростей при ламинарном и турбулентном движении сказывается и на зависимости потерь напора по длине при этих режимах движения. Исследования потерь напора по длине при равномерном движении в прямолинейных трубопроводах показывают, что зависимость  $h_{\text{дл}}$  от средней скорости  $v$  в логарифмических координатах на графике предстает в виде отрезков прямых линий (рис. 7.1), уравнения которых имеют вид:

$$\lg h_{\text{дл}} = \lg b + m \lg v.$$

При этом общий вид зависимости можно выразить так:

$$h_{\text{дл}} = b \cdot v^m,$$

где  $b$  – учитывает влияние размеров трубы и шероховатости ее стенок и вида жидкости;

$m$  – показатель степени.

На рис. 7.1 отрезок  $AK$ , соответствующий ламинарному движению, образует с осью абсцисс угол  $\theta_1 = 45^\circ$ ,  $m_1 = \text{tg } \theta_1 = 1$ . Точка  $K$  на графике соответствует скорости  $v_{\text{н.кр}}$ . При ламинарном режиме движения потери удельной энергии по длине пропорциональны первой степени скорости.

При турбулентном режиме движения отрезок  $NB$  на графике составляет с осью абсцисс угол  $\theta_2$ ,  $\text{tg } \theta_2 = 1,75 - 2,0$ . Точка  $N$  соответствует скорости  $v_{\text{в.кр}}$ . Следовательно, при турбулентном режиме движения потери удельной энергии пропорциональны средней скорости в степени от 1,75 до 2,0.

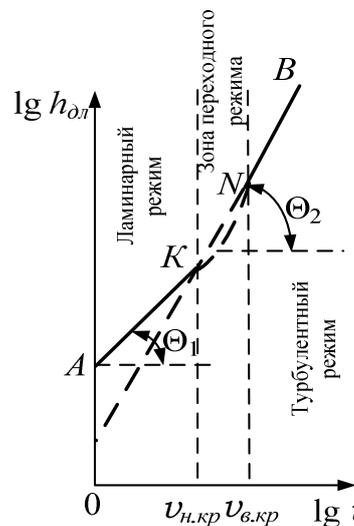


Рис. 7.1. График зависимости  $h_{\text{дл}} = f(v)$  при равномерном движении жидкости в прямолинейных трубопроводах

При значении средней скорости  $v$ , заключенном в пределах  $v_{н.кр} < v < v_{в.кр}$ , зависимость  $h_{дл}=f(v)$  определяется конкретными условиями, в которых происходит движение.

**2. Неравномерное движение с постоянной по длине средней скоростью** (но с изменяющимся по длине распределением продольных составляющих местных скоростей по живому сечению, то есть с изменяющейся по длине эпюрой скоростей) наблюдается в напорных трубопроводах на начальных участках. При турбулентном режиме движения рассматривается распределение по живому сечению (эпюра) продольных осредненных скоростей и пульсационных добавок. На начальном участке, расположенном непосредственно за входом в трубу или в канал, происходит изменение местных скоростей потока от начального (на входе) их распределения по живому сечению до распределения, соответствующего равномерному движению.

При плавном криволинейном входе из достаточно большого резервуара в трубу эпюра местных осредненных скоростей в поперечных сечениях в створе 1-1 будет весьма близкой к равномерной (коэффициент Кориолиса  $\alpha = 1$ ). Скорость непосредственно на стенке равна нулю. Тормозящее влияние сил вязкости приводит к трансформации эпюры скоростей рис. 7.2. В начале трубы вблизи стенок образуется пограничный, симметричный относительно оси слой, в котором скорости при удалении от стенки увеличиваются. На длине начального участка в средней части поперечного сечения сохраняются практически постоянные скорости. Постепенно (вниз по течению) область постоянных скоростей уменьшается, а толщина пограничного слоя растет. Наконец, пограничный слой смыкается на оси трубы. Длину участка от сечения 1-1 до сечения 2-2, где это происходит, называют *длиной начального участка*  $l_{нач}$ . Далее по длине потока распределение скоростей остается почти неизменным.

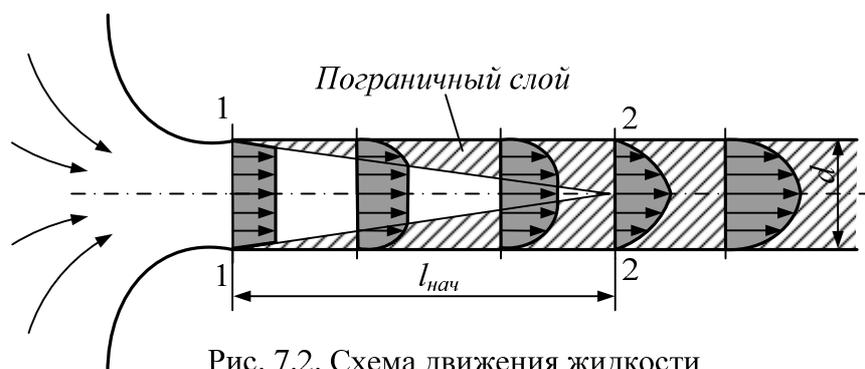


Рис. 7.2. Схема движения жидкости на начальном участке трубы

Толщина пограничного слоя в месте смыкания при симметричном движении равна  $d/2$  ( $d$  – диаметр трубы). Строго говоря, распределение скоростей приближается к распределению, соответствующему равномерному движению, асимптотически.

В условиях, когда в трубе режим движения ламинарный, на всем протяжении начального участка поток будет ламинарным.

Если интенсивность турбулентности на входе в трубу мала, то сначала образуется ламинарный пограничный слой, затем сравнительно небольшой участок с перемежающимся движением и, наконец, турбулентный пограничный слой. При сильно турбулизованном потоке на входе (например, за центробежным насосом, на входе с острой кромкой или за установленной на входе решеткой или сеткой) длина начального участка меньше, чем при ламинарном потоке.

Распределение каждого из параметров потока (осредненные скорости, турбулентные пульсации скорости, касательные напряжения) принимает вид, соответствующий равномерному потоку, на участках разной длины. Кроме того, различные параметры по-разному зависят от числа Рейнольдса, формы входа и поперечного сечения, шероховатости стенок, начальной интенсивности турбулентности потока на входе и т.д.

Иногда движение, при котором распределение осредненных скоростей не изменяется по длине трубы (рис. 7.3, а), называют также *стабилизированным*, или полностью развитым (ламинарным или турбулентным) движением. Длина стабилизации осредненных скоростей на начальном участке при напорном турбулентном движении в трубе составляет  $(30 - 35)d$ , если стабилизацию считать законченной в сечении,

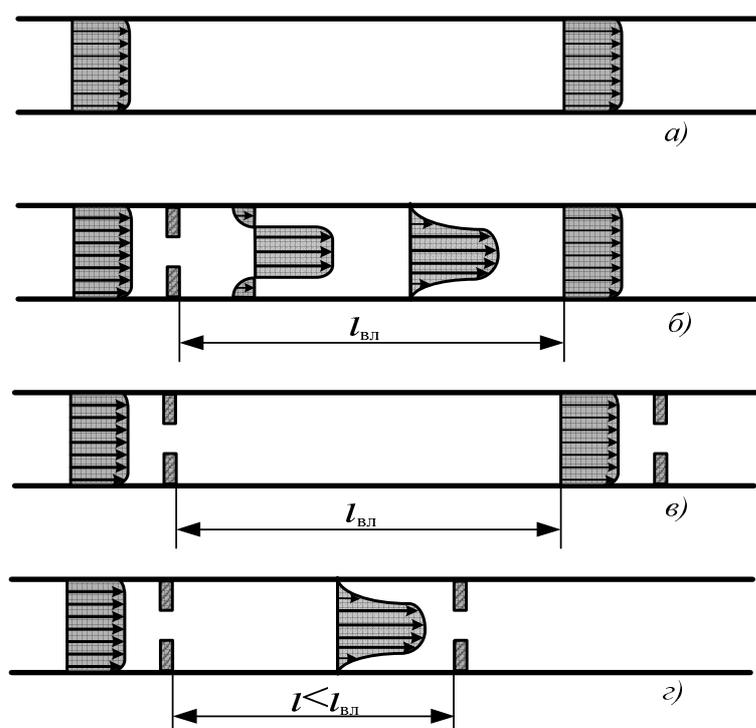


Рис. 7.3. Неравномерное движение жидкости

где отношение  $u_{max}/\bar{u}$  на 3 % превышает значение такого же отношения при равномерном движении.

Стабилизация распределения по живому сечению пульсационных составляющих скорости при турбулентном напорном движении в трубе заканчивается на расстоянии приблизительно  $80d$ .

Таким образом, при расчетах и исследованиях длина начального участка принимается в зависимости от того, какие параметры и с какой степенью приближения к параметрам равномерного движения нас интересуют.

**3. Неравномерное плавно изменяющееся движение.** При этом виде движения потери удельной энергии (напора) по длине часто рассчитывают по тем же формулам, что и потери по длине при равномерном движении (см. далее).

**4. Неравномерное движение с неплавным изменением средней скорости** на коротких участках возникает обычно при протекании жидкости через конструктивные элементы.

При движении жидкости через конструктивные элементы труб и каналов (местные сопротивления) изменяются кинематические характеристики (как осредненные, так и пульсационные, если рассматривается турбулентное движение) по сравнению с движением, не возмущенным наличием местных конструктивных элементов в трубе (канале) (рис. 7.3, б – з).

Если режим движения турбулентный, то за местным возмущающим поток элементом отмечается повышенная пульсация скоростей и более интенсивное перемешивание частиц жидкости; могут произойти отрывы потока от ограничивающих поверхностей (стенок) и образоваться водоворотные зоны с циркуляционным движением жидкости.

По мере удаления вниз по направлению движения от возмущающих поток конструктивных элементов кинематическая структура потока постепенно стабилизируется и приходит к виду, характерному для невозмущенного равномерного движения (рис. 7.3, б).

*Длиной зоны влияния* данного конструктивного элемента (препятствия) называют длину участка, за пределами которого кинематические характеристики потока (в том числе и пульсационные) принимают вид, характерный для невозмущенного потока. Длина зоны влияния на рис. 7.3, б – з обозначена  $l_{вл}$ . Ее также называют *длиной участка стабилизации* эпюры скоростей.

При развитии турбулентном напорном движении в трубах приближенно принимают в зависимости от конкретных условий длину зоны влияния конструктивного элемента  $(30 \div 60)d$  ( $d$  – диаметр трубы).

Равномерное (стабилизированное или полностью развитое) движение имеет место за пределами начального участка ниже по направлению дви-

жения или за пределами зоны влияния конструктивных элементов или устройств. При этом движении не изменяются по длине не только скорости, но и распределение местных осредненных и пульсационных скоростей по живому сечению.

В дополнение к сказанному выше отметим, что при равномерном движении также неизменны по длине гидравлический уклон и касательные напряжения на стенке.

Следует иметь в виду, что суммирование потерь напора по формуле (7.1) может давать приемлемые по точности результаты лишь тогда, когда рассматриваемые конструктивные элементы отстоят друг от друга на расстоянии, не меньшем чем длина зоны влияния, то есть между местными сопротивлениями, возмущающими поток, должны иметься участки со стабилизированным движением (рис. 7.3, в). В противном случае (рис. 7.3, г) распределение скоростей на подходе к местному препятствию не соответствует равномерному движению и расчеты по формуле (7.1) могут привести к ошибкам.

Потери напора по длине экспериментально определяются следующим образом.

В сечениях, где движение равномерное (то есть за пределами начального участка или зоны влияния), к отверстиям в стенках трубопровода присоединяются пьезометры (рис. 7.4). Из уравнения Бернулли, составленного для этих сечений, следует, что:

$$h_{mp} = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} \right).$$

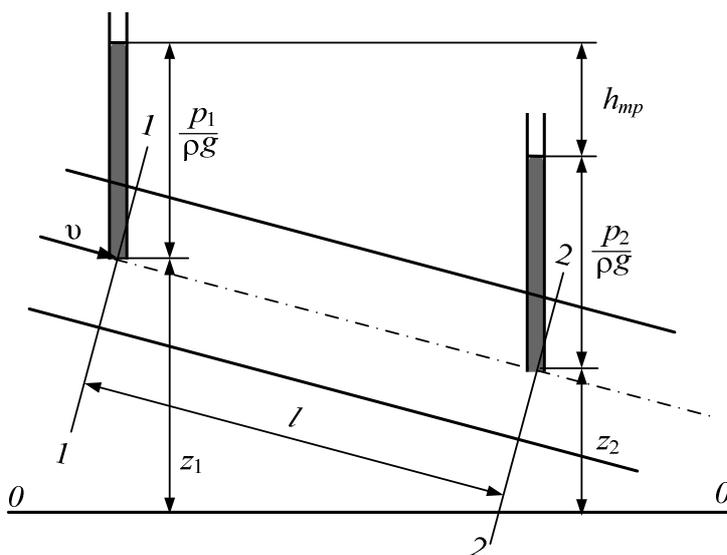


Рис. 7.4. Определение потерь напора по длине

При равномерном движении ( $v_1 = v_2$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2$ ) имеем:

$$h_{mp} = \left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \right)$$

или

$$h_{mp} = \Delta H_n,$$

где  $\Delta H_n$  – разность пьезометрических напоров.

В горизонтальной прямолинейной трубе ( $z_1 = z_2$ ) при равномерном движении потери напора определяются так:

$$h_{mp} = \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

Обычно потери напора выражают через скоростной напор:

$$h_{mp} = \zeta \frac{v^2}{2g}, \quad (7.2)$$

где  $\zeta$  – коэффициент сопротивления (коэффициент потерь), показывающий, какому количеству скоростных напоров (или долей скоростного напора) соответствует потеря напора, затрачиваемого на преодоление данного сопротивления.

В форме (7.2) выражаются как потери по длине:

$$h_{dl} = \zeta_{dl} \frac{v^2}{2g},$$

так и местные потери напора (формула Вейсбаха):

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g},$$

где  $\zeta_{dl}$  – коэффициент сопротивления по длине;

$\zeta_m$  – коэффициент местного сопротивления.

Большинство коэффициентов сопротивления, приводимых в справочниках, найдены экспериментально.

При равномерном движении:

$$\zeta_{dl} = \lambda \frac{l}{d}.$$

Тогда:

$$h_{dl} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \text{ – формула Дарси – Вейсбаха,}$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси);

$l$  – длина трубопровода;

$d$  – диаметр трубопровода.

Нетрудно выяснить физический смысл коэффициента  $\lambda$ , если рассмотреть условие равномерного движения в трубе цилиндрического объема длиной  $l$  и диаметром  $d$ , а именно равенство нулю суммы сил, действующих на объем (сил давления и силы трения).

Это равенство имеет вид:

$$\frac{\pi d^2}{4} p_{mp} - \pi d \cdot l \cdot \tau_0 = 0,$$

где  $\tau_0$  – напряжение трения на стенке трубы.

Решая это уравнение совместно с формулой Дарси – Вейсбаха получаем:

$$\lambda = \frac{4\tau_0}{\rho v^2 / 2},$$

то есть коэффициент  $\lambda$  есть величина, пропорциональная отношению напряжения трения на стенке трубы к динамическому давлению, подсчитанному по средней скорости.

Ввиду постоянства объемного расхода несжимаемой жидкости вдоль трубы постоянного сечения скорость и удельная кинетическая энергия также остаются строго постоянными, несмотря на наличие гидравлических сопротивлений и потерь напора.

Таким образом, потери на трение или потери по длине – это потери энергии, которые в чистом виде возникают в прямых трубах постоянного сечения, то есть при равномерном течении, и возрастают пропорционально длине трубы. Этот вид потерь обусловлен внутренним трением в жидкости, а потому он имеет место не только в шероховатых, но и в гладких трубах.

## 2. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

Рассмотрим равномерное напорное движение жидкости в прямолинейной наклонной трубе, рис. 7.5, радиусом  $r_0$  с площадью живого сечения  $\omega$  и смоченным периметром  $\chi$ . Выделим отсек длиной  $l$  и составим уравнение равномерного движения массы жидкости, заключенной в отсеке.

При равномерном движении сумма проекций на направление движения (на ось трубы) внешних сил, действующих на жидкость в выделенном отсеке, должна быть равна нулю:

$$P - T + G \cos \theta = 0,$$

где  $P$  – равнодействующая сила давления в сечениях 1-1 и 2-2;

$T$  – направленная против течения равнодействующая сил трения, действующих на боковой поверхности отсека  $\chi l$ ;

$G$  – вес жидкости в выделенном отсеке.

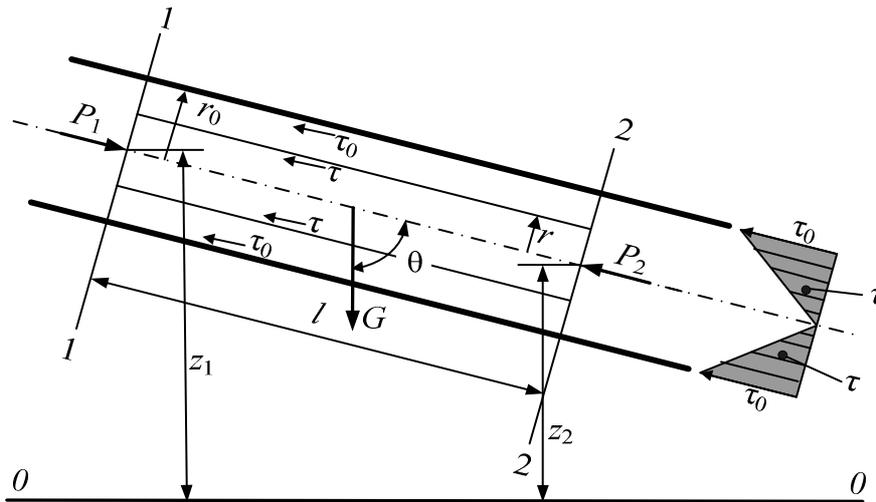


Рис. 7.5. Схема к выводу распределения касательных напряжений по сечению круглой трубы

Тогда:

$$(p_1 - p_2) \cdot \omega - \tau_0 \chi l + \rho g \omega l \cos \theta = 0,$$

где  $\tau_0$  – касательное напряжение на стенке трубы;

$p_1$  и  $p_2$  – давления, действующие в центрах тяжести торцевых сечений отсека  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ ;

$z_1$  и  $z_2$  – координаты центров тяжести этих сечений.

Учитывая, что  $l \cdot \cos \theta = z_1 - z_2$ , имеем:

$$(p_1 - p_2) \cdot \omega - \tau_0 \chi l + \rho g \omega (z_1 - z_2) = 0.$$

Разделив все члены уравнения на  $\rho g \omega$ , получим:

$$z_1 - z_2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{\tau_0 \chi l}{\rho g \omega}.$$

При равномерном движении:

$$\left( z_1 + \frac{p_1}{g\rho} \right) - \left( z_2 + \frac{p_2}{g\rho} \right) = h_{dl}.$$

Тогда касательные напряжения на стенке трубы:

$$\tau_0 = \rho g \frac{\omega}{\chi} \cdot \frac{h_{dl}}{l}.$$

Так как  $\omega / \chi = R$  – гидравлический радиус, а  $h_{dl} / l = J$  – гидравлический уклон, то:

$$\tau_0 = \rho g R J,$$

или

$$\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J. \quad (7.3)$$

Распределение касательных напряжений по сечению трубы может быть выяснено следующим образом. Выделим в потоке цилиндрический отсек жидкости, боковая поверхность которого отстоит от оси трубы на размер  $r$ , меньший чем радиус трубы  $r_0$ . Тогда для трубы получим:

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J, \quad (7.4)$$

где  $\tau$  – касательное напряжение, действующее на боковой поверхности выделенного в жидкости цилиндра с радиусом поперечного сечения  $r$ .

Сравнивая (7.3) и (7.4), видим, что:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0} \text{ и } \tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}.$$

Так как  $r = r_0 - z'$ , где  $z'$  – расстояние по нормали от стенки трубы до рассматриваемой боковой поверхности отсека, то имеем:

$$\tau = \tau_0 (r_0 - z') / r_0 \text{ или } \tau = \tau_0 \left( 1 - \frac{z'}{r_0} \right). \quad (7.5)$$

Следовательно, при равномерном движении касательное напряжение по радиусу трубы распределено по линейному закону. Согласно (7.5) касательное напряжение на стенке (при  $z' = 0$ ) имеет максимальное значение, равное  $\tau_0$ . На оси трубы касательное напряжение равно нулю.

Приведем другую формулу для  $h_{\text{дл}}$ :

$$h_{\text{дл}} = \frac{\tau_0 \cdot l}{\rho \cdot g \cdot R}.$$

Таким образом, видно что при равномерном движении потери напора по длине в данных условиях ( $l$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $R$ ) можно определять через касательное напряжение на стенке.

### 3. ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

#### А. Ламинарный режим движения

##### 3.1. Распределение местных скоростей. Расход. Средняя скорость

*Цилиндрические трубы круглого сечения. Распределение местных скоростей.* Рассмотрим равномерное ламинарное напорное движение в цилиндрической трубе круглого поперечного сечения радиусом  $r_0$  (рис. 7.6).

Движение – осесимметричное. Такое движение целесообразно рассматривать в системе координат  $(x, r)$ , где ось  $Ox$  направлена вдоль оси трубы, а  $r$  – радиус точки в нормальном к оси сечении.

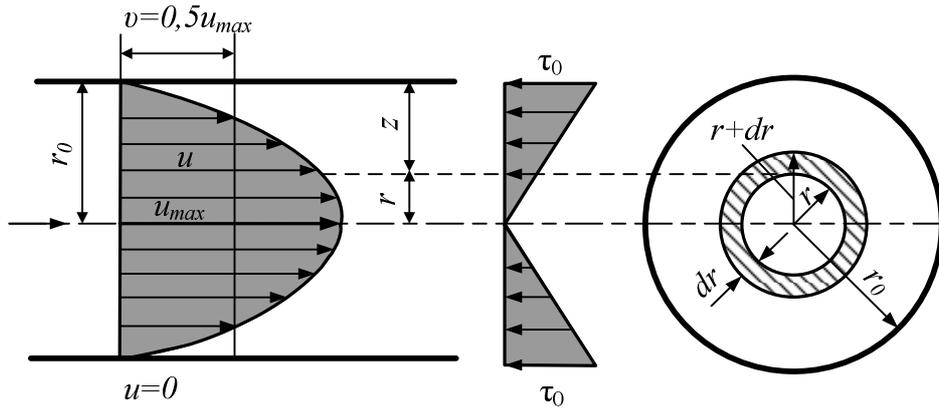


Рис. 7.6. Распределение местных скоростей по живому сечению потока жидкости в цилиндрической трубе при ламинарном режиме движения

При равномерном ламинарном движении жидкости в трубе:

$$u_x = u; \quad u_r = 0.$$

Движение можно представить как совокупность бесконечно тонких кольцевых концентрических слоев, перемещающихся относительно друг друга.

Возникающие между слоями жидкости касательные напряжения по Ньютону:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}.$$

С ростом  $r$  (от оси к стенке трубы) скорость  $u$  уменьшается, поэтому градиент скорости  $\frac{du}{dr} < 0$ . Поскольку касательное напряжение  $\tau$  – величина положительная, вводится знак минус.

Для касательного напряжения ранее было получено соотношение:

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J,$$

где  $J$  – гидравлический уклон.

Тогда получим:

$$\rho g \frac{r}{2} J = -\mu \frac{du}{dr},$$

откуда 
$$du = -\frac{\rho g J}{2\mu} r dr = -\frac{gJ}{2\nu} r dr.$$

Полагая, что  $\nu$  не изменяется в пределах живого сечения [ $\nu \neq f(r)$ ], и учитывая, что  $J$  не зависит от  $r$ , получаем

$$\int du = -\frac{gJ}{2\nu} \int r dr.$$

После интегрирования

$$u = -\frac{gJ}{4\nu}r^2 + C.$$

Находим постоянную интегрирования  $C$  из условия «прилипания» жидкости к стенке. При  $r = r_0$  скорость  $u = 0$ , поэтому:

$$C = \frac{gJ}{4\nu} \cdot r_0^2.$$

Тогда для местной скорости в точке живого сечения, расположенной на расстоянии  $r$  от оси трубы, имеем:

$$u = \frac{gJ}{4\nu}(r_0^2 - r^2). \quad (7.6)$$

Таким образом, при ламинарном движении жидкости в цилиндрической трубе круглого сечения (напорный поток) распределение местных скоростей по радиусу имеет параболический характер (см. рис. 7.6). Плоская эпюра скорости – парабола.

Из (7.6) следует, что максимальная скорость имеет место на оси трубы, то есть при  $r = 0$ :

$$u_{\max} = \frac{gJ}{4\nu}r_0^2.$$

Выразим местную скорость  $u$  через  $u_{\max}$ :

$$u = u_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]. \quad (7.7)$$

Безразмерная местная скорость:

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2. \quad (7.8)$$

Следовательно, эпюры безразмерных местных скоростей при ламинарном движении жидкости в трубах одинаковы и их можно представить параболой (см. рис. 7.6).

*Расход.* Для определения расхода в одном из поперечных сечений трубы выделим на расстоянии  $r$  от оси трубы элементарную площадку в виде кольца толщиной  $dr$  (см. рис. 7.6). Площадь кольца  $d\omega = 2\pi r dr$ . Расход через площадку определится по соотношению  $dQ = u 2\pi r dr$ . Расход через сечение:

$$Q = \int_0^{r_0} u d\omega = 2\pi \int_0^{r_0} ur dr.$$

Подставив значение  $u$  из (7.7) и помня замечание о независимости  $v$  от  $r$ , получим:

$$Q = \frac{2\pi u_{\max}}{r_0^2} \int (r_0^2 - r^2) r dr = \frac{\pi r_0^2}{2} u_{\max}$$

или 
$$Q = \frac{\pi g J}{128\nu} d^4.$$

Важно отметить, что при заданном  $J$  расход в трубе в условиях напорного ламинарного движения пропорционален четвертой степени диаметра.

*Средняя скорость.* Учитывая, что  $v = Q / \omega$ , найдем выражение для средней скорости:

$$v = \frac{gJ}{32\nu} d^2 = \frac{gJ}{8\nu} r_0^2. \quad (7.9)$$

Сравнивая формулы для  $u_{\max}$  и  $v$ , видим, что:

$$v = 0,5 u_{\max},$$

то есть средняя скорость в сечении напорного ламинарного потока в цилиндрической трубе круглого сечения равна половине максимальной скорости.

*Коэффициент кинетической энергии* равен:

$$\alpha = \frac{1}{\omega} \int \left( \frac{u}{v} \right)^3 d\omega = \frac{\int_0^{r_0} \left[ \frac{gJ}{4\nu} (r_0^2 - r^2) \right]^3 2\pi r dr}{\pi r_0^2 \left( \frac{gJ r_0^2}{8\nu} \right)^3} = 2.$$

Градиент местной скорости  $\frac{du}{dr} = -\frac{gJ}{2\nu} r$ , то есть изменяется прямо пропорционально расстоянию  $r$  данной точки (данного слоя) от оси трубы.

Градиент  $\frac{du}{dr} < 0$ .

*Касательные напряжения* линейно увеличиваются от нуля на оси трубы до  $\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J$  на стенке (см. рис. 7.6).

Действительно,  $\tau = -\mu \frac{du}{dr}$ , а  $\frac{du}{dr} = -\frac{gJ}{2\nu} r$ , откуда  $\tau = \rho g \frac{r}{2} J$ .

### 3.2. Коэффициент Дарси при ламинарном напорном движении в трубе

Из (7.9) можно записать выражение для гидравлического уклона:

$$J = \frac{h_{\text{дл}}}{l} = \frac{32\nu\nu}{gd^2}.$$

Тогда имеем

$$h_{\text{дл}} = \frac{32\nu l \nu}{gd^2}. \quad (7.10)$$

Зависимость (7.10) определяющая величину потерь напора при ламинарном режиме движения, показывает, что *потери напора при ламинарном режиме пропорциональны первой степени средней скорости зависят от рода жидкости, обратно пропорциональны площади сечения трубы и не зависят от шероховатости стенок трубы.*

Учитывая, что общее выражение для потерь напора по длине труб определяется по формуле Дарси – Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\nu^2}{2g}, \quad (7.11)$$

приравняв его к (7.10), получим:

$$\frac{\lambda \nu^2}{d \cdot 2g} = \frac{32\nu\nu}{gd^2}.$$

Отсюда коэффициент Дарси (коэффициент гидравлического трения):

$$\lambda = \frac{64\nu}{\nu d},$$

или

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Если выразить число  $Re$  через гидравлический радиус  $R$ , то:

$$\lambda = \frac{16}{Re_R}.$$

*Потери напора по длине трубы круглого сечения при равномерном ламинарном движении пропорциональны средней скорости потока в первой степени.* Это следует из (7.11), если подставить в эту формулу  $\lambda = 64 \cdot \nu / (\nu \cdot d)$ , и из (7.10). Опытные данные подтверждают установленную зависимость  $h_{\text{дл}}$  от  $\nu$  в первой степени.

## Б. Турбулентный режим движения

### 3.3. Логарифмический закон распределения осредненных скоростей в турбулентном потоке

Рассмотрим плоское равномерное турбулентное движение вдоль твердой границы, в системе координат  $x, y, z$ . Направление оси  $Ox$  совпадает с направлением линий тока осредненного движения, которые представляют собой параллельные прямые. Тогда  $\bar{u}_x = \bar{u}_x(z)$ ;  $\bar{u}_y = 0$ ;  $\bar{u}_z = 0$ , где  $z$  – расстояние данной точки от стенки по нормали.

Согласно (6.1) касательное напряжение в турбулентном потоке:

$$\tau = \mu \cdot \frac{d\bar{u}_x}{dz} + \rho \cdot l^2 \cdot \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2.$$

Если поток сильно турбулирован, то первый член пренебрежимо мал и тогда:

$$\tau = \tau_{турб} = \rho \cdot l^2 \cdot \left( \frac{d\bar{u}_x}{dz} \right)^2.$$

Для вывода закона распределения скоростей при турбулентном движении сначала введем предположения относительно длины пути перемешивания  $l$ . Для определения длины пути перемешивания существует несколько формул, наиболее простой из них является формула Прандтля, согласно которой в безграничном потоке, движущемся вдоль плоской твердой стенки,  $l = \chi \cdot z$ , где  $\chi$  – коэффициент.

Измерения показывают, что вблизи стенки трубы при  $\delta_s < z < \cong 0,1 r_0$  можно принять  $l = 0,4 z$ , где  $\delta_s$  – толщина вязкого подслоя. Однако при удалении от стенки эта зависимость становится не соответствующей данным измерений и должна быть уточнена.

Примем  $l$  по формуле А.А. Саткевича для трубы:

$$l = \chi \cdot z \sqrt{1 - z/r_0}. \quad (7.12)$$

Согласно (7.12)  $l$  приобретает наибольшее значение при  $z = \frac{2}{3} r_0$ , а на стенке и на оси трубы длина пути перемешивания  $l = 0$ .

Численные значения коэффициента  $\chi$  зависят от числа  $Re$ , коэффициент  $\chi$  изменяется при переходе от одних точек к другим в пределах живого сечения. Если поток взвесенесущий или аэрированный, то  $\chi$  зависит от концентрации твердых частиц или воздуха в жидкости: с увеличением концентрации наносов и воздуха  $\chi$  уменьшается.

Для турбулентных потоков в трубах  $\chi$  приближенно можно принять равным 0,4. Это значение получено Никурадзе по данным опытов при турбулентном режиме движения в круглых цилиндрических трубах с искусственно созданной равнозернистой шероховатостью. Для зоны живого сечения, в которой можно вследствие интенсивного перемешивания пренебречь чисто вязкостными напряжениями, то есть в турбулентном ядре,  $\chi$  можно принимать по:

$$\tau_{турб} = \rho \cdot l^2 \cdot \left( \frac{du}{dz} \right)^2.$$

Здесь и далее обозначаем  $\bar{u}_x = u$ .

Подставив в эту формулу значение  $l$  из (7.12), получим:

$$\tau_{турб} = \rho \chi^2 z^2 \cdot \left( 1 - \frac{z}{r_0} \right) \cdot \left( \frac{du}{dz} \right)^2.$$

Так как по (7.5)  $\tau = \tau_0 (1 - z/r_0)$ , то

$$\tau_{0турб} = \rho \chi^2 z^2 \cdot \left( \frac{du}{dz} \right)^2.$$

Но  $\tau_0/\rho = u_*^2$ , и тогда

$$du = \frac{u_*}{\chi} \cdot \frac{dz}{z}.$$

Здесь можно принять  $\chi$  не зависящим от местоположения рассматриваемой точки по отношению к стенке трубы, то есть от  $z$ . Тогда, вынеся  $u_*/\chi$  за знак интеграла, получим:

$$u = \frac{u_*}{\chi} \cdot \ln z + \text{const},$$

то есть *логарифмический закон распределения скоростей в турбулентном потоке*.

Отметим, что хотя измерение длины пути перемешивания  $l$  нельзя осуществить, можно сопоставить измеренные в опыте значения скоростей (это легко сделать) с вычисленными по формуле распределения скоростей. Их полное или удовлетворительное совпадение будет свидетельствовать о правильности принятой формулы для  $l$  как функции  $z$  (то есть в зависимости от удаления от стенки).

Логарифмический закон распределения скоростей вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными для труб и открытых потоков, за исключением области вблизи стенок, так как в пристенной области нельзя пренебречь вязкостными напряжениями.

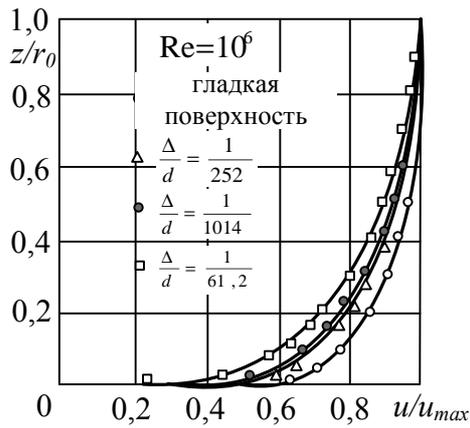


Рис. 7.7. Распределение осредненных скоростей в трубе при турбулентном движении

При турбулентном движении перемешивание частиц жидкости и происходящий при этом обмен количеством движения приводят к выравниванию осредненных скоростей в различных точках живого сечения. Особенно это заметно при сравнении распределения осредненных скоростей в трубе при ламинарном (рис. 7.6) и турбулентном (рис. 7.7) движении. При ламинарном движении  $v/u_{\max} = 0,5$ , а при турбулентном движении это отношение – переменное и увеличивается с увеличением числа Рейнольдса.

### 3.4. Шероховатость. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Толщина вязкого подслоя

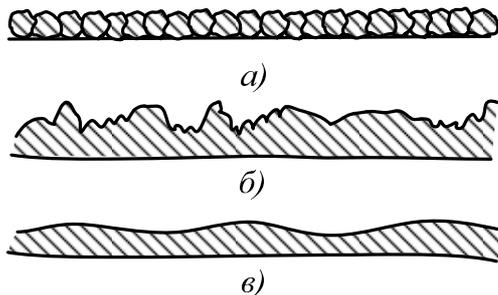


Рис. 7.8. Шероховатость поверхности

*Шероховатость поверхности* труб может быть весьма различной. Если поверхность труб покрывается специально отсортированными зёрнами песка одной фракции, то получается *равнозернистая шероховатость* (рис. 7.8, а). Она используется только в лабораторных исследованиях.

Поверхность труб обычно *неравнозернистая*, она может быть волнистой с различными высотами и длинами волн (или микроволн) (рис. 7.8, б, в).

Шероховатость стенок труб определяется рядом факторов: материалом стенок, характером механической обработки внутренней поверхности трубы, от чего зависят высота выступов шероховатости, их форма, густота и характер их размещения на поверхности; наличием или отсутствием в трубе ржавчины, коррозии, отложения осадков, защитных покрытий и т.д.

Для грубой количественной оценки шероховатости вводится понятие о средней высоте выступов (бугорков) шероховатости. Эту высоту, измеряемую в линейных единицах, называют *абсолютной шероховатостью*  $\Delta$ . Опыты показали, что при одной и той же величине абсолютной шероховатости влияние ее на величину гидравлических сопротивлений и распреде-

ление скоростей различно в зависимости от диаметра трубы. Поэтому вводится понятие об *относительной шероховатости*, измеряемой отношением абсолютной шероховатости к диаметру трубы, то есть величиной  $\Delta / d$ .

Учет конкретных особенностей шероховатости необходим в гидравлических исследованиях и расчетах.

Наиболее полные сведения о шероховатости, о размерах выступов и их взаимном расположении дает статистическое описание.

**Понятие о гидравлически гладких и гидравлически шероховатых трубах.** Соотношение между высотой выступов шероховатости  $\Delta$  и толщиной вязкого подслоя  $\delta_\nu$  определяет структуру потока.

Если высота выступов шероховатости  $\Delta$  меньше, чем толщина вязкого подслоя  $\delta_\nu$ , то все неровности полностью погружены в этот подслой и жидкость в пределах этого подслоя плавно обтекает выступы шероховатости. В этом случае шероховатость стенок не влияет на характер движения и, соответственно, потери напора не зависят от шероховатости. Такие стенки и трубы условно называются *гидравлически гладкими* (рис. 7.9, а).

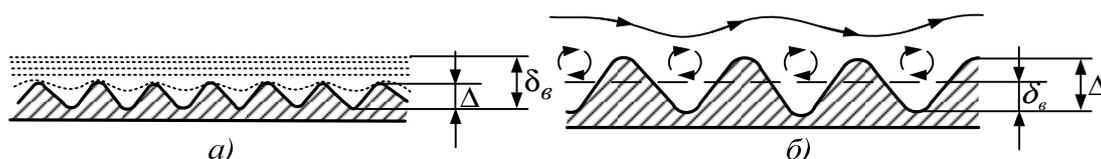


Рис. 7.9. Гидравлически гладкие (а) и гидравлически шероховатые (б) стенки

Если высота выступов шероховатости  $\Delta$  превышает толщину вязкого подслоя  $\delta_\nu$ , то неровности стенок выходят в пределы турбулентного ядра, поток обтекает выступы с отрывом, сопровождающимся интенсивным перемешиванием частиц. В этом случае потери напора зависят от шероховатости, и такие трубы называются *гидравлически шероховатыми* (рис. 7.9, б). В третьем случае, являющемся промежуточным между двумя вышеуказанными, абсолютная высота выступов шероховатости примерно равна толщине вязкого подслоя.

Толщина вязкого подслоя определяется как:

$$\delta_\nu \approx \frac{30 \cdot d}{Re \cdot \sqrt{\lambda}}. \quad (7.13)$$

Таким образом, с ростом числа  $Re$ , а также коэффициента Дарси  $\lambda$ , толщина вязкого подслоя  $\delta_\nu$  уменьшается.

Разделение стенок (трубы) на гидравлически гладкие и шероховатые является условным, поскольку, как следует из формулы (7.13), толщина  $\delta_\nu$

обратно пропорциональна числу  $Re$ . Таким образом, при движении жидкости вдоль одной и той же поверхности с неизменной высотой выступа шероховатости в зависимости от числа Рейнольдса толщина вязкого подслоя может изменяться. При увеличении числа  $Re$  толщина  $\delta_v$  уменьшается и стенка, бывшая гидравлически гладкой, может стать шероховатой, так как высота выступов шероховатости окажется больше толщины вязкого подслоя и шероховатость станет влиять на характер движения, и, следовательно, на потери напора.

### 3.5. Экспериментальное изучение коэффициента Дарси. График Никурадзе

Важные экспериментальные исследования, посвященные изучению зависимости коэффициента Дарси  $\lambda$  от числа  $Re$  и относительной шероховатости, были проведены Никурадзе для шероховатых труб. Стенки труб имели специально созданную равнозернистую шероховатость. Для создания этой шероховатости сначала через калиброванные отверстия отсеивался песок определенных размеров, который затем равномерно наносился на стенки, предварительно покрытые слоем лака, благодаря чему песок приклеивался к стенкам. Размеры зерен песка принимались за размер выступа шероховатости  $\Delta$ . В результате были получены трубы с различными значениями относительной шероховатости стенок:  $\Delta / d$  для труб (или относительной гладкости  $d / \Delta$  как показано на рис. 7.10). В опытах были измерены потери напора и расход, вычислены средние скорости потоков и коэффициенты  $\lambda$ . Результаты Никурадзе показаны на рис. 7.10. По оси абсцисс отложены значения  $\lg Re$  и по оси ординат  $\lg (100\lambda)$ . Представление опытных данных в таких координатах позволяет по углу наклона прямых (в частности, I и II) получить показатель степени в степенной зависимости  $\lambda$  от  $Re$ .

Все опытные точки, полученные Никурадзе, до  $\lg Re = 3,35$  ( $Re < 2300$ , ламинарный режим движения) независимо от шероховатости стенок труб располагаются на прямой. Это значит, что при ламинарном движении  $\lambda$  не зависит от шероховатости трубы  $\Delta$ . При  $Re 2300 \div 3000$  ( $\lg Re = 3,35 \div 3,5$ ) происходит переход от ламинарного режима к турбулентному. В опытах Никурадзе в пределах  $2300 < Re < 4000$  коэффициент  $\lambda$  по-прежнему не зависит от шероховатости. При турбулентном движении  $Re > 4000$  характер экспериментальных кривых различен в зависимости от значения  $d / \Delta$ . При больших относительных шероховатостях ( $d / \Delta = 30$ ) экспериментальная кривая сначала продолжает подниматься, а затем при  $Re = 3 \cdot 10^4$  становит-

ся горизонтальной. При меньших относительных шероховатостях кривые ведут себя иначе: сначала независимо от относительной шероховатости экспериментальные точки ложатся на прямую II. Затем по достижении  $Re \geq 20d/\Delta$  эти точки на графике рис. 7.10 отходят от прямой II, образуют впадину, и при  $Re \geq 500 d/\Delta$  превращаются в горизонтальные прямые.

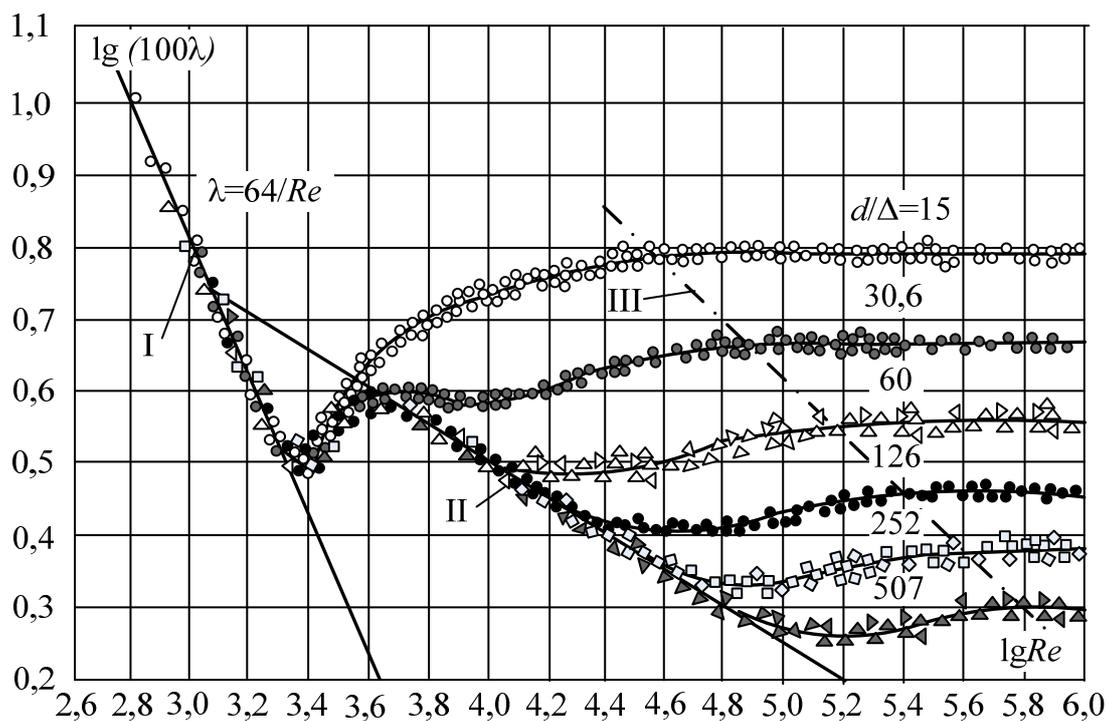


Рис. 7.10. График Никурадзе

Таким образом, исследования, выполненные Никурадзе, наглядно свидетельствуют о наличии различных областей сопротивления при напорном движении в трубах:

1-я область – ламинарный режим движения ( $Re \leq 2300$ )  $\lambda = f(Re^{-1})$ , прямая I на рис. 7.10:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \text{ (формула Пуазейля);}$$

2-я область – переход от ламинарного к турбулентному режиму  $2300 \leq Re \leq 4000$ :

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}};$$

3-я область – турбулентный режим, гидравлически гладкие трубы,  $\lambda = f(Re^{-0,25})$ , пряма II на рис. 7.10:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, \text{ (формула Блазиуса } 4000 < Re < 10^5);$$

4-я – турбулентный режим (переходная область между областью гидравлически гладких труб и квадратичной областью),  $\lambda = f(Re, \Delta / d)$  – между линиями II и III на рис. 7.10:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25},$$

$$\text{(формула Альтшуля, } \frac{27}{(\Delta/d)^{1,143}} < Re < \frac{500}{(\Delta/d)});$$

5-я – турбулентный режим, квадратичная область сопротивления,  $\lambda = f(\Delta / d)$ , правее линии III на рис. 7.10:

$$\lambda = 0,11(\Delta / d)^{0,25}, \text{ (формула Шифринсона, } Re > \frac{500}{(\Delta/d)}).$$

Границы областей применения формул для определения  $\lambda$  приведены на рис. 7.11.

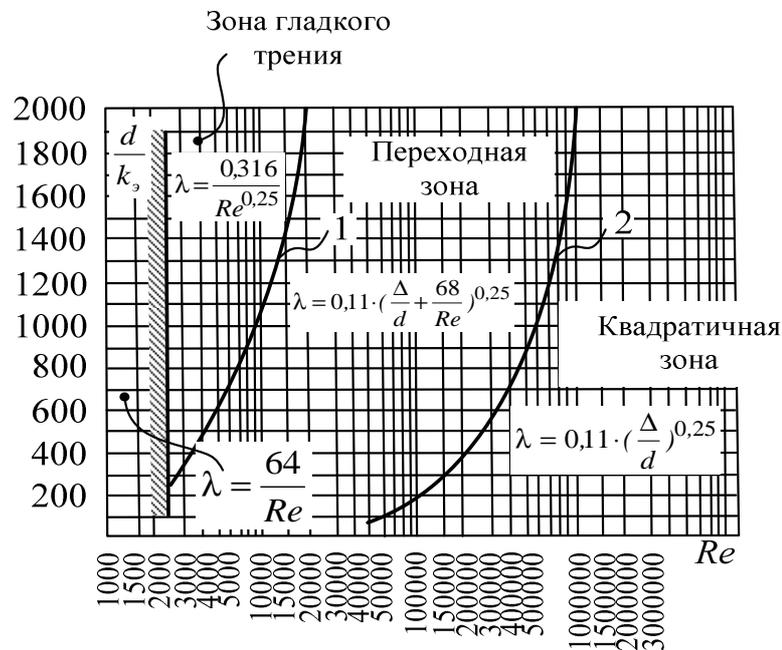


Рис. 7.11. Границы областей применения формул для определения :

1)  $Re \frac{\Delta}{d} = 10$ ; 2)  $Re \frac{\Delta}{d} = 500$ .

## **Коэффициенты Дарси для труб с естественной технической шероховатостью**

В результате опытов Никурадзе и других исследователей над сопротивлением трубопроводов были предложены различные эмпирические формулы для определения  $\lambda$ .

В частности для вполне шероховатых труб – формула Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25} .$$

Применение графиков Никурадзе для практических расчетов встретилось со значительными трудностями. Применяемые в технике материалы отличаются не только средней высотой выступов шероховатости, но и различной форме выступов, густоту и характер их расположения. Даже при одинаковых значениях  $\Delta$ , значения  $\lambda$  могут существенно меняться. Учесть влияние этих факторов непосредственными измерениями практически невозможно.

В связи с этим в практику гидравлических расчетов было введено представление об эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости  $\Delta_э$ .

Под эквивалентной шероховатостью понимают высоту выступов равнозернистой шероховатости из однородного песка, при которой в квадратичной области сопротивления получается такое же значение  $\lambda$ , что и в рассматриваемой трубе. Определяют эквивалентную равнозернистую шероховатость трубы следующим образом. Опытным путем определяют  $\lambda$  при различных  $Re$  и строят график  $\lambda = f(Re)$ , который сравнивают с графиками Никурадзе. Исследуемой трубе приписывают относительную шероховатость, равную относительной шероховатости той трубы в опытах Никурадзе, для которой в квадратичной области график совпадает с графиком исследуемой.

Для вычисления  $\Delta_э$  можно воспользоваться формулой:

$$\lg \Delta_э = \lg d + 0,57 - 0,5 \cdot \sqrt{\lambda_{кв}} .$$

Таким образом, эквивалентная шероховатость трубопроводов из различных материалов определяется не непосредственными измерениями высоты выступов, но находится с помощью гидравлических испытаний трубопроводов.

Рядом авторов (Исаев, Мурин, Шевелев) были проведены систематические экспериментальные исследования гидравлических сопротивлений технических трубопроводов.

Номограмма Мурина для новых стальных труб (рис. 7.12) имеет ряд отличий от графика Никурадзе:

1. Коэффициент  $\lambda$  в переходной области оказывается всегда больше, чем в квадратичной (а не меньше, чем у Никурадзе).
2. Полученные кривые не имеют впадин, характерных для кривых Никурадзе.

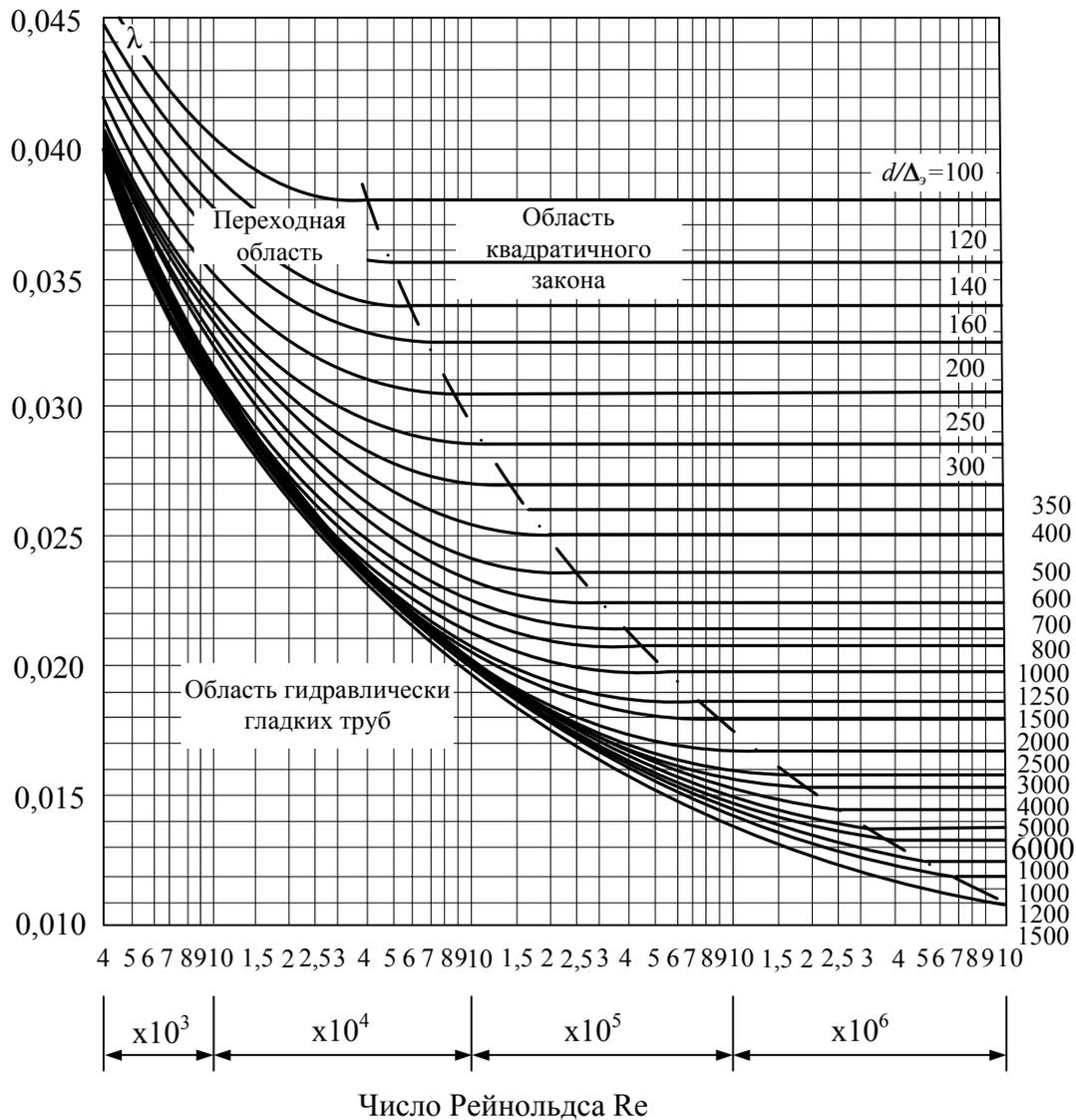


Рис. 7.12. Зависимость коэффициента от числа Рейнольдса для новых стальных труб (номограмма Г. А. Мурина)

Разная форма  $\lambda = f(Re)$  в области для труб с равно- и разнoзернистой шероховатостью объясняется различным видом шероховатости.

## Полуэмпирическая теория А. Д. Альтшуля

Новейшие исследования не подтверждают наличие у стенки слоя со строго ламинарным течением в нем. В действительности турбулентные пульсации существуют и в самой непосредственной близости к стенке.

Измерения показывают, что вблизи стенки трубопровода за счет прилипания частиц жидкости образуется вязкий подслой, который растет под действием сил вязкости, а затем под действием турбулентности действующей во внешней среде, быстро разрушается. После разрушения подслоя скорость у стенки оказывается близкой к средней скорости потока. Этот процесс происходит периодически. Этот факт вызвал необходимость уточнить модель Прандтля. Кроме того важно найти закономерности движения для переходной области, которая осталась не освещенной в теории Прандтля.

Теория Альтшуля рассматривает турбулентный поток в трубе как единое целое без разделения его на ядро и ламинарный подслой.

В результате рассмотрения получены зависимости:

– логарифмическая:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \cdot \lg \frac{\text{Re}}{\text{Re} \cdot \frac{\Delta_{\text{э}}}{10 \cdot d} + 7};$$

– степенная:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\text{э}}}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}.$$

Эта формула переходит в известные и хорошо отвечающие опытам зависимости для коэффициента гидравлического трения: при малых числах Re формула переходит в формулу Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}.$$

и при больших числах Re – в формулу Шифринсона для вполне шероховатых труб:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\text{э}}}{d} \right)^{0,25}.$$

## 4. МАТЕРИАЛЫ К ЛАБОРАТОРНОМУ ЗАНЯТИЮ

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

#### «ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГИДРАВЛИЧЕСКОГО ТРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ»

##### Цель работы:

Определить коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  при ламинарном и турбулентном режимах движения жидкости по трубопроводу.

##### Общие сведения

При движении жидкости по прямому трубопроводу постоянного сечения часть удельной механической энергии затрачивается на преодоление сил трения как внутри жидкости, так и о стенки трубопровода и носит название потерь напора по длине  $h_{\text{дл}}$ .

Записывая уравнение Бернулли для двух сечений потока, можно определить потери удельной энергии на участке между сечениями I-I и II-II:

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_{\text{дл}}; \quad (1)$$

$$h_{\text{дл}} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + z_1 - z_2, \quad (2)$$

так как

$$v_1 = v_2, \quad z_1 = z_2,$$

то

$$h_{\text{дл}} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}. \quad (3)$$

Отсюда следует, что потери напора  $h_{\text{дл}}$  можно определить по показаниям пьезометров, установленных в рассматриваемых сечениях.

Теоретически потери напора по длине определяются по формуле Дарси – Вейсбаха:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (4)$$

где  $L$  – длина рассматриваемого участка трубопровода;

$d$  – диаметр рассматриваемого участка;

$v$  – средняя скорость движения жидкости;

$\lambda$  – коэффициент гидравлического трения (гидравлического сопротивления);

$g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ .

Коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  является функцией, зависящей как от свойств жидкости (вязкости, плотности), так и параметров трубопровода (диаметра, шероховатости стенок) и условий течения (средней скорости).

Из этих независимых размерных величин можно получить два безразмерных параметра, а именно:

1. Параметр Рейнольдса:  $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$  (5)

2. Относительную шероховатость:  $\Delta/d$ ,

то есть установить зависимость:  $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{d}\right)$ .

При ламинарном режиме движения жидкости ( $Re < Re_{кр}$ ), то есть ( $Re < 2320$ ), коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит только от числа  $Re$ ,  $\lambda = f(Re)$ . Для определения коэффициента гидравлического трения используют формулу Стокса:

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (6)$$

Для турбулентного режима движения из-за сложности происходящих при этом явлений расчетные формулы для определения коэффициента гидравлического трения могут быть получены лишь при принятии определенных гипотез с последующей проверкой полученных результатов экспериментом.

По наиболее распространенной гипотезе Прандтля турбулентный поток состоит из ядра течения и ламинарного слоя, между которыми находится переходная область (рис. 1).

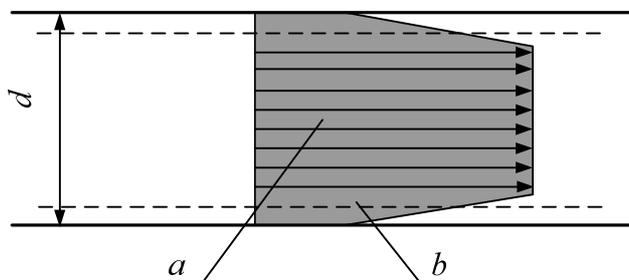


Рис. 1. Схема строения турбулентного потока:  
 $a$  – ядро течения;  $b$  – ламинарный подслой

При турбулентном режиме ( $Re > Re_{кр}$ ) различают четыре основные зоны чисел  $Re$ :

1. Если  $2320 \leq Re < 10^4$ , то режим течения называется «переходный турбулентный» и коэффициент гидравлического трения определяется по формуле Френкеля:

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}}. \quad (7)$$

2. При относительно небольших числах  $Re - 10^4 < Re < \frac{27}{\varepsilon^{1,143}}$  – ( $\varepsilon = \Delta/d$  – относительная шероховатость внутренней поверхности трубопровода), когда ламинарный слой закрывает шероховатость стенок трубопровода, возмущения, возникающие при обтекании жидкостью выступов шероховатости, быстро в нем затухают и практически не сказываются на коэффициенте гидравлического трения. Эта зона турбулентного режима называется «зоной гидравлически гладких труб». В этом случае коэффициент гидравлического трения определяется по формуле Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re^{0,25}}. \quad (8)$$

3. С увеличением числа  $Re$  ламинарный слой уменьшается. Когда его толщина становится одного порядка с высотой выступов шероховатости, то в этой зоне коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит не только от числа  $Re$ , но и от шероховатости стенок:  $\lambda = f(Re, \Delta/d)$ . Эта зона смешанного трения,  $\frac{27}{\varepsilon^{1,143}} < Re < 500/\varepsilon$ . Коэффициент гидравлического трения определяют по формуле Альтшуля:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{68}{Re} + \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}. \quad (9)$$

4. Зона, в которой число  $Re \geq 500/\varepsilon$  называется зоной квадратичного сопротивления (зона вполне шероховатых труб). В этой зоне коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  зависит только от относительной шероховатости стенок:  $\lambda = f(\Delta/d)$  и определяется по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} \right)^{0,25}. \quad (10)$$

Графически эти зависимости отражены в графиках Никурадзе (рис. 2).

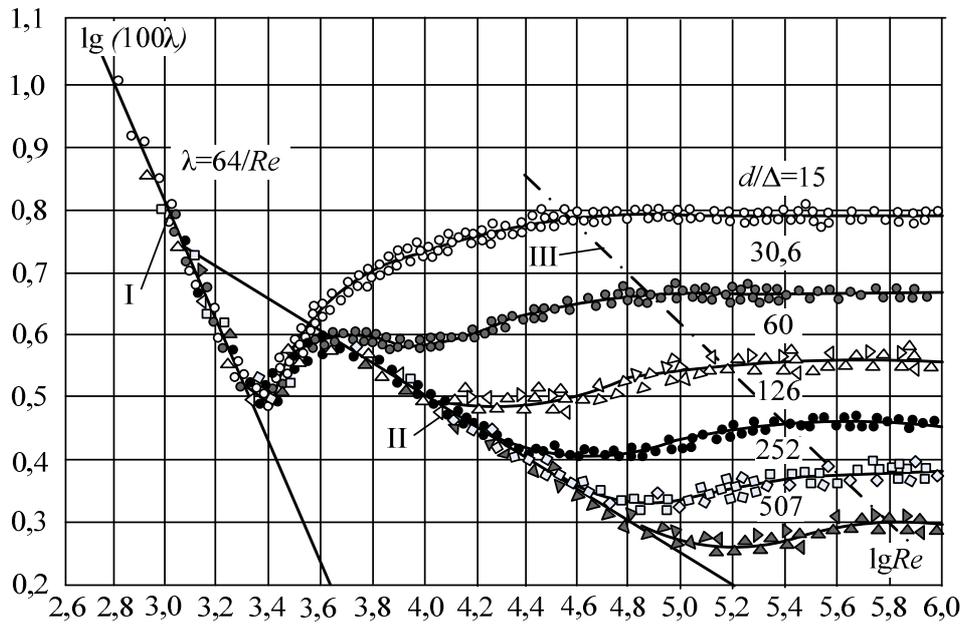


Рис. 2. График Никурадзе

### Описание опытной установки

Схема лабораторной установки представлена на рис. 3.

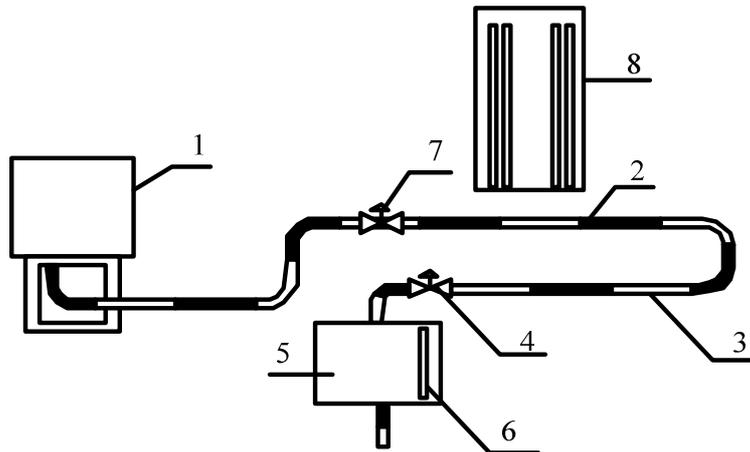


Рис. 3. Схема лабораторной установки

Вода из напорного бака 1 поступает в трубопровод 2 с абсолютной шероховатостью  $\Delta \approx 0,03$  мм, а затем в трубопровод 3 с абсолютной шероховатостью  $\Delta \approx 1,12$  мм. В конце этого трубопровода имеется вентиль 4, с его помощью проводится регулирование расхода воды, а, следовательно,

и скорости. Для определения расхода воды имеется мерный бак 5, имеющий водомерное стекло 6. К трубопроводам 2 и 3 подсоединены пьезометры 8. Расстояния между точками присоединения пьезометров по 300 см.

### Порядок проведения опыта

1. Открывая вентиль 4, устанавливают разность показаний пьезометров 8.

2. Не изменяя положения вентиля 4, наполняют мерный бак 5 на 10 л, измеряя время наполнения. Одновременно записывают показания по пьезометрам  $\Delta h_2$  и  $\Delta h_3$ .

3. По окончании опыта измеряют температуру воды в мерном баке 5.

4. В указанной последовательности опыт проводят 3 раза. В каждом последующем опыте, увеличивая степень открытия вентиля 4, устанавливают различные режимы движения.

5. По опытным данным вычисляют коэффициент гидравлического трения по формуле:

$$\lambda = \frac{\Delta h \cdot 2g \cdot d}{l \cdot v^2}, \quad (11)$$

где  $\Delta h$  – потери напора, соответствующие данному участку (по пьезометрам);

$l$  – длина соответствующего участка;

$d$  – диаметр трубопровода;

$v$  – средняя скорость движения жидкости по трубопроводу;

$g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м/с}^2$ .

6. Рассчитать теоретические значения коэффициентов гидравлического трения  $\lambda$  для каждого измерения, предварительно определив формулу, по которой следует находить  $\lambda$ .

7. Данные свести в таблицу:

№ п/п	Объем жидкости, $V, \text{см}^3$	Время наполнения, $t, \text{с}$	Потери напора по пьезометрам, см		Расход, $Q, \text{см}^3/\text{с}$	Скорость, $v, \text{см/с}$	$Re$	Опытные значения		Теоретические значения	
			$\Delta h_2$	$\Delta h_3$				$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_2$	$\lambda_3$

Примечание: индексы 2 и 3 относятся к трубам 2 и 3 (см. рис.3) соответственно.

8. Указать по каким формулам определяли теоретическое значение коэффициента гидравлического трения  $\lambda$ .

## 5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

**Пример 1.** По стальному трубопроводу диаметром  $d = 200$  мм, длиной  $l = 3000$  м перекачивается нефть в количестве 90 т/час. Плотность нефти  $\rho = 900$  кг/м<sup>3</sup>, средняя вязкость – зимой  $^\circ E = 15$ , летом  $^\circ E = 5$ .

Определить потери напора на трение по длине трубопровода.

Потери напора на трение по длине определяются по формуле Дарси – Вейсбаха:

$$h_{\text{ол}} = \lambda \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Предварительно находим секундный весовой расход жидкости

$$G = \frac{90 \cdot 1000}{3600} = 25 \text{ кг/с}.$$

и соответствующий ему объемный расход:

$$Q = \frac{G}{\rho} = \frac{25}{900} = 0,028 \text{ м}^3/\text{с}.$$

При этом средняя скорость движения жидкости в трубопроводе будет равна:

$$v = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{0,028}{\frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4}} = 0,89 \text{ м/с}.$$

Кинематическая вязкость, определяемая по формуле:

$$\nu = 0,0731 \cdot E - \frac{0,0631}{E}$$

будет:

$$\text{– зимой} \quad \nu = 0,0731 \cdot 15 - \frac{0,0631}{15} = 1,092 \text{ см}^2/\text{с};$$

$$\text{– летом} \quad \nu = 0,0731 \cdot 5 - \frac{0,0631}{5} = 0,355 \text{ см}^2/\text{с}.$$

Далее устанавливаем характер режима движения жидкости в трубопроводе. Для этого находим число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu}.$$

Имеем:

$$\text{– зимой} \quad Re = \frac{89 \cdot 20}{1,092} = 1630;$$

$$\text{– летом} \quad Re = \frac{89 \cdot 20}{0,355} = 5014.$$

Сравнивая полученные значения с критическим значением числа Рейнольдса  $Re_{кр} = 2300$ , приходим к выводу, что зимой (когда  $Re < Re_{кр}$ ) в трубопроводе будет иметь место ламинарный режим, а летом (когда  $Re > Re_{кр}$ ) – турбулентный.

Сначала рассматриваем зимние условия перекачки. Для этого случая коэффициент  $\lambda$  в формуле Дарси – Вейсбаха определяется по формуле Пуазейля:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{1620} = 0,0395.$$

Соответствующие потери напора будут:

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0395 \cdot \frac{3000 \cdot 0,89^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 23,9 \text{ м.}$$

В летних условиях так как  $Re = 5014$  имеем турбулентный режим движения в области гидравлически гладких труб ( $4000 < Re < 10^5$ ). Поэтому для определения коэффициента  $\lambda$  применяем формулу Блазиуса:

$$\lambda = \frac{0,3165}{Re^{0,25}} = \frac{0,3165}{5014^{0,25}} = 0,0376.$$

При этом

$$h_{\text{дл}} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,0376 \cdot \frac{3000 \cdot 0,89^2}{0,2 \cdot 2 \cdot 9,81} = 22,7 \text{ м.}$$

**Задача 1.** Определить потери напора при подаче воды со скоростью  $v = 0,12$  м/с через трубку диаметром  $d = 0,02$  м и длиной  $l = 20$  м при температуре воды  $t = 10$  °С.

Ответ:  $h_{\text{дл}} = 0,0257$  м.

**Задача 2.** Определить потери напора при движении воды в трубопроводе длиной  $l = 2000$  м, диаметром  $d = 200$  мм, скорость движения воды  $v = 0,1$  м/с при температуре воды  $t = 10$  °С. Трубы бетонные с тщательно сглаженной поверхностью ( $\Delta = 0,5$  мм).

Ответ:  $h_{\text{дл}} = 0,14$  м.

**Задача 3.** Определить потери напора при движении воды в трубопроводе длиной  $l = 1000$  м при расходе  $Q = 100$  л/с, если трубы чугунные, бывшие в эксплуатации, диаметром  $d = 250$  мм, высота выступа шероховатости  $\Delta = 1,35$  мм, температура воды  $t = 10$  °С.

Ответ:  $h_{\text{дл}} = 26,4$  м.

## 6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как определить общие потери напора в системе труб?
2. Как зависит потеря напора по длине  $h_{\text{дл}}$  от скорости потока при равномерном движении жидкости в круглой трубе?
3. Объясните, как происходит движение жидкости на начальном участке трубопровода?
4. Оказывает ли влияние режим движения жидкости на потери напора по длине?
5. По какому закону изменяются скорости в сечении при ламинарном режиме движения в трубе круглого сечения?
6. По какому закону изменяются касательные напряжения в трубе круглого сечения?
7. Как связаны средняя и максимальная скорости в поперечном сечении круглой трубы при ламинарном режиме движения?
8. По какому закону изменяются скорости в сечении при турбулентном режиме движения в трубе круглого сечения?
9. Что такое абсолютная шероховатость?
10. Что такое относительная шероховатость?
11. Дайте понятие гидравлически гладких и гидравлически шероховатых труб.
12. Чем обусловлены потери на трение?
13. Изобразите зависимость коэффициента  $\lambda$  от числа Рейнольдса и относительной шероховатости и поясните ее.
14. Как изменится коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  при увеличении температуры транспортируемой с постоянным расходом жидкости при ламинарном режиме движения?
15. Как изменится коэффициент  $\lambda$  в квадратичной области сопротивления при увеличении температуры?

16. Как изменится коэффициент  $\lambda$  с увеличением скорости в переходной области?
17. Во сколько раз изменятся потери напора при ламинарном режиме, если расход увеличится в два раза?
18. Во сколько раз изменятся потери напора в области квадратичного сопротивления, если расход уменьшить в два раза?
19. Во сколько раз изменятся коэффициент  $\lambda$  в квадратичной области сопротивления при увеличении расхода в два раза?
20. Что такое эквивалентная шероховатость?
21. Почему значение  $\lambda$ , полученное в опытах Мурина, отличается от значений  $\lambda$  в опытах Никурадзе?
22. Как изменится коэффициент  $\lambda$  при увеличении абсолютной шероховатости  $\Delta$ , если режим движения ламинарный?
23. Как изменится коэффициент  $\lambda$  в области гидравлически шероховатых труб при увеличении относительной шероховатости?

## 7. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Высш. шк., 1998. – 311 с.
6. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.

## МОДУЛЬ 8

### ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

*Местными гидравлическими сопротивлениями* называются элементы трубопроводов, в которых потери энергии происходят за счет деформации потока, вызванные изменением их размеров или конфигурации. Причинами этих потерь являются изменение скорости, отрыв транзитного потока от стенок и вихреобразование. В местном гидравлическом сопротивлении часть механической энергии, которой обладает поток, переходит в тепло и рассеивается в нем.

К простейшим местным сопротивлениям относятся внезапные или постепенные расширения, сужения и повороты канала, трубопровода. Более сложные сопротивления (например, вентиль, клапан и др.) представляют собой соединения или комбинации перечисленных простейших сопротивлений.

При протекании вязкой жидкости через местные сопротивления и участки трубопровода, непосредственно примыкающие к ним, происходит изменение вектора средней скорости. Обычно причиной изменения средней скорости служит изменение геометрии границ потока (то есть изменение площади сечения) или изменение направления движения жидкости. Во многих случаях может происходить изменение и значения средней скорости, и направления движения (например, при прохождении жидкости через некоторые фасонные части трубопроводов).

В рассматриваемых случаях на коротких участках потока происходят изменения кинематических параметров. В пределах таких участков движение жидкости неравномерное.

В водопроводных магистральных трубах потери напора на местные сопротивления обычно весьма невелики (не более 10 ÷ 20 % потерь напора на трение). В воздухопроводах вентиляционных и пневмотранспортных установок, в дутьевых установках, котельных потери на преодоление местных сопротивлений часто значительно больше потерь напора на трение. Местные сопротивления являются весьма существенными и при расчете паропроводов.

## 2. ПОТЕРИ НАПОРА НА НАЧАЛЬНЫХ УЧАСТКАХ ТРУБОПРОВОДОВ

На начальных участках труб происходит изменение распределения кинематических параметров потока от начального их распределения (на входе) до распределения, соответствующего стабилизированному (или равномерному) движению. Распределение скоростей по живому сечению на входе близко к равномерному. На длине начального участка происходит изменение эпюры скоростей, которая асимптотически приближается к виду, характерному для полностью развитого (стабилизированного) данного режима движения. Как известно, плоская эпюра скоростей при стабилизированном ламинарном движении – парабола, а при стабилизированном турбулентном движении – логарифмическая кривая. Потери напора на начальных участках больше, чем на участках такой же длины данного трубопровода, но при равномерном (стабилизированном) движении: при ламинарном движении – приблизительно на  $(0,2 \div 0,4) v^2 / 2g$ , а при турбулентном – приблизительно на  $(0,1 \div 1,5) v^2 / 2g$  в зависимости от интенсивности турбулентности на входе.

Длина начального участка при ламинарном напорном движении жидкости в трубе по С.М. Таргу равна  $0,04 Re_d$ .

При турбулентном напорном движении длина начального участка зависит от того, будет ли данная труба гидравлически гладкой или гидравлически шероховатой.

Для турбулентного движения длину  $l_{нач}$  для всех областей сопротивления можно определить по формуле, предложенной В.С. Боровковым и Ф.Г. Майрановским:

$$\frac{l_{нач}}{d} = \frac{0,52}{\lambda},$$

где  $\lambda$  – коэффициент Дарси при стабилизированном (равномерном) движении.

Для ламинарного движения с учетом того, что  $\lambda = 64 / Re$ , эта формула имеет вид:

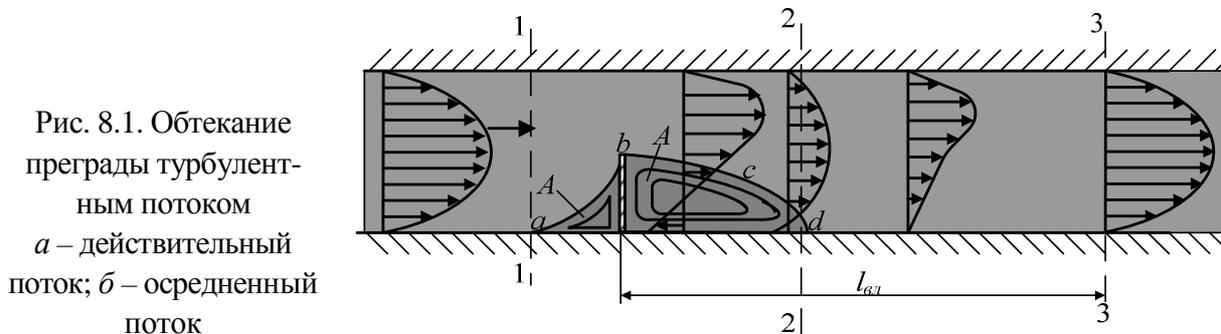
$$\frac{l_{нач}}{d} = \frac{2,56}{\lambda}.$$

Сравнение этих формул показывает, что при одинаковых значениях  $\lambda$  и  $d$  длина  $l_{нач}$  при ламинарном режиме движения в 5 раз больше, чем при турбулентном.

### 3. ПОТЕРИ НАПОРА В МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ

При протекании жидкости через местные сопротивления происходит изменение направления вектора средней скорости и его значения, изменение площади и/или ориентации живого сечения. Обычно причиной этих изменений является изменение геометрии границ потока.

При обтекании турбулентным потоком какой-либо преграды (рис. 8.1, а) происходит отрыв транзитной струи от твердой стенки. При этом возникают *циркуляционные области А* (если жидкость – вода, то эти зоны называются водоворотными). Остальная часть потока, именуемая *транзитной струей*, отделяется от циркуляционных областей *поверхностью раздела abcd*.



Поверхность раздела носит неустановившийся и неустойчивый характер: периодически эта поверхность получает местные искривления, которые прогрессируют и переходят в отдельные водовороты (вальцы); эти водовороты попадают затем в транзитную струю и уносятся ею; поверхность раздела снова восстанавливается с тем, чтобы в последующие моменты времени опять распасться и свернуться в водовороты. Постоянное возникновение в районе поверхности раздела водоворотов, попадающих в транзитную струю, способствует повышению пульсаций скоростей и давлений в ней.

Переходя от рис. 8.1, а к **осредненному** потоку, водоворотную область показывают несколько условно (рис. 8.1, б). Штриховыми линиями здесь представлены линии тока осредненного потока, а не траектории частиц жидкости.

Водоворотная область характеризуется **возвратным течением**. Сечение 2-2, где заканчивается водоворотная зона, характеризуется как повышенной пульсацией скоростей и давлений, так и наличием сильно деформируемой эпюры скоростей. На протяжении некоторого участка потока между сечениями 2-2 и 3-3 происходит: а) затухание пульсаций до величин, свойственных равномерному движению, и б) выравнивание эпюры

скоростей, причем в сечении 3-3 эта эпюра принимает «нормальную» форму, свойственную равномерному течению.

Через поверхность раздела, благодаря пульсационным поперечным скоростям, происходит некоторый обмен жидкости между водоворотной областью и транзитной струей. Турбулентные касательные напряжения, действующие вдоль поверхности раздела, относительно велики. Поэтому потеря напора в пределах водоворотной зоны получается большая. На длине переходного участка потери напора также повышены по сравнению с участками равномерного движения.

Если по поверхности раздела *abcd* установить криволинейную твердую стенку, то получим безотрывную транзитную струю, потеря напора при этом значительно уменьшится. Такое снижение потерь напора объясняется тем, что касательные напряжения, возникающие вдоль установленной стенки, значительно меньше турбулентных касательных напряжений, действующих вдоль поверхности раздела.

В результате всех этих явлений часть удельной энергии (напора) затрачивается на преодоление сопротивлений движению жидкости, возникающих в связи с работой сил трения внутри вязкой жидкости, часть механической энергии переходит в теплоту. При этом местные потери напора определяются по рис. 8.2:

$$h_{м.с} = \zeta_{м.с} \frac{v^2}{2g},$$

где  $\zeta_{м.с}$  – безразмерный коэффициент местного сопротивления.

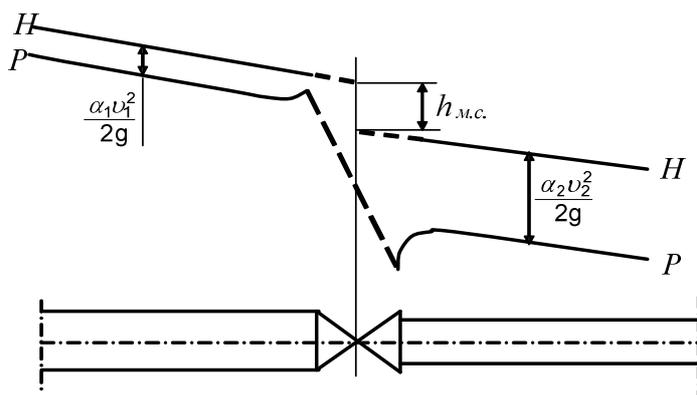


Рис. 8.2. Схема построения линий полного напора для определения потерь напора на местном сопротивлении:  
P-P – пьезометрическая линия;  
H-H – линия полного напора

Коэффициент местного сопротивления показывает, какая часть потерь пьезометрического напора приходится на единицу скоростного:

$$\zeta_{м.с} = \frac{h_{м.с}}{v^2 / 2g}.$$

Коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta_m$ , также как и коэффициенты Дарси  $\lambda$ , могут являться функцией ряда факторов. Среди них главным является геометрическая форма. При напорном установившемся движении в общем случае для данной геометрической формы:

$$\zeta_{m.c} = f(Re, \Delta/d, Ka),$$

где  $Ka$  – число Кармана;

$$Ka = \frac{\sigma_u}{\nu} \text{ – учитывает турбулентность потока;}$$

$\sigma_u$  – среднеквадратичное значение пульсационных составляющих;

$\nu$  – средняя скорость потока.

Во многих случаях относительная шероховатость не влияет на  $\zeta_{m.c}$ . Влияние числа  $Ka$  на  $\zeta_{m.c}$  изучено пока недостаточно.

Большинство коэффициентов местных сопротивлений при напорном движении в трубопроводах не зависит от числа  $Re$  при  $Re > 5$  ( $10^3 - 10^4$ ).

Рассматривая далее вопрос о величине потерь напора в местных сопротивлениях, будем иметь в виду только область квадратичного сопротивления.

#### 4. ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ ВНЕЗАПНОМ РАСШИРЕНИИ. ФОРМУЛА БОРДА

На рис. 8.3 показан случай, когда труба, имеющая диаметр  $D_1$ , переходит в трубу, имеющую больший диаметр  $D_2$  ( $D_2 > D_1$ ). Струя, выходящая из первой трубы, на некоторой длине расширяется и в сечении 2-2 заполняет все сечение второй трубы. На длине  $l_6$  струи имеет место отрыв ее от стенок трубы и образование водоворотной зоны  $A$ .

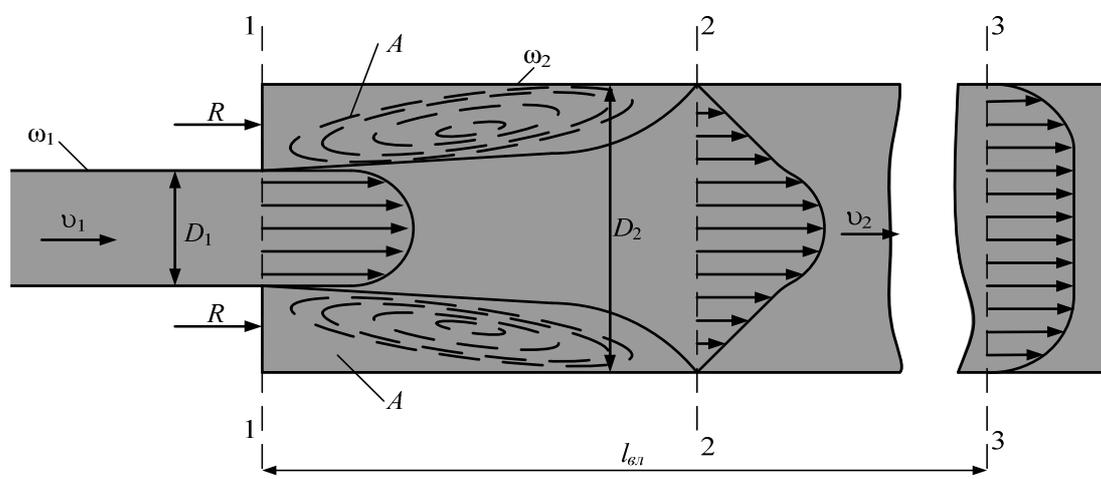


Рис. 8.3. К выводу формулы Борда. Внезапное расширение трубопровода

На протяжении расширяющейся струи и переходного участка получаем неравномерное движение.

Между сечениями 1-1 и 2-2 возникает местная потеря напора. Эту потерю назовем *потерей напора на внезапное расширение* и будем обозначать ее через  $h_{в.р.}$ . Впервые расчетную зависимость для  $h_{в.р.}$  получил французский инженер Борда, который уподобил резкое расширение струи явлению удара неупругих твердых тел.

Выведем формулу Борда, пользуясь уравнениями Бернулли и количества движения. Соединяем сечения 1-1 и 2-2 уравнением Бернулли.

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{в.р.} \quad (8.1)$$

Примем, что распределение скоростей в сечении 1-1 и 2-2 равномерное, то есть  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ , тогда (8.1) перепишем в следующем виде:

$$h_{в.р.} = \left( \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} \right) + \left( \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} \right). \quad (8.2)$$

Разность давлений найдем, пользуясь теоремой механики об изменении количества движения к цилиндрическому объему, заключенному между сечениями 1-1 и 2-2 и стенкой трубы.

**Примечание.** *Количество движения системы* можно выразить через массу системы  $M$  и скорость центра масс  $\bar{v}_c$ :

$$KД = \bar{Q} = M \cdot \bar{v}_c.$$

Теорема импульсов для системы: *изменение количества движения системы за какое-либо время равно векторной сумме всех импульсов внешних сил, действующих на систему, за то же время.*

$$\Delta KД = \bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S},$$

где  $\bar{Q}_0$  – количество движения системы в момент  $t = 0$ ;

$\bar{Q}$  – количество движения в момент время  $t$ ;

$\bar{S}$  – импульс внешней силы, действующей на точку за время  $t$ .

Полный импульс силы  $\bar{F}$  за время  $t$ , или импульс силы  $\bar{S}$ , определяют по формуле:

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt = (\sum \bar{F}) dt.$$

Масса жидкости, которая за время  $dt$  проходит через сечения 1-1 и 2-2:

$$M = \rho \cdot Q \cdot dt,$$

где  $Q$  (без черты) – расход жидкости.

Тогда:

$$\Delta KД = \rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1) dt = (\sum \bar{F}) dt. \quad (8.3)$$

В конечном счете, получим:

$$\Delta KД = \rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1) = \sum \bar{F}. \quad (8.4)$$

Рассмотрим проекции внешних сил на ось потока. В сечении 1-1, взятом по большому диаметру сразу за расширением, действует в направлении потока  $P_1 = p_1 \omega_1$  и сила воздействия кольцевой стенки площадью  $\omega_2 - \omega_1$  на поток  $R = p_1(\omega_2 - \omega_1)$ . Сумма этих сил  $P_1 + R = p_1 \cdot \omega_2$ . Сила давления в сечении 2-2, направлена против движения,  $P_2 = p_2 \cdot \omega_2$ . Проекциями сил трения на боковой стенке пренебрегаем из-за небольшой длины выделенного отсека. Проекция собственного веса отсека между сечениями 1-1 и 2-2 равна нулю.

Запишем (8.4) с учетом всех сил:

$$\rho \cdot Q \cdot (v_2 - v_1) = p_1 \omega_2 - p_2 \omega_2, \quad (8.5)$$

откуда, имея в виду, что  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  и  $v_2 = \frac{Q}{\omega_2}$ , получаем:

$$\frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = \frac{Q(v_2 - v_1)}{\omega_2 g} = \frac{(v_2 - v_1)}{g} v_2. \quad (8.6)$$

Подставляя (8.6) в (8.2), имеем:

$$h_{\text{в.р.}} = \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g} + \frac{2(v_2 - v_1)v_2}{2g} = \frac{v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - 2v_1v_2}{2g}, \quad (8.7)$$

или окончательно:

$$h_{\text{в.р.}} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (8.8)$$

где разность  $(v_1 - v_2)$  называют *потерянной скоростью*.

Формула (8) называется *формулой Борда*. Согласно этой формуле *потеря напора при резком расширении равняется скоростному напору, отвечающему потерянной скорости*.

Так как по уравнению неразрывности  $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$ , то формулу (8.8) можно представить:

$$h_{\text{в.р.}} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g},$$

или

$$h_{\text{в.р.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Отсюда коэффициенты сопротивления при внезапном расширении потока:

$$\zeta_{в.р1.} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2; \quad \zeta_{в.р2.} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2.$$

## 5. ВЫХОД ИЗ ТРУБЫ. ДИФFUЗОР. ВНЕЗАПНОЕ СУЖЕНИЕ. ВХОД В ТРУБУ. КОНFUЗОРЫ. ПОВОРОТ

*Выход из трубы* в неподвижную жидкость (бак, бассейн, водохранилище) является частным случаем внезапного расширения при  $\omega_2 \gg \omega_1$ . В этом случае (рис. 8.4) можно использовать выражение для коэффициента сопротивлений при внезапном расширении:

$$\zeta_{в.р1.} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2,$$

а так как  $\omega_2$  в этом случае гораздо больше, чем  $\omega_1$ , то принимаем:

$$\zeta_{вых} = 1.$$

*Постепенное расширение* (рис. 8.5) (диффузоры). В расчетах потери напора в диффузорах часто разделяются на потери, связанные с расширением сечения  $h_p$  и потери по длине диффузора  $h_{дл.}$ . Соответственно коэффициент сопротивления делится на коэффициенты сопротивления расширения  $\zeta_p$  и  $\zeta_{дл.}$ :

$$\zeta_{диф} = \zeta_p + \zeta_{дл.}$$

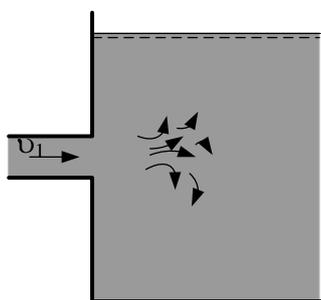


Рис. 8.4. Выход из трубы

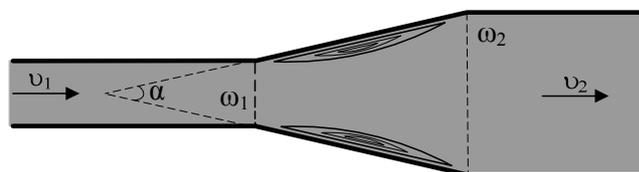


Рис. 8.5. Постепенное расширение

При движении жидкости в диффузоре скорости по длине уменьшаются. Соответственно, по уравнению Бернулли давление увеличивается (градиент  $dp/dl > 0$  – положительный градиент давления). При этом вблизи

стенок жидкость обладает столь малой кинетической энергией, что при значительном нарастании давления она останавливается или даже начинает двигаться обратно. Происходит вихреобразование и отрыв потока от стенки. Интенсивность этих явлений возрастает с увеличением угла расширения диффузора. Безотрывное движение жидкости в диффузоре наблюдается при угле  $\theta = 8 - 10^\circ$ .

*Внезапное сужение.* При внезапном сужении (рис. 8.6), так же как и при внезапном расширении, за кромкой сужения происходит отрыв потока от твердой стенки и образование транзитной струи, которая сначала испытывает сжатие, а затем – расширяется.

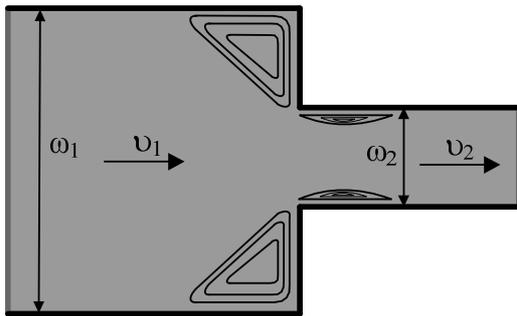


Рис. 8.6. Внезапное сужение

Между твердой стенкой и поверхностью транзитной струи образуется водоворотная зона. Образуются вихри, которые в результате обмена жидкостью между водоворотной зоной и транзитной струей проникают в поток, где гасятся трением. В результате работы сил трения часть механической энергии потока переходит в теплоту.

При числах  $Re > 10^4$  коэффициент  $\zeta_{в.с.}$  зависит только от отношения  $\omega_2/\omega_1$ . Значения коэффициента  $\zeta_{в.с.}$  приведены в справочниках или определяются по формуле  $\zeta_{в.с.} = 0,5 \cdot (1 - \omega_2/\omega_1)$ .

*Вход в трубу* (рис. 8.7) является частным случаем внезапного сужения. Если труба присоединена перпендикулярно стенке бассейна и кромка входного отверстия острая, то  $\zeta_{вх.} = 0,5$ ; при слегка скругленной кромке  $\zeta_{вх.} = 0,2 \div 0,25$ , а при весьма плавном очертании входной кромки  $\zeta_{вх.} = 0,05 \div 0,1$ .

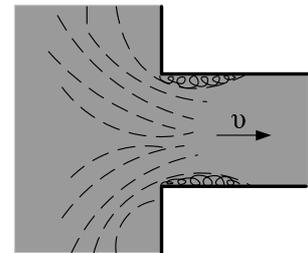


Рис. 8.7. Вход в трубу

*Постепенное сужение (конфузоры)* (рис. 8.8). При движении жидкости в конфузоре вдоль потока скорость растет, а давление уменьшается (градиент давления  $dp/dl < 0$ ). Причин к появлению вихреобразования и отрыва потока в конфузоре нет. Лишь на выходе из конфузора при прямолинейных образующих труб имеется сжатие потока и отрыв потока от стенки, но эта зона меньше, чем при внезапном сужении.

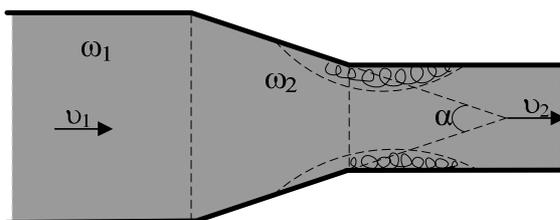


Рис. 8.8. Конфузор

Опыты показывают, что при одном и том же угле конусности  $\theta$  потери напора на участках расширения больше, чем на участках сужения.

*Поворот.* При изменении направления потока появляются центробежные силы, направленные от центра кривизны к внешней стенке трубы. Давление в пределах поворота у внешней стенки больше, чем у внутренней. Соответственно, скорости у внешней стенки меньше, чем у внутренней. Вследствие этого, вдоль боковых стенок трубы, вблизи поверхности которых скорость невелика, будет происходить движение жидкости от внешней стенки к внутренней, то есть возникает поперечная циркуляция в потоке.

В результате образуется так называемый парный (двойной) вихрь, который накладывается на поступательное движение; линии тока становятся винтообразными (рис. 8.9). Происходит отрыв потока от обеих стенок, образуются водоворотные области с обратными направлениями линий тока в них у стенок трубы.

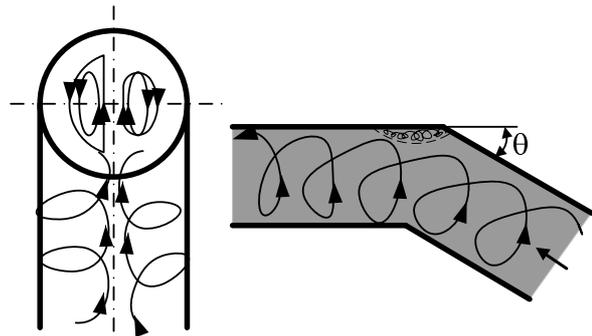


Рис. 8.9. Поворот

Повышенная пульсация скоростей и интенсивное перемешивание частиц наряду с затратами энергии потока на поддержание водоворотных областей на поворотах приводят к увеличенным потерям напора на повороте по сравнению с потерями на прямолинейных участках.

## 6. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ДЛИНА.

### ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

**Эквивалентная длина.** Для упрощения расчета трубопроводов часто используют понятие о так называемой *эквивалентной длине* местного сопротивления, то есть об участке данного трубопровода такой длины, на котором потери напора по длине равны местной потере напора:

$$h_{м.с} = \zeta_{м.с} \frac{v^2}{2g} = h_{дл.экр.} = \lambda \frac{l_{экр.}}{d} \frac{v^2}{2g},$$

или

$$\frac{l_{экр.}}{d} = \frac{\zeta_{м.с}}{\lambda}.$$

*Взаимное влияние местных сопротивлений.* Приводимые в справочниках экспериментальные данные о коэффициентах местных сопротивлений относятся к движению жидкости с нормальным (выравненным) полем скоростей. В практике местные сопротивления размещены иногда настолько близко одно к другому, что поток между ними не успевает выравниваться, поскольку вихреобразования, возникающие при проходе через местное сопротивление, сказываются на значительном протяжении вниз по течению. То расстояние после местного сопротивления, в пределах которого устанавливается нормальная (выравненная) эпюра скоростей и прекращается влияние местного сопротивления на поток, называется *длиной влияния*  $l_{вл}$  местного сопротивления.

Иногда совокупная потеря напора в системе исчисляется путем простого суммирования потерь напора в отдельных местных сопротивлениях, как если бы каждое сопротивление существовало самостоятельно и независимо от других местных сопротивлений. Этот метод простого суммирования (так называемый принцип наложения потерь, или суперпозиция) дает правильные результаты лишь в том случае, если сопротивления расположены на взаимных расстояниях, превышающих длину влияния. В противном случае возмущающее влияние одного местного сопротивления сказывается на других. Так (рис. 8.10), поворот трубы под углом  $30^\circ$  вызывает сопротивление с коэффициентом  $\zeta = 0,11$ ; поворот под углом  $60^\circ$  дает  $\zeta = 0,47$ ; если же соединить оба поворота последовательно, то вместо увеличения коэффициента сопротивления достигается его уменьшение до  $\zeta = 0,4$ .

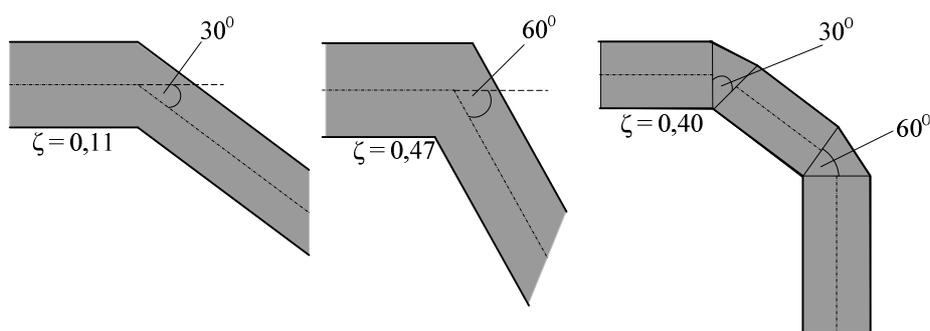


Рис. 8.10. К расчету взаимного влияния местных сопротивлений

При больших числах Рейнольдса для оценки длины влияния пользуются соотношением:

$$l_{вл} \geq (30 - 40)d .$$

В действительности длина влияния зависит как от геометрии местного сопротивления, так и от числа Рейнольдса (возрастая с его увеличением) и относительной шероховатости трубопровода, то есть:

$$\frac{l_{вл}}{d} = f\left(\zeta_{кв}; Re; \frac{\Delta}{d}\right).$$

Исследования показали, что длина влияния местного сопротивления во всей области турбулентного движения описывается зависимостями вида:

$$\frac{l_{вл}}{d} = f(\lambda; \zeta_{кв}),$$

где  $\lambda$  – коэффициент гидравлического трения трубы, на которой расположены местные сопротивления;

$\zeta_{кв}$  – коэффициент рассматриваемого местного сопротивления в квадратичной области.

В случаях, когда расстояние между отдельными местными сопротивлениями меньше длины влияния, суммарную величину коэффициента местных сопротивлений можно установить с помощью экспериментов. Она может быть как больше, так и меньше суммы соответствующих величин коэффициентов единичных сопротивлений в зависимости от длины прямого участка между ними.

На рис. 8.11 показано изменение суммарного коэффициента сопротивления двух незакругленных поворотов под углом  $\alpha = 45^\circ$  в зависимости от длины вставки между ними.

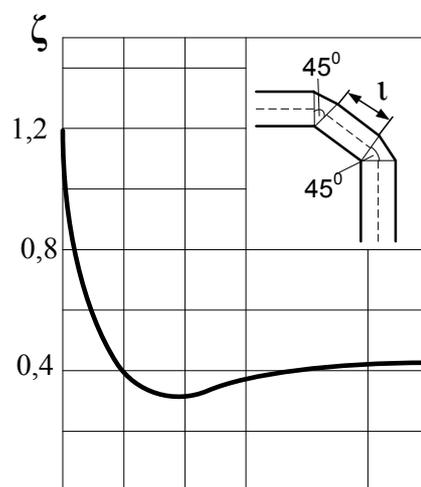


Рис. 8.11. Зависимость коэффициента суммарного сопротивления двух поворотов от расстояния между ними

## 7. ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ОТ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

Приведенные в справочных таблицах данные о коэффициентах местных сопротивлений относятся к турбулентному движению с большими числами Рейнольдса, когда влияние вязкости проявляет себя незначительно. При движении жидкости с малыми числами Рейнольдса коэффициенты местных сопротивлений зависят не только от геометрических характеристик каждого местного сопротивления, но и от числа Рейнольдса.

Зависимость коэффициента  $\zeta_m$  для различных местных сопротивлений от числа Рейнольдса приведены в справочной литературе. В большин-

стве случаев с увеличением  $Re$  коэффициент сопротивления  $\zeta_m$  уменьшается (рис. 8.12). Автомодельность коэффициентов от  $Re$  при резких переходах наступает при  $Re \geq 3000$ , а при плавных переходах – при  $Re \geq 10\,000$ .

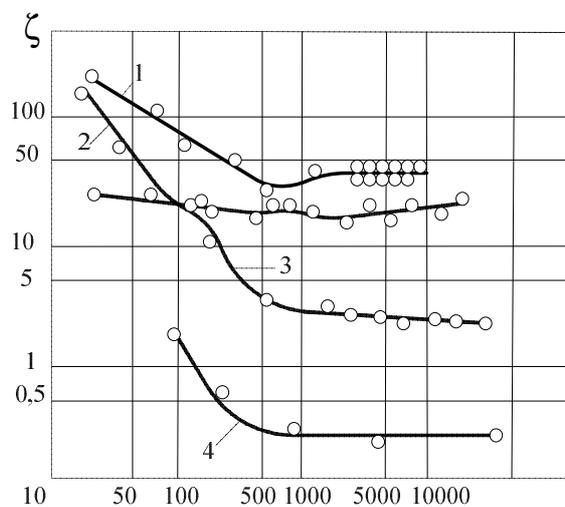


Рис. 8.12. Зависимость  $\zeta = f(Re)$  для некоторых видов местных сопротивлений:  
1 – шаровой клапан; 2 – вентиль;  
3 – задвижка; 4 – тройник

При очень малых числах  $Re$  жидкость течет через местные сопротивления без отрыва; потери напора обуславливаются непосредственным действием сил вязкого трения и пропорциональны скорости потока в первой степени. Коэффициенты местного сопротивления в этом случае связаны с числом Рейнольдса зависимостью:

$$\zeta_{m.c} = A / Re,$$

где  $A$  – коэффициент, зависящий от вида местного сопротивления и степени стеснения потока (приведен в таблицах).

С увеличением числа  $Re$  наряду с потерями на трение возникают потери напора, обусловленные отрывом потока и образованием вихрей (переходная область сопротивления). При достаточно больших числах Рейнольдса вихреобразование приобретает основное значение, потери напора становятся пропорциональны квадрату скорости, так как коэффициент перестает зависеть от числа Рейнольдса и определяется только геометрией потока.

Для ориентировочной оценки коэффициентов местных сопротивлений (в переходной области) может служить следующая формула:

$$\zeta_{m.c} = \frac{A}{Re} + \zeta_{кв}.$$

## 8. МАТЕРИАЛЫ К ЛАБОРАТОРНОМУ ЗАНЯТИЮ

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

#### «ИЗМЕРЕНИЕ ПОТЕРЬ НАПОРА В МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЯХ»

##### **Цель работы:**

1. Получить опытным путем значения коэффициентов местных сопротивлений  $\zeta$  (дзэта): вентиля –  $\zeta_{вент}$ ; пробочного крана –  $\zeta_{пр.кр}$ ; внезапного расширения –  $\zeta_{в.р}$ ; внезапного сужения –  $\zeta_{в.с}$ .

2. Сравнить значения  $\zeta_{в.р}$  и  $\zeta_{в.с}$ , полученные в опытах, с теоретическими.

##### **Общие сведения**

Всякое изменение направления потока жидкости и его скорости (всякая деформация) влечет за собой уменьшение энергии потока. Потерянная механическая энергия обращается в тепловую, которая рассеивается в окружающей среде (стенках трубопровода, атмосфере, грунте). Участки трубопровода, на которых происходят потери энергии потока жидкости, называются *гидравлическими сопротивлениями*.

Гидравлическое сопротивление называется местным, если участок трубопровода, занимаемый им, одного порядка с диаметром трубопровода. Примерами местных сопротивлений могут служить сужение и расширение потока (изменение скорости потока по величине), колена, изменение скорости потока по направлению, тройники (то и другое вместе), вентили, задвижки, краны, клапаны и др.

Потери энергии, возникающие при деформации потока жидкости на местных сопротивлениях, отнесенные к единице веса жидкости, называются *местными потерями напора*.

Напор, теряемый на местных сопротивлениях  $h_{м.с}$ , выражается в долях скоростного напора и определяется как:

$$h_{м.с} = \zeta_{м.с} \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (1)$$

где  $\zeta_{м.с}$  – коэффициент местного сопротивления, являющийся для данного сопротивления величиной постоянной.

Скоростной напор жидкости до и после местного сопротивления остается постоянным (если  $d = \text{const}$ ), восстанавливаясь, несмотря на изменения в пределах местного сопротивления, за счет перехода в него пьезометрического напора.

Коэффициент местного сопротивления показывает, какая часть потерь на данном местном сопротивлении пьезометрического напора приходится на единицу скоростного, то есть:

$$\zeta_{м.с} = \frac{h_{м.с} \cdot 2g}{v^2}, \quad (2)$$

где  $h_{м.с} = \Delta p / \gamma$  – потерянный пьезометрический напор;

$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$  – разность пьезометрических напоров до и после местного сопротивления;

$v$  – средняя скорость движения жидкости в трубопроводе.

При ламинарном движении коэффициент  $\zeta_{м.с}$  является функцией числа  $Re$ :

$$\zeta_{м.с} = A + B / Re, \quad (3)$$

где  $A$  и  $B$  – const, различные для разных местных сопротивлений.

При малых значениях  $Re$  второе слагаемое оказывает существенное влияние на  $\zeta_{м.с}$ .

Для случая внезапного расширения – сужения коэффициент местного сопротивления  $\zeta_{м.с}$  может быть определен теоретически.

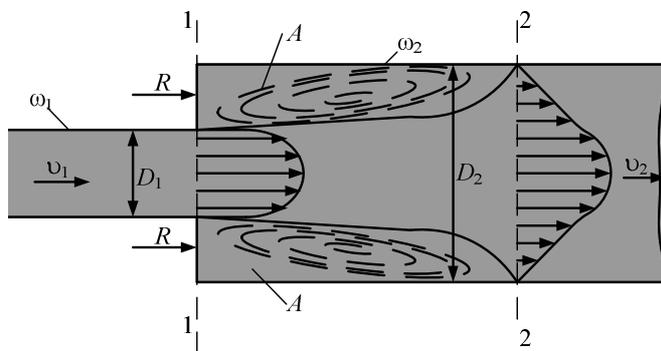


Рис. 1. Внезапное расширение

При внезапном расширении основные потери напора возникают за счет соударения частиц жидкости, движущихся со скоростью  $v_1$ , с частицами жидкости, движущихся со скоростью  $v_2$ , незначительная часть энергии расходуется на вихреобразование (рис. 1).

Французский ученый Борд, исходя из теории удара, получил зависимость для определения потерь энергии при внезапном расширении потока в напорном трубопроводе:

$$h_{в.р.} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}, \quad (4)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – средние скорости потока соответственно на узком и широком участках трубопровода.

Теорему Борда можно сформулировать следующим образом: потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости.

Воспользовавшись уравнением неразрывности:

$$v_1 \cdot \omega_1 = v_2 \cdot \omega_2,$$

формулу (4) можно привести к одному из следующих двух видов:

$$h_{\text{в.п.}} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g}; \quad (5)$$

$$h_{\text{в.п.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2g}. \quad (6)$$

Если ввести обозначения:

$$\left(1 - \omega_1 / \omega_2\right)^2 = \zeta_{\text{в.п.}}; \quad \left(\omega_2 / \omega_1 - 1\right)^2 = \zeta_{\text{в.п.}},$$

то выражения (5) и (6) могут быть приведены к общему виду формул для определения потерь напора:

$$h_{\text{в.п.}} = \zeta_{\text{в.п.}} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \quad \text{или} \quad h_{\text{в.п.}} = \zeta_{\text{в.п.}} \cdot \frac{v_2^2}{2g}. \quad (7)$$

При внезапном сужении (рис. 2) происходит сжатие струи (ее площадь уменьшается до  $\omega_c$ ). Учитывая, что потери напора обусловлены в основном расширением струи, коэффициент  $\zeta_{\text{в.с.}}$  можно определить по формуле:

$$\zeta_{\text{в.с.}} = \left(\omega_2 / \omega_c - 1\right)^2. \quad (8)$$

Заменяя степень сжатия струи коэффициентом сжатия:

$$\varepsilon = \omega_c / \omega_2, \quad \text{получим:} \quad \zeta_{\text{в.с.}} = (1/\varepsilon - 1)^2.$$

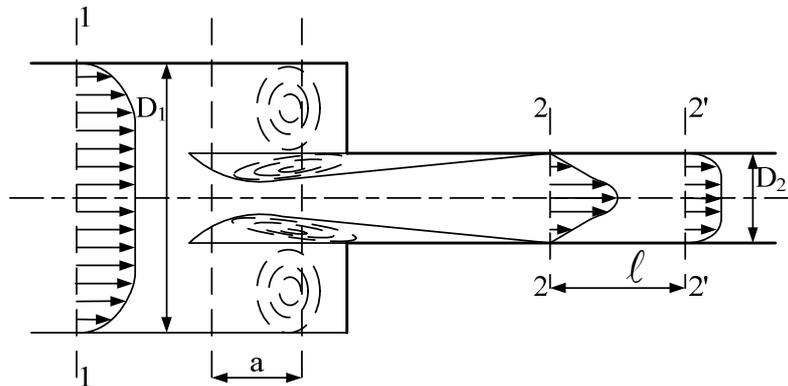


Рис. 2. Внезапное сужение

### Описание опытной установки

Вода в трубопровод (рис. 3) поступает из напорного бака и, пройдя по трубопроводу с установленными на нем местными сопротивлениями 1, 2, 3, 4, 5 сливается в мерный бак 6. Пьезометрические напоры до и после местных сопротивлений измеряются пьезометрами, установленными на

щите 8. С помощью вентиля 5, можно регулировать расход и, следовательно, скорость движения жидкости в трубопроводе.

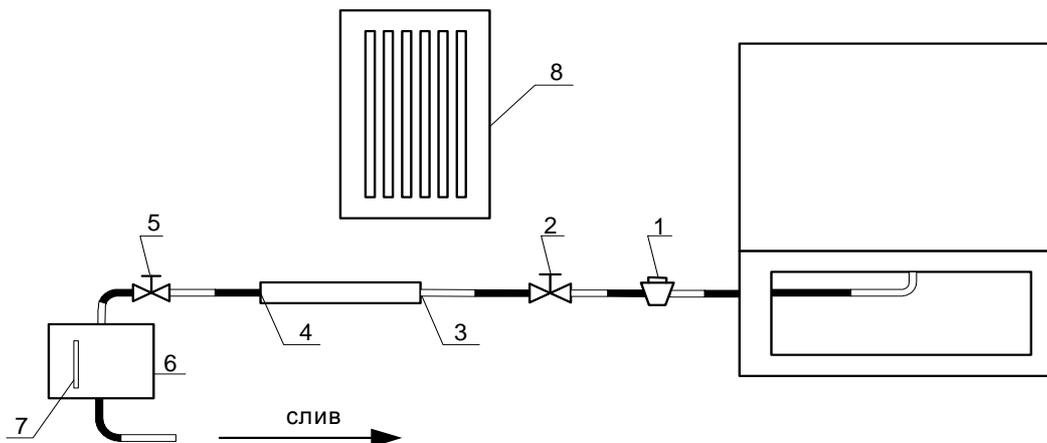


Рис. 3. Схема лабораторной установки

### Порядок проведения работы

1. Полностью открыть вентиль 1 и пробочный кран 2.
2. Открыть вентиль 5 с таким расчетом, чтобы мениски жидкости в пьезометрах оставались в пределах стеклянных трубок.
3. Не изменяя положение вентиля 5, измерить секундный расход жидкости в трубопроводе. Для этого по водомерному стеклу 7 (цена одного деления  $2,5 \text{ л} = 2500 \text{ см}^3$ ), установленному на мерном баке 6, определить, за какое время  $t$  (по секундомеру) протекает объем воды  $V$  (например, 10 л).
4. Расход жидкости  $Q$  определяют по формуле:  $Q = V / t$ , ( $\text{см}^3/\text{с}$ ).
5. Измерить перепад уровней жидкости  $\Delta h$  (потерянный пьезометрический напор) в пьезометрах до и после пробочного крана 1, вентиля 2, внезапного расширения 3 и внезапного сужения 4.
6. Изменяя степень открытия вентиля 5, повторить экспериментальное наблюдение трижды.
7. Закончив опыты, слить воду из мерного бака 6, перекрыть трубопровод.
8. Для каждого замера определить значение коэффициентов местных сопротивлений  $\zeta_{м.с}$  по формуле:

$$\zeta_{м.с} = \frac{2g \cdot \Delta h}{v^2},$$

где  $\Delta h$  – потери напора на соответствующих местных сопротивлениях;  
 $v$  – средняя скорость потока  $v = Q / \omega$ ;

$\omega$  – площадь поперечного сечения потока;

$g$  – ускорение свободного падения,  $\text{см}/\text{с}^2$ .

8. Сравнить полученные результаты для  $\zeta_{в.р.}$  с теоретическим

$$\zeta_{в.р.} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2, \text{ полученные значения } \zeta_{в.с.} \text{ с теоретическим } \zeta_{в.с.} = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2.$$

9. Данные свести в табл. 1.

Таблица 1

Экспериментальная таблица

Измеряемые и искомые величины	Единицы измерения	Вид сопротивления								
		пробочный кран		вентиль		внезапное расширение		внезапное сужение		
		1	2	1	2	1	2	1	2	
Объем жидкости, $V$	$\text{см}^3$									
Время наполнения объема, $t$	с									
Расход, $Q = V/t$	$\text{см}^3/\text{с}$									
Скорость, $v = Q/\omega$	$\text{см}/\text{с}$									
Разность уровней, $\Delta h$	см									
Диаметр, $d$	см	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56	2,56
Диаметр, $D$	см	–	–	–	–	–	10	10	10	10
Площадь, $\omega_1$	$\text{см}^2$									
Площадь, $\omega_2$	$\text{см}^2$	–	–	–	–	–				
Коэффициент $\zeta_{м.с}$ (экспериментальные значения), $\zeta_{i.\bar{n}} = \frac{2g \cdot \Delta h}{v^2}$	–									
Теоретическое значение $\zeta_{\hat{a}.\hat{\delta}} = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2$	–	–	–	–	–	–			–	–
Теоретическое значение $\zeta_{\hat{a}.\hat{n}} = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2$	–	–	–	–	–	–	–			

Коэффициент сжатия  $\varepsilon$  можно принимать по табл. 2.

Таблица 2

Коэффициент сжатия

$\omega_1 / \omega_2$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\varepsilon$	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644	0,662

## 9. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется местным сопротивлением?
2. Почему возникают потери напора в местных сопротивлениях?
3. Опишите движение жидкости на начальном участке трубопровода.
4. Как определить длину начального участка при ламинарном режиме движения жидкости в круглой трубе?
5. Как определить длину начального участка при турбулентном режиме движения жидкости в круглой трубе?
6. Как Вы думаете, почему длина начального участка при ламинарном режиме движения больше, чем при турбулентном?
7. Опишите движение жидкости через местные сопротивления.
8. Изобразите схематически характер течения при внезапном расширении потока.
9. Выведите формулу Борда. Какой она имеет физический смысл?
10. Изобразите схематически характер течения для местного сопротивления выход из трубы.
11. Изобразите схематически характер течения жидкости через диффузор.
12. Изобразите схематически характер течения жидкости через внезапное сужение.
13. Изобразите схематически характер течения жидкости через вход в трубу.
14. Изобразите схематически характер течения жидкости через конфузор.
15. Что такое эквивалентная длина?
16. Объясните, почему происходит взаимное влияние местных сопротивлений?
17. Что такое длина влияния местного сопротивления?
18. Можно ли использовать табличное значение коэффициента  $\zeta$  при небольших числах  $Re$ ? Объясните Ваш ответ.
19. Как происходит изменение значения коэффициента  $\zeta$  от числа  $Re$ ?
20. При каких числах  $Re$  наблюдается автомодельность коэффициента  $\zeta$  от  $Re$ ?

## 10. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Выш. шк., 1998. – 311 с.
6. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.

## МОДУЛЬ 9

### ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ НАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

При напорном движении трубопровод работает полным сечением. В этом случае живое сечение потока равно площади поперечного сечения трубопровода  $\omega$ . При таком движении любое изменение расхода потока в каком-либо сечении трубопровода не вызывает изменения живого сечения потока, а приводит лишь к изменению давления и скорости движения жидкости.

Под *простым трубопроводом* будем понимать трубопровод, не имеющий ответвлений и состоящий из труб одного диаметра. Движение жидкости в трубопроводе обусловлено напором, равным разности  $H$  напоров в резервуарах – питателе и приемнике (рис. 9.1, *а*) или разности напоров в резервуаре-питателе и в струе на выходе из трубы (рис. 9.1, *б*). Если указанная разность напоров не будет изменяться во времени, то движение *установившееся*.

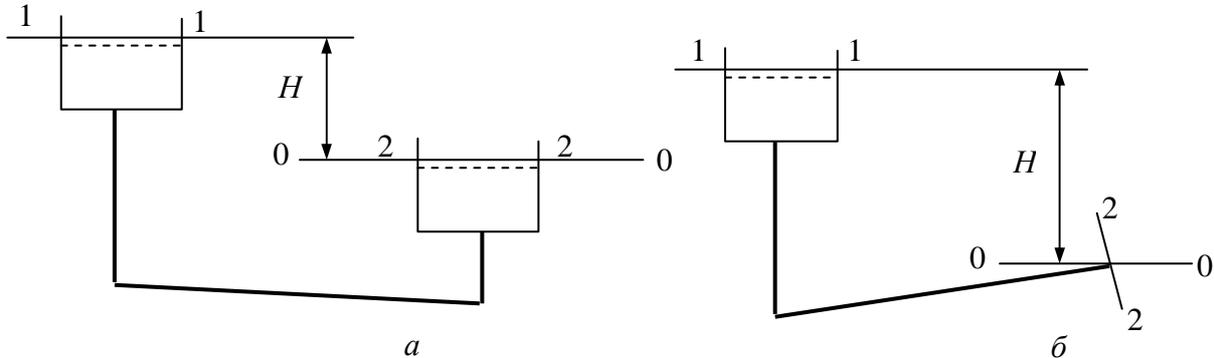


Рис. 9.1. Гидравлические схемы движения жидкости в простом трубопроводе:  
*а* – истечение под уровень; *б* – истечение в атмосферу

*Установившееся движение* такое, когда в каждой точке области, где движется жидкость, местные скорости во времени не изменяются.

На различных участках трубопровода движение жидкости может быть равномерным и неравномерным. Равномерное движение наблюдается на линейных участках трубопровода находящихся вне зоны влияния местных сопротивлений и входа в трубу. Неравномерное движение наблюдается вблизи местных сопротивлений и участки стабилизации.

*Равномерным движением* называется движение, при котором площадь живого сечения имеет постоянную форму и величину, причем местные скорости в соответственных точках по длине трубопровода одинаковы. При равномерном движении эпюры скоростей для всех сечений имеют не только одинаковую площадь, но и одинаковую форму. Средняя скорость при таком движении всегда постоянная для всех сечений.

*Неравномерным движением* называется такое движение, при котором:

- а) живые сечения вдоль потока изменяют свою величину;
- б) живые сечения вдоль потока сохраняют свою величину, но местные скорости в соответственных точках оказываются неравными друг другу.

По соотношению напоров, потерянных на преодоление сопротивлений на линейных участках и на участках местных сопротивлений, простые трубопроводы делятся на длинные и короткие.

В гидравлически длинном трубопроводе потери напора по длине настолько превышают местные потери, что при расчете трубопровода их не учитывают, а принимают как некоторую часть потерь по длине. Обычно потери напора в местных сопротивлениях принимают  $5 \div 10 \%$  от потерь по длине.

В коротком трубопроводе потери напора по длине и местные потери сопоставимы по значению. При гидравлическом расчете коротких трубопроводов учитываются как местные потери напора, так и потери напора по длине.

Полная потеря напора  $h_{ном}$  на пути от сечения 1-1 до сечения 2-2 (рис. 9.2) выразится в виде:

$$h_{ном} = h_{дл} + \sum h_m.$$

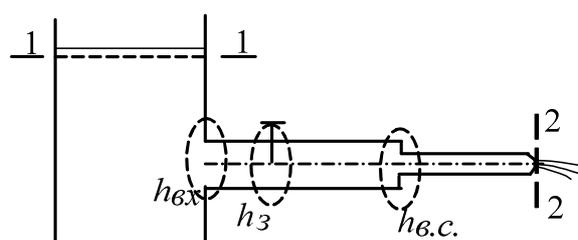


Рис. 9.2. Сложение потерь напора

Потери напора по длине определяются по формуле Дарси – Вейсбаха:

$$h_{дл} = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

а потери напора в местных сопротивлениях по формуле Вейсбаха:

$$h_m = \zeta_m \frac{v^2}{2g}.$$

## 2. РАСЧЕТ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА ПОСТОЯННОГО ДИАМЕТРА

**Случай истечения жидкости под уровень** (рис. 9.3). Рассмотрим установившееся движение жидкости: скорость  $v$  в трубопроводе не изменяется во времени; разность  $H$  уровней в сосудах  $A$  и  $B$ , соединяемых трубопроводом, постоянна.

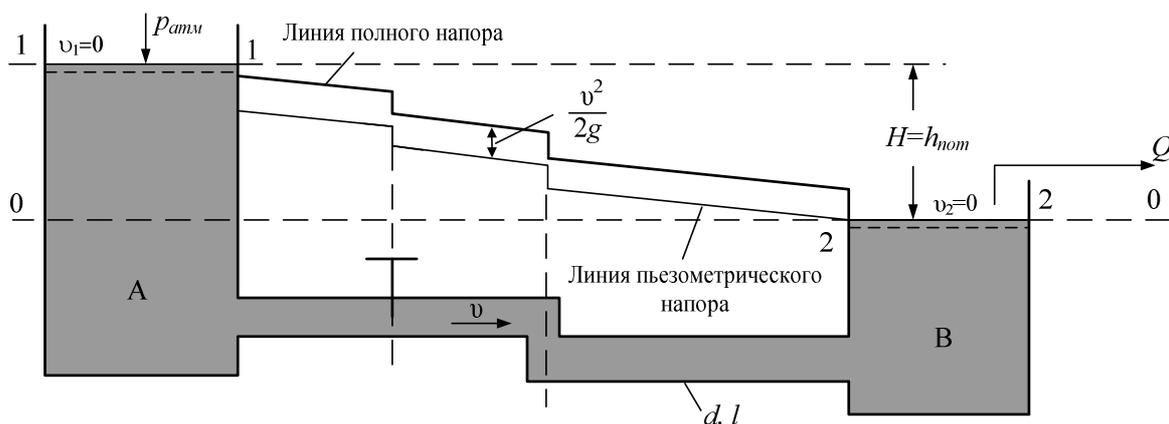


Рис. 9.3. Истечение жидкости под уровень

Найдем величину расхода  $Q$  для трубопровода. С этой целью используем уравнение Бернулли:

1. Намечаем живые сечения 1-1 и 2-2 (рис. 9.3): для этих сечений известно давление ( $p = p_{atm}$ ) и, кроме того, известны скорости ( $v_A \approx v_B \approx 0$ ).

2. Намечаем плоскость сравнения 0-0; эту плоскость удобно провести по сечению 2-2; при этом  $z_2$  обратится в нуль.

3. Запишем уравнение Бернулли:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{ном}. \quad (9.1)$$

4. Выясняем значения отдельных членов, входящих в это уравнение:

$$z_1 = H; v_1 = v_A = 0; v_2 = v_B = 0; p_1 = p_2 = p_{atm}; z_2 = 0; \alpha = 1, \quad (9.2)$$

где  $H$  – разность уровней жидкости в сосудах  $A$  и  $B$ .

5. Подставляем (9.2) в (9.1), получаем:

$$H = h_{ном}.$$

Как видно, при истечении под уровень разность уровней  $H$  целиком расходуется на потери напора в трубе.

Выразим теперь потерю напора  $h_{ном}$  через скорость в трубе:

$$H = h_{м.с.} + h_{дл} = \left( \sum \zeta_m \right) \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \left( \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d} \right) \cdot \frac{v^2}{2g}. \quad (9.3)$$

Далее получаем

$$v = \frac{1}{\sqrt{\sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d}}} \cdot \sqrt{2gH},$$

откуда

$$Q = \omega \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH}. \quad (9.4)$$

**Случай истечения в атмосферу** (рис. 9.4). Здесь также рассматриваем установившееся движение:  $v = \text{const}$ ;  $H = \text{const}$ , где  $H$  – превышения уровня жидкости в сосуде  $A$  над центром выходного сечения.

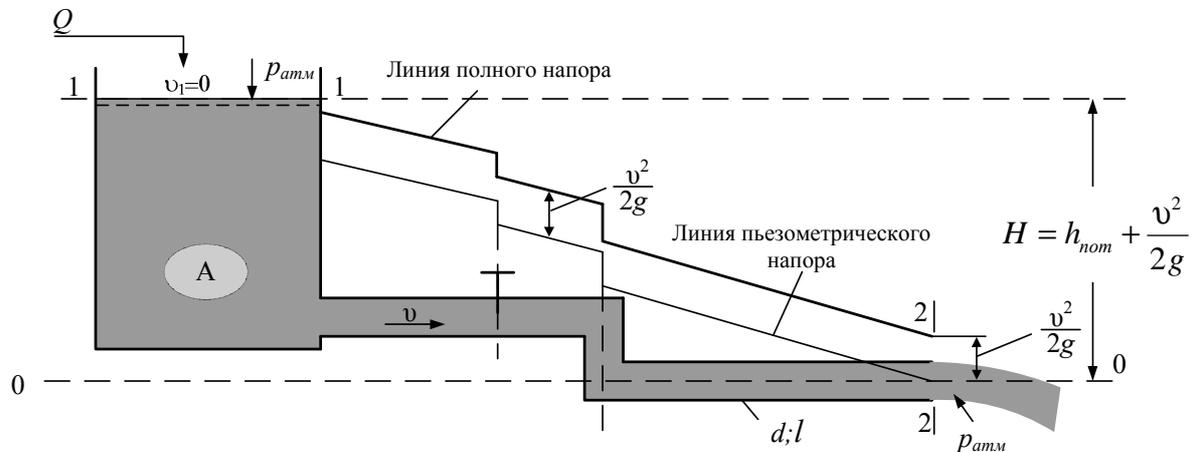


Рис. 9.4. Истечение в атмосферу

Используя уравнение Бернулли (9.1), сечения 1-1, 2-2 и плоскость сравнения 0-0, получаем:

$$z_1 = H; v_1 = v_A = 0; v_2 = v; p_1 = p_2 = p_{атм}; z_2 = 0; \alpha = 1.$$

Подставляя эти величины в уравнение Бернулли, получаем

$$H = h_{ном} + \frac{v^2}{2g}, \quad (9.5)$$

где  $v$  – скорость в сечении 2-2;  $h_{ном} = h_{дл} + h_m$ .

Из рассмотрения (9.5) можно вывести следующее правило: *при истечении в атмосферу напор  $H$  тратится на потери напора в трубе и на образование скоростного напора в выходном живом сечении.*

Далее

$$H = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} + \left( \sum \zeta_m \right) \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = \left( 1 + \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d} \right) \cdot \frac{v^2}{2g}, \quad (9.6)$$

откуда:

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d}}} \cdot \sqrt{2gH}$$

и, следовательно  $Q = \omega \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH}$ . (9.7)

### 3. ТРИ ТИПА ЗАДАЧ РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДА

Можно выделить три типа задач расчета простого трубопровода, методика решения которых выясняется ниже на примере трубопровода постоянного диаметра.

#### Задача первого типа

Дано:

расход жидкости –  $Q$

вязкость –  $\nu$

размеры трубопровода –  $l, d$

шероховатость стенок –  $\Delta$

Найти –  $H$

Порядок решения задачи:

1. По известным  $Q, d, \nu$  находится число  $Re$ :

$$Re = \frac{4Q}{\pi \cdot d \cdot \nu}$$

и определяется режим движения жидкости.

2. По найденному числу Рейнольдса определяется значение  $\lambda$  в зависимости от зоны сопротивления.

3. Напор  $H$  определяется из формул:

– для случая *истечения под уровень*:

$$H = \left( \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d} \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 g}; \quad (9.8)$$

– для случая *истечения в атмосферу*:

$$H = \left( 1 + \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d} \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 g}; \quad (9.9)$$

## Задача 2-ого типа

Дано:

---

напор –  $H$

вязкость жидкости –  $\nu$

размеры трубопровода –  $l, d$

шероховатость стенок –  $\Delta$

---

Найти –  $Q$

Порядок решения задачи:

1. Определяется режим движения путем сравнения напора  $H$  с его критическим значением:

$$H_{кр} = \frac{32 \cdot \nu^2 l}{g \cdot d^3} Re_{кр}, Re_{кр} = 2320. \quad (9.10)$$

Если  $H < H_{кр}$ , режим ламинарный, если  $H > H_{кр}$  – турбулентный.

2. Задача решается методом последовательных приближений. В случае ламинарного режима расход определяется из формул (9.4) или (9.7); (9.8) или (9.9). Однако прямое вычисление здесь затруднено, так как коэффициенты  $\zeta_m$  и  $\lambda$  являются функцией числа  $Re$ . Поэтому в первом приближении  $\lambda$  определяется из выражения:

$$\lambda = \frac{64}{Re_{кр}} = \frac{64}{2320}. \quad (9.11)$$

Далее определяются расход  $Q$  и средняя скорость  $v = Q/\omega$ . По найденной средней скорости определяется число  $Re_1$ . Число  $Re_1$  сравнивается с  $Re_{кр}$ , если разность между  $Re_{кр}$  и вновь рассчитанным  $Re_1$  оказывается  $\leq 5\%$ , то расчет считают оконченным. Если же разность оказывается  $> 5\%$ , то по формуле (9.11) определяется величина  $\lambda_1$ , где уже вместо  $Re_{кр}$  подставляют значение  $Re_1$ . Далее по одной из формул (9.4) или (9.7); (9.8) или (9.9) определяют значение  $Q_1$ , затем – среднюю скорость  $v_1$  и далее число  $Re_2$ . Затем  $Re_2$  сравнивают с  $Re_1$ , если разность  $\leq 5\%$ , то расчет считают оконченным. Если же разность оказывается  $> 5\%$ , то повторяют расчет до тех пор, пока разность между последним значением числа  $Re_i$  и предыдущим  $Re_{i-1}$  не окажется  $\leq 5\%$ . Такой метод решения задачи называется *методом последовательно приближения*.

В случае турбулентного режима в качестве первого приближения предполагают, что трубопровод работает в области квадратичного

сопротивления. Такое предположение позволяет по известным  $d$  и  $\Delta$  определить величину  $\lambda$  по формуле Шифринсона:

$$\lambda = 0,11(\Delta/d)^{0,25}.$$

По формулам (9.4) или (9.7) определяются  $Q$ . По найденному  $Q$  рассчитывается  $Re_1$ . Далее по формуле  $Re_{кв} = 500 \frac{d}{\Delta}$  определяют нижнюю границу области квадратичного сопротивления. Если  $Re_1 \geq Re_{кв}$ , то сделанное предположение подтверждается и на этом расчет окончен. Если же  $Re_1 < Re_{кв}$ , то по значению  $Re_1$  определяют в какой области работает трубопровод. Для этой области по соответствующей формуле определяют  $\lambda_1$ , затем находят  $Q_1$  и далее  $Re_2$ . После чего  $Re_2$  сравнивают с  $Re_1$ , если разность  $\leq 5\%$ , то расчет считают окончанным. Если же разность оказывается  $> 5\%$ , то повторяют расчет до тех пор, пока разность между последним значением числа  $Re_i$  и предыдущим  $Re_{i-1}$  не окажется  $\leq 5\%$ . При этом следят в какой области сопротивления работает трубопровод и  $\lambda_i$  определяют по соответствующей формуле.

Целесообразно графическое решение задачи, основанное на построении характеристики трубопровода  $H = f(Q)$ . Характеристика строится по уравнениям (9.8) или (9.9) с учетом вида истечения жидкости из трубопровода. Для построения графика задаются значениями  $Q$  и для каждого  $Q$  определяют значение  $H$ . Строят график (рис. 9.5).

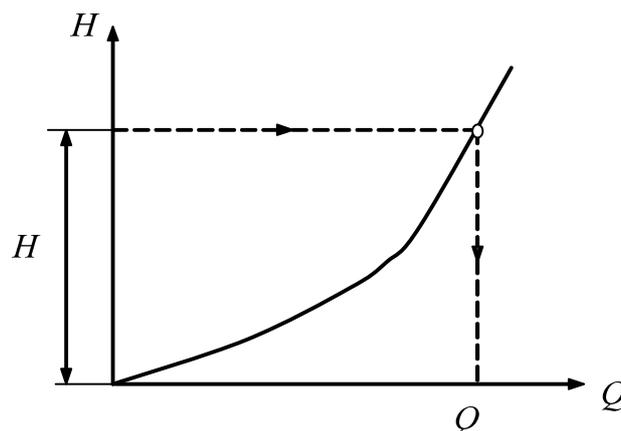


Рис. 9.5. Графический метод определения расхода

По оси ординат откладывается заданный напор  $H$  (известный из задания) и по графику определяется соответствующий ему расход  $Q$ .

### Задача 3-его типа

Дано:

напор –  $H$

расход –  $Q$

вязкость жидкости –  $\nu$

длина трубопровода –  $l$

шероховатость стенок –  $\Delta$

Найти –  $d$

Задача решается графически, путем построения зависимости требуемого напора  $H$  от диаметра трубопровода  $d$  при заданном расходе  $Q$ . Задавая ряд значений  $d$ , для каждого из которых определяется величина  $\lambda$  с учетом области сопротивления, вычисляют соответствующие значения напоров  $H$  по формулам (9.8) или (9.9).

Результаты подсчетов сводятся в график  $H = f(d)$  (рис. 9.6), позволяющий по заданному  $H$  определить  $d$  и далее уточнить необходимую величину  $H$  при выборе ближайшего большего стандартного диаметра  $d$ .

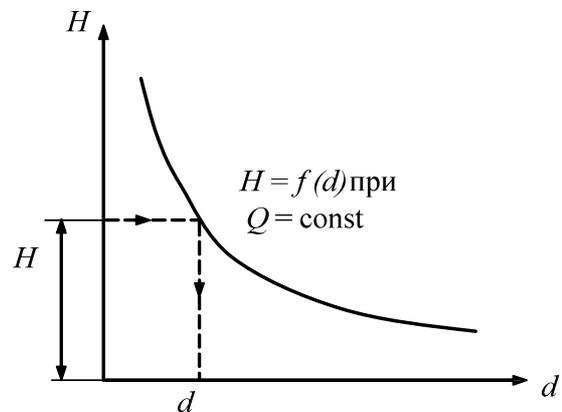


Рис. 9.6. Графический метод определения диаметра трубопровода

### Расчет простых трубопроводов в квадратичной области сопротивлений

В случае квадратичной области сопротивлений, то есть когда коэффициент трения не зависит от числа  $Re$ , а определяется только относительной шероховатостью стенок трубопровода, расчеты существенно упрощаются. Во многих случаях (для данных трубопроводов) можно пренебрегать также местными сопротивлениями и скоростным напором на выходе.

В этих условиях уравнения принимают вид:

$$H = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}; \quad (9.12)$$

$$H = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5} Q^2 l; \quad Q = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gHd}{\lambda}}$$

или  $H = A_{кв} Q^2 l$ ;  $Q = \sqrt{H / A_{кв} l}$ ,

где  $A_{кв} = \frac{16\lambda}{2g\pi^2 d^5}$ .

$$H = Q^2 \left\{ \frac{16\lambda_1}{2g\pi^2 d_1^5} l_1 + \frac{16\lambda_2}{2g\pi^2 d_2^5} l_2 + \dots + \frac{16\lambda_n}{2g\pi^2 d_n^5} l_n \right\} =$$
$$= Q^2 \{ A_{1кв} l_1 + A_{2кв} l_2 + \dots + A_{nкв} l_n \}$$

или  $Q = \sqrt{\frac{H}{A_{1кв} l_1 + A_{2кв} l_2 + \dots + A_{nкв} l_n}}$ .

Для данной шероховатости трубы когда  $A_{кв}$  называемое удельным сопротивлением, является функцией диаметра, а потому может быть заранее вычислены для каждого диаметра  $d$ , входящего в установленный стандарт. Можно составить таблицу значений удельного сопротивления  $A_{кв}$  для всех стандартных значений диаметра труб, что существенным образом облегчает расчет для всех рассматриваемых случаев простого трубопровода.

Кроме удельного  $A_{кв}$  в практике расчетов трубопроводов могут применяться и другие обобщенные гидравлические параметры:

– модуль расхода:

$$K_{кв} = 1 / \sqrt{A_{кв}};$$

– сопротивление:

$$S_{кв} = A_{кв} l;$$

– проводимость:

$$P_{кв} = \frac{1}{\sqrt{S_{кв}}} = \frac{1}{\sqrt{A_{кв} l}}.$$

Для определения этих параметров также составлены таблицы.

### Расчет трубопроводов в неквадратичной области сопротивления

Во многих случаях движения жидкостей в трубопроводах санитарно-технических систем квадратичный закон сопротивления не соблюдается. Более 80 % всех городских газопроводов низкого и среднего давления работают в неквадратичной зоне сопротивления.

Решение первой из рассмотренных выше задач расчета трубопроводов при известном расходе и диаметре трубопровода (т.е. при известном  $Re$ ) не

вызывает затруднений. Решение двух остальных задач могут быть получены методом последовательного приближения. Для облегчения расчетов трубопроводов целесообразно ввести поправочный коэффициент  $\varphi$  на неквадратичность. Рассмотрим для простоты только длинные трубопроводы. Считая, что местные потери напора в неквадратичной области сопротивления не меняются, можно обобщить предлагаемую методику и на короткие трубопроводы.

Для длинного трубопровода общие потери равны потерям напора по длине, согласно (9.12), имеют вид

$$H = 8\lambda \frac{Q^2}{g\pi^2 d^5} l = \frac{\lambda}{\lambda_{кв}} \frac{8\lambda_{кв}}{n\pi^2 d^5} Q^2 l = \frac{\lambda}{\lambda_{кв}} A_{кв} l Q^2. \quad (9.13)$$

В выражении (9.13)  $\lambda$  – действительный коэффициент гидравлического трения рассматриваемого трубопровода,  $\lambda_{кв}$  – коэффициент гидравлического трения того же трубопровода в квадратичной области сопротивления,  $A_{кв}$  – удельное сопротивление трубопровода в квадратичной области сопротивления (определяем по таблицам).

Если  $\lambda/\lambda_{кв} = \varphi$ , получаем общее соотношение для расчета трубопроводов:

$$H = \varphi A_{кв} Q^2 l = \varphi S_{кв} Q^2.$$

Для определения поправочного коэффициента  $\varphi$  напишем соотношение для коэффициентов  $\lambda$  и  $\lambda_{кв}$ :

$$\lambda_{кв} = 0,11(\Delta_3/d)^{0,25} \text{ формула Шифринсона}$$

$$\lambda_{кв} = 0,11 \left( \frac{\Delta_3}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25},$$

используя которые найдем

$$\varphi = \frac{\lambda}{\lambda_{кв}} = \left( 1 + \frac{68v}{v \cdot \Delta_3} \right).$$

Значение коэффициента  $\varphi$ , вычисленные при движении воды в трубопроводах с разной абсолютной шероховатостью  $\Delta_3$  приводятся в таблицах.

#### 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ И ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРУБ

Рассмотрим систему из последовательно соединенных длинных труб различных диаметров и длин. В общем случае материал труб может быть различным. Система соединяет два резервуара (рис. 9.7).

По трубопроводу, составленному из последовательно соединенных труб, проходит неизменяющийся по длине транзитный расход  $Q$ . На каждом ( $i$ -том) участке рассматриваемого трубопровода для пропуска расхода  $Q$  затрачивается часть суммарного напора  $H$ , равная:

$$H_i = \lambda_i \frac{l_i}{d_i^5} \frac{8 \cdot Q^2}{g \cdot \pi^2} = h_{\text{дл},i}, \quad (9.14)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  – номер участка трубопровода.

Поскольку местными потерями пренебрегаем, напор  $H$  затрачивается на преодоление потерь напора по длине и равен сумме потерь напора на отдельных участках:

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_n = \sum_{i=1}^{i=n} H_i. \quad (9.15)$$

При параллельном соединении длинных трубопроводов между точками  $M$  и  $N$  проходит несколько труб (рис. 9.8).

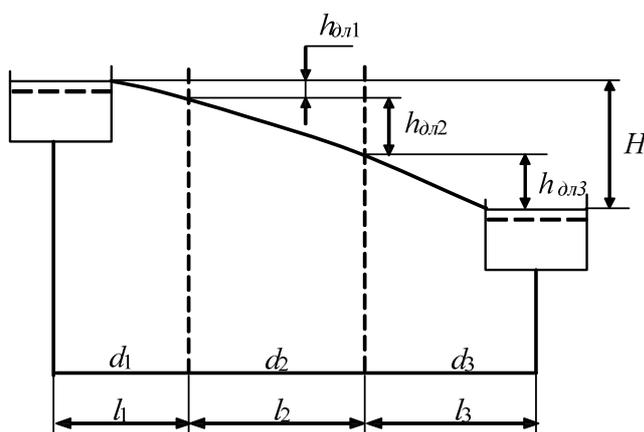


Рис. 9.7. К расчету трубопровода из последовательно соединенных труб

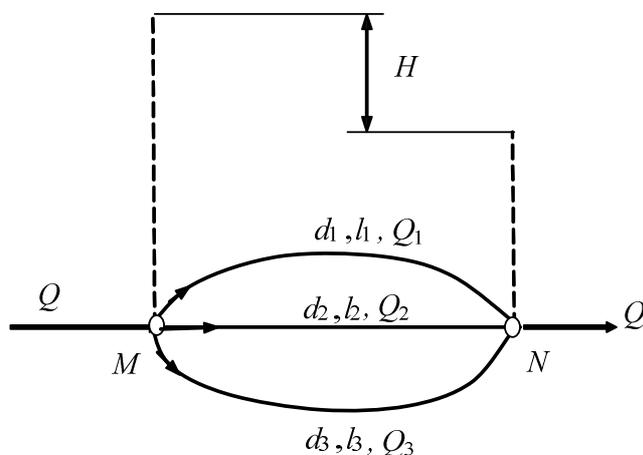


Рис. 9.8. К расчету параллельного соединения трубопроводов

Разность пьезометрических напоров в начале и в конце труб составляет напор  $H$ , полностью затрачиваемый на преодоление сопротивлений. На каждом участке трубы движение происходит под действием одного и того же напора. Но связи с различными длинами участков гидравлические уклоны на каждом участке будут разными:

$$I_i = H / l_i,$$

где  $i$  – номер участка трубы.

Основной задачей при расчете трубопровода с параллельным соединением является определение расходов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  параллельных труб и в определении перепада напора между точками  $M$  и  $N$ , если известны общий расход  $Q$ , диаметры и длины параллельных труб ( $d_1, d_2, \dots, d_n$  и  $l_1, l_2, \dots, l_n$ ).

Поскольку величина потеряннного напора для каждой параллельной ветви одна и та же, равная  $h_n = H_1 - H_2$ , то для первой ветви можно написать

$$h_n = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \sum \zeta \frac{v_1^2}{2g} = Q_1 \left[ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1 2g S_1^2} + \sum \zeta_1 \frac{1}{2g S_1^2} \right]$$

или, обозначая  $\left[ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1 2g S_1^2} + \sum \zeta_1 \frac{1}{2g S_1^2} \right] = B_1$ ,

$$h_n = B_1 Q_1^2.$$

Аналогично для других ветвей:

$$\left. \begin{array}{l} h_n = B_2 Q_2^2 \\ h_n = B_3 Q_3^2 \\ \dots\dots\dots \\ h_n = B_n Q_n^2 \end{array} \right\}$$

Так получается  $n$  уравнений по числу веток трубопровода. Но в этих уравнениях  $(n+1)$  неизвестных: это расходы и потеряннный напор  $h_n$ .

Дополняем систему недостающим уравнением:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n.$$

Решение проводим в следующем порядке. Из системы уравнений определяем все расходы выраженными через один их них (например через расход  $Q_1$ ), то есть

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}$$

$$Q_3 = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_3}}$$

.....

$$Q_n = Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_n}}$$

Делая подстановку в уравнение баланса расходов, имеем

$$Q = Q_1 + Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_2}} + \dots + Q_1 \sqrt{\frac{B_1}{B_n}},$$

откуда расход каждой ветви

$$Q_1 = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^{i=n} \sqrt{\frac{B_1}{B_i}}}$$

После этого можно определить последовательно

$$Q_2 = Q_1 \sqrt{B_1 / B_2}, Q_3, \dots, Q_n.$$

Потерянный напор найдем по одному из уравнений системы, например

$$h_n = B_1 Q_1^2.$$

Приведенное решение предполагает квадратичный закон сопротивления.

Для проверки этого предположения определяем число  $Re$  каждой ветви в отдельности (по найденным расходам  $Q_1, Q_2, \dots$ ).

Для каждой ветви получаем

$$Re_1 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = \frac{4Q_1 d_1}{\pi d_1^2 \nu} = \frac{4Q_1}{\pi d_1 \nu};$$

Для второй

$$Re_2 = \frac{4Q_2}{\pi d_2 \nu} \text{ и т.д.}$$

По найденным числам  $Re$  можно уточнить все коэффициенты гидравлического трения  $\lambda$  и коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta$  и затем уточнить значение коэффициентов  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Повторяя расчет аналогично указанному выше, но при уточненных коэффициентах  $B_1', B_2', \dots, B_n'$  найдем уточненные расходы

$$Q_1' = \frac{Q}{1 + \sum_{i=2}^{i=n} \sqrt{\frac{B_1'(Re_1)}{B_i'(Re_i)}}}$$

а затем

$$Q_2' = Q_1' \sqrt{\frac{B_1'(Re_1)}{B_2'(Re_2)}} \text{ и так далее для всех ветвей.}$$

## 5. РАСЧЕТ ТРУБОПРОВОДА С НЕПРЕРЫВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ РАСХОДА ПО ДЛИНЕ

Часто встречаются случаи, когда по длине трубопровода происходит раздача некоторой части расхода или всего расхода, причем отбор жидкости (воды) потребителями происходит в нескольких сечениях по длине трубопровода (рис. 9.9).

К таким трубопроводам относятся городские и сельские водопроводы, дренажные коллекторы, которые работают в условиях увеличения расхода по длине.

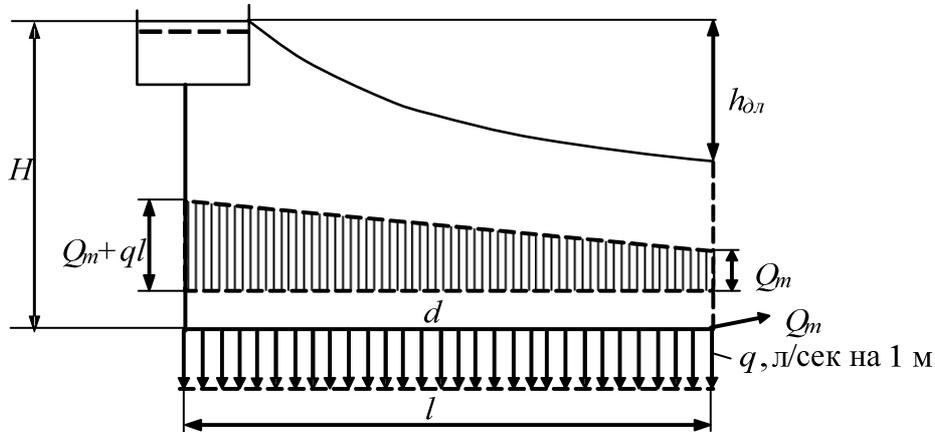


Рис. 9.9. К расчету трубопровода с непрерывным изменением расхода по длине

Рассмотрим случай, когда жидкость (вода) забирается из трубопровода равномерно по его длине. Такой случай представлен на рис. 9.9. Обозначим через  $q$  расход, отдаваемый трубой на сторону с одной единицы ее длины. Очевидно, что при равномерной отдаче воды на сторону расход в трубе  $Q$  уменьшается по линейному закону. Имея это в виду, эпюру расходов воды в самой трубе можно представить трапецией: правая крайняя ордината этой эпюры выражает транзитный расход  $Q_m$ ; левая крайняя ордината этой эпюры выражает расход в начальном сечении трубы, этот расход равен  $Q_m + ql$ .

Потерю напора для трубы, имеющей переменный по длине расход, определяют по выражению:

$$h_{0л} = Q_{расч}^2 \frac{\lambda \cdot l}{d \cdot 2g \cdot \omega^2}.$$

В случае отсутствия транзитного расхода ( $Q_m = 0$ ) расчетный расход определяется:

$$Q_{расч} = \frac{1}{\sqrt{3}} ql = 0,58 \cdot ql.$$

При наличии транзитного расхода ( $Q_m \neq 0$ ) расчетный расход находят по следующей приближенной формуле:

$$Q_{расч} \approx Q_m + 0,55 \cdot ql.$$

## 6. СИФОННЫЙ ТРУБОПРОВОД

*Сифоном* называется самотечная труба, часть которой расположена выше горизонта жидкости в сосуде, который ее питает (рис. 9.10).

Ограничимся рассмотрением истечения жидкости из сифона под уровень.

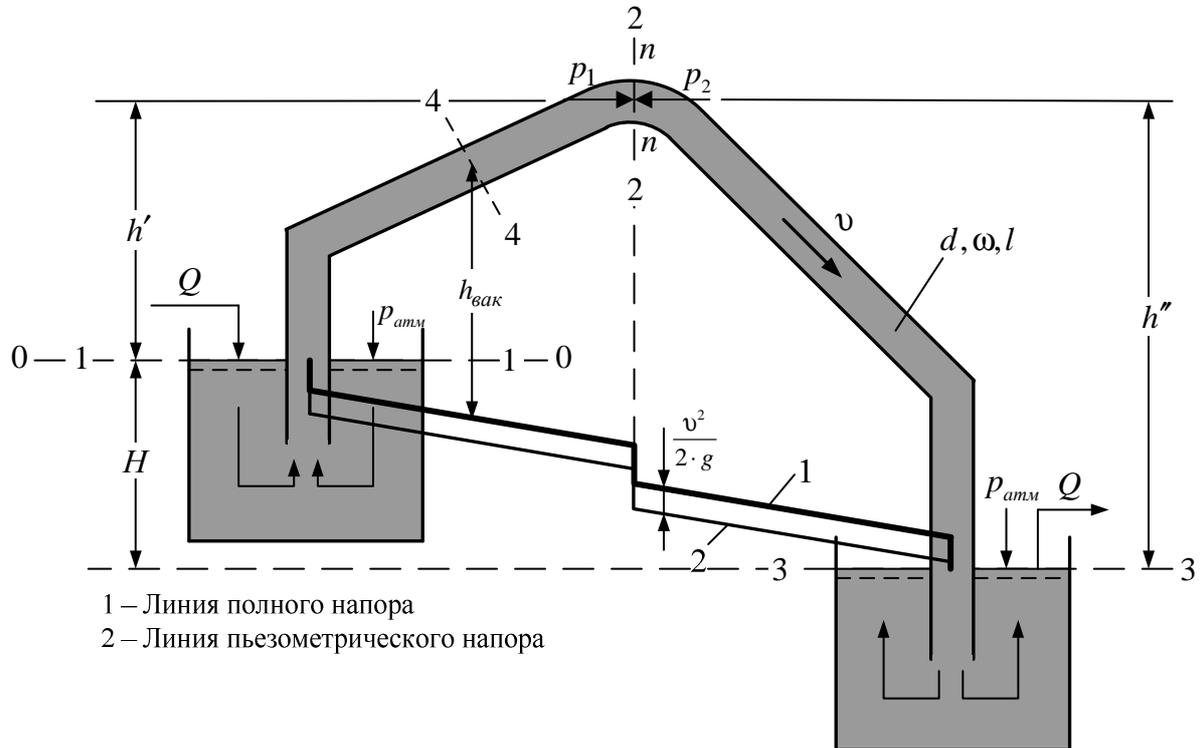


Рис. 9.10. Сифон

Если трубу, представленную на чертеже, каким-либо образом заполнить жидкостью, то после этого начнется движение жидкости из верхнего сосуда в нижний. В том, что жидкость в такой трубе будет двигаться, можно убедиться из следующего.

Наметим сечение трубы  $n-n$  и обозначим превышение его над горизонтом жидкости: в левом сосуде – через  $h'$  и в правом сосуде – через  $h''$ . Если предположить, что жидкость, заполняющая сифон, находится в покое, то можем написать:

а) давление в сечении  $n-n$  с левой стороны:

$$p_1 = p_{амм} + (-h' \gamma);$$

б) давление в сечении  $n-n$  с правой стороны:

$$p_2 = p_{амм} + (-h'' \gamma),$$

где  $(-h')$  и  $(-h'')$  – соответствующие заглубления сечения  $n-n$  под горизонтом жидкости в сосудах.

Как видно,  $p_1 > p_2$ . Отсюда понятно, что жидкость в трубе не может находиться в покое: она будет двигаться слева направо, то есть в сторону меньшего давления.

Рассмотрим установившееся движение жидкости в сифоне. Наметим два сечения: 1-1 и 3-3. Соединяя эти сечения уравнением Бернулли, получим формулу для расхода  $Q$  в трубе в виде следующей зависимости:

$$Q = \omega \cdot v = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{l}{d}}} \sqrt{2gH}.$$

Характерным для сифона является то, что в нем имеет место вакуум. Наибольшая величина вакуума будет в сечении  $n-n$ , наиболее высоко расположенном.

Найдем максимальную величину вакуума в сифоне. С этой целью наметим по линии  $n-n$ , где ищем вакуум, сечение 2-2 и затем соединим сечения 1-1 и 2-2 уравнением Бернулли (плоскость сравнения проведем на уровне горизонта жидкости в левом сосуде):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha v_2^2}{2g} + h_{ном.},$$

где  $z_1 = 0$ ;

$z_2 = h'$ ;

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_{атм.}}{\gamma}; \quad \frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_n}{\gamma}; \quad \frac{\alpha v_1^2}{2g} \approx 0; \quad \frac{\alpha v_2^2}{2g} \approx \frac{v^2}{2g},$$

где  $v$  – скорость в трубе;

$p_n$  – давление в сечении  $n-n$ .

Потери напора  $h_{ном}$  на пути от сечения 1-1 до сечения 2-2 выражаем через формулу Дарси – Вейсбаха:

$$h_{ном} = h_{\lambda l} = \lambda \frac{l_{1-2}}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

где  $l$  – длина трубы сифона от сечения 1-1 до сечения 2-2.

Запишем уравнение Бернулли с учетом выше сформулированных условий:

$$\frac{p_{атм.}}{\gamma} = h' + \frac{p_n}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l_{1-2}}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

или

$$\frac{p_{атм.}}{\gamma} - \frac{p_n}{\gamma} = h' + \left(1 + \lambda \frac{l_{1-2}}{d}\right) \frac{v^2}{2g}.$$

Так как 
$$\frac{P_{at}}{\gamma} - \frac{P_n}{\gamma} = h_{\text{вак}}^{\text{мак}},$$

то 
$$h_{\text{вак}}^{\text{мак}} = h' + \left(1 + \lambda \frac{l_{1-2}}{d}\right) \frac{v^2}{2g}. \quad (9.16)$$

Из формулы (9.16) видно, что  $h_{\text{вак}}^{\text{мак}}$  зависит от  $h'$ ; если  $h'$  будет велико, то и  $h_{\text{вак}}^{\text{мак}}$  будет велико. При больших  $h_{\text{вак}}^{\text{мак}}$  струя в сифоне может разорваться, и сифон перестанет работать. Считают, что для нормальной работы сифона величина  $h_{\text{вак}}^{\text{мак}}$  должна быть такой, при которой удовлетворяется условие:

$$h_{\text{вак}}^{\text{мак}} < h_{\text{вак}}^{\text{доп}},$$

где  $h_{\text{вак}}^{\text{доп}}$  – вакуум, допустимый по условиям невозможности образования разрыва турбулентной струи.

Величину  $h_{\text{вак}}^{\text{доп}}$  для воды (при нормальном атмосферном давлении) можно принять равной:

$$h_{\text{вак}}^{\text{доп}} = 6 \div 7 \text{ м вод. ст.}$$

Анализируя вопрос о разрыве струи в сифоне, надо учитывать следующие обстоятельства:

1. В сифоне из жидкости должен выделяться растворенный воздух (в связи с уменьшением давления в районе сечения  $n-n$ ). Этот воздух скапливается в виде воздушного «мешка» в верхней точке сечения  $n-n$ . Выпуск его через какой-либо клапан невозможен: при открытии клапана в районе сечения  $n-n$  атмосферный воздух будет поступать в трубу, увеличивая воздушный «мешок». Этот «мешок» может быть удален из сифона только при помощи особого насоса.

2. При достаточно большой величине  $h'$  движение жидкости в сифоне следует представлять себе по схеме на рис. 9.11, а: наибольший объем кавитационных паровоздушных областей (с давлением паров  $p_{n,n}$ ) имеет место в сечении  $n-n$ . По мере движения жидкости от сечения  $n-n$  к выходу эти кавитационные области, увлекаемые потоком, закрываются и постепенно исчезают.

Увеличивая размер  $h'$  можно получить условия, когда объем паровоздушной области увеличится настолько, что мы получим картину, приближающую к схеме на рис. 9.11, б. При дальнейшем увеличении  $h'$  произойдет полный разрыв струи, как показано на рис. 9.11, в.

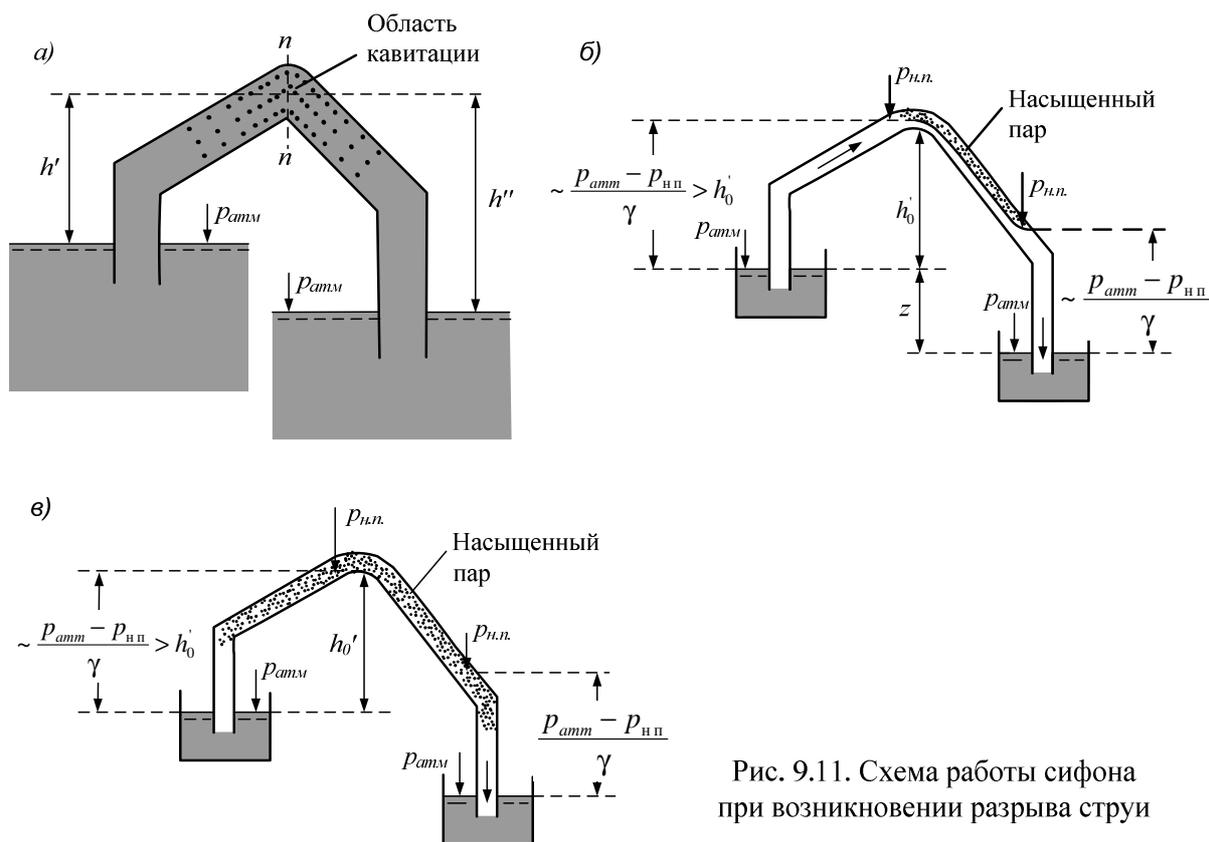


Рис. 9.11. Схема работы сифона при возникновении разрыва струи

В заключении отметим, что напорная линия 1 и пьезометрическая линия 2 в случае сифона выглядят, как показано на рис. 9.10: первая «ступенька» линии 1 выражает потерю напора на вход в трубу, потерю по длине до первого поворота трубы и потерю напора в этом повороте. Полная потеря в сифоне равна  $H$ .

## 7. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАЗВЕТВЛЕННОГО ТРУБОПРОВОДА

Различают следующие виды *сложного* трубопровода:

- а) *разветвленный* или *тупиковый*;
- б) *кольцевой*.

Рассмотрим расчет разветвленного сложного трубопровода, питаемого из бака  $B$ , установленного на водонапорной башне (рис. 9.12). Такой трубопровод состоит из *магистральной* (линия 1-2-3-4) и *ответвлений* (линий 2-5 и 3-6).

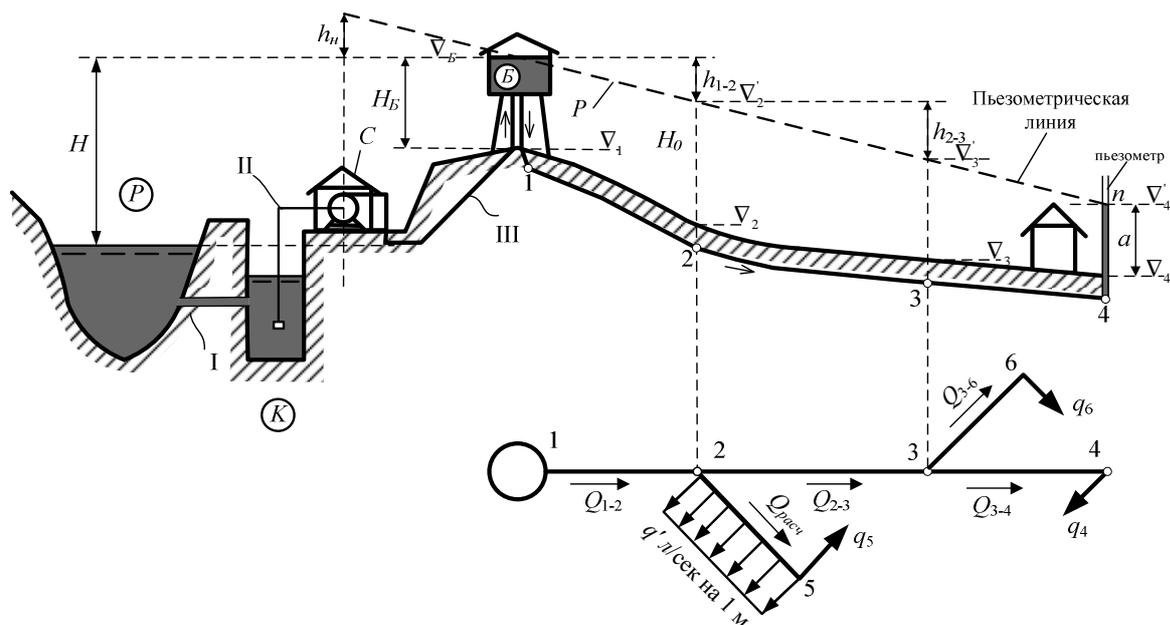


Рис. 9.12. К расчету разветвленного трубопровода:  
*P* – река, *K* – береговой колодец, *C* – насосная станция, *B* – водонапорная башня,  
*I* – самотечная труба, *I* – всасывающая труба, *III* – напорная труба,  
 1-2-3-4 – магистраль, 2-5 и 3-6 – ответвления

**Случай, когда высотное положение водонапорного бака не задано.** Для гидравлического расчета рассматриваемой сети труб должны быть заданы:

- длины  $l$  отдельных труб и начертание сети их в плане местности в горизонталях;

- расчетные расходы воды, забираемые в отдельных точках сети:  $q_4, q_5, q_6$ ;

- расход  $q'$ , забираемый с 1 м длины того или другого трубопровода (линия 2-5);

- минимально допустимые отметки горизонта воды в воображаемых пьезометрах, подключенных к конечным точкам сети (точкам 4, 5, 6):  $\nabla'_4, \nabla'_5, \nabla'_6$ . Задавая  $\nabla'_4, \nabla'_5, \nabla'_6$ , мы тем самым задаем гидродинамические давления в точках 4, 5, 6, а также высоты  $a$ , на которые вода в этих точках может подняться («самотеком») над поверхностью земли, если трубопровод, как показано на рис. 9.12, проложен в земле (см., например, точку 4).

В результате гидравлического расчета можем найти: диаметр труб  $d$ , а также отметку горизонта воды в водонапорной башне, обеспечивающую подачу заданных расходов воды в заданные точки сети.

### Общий ход расчета.

1. Устанавливаем расчетные расходы воды для отдельных участков сети. Расчетный расход какого-либо участка сети должен равняться сумме расходов, забираемых из сети ниже (по течению) этого участка. Например:

– расчетный расход для участка 3-4:

$$Q_{3-4} = q_4;$$

– расчетный расход для участка 1-2:

$$Q_{1-2} = q_4 + q_5 + q_6 + q' l_{2-5};$$

– расчетный расход для участка 2-5:

$$Q_{2-5} = q_5 + 0,55q' l_{2-5}.$$

2. Выбираем линию трубопроводов, которую следует рассматривать как магистральную. В качестве магистрали намечаем линию: наиболее нагруженную расходами, наиболее длинную, характеризующую наибольшими отметками  $\nabla$  поверхности земли.

### Расчет магистрали 1-2-3-4.

1. Задаемся для отдельных участков магистрали так называемой экономической скоростью  $v_{эк}$ ; эта скорость может быть принята равной  $v_{эк} \approx 1$  м/с, данная скорость зависит от диаметра труб.

2. Установив скорости для отдельных участков магистрали, находим диаметры труб магистрали:

$$d' = \sqrt{\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot v_{эк}}},$$

Полученное значение  $d'$  округляем до ближайшего (большего или меньшего) сортаментного значения  $d$ .

3. Зная для каждой трубы ее диаметр и расход, определяем для всех участков магистрали потери напора по формуле:

$$h = \left( \sum \zeta_m + \lambda \frac{l}{d} \right) \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot d^4 g}. \quad (9.17)$$

4. Имея величины  $h$  для отдельных участков магистрали, строим пьезометрическую линию (см. рис. 9.12). Построение этой линии начинаем с конца магистрали, зная отметку  $\nabla'_4$ . Идя от точки  $n$  против течения и откладывая по вертикали вверх найденные величины  $h_{3-4}$ ,  $h_{2-3}$ ,  $h_{1-2}$ , получаем пьезометрическую линию.

Построив пьезометрическую линию, легко можем написать следующую зависимость, по которой и определяем отметку  $\nabla_B$ :

$$\nabla_B = \nabla_4 + \sum h,$$

где  $\sum h$  – потери напора по длине всей магистрали.

Отметка  $\nabla_B$  определяет высоту водонапорной башни  $H_B$ .

### **Расчет ответвлений.**

Построив пьезометрическую линию для магистрали, мы тем самым задали напоры в начале каждого ответвления. В случае ответвлений задан напор в начале и в конце каждого ответвления. Находим потерю напора как разницу напоров в начале и в конце ответвления. Из формулы (9.17) находим диаметр ответвления. Полученное значение диаметра округляем до ближайшего большего сортаментного значения.

## **8. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР КАК НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ТРУБОПРОВОДАХ**

Неустановившееся движение характеризуется тем, что значения местных скоростей и давления в пространстве, занятом движущейся жидкостью, изменяются с течением времени, то есть:

$$u_x = f(x, y, z, t); \quad u_y = f(x, y, z, t);$$

$$u_z = f(x, y, z, t); \quad p = f(x, y, z, t).$$

Неустановившееся движение, так же как и установившееся, может быть безнапорным и напорным, одномерным, плоским и трехмерным, ламинарным и турбулентным. Примером неустановившегося напорного движения может служить гидравлический удар.

*Гидравлический удар* – явление, возникающее в текущей жидкости при быстром изменении скорости в одном из сечений. Это явление характеризуется возникновением волны повышенного или пониженного давления, которая распространяется от места изменения скорости и вызывает в каждом сечении колебания давления и деформации стенок трубопровода. При резком уменьшении скорости движения воды в стальных трубопроводах на каждое уменьшение скорости 1 м/с давление в трубопроводе возрастает приблизительно на 1,0 – 1,2 МПа, то есть на 10 – 12 ат. Вследствие этого могут возникать осложнения в нормальной работе трубопровода вплоть до разрыва стенок и аварий оборудования насосных станций.

При гидравлическом ударе возможно также и резкое падение давления вплоть до давления насыщенных паров жидкости при данной температуре.

Как следствие появления столь низкого давления при гидравлическом ударе возможен даже разрыв жидкости. При этом может быть нарушена нормальная работа трубопровода. Вместе с тем в некоторых случаях гидравлический удар может иметь и положительное значение.

Первые исследования гидравлического удара были, выполнены Н.Е. Жуковским в 1898 г. Им была детально проанализирована физика процесса, выведены дифференциальные уравнения удара, дано их общее решение, найдены основные расчетные зависимости для вычисления изменения давлений при гидравлическом ударе. Н.Е. Жуковский провел также экспериментальные исследования гидравлического удара на водопроводе г. Москвы. В дальнейшее развитие исследований и расчетов гидравлического удара большой вклад внесли советские ученые.

К возникновению гидравлического удара могут приводить различные причины: 1) быстрое закрытие или открытие запорных и регулирующих устройств; 2) внезапная остановка насоса; 3) выпуск воздуха через гидранты на оросительной сети при заполнении трубопроводов водой (обычно гидравлический удар может начаться в заключительной стадии выпуска воздуха); 4) пуск насоса при открытом затворе на нагнетательной линии.

Характер процесса гидравлического удара зависит от вызвавших его причин. Так, при резком закрытии затвора в конце трубопровода гидравлический удар начнется с повышения давления, которое от затвора будет распространяться вверх по трубопроводу, а затем сменится понижением давления. Если закрытый затвор в конце трубопровода резко откроется, то гидравлический удар начнется с понижения давления, которое затем сменится повышением давления.

### **8.1. Гидравлический удар при мгновенном закрытии затвора**

Рассмотрим случай гидравлического удара при закрытии затвора, расположенного в конце горизонтальной прямолинейной цилиндрической трубы круглого поперечного сечения, подсоединенной к открытому резервуару (рис. 9.13).

Исходные данные для расчета: длина трубы  $L$ , диаметр  $D$ , площадь  $\omega$ , толщина стенок трубы  $e$ , средняя скорость потока в трубе при установившемся движении (до гидравлического удара)  $v_0$ , модуль упругости материала стенок трубы  $E$ , модуль упругости жидкости  $E_{жс}$ , плотность жидкости  $\rho$ ; избыточный гидродинамический напор в трубопроводе до гидравлического удара  $H_0 = p_0/\rho g$ .

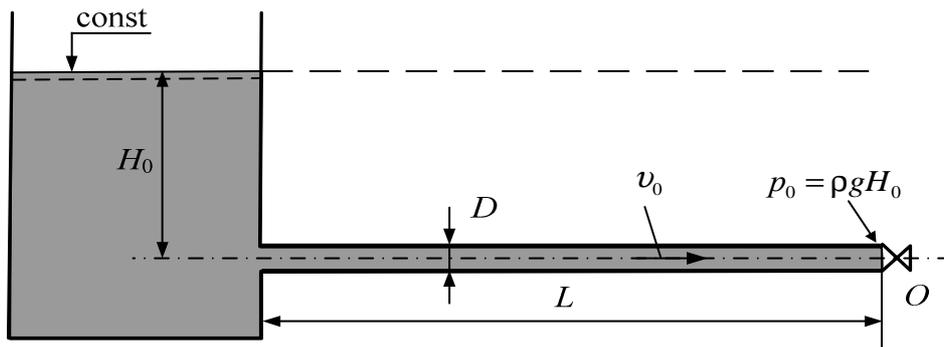


Рис. 9.13. Схема трубопровода к рассмотрению гидравлического удара

Кроме того, примем следующие допущения:

- 1) размеры резервуара столь велики, что уровень в нем остается постоянным независимо от явлений, происходящих в трубопроводе;
- 2) потери напора и скоростной напор до закрытия затвора малы, поэтому пьезометрическая линия практически совпадает с горизонтальной линией;
- 3) движение жидкости в трубе принимается одномерным, то есть все местные скорости считаются равными средней скорости, давление также считается одинаковым во всех точках живого сечения. Характеристики такого движения зависят только от продольной координаты.

В момент времени  $t_0$  затвор мгновенно закрылся. Если бы жидкость была абсолютно несжимаема ( $E_{жс} = \infty$ ), а стенки трубопровода абсолютно неупругие ( $E = \infty$ ), то вся масса жидкости мгновенно остановилась бы и при этом произошло бы очень большое повышение давления.

В реальных условиях упругость стенок трубопровода и сжимаемость жидкости изменяют характер протекания процесса и значения возникающих повышений давления.

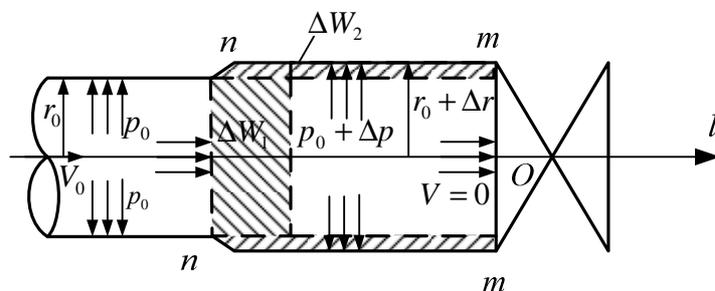


Рис. 9.14. Участок трубопровода вблизи задвижки в момент ее закрытия

Поверхность  $n-n$  на рис. 9.14, отделяющая часть жидкости, находящейся под действием волны гидравлического удара, от невозмущенной гидравлическим ударом жидкости, есть *фронт ударной волны*.

За бесконечно малый отрезок времени  $\Delta t$  после мгновенного закрытия остановится слой  $mmnn$ , непосредственно примыкающий к затвору.

Толщина этого слоя  $\Delta l$  зависит от упругих свойств жидкости и материала стенок трубопровода. В момент времени  $t = t_0 + \Delta t$  слои жидкости, расположенные выше по течению от сечения  $n-n$ , продолжают двигаться со скоростью  $v_0$  в сторону затвора. Под влиянием этих слоев остановившаяся масса жидкости в отсеке  $m-n$  сжимается, стенки трубопровода растягиваются, давление повышается на  $\Delta p$  и становится равным  $p = p_0 + \Delta p$ . В освободившийся в результате этого объем в отсек  $m-n$  через сечение  $n-n$  за время  $\Delta t$  поступает часть жидкости еще не остановившихся слоев.

Повышение давления при гидравлическом ударе можно определить, применив теорему об изменении количества движения (импульсов) к массе остановившейся жидкости.

В проекциях на направление движения имеем:

– импульс внешних сил, действующих на выбранную массу:

$$-\Delta p \omega \Delta t ;$$

– изменение количества движения выбранной массы:

$$-(\rho \omega_0 \Delta l v_0 + \rho \omega v_0 \Delta t v_0),$$

где  $\rho \omega v_0 \Delta t$  – масса жидкости, втекшей в отсек  $mn$  за время  $\Delta t$ .

Приняв  $\omega = \omega_0$  имеем:

$$\Delta p \Delta t = \rho \Delta l v_0 + \rho v_0^2 \Delta t .$$

Обозначив  $c = \Delta l / \Delta t$ , получим формулу Н.Е. Жуковского:

$$\Delta p = \rho c v_0 + \rho v_0^2, \quad (9.18)$$

или 
$$\Delta p / \rho g = \Delta H = c v_0 / g + v_0^2 / g, \quad (9.19)$$

где  $c$  – скорость распространения волны гидравлического удара вдоль трубопровода, то есть скорость ударной волны. В общем случае  $c$  – скорость распространения любого малого возмущения в жидкости.

Так как  $v_0 \ll c$ , обычно считают:

$$\Delta p = \rho c v_0 .$$

После мгновенного закрытия затвора фронт  $n-n$  ударной волны распространяется вдоль трубопровода со скоростью  $c$ . Слои жидкости последовательно, начиная от ближайшего к затвору, останавливаются, их скорость гасится до нуля.

На рис. 9.15 показан «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эпюры распределения давления и скорости по длине трубопровода в момент времени  $t = t_0 + l/c$ . Фронт  $n-n$  ударной волны прошел путь  $l$  за промежуток времени  $l/c$  после закрытия задвижки. На этом участке трубопровода давление увеличилось на  $\Delta p$  и стало равным  $p = p_0 + \Delta p$ , а скорость движения

жидкости погасилась до нуля, то есть  $v = 0$ , стенки трубопровода растянуты, жидкость находится в сжатом состоянии, плотность равна  $\rho + \Delta\rho$ .

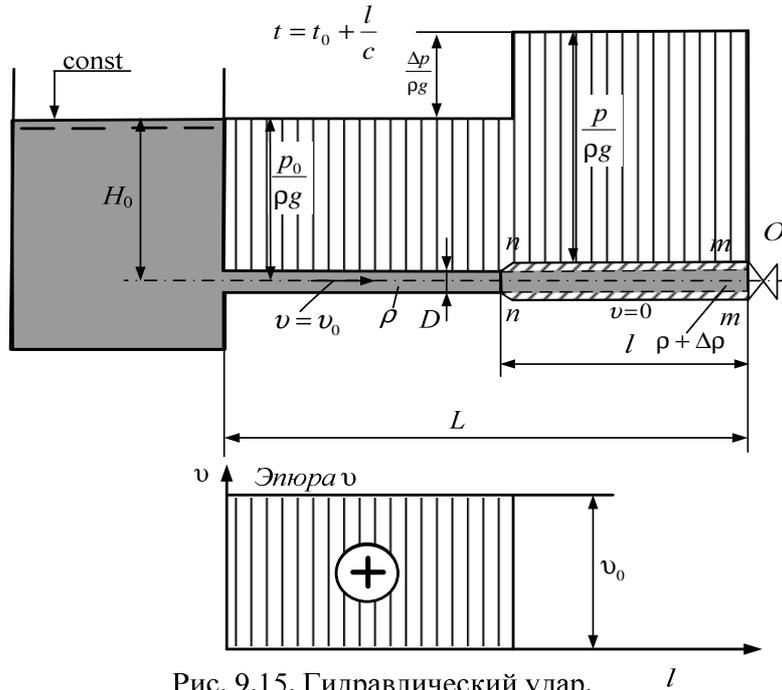


Рис. 9.15. Гидравлический удар.  
Момент времени  $t = t_0 + l/c$

В момент времени  $t = t_0 + L/c$  фронт  $n-n$  ударной волны достиг резервуара и занял положение  $n'n'$  (рис. 9.16).

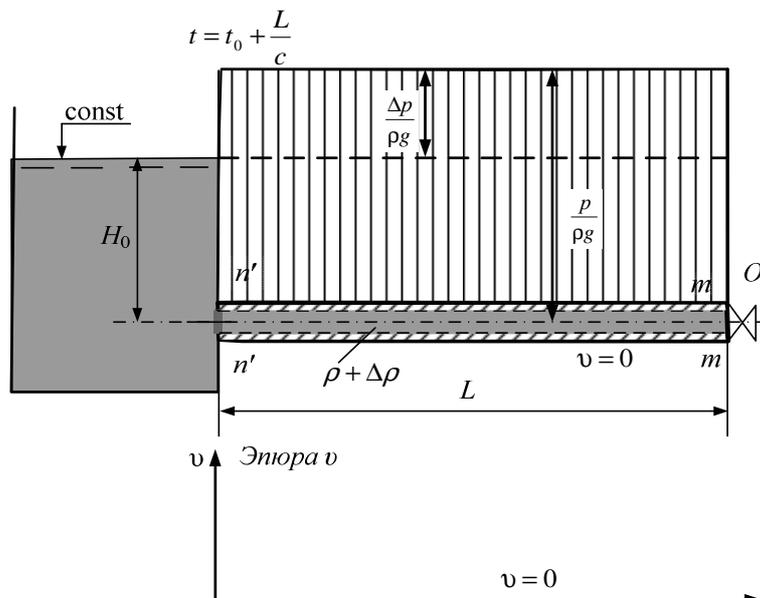


Рис. 9.16. Гидравлический удар.  
Момент времени  $t = t_0 + L/c$

В этот момент времени жидкость в трубопроводе находится в мгновенном состоянии покоя ( $v = 0$ ) по всей длине трубопровода  $L$ . Давление увеличилось на  $\Delta p$  и стало равным  $p = p_0 + \Delta p$ , стенки трубопровода растянуты, жидкость сжата, плотность равна  $\rho + \Delta \rho$ . Такое состояние системы не является устойчивым, так как по исходному предположению уровень, а следовательно, и давление в резервуаре не зависит от явлений, происходящих в трубопроводе. Таким образом, давление в резервуаре на уровне оси трубопровода (см. рис. 9.15) сохранит свое первоначальное значение, равное  $p_0$ :

$$t = t_0 + L/c.$$

В связи с этим в момент времени  $t = t_0 + L/c$  возникает движение жидкости из трубы в резервуар со скоростью  $v_0 = |\Delta p / \rho c|$ , равной первоначальной, но направленной в противоположную сторону, то есть слой жидкости в трубопроводе, примыкающий к резервуару, начнет вытекать в сторону резервуара. При этом давление в трубопроводе падает до давления  $p_0$  и стенки трубопровода восстанавливают первоначальную форму. Явление распространяется по трубопроводу к затвору.

Следовательно, в момент времени  $t = t_0 + L/c$  возникает обратная отраженная от резервуара волна, которая со скоростью  $c$  распространяется от резервуара к затвору. В трубопроводе восстанавливается первоначальное давление  $p_0$  и создается скорость  $-v_0$ . Рисунок 9.17 соответствует моменту времени  $t = t_0 + L/c + (L-l)/c = t_0 + (2L-l)/c$ . К этому моменту времени отраженная волна прошла путь  $L-l$ , равный расстоянию от резервуара до сечения  $n-n$ . На этом участке трубопровода давление равно  $p_0$ , скорость движения жидкости  $v = -v_0$ , стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению  $p_0$ . На участке трубопровода длиной  $l$  давление равно  $p = p_0 + \Delta p$ , скорость движения жидкости  $v = 0$ , стенки трубопровода растянуты, а жидкость находится в сжатом состоянии, плотность  $\rho + \Delta \rho$ .

В момент  $t = t_0 + 2L/c$  отраженная волна достигнет задвижки и заключенная в трубопроводе масса жидкости приобретет всюду начальный объем и давление  $p_0$ , находясь, однако, в состоянии движения в сторону резервуара. Инерция движущейся массы приведет к тому, что в момент времени  $t = t_0 + 2L/c$  давление в сечении  $m-m$  у задвижки понизится на  $\Delta p = \rho c v_0$ .

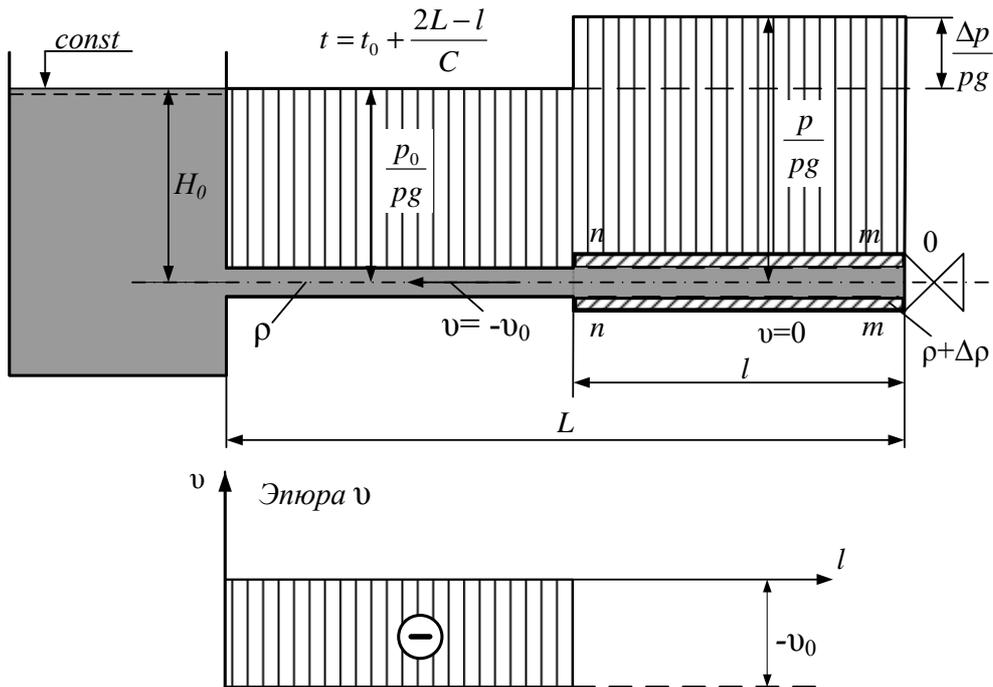


Рис. 9.17. Гидравлический удар. Момент времени  $t = t_0 + (2L - l)/C$

Считаем, что давление при установившемся движении  $p_0$  таково, что в процессе гидравлического удара давление в трубе остается выше давления насыщенных паров жидкости  $p > p_{\text{нп}}$  при данной температуре. Вследствие этого жидкость не может оторваться от затвора и внутри нее не образуются пустоты (каверны).

Понижение давления будет сопровождаться остановкой жидкости и деформацией стенок трубы. Явление будет распространяться от затвора к резервуару со скоростью  $c$ . Таким образом, в момент времени  $t = t_0 + 2L/c$  у задвижки возникнет волна пониженного давления  $p = p_0 - \Delta p$ . Эта волна начнет распространяться со скоростью  $c$  от затвора к резервуару, создавая в трубопроводе новое состояние, характеризующееся падением скорости движения жидкости до  $v = 0$  и сжатием стенок трубы.

К моменту времени  $t = t_0 + 2L/c + l/c$  эта волна пройдет путь  $l$ , то есть достигнет сечения  $n-n$ .

На рис. 9.18 показаны «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эюры распределения по длине трубопровода давления  $p/\rho g$  и скорости  $v$  в момент времени  $t = t_0 + (2L + l)/c$ . На участке трубопровода длиной  $l$  в этот момент времени давление равно  $p = p_0 - \Delta p$ , скорость движения жидкости  $v = 0$ , жидкость находится в состоянии, соответствующем

давлению  $p = p_0 - \Delta p$ , плотность  $\rho - \Delta\rho$ , стенки трубопровода сжаты; на участке трубопровода длиной  $L - l$  в этот момент времени давление равно  $p_0$ , скорость движения жидкости  $v = -v_0$ , стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению  $p_0$ , плотность равна  $\rho$ .

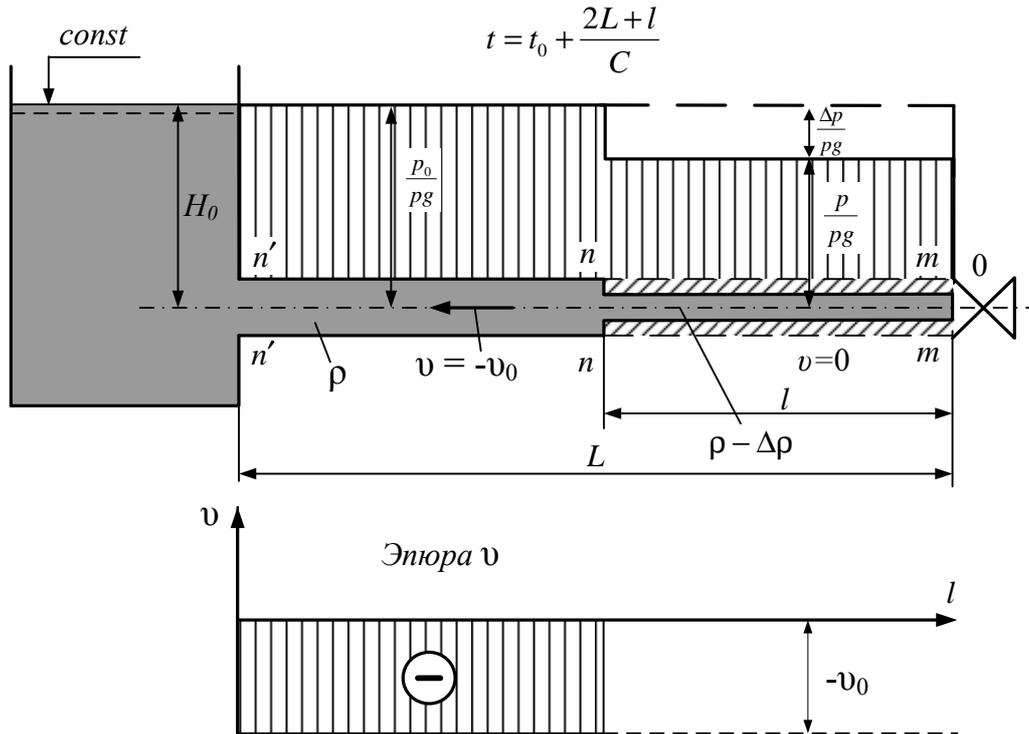


Рис. 9.18. Гидравлический удар. Момент времени  $t = t_0 + (2L + l)/C$

В момент времени  $t = t_0 + 3L/c$  волна пониженного давления достигнет резервуара.

Так как наступивший покой всей жидкости в этом разреженном (при  $p < p_0$ ) состоянии не может сохраняться вследствие того, что в резервуаре давление постоянно  $p = p_0$ , то в сечении  $n'-n'$  снова появляется скорость движения жидкости  $v_0$  в направлении от резервуара к затвору, то есть в момент времени  $t = t_0 + 3L/c$  возникает отраженная от резервуара волна, которая со скоростью  $c$  распространяется к задвижке, создавая в трубопроводе новое состояние с первоначальным давлением  $p_0$  и скоростью  $v_0$ .

В момент времени  $t = t_0 + 3L/c + (L-l)/c$  эта волна достигнет сечения на расстоянии  $l$  от затвора.

На рис. 9.19 показаны «мгновенный снимок» состояния трубопровода, эпюры распределения скорости  $v$  и давления  $p/\rho g$  по длине трубопровода в момент времени  $t = t_0 + 3L/c + (L-l)/c$ . На участке трубопровода длиной  $l$  в этот момент времени давление равно  $p = p_0 - \Delta p$ , скорость движения жидкости  $v = 0$ , жидкость находится в разреженном состоянии, соответствующем указанному давлению, плотность  $\rho = \rho_0 - \Delta \rho$ , стенки трубопровода сжаты. На участке трубопровода длиной  $L-l$  в этот момент времени давление равно  $p_0$ , скорость движения жидкости  $v = v_0$ , стенки трубопровода и жидкость находятся в начальном состоянии, соответствующем давлению  $p_0$ , плотность равна  $\rho_0$ .

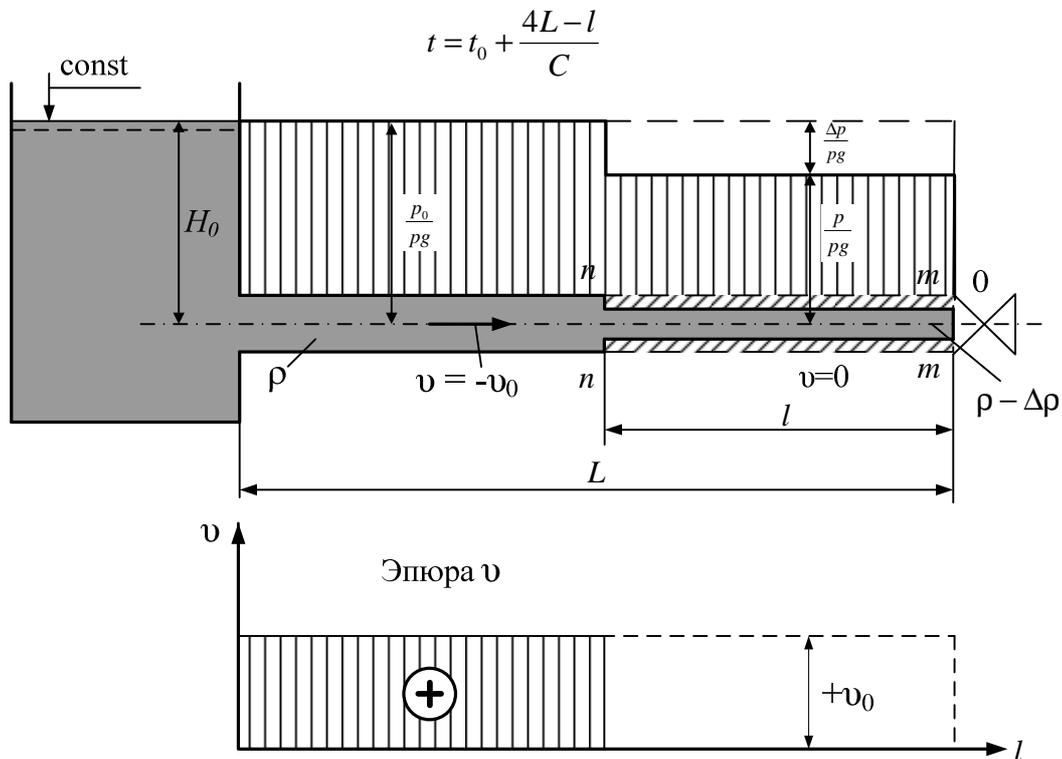


Рис. 9.19. Гидравлический удар. Момент времени  $t = t_0 + 3L/c + (L-l)/c$

В момент времени  $t = t_0 + 4L/c$  отраженная волна достигнет затвора. В этот момент времени вся жидкость в трубопроводе будет находиться в первоначальном состоянии с давлением  $p_0$  и скоростью  $v_0$ , направленной в сторону закрытой задвижки. В связи с этим произойдет новый гидравлический удар, давление у затвора опять мгновенно повысится до  $p = p_0 + \Delta p$  и явление повторится в вышеописанной последовательности.

На рис. 9.20 показано изменение давления в сечении  $m-m$  у затвора. Давление представлено отрезками, отличающимися от  $p_0$  попеременно на  $+\Delta p$  и  $-\Delta p$ , причем чередование происходит через промежуток времени  $2L/c$ , который называется *фазой удара*  $\tau_0$ . Период колебаний масс жидкости при гидравлическом ударе равен  $T_0 = 2\tau_0$ .

Диаграмма давления в точке, находящейся на расстоянии  $l$  от затвора, показана на рис. 9.21. Промежутки времени, в течение которых давление в точке  $l$  отличается от  $p_0$ , будут меньше, чем в сечении у затвора. Длительность этих промежутков равна  $\tau_l = 2(l-l)/c$  как для повышенного давления, так и для пониженного. Период же колебаний остается прежним:

$$T_0 = 2\tau_0.$$

Изменение скорости в точке, находящейся на расстоянии  $l$  от затвора, показано на рис. 9.22. Здесь в соответствии с проведенным выше анализом, чередуются фазы скорости  $v = +v_0$  с фазами скорости  $v = 0$  и  $v = -v_0$ . У входа в трубопровод скорость скачкообразно меняется от  $+v_0$  на  $-v_0$  в моменты времени  $L/c, 5L/c, 9L/c$  и так далее и от  $+v_0$  на  $-v_0$  в моменты  $3L/c, 7L/c$  и т. д.

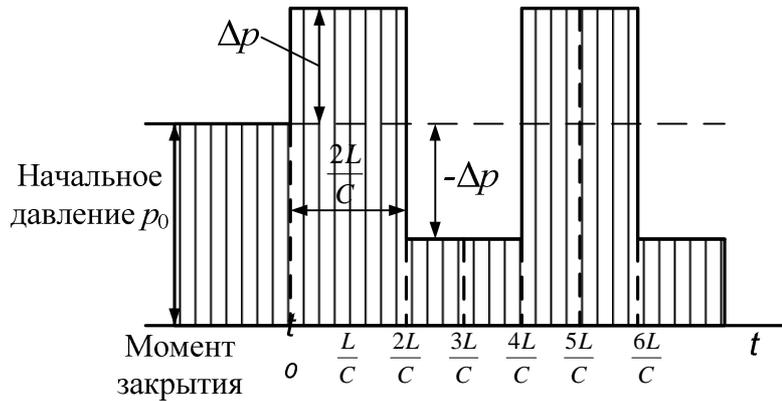


Рис. 9.20. Фаза удара

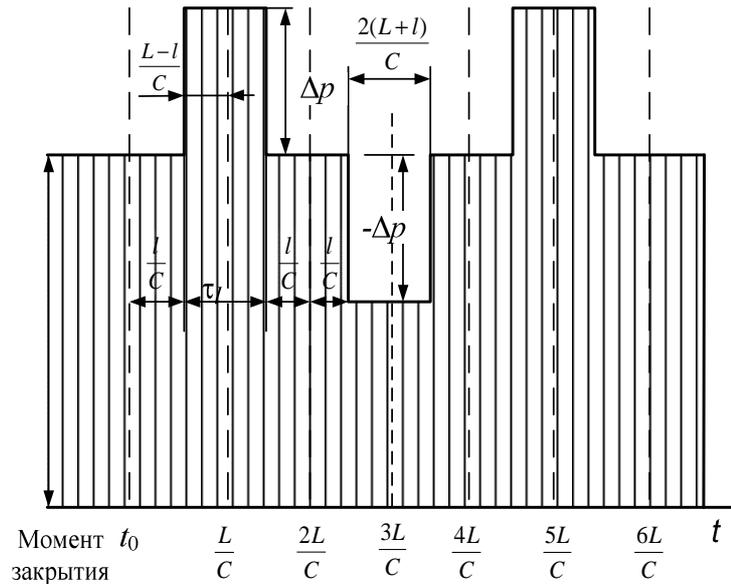


Рис. 9.21. Диаграмма давления

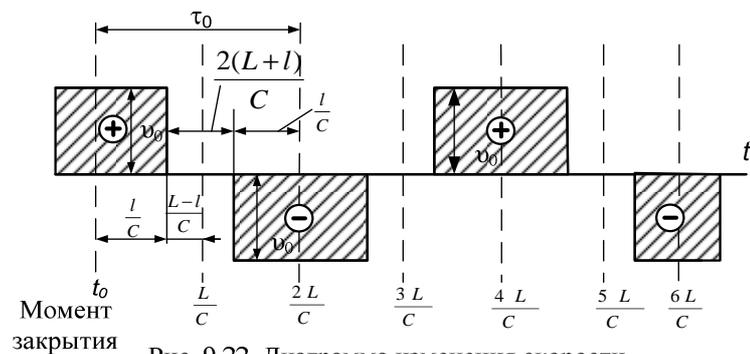


Рис. 9.22. Диаграмма изменения скорости

Рассмотренный выше процесс гидравлического удара соответствует случаям, когда потерями на трение можно пренебречь.

Гидравлический удар, начинающийся с волны повышения давления называют *положительным*, а начинающийся с волны понижения давления – *отрицательным*.

Если внезапно откроется прежде закрытое регулирующее устройство в конце трубопровода, то давление у затвора вначале резко уменьшится на  $\Delta p$ , затем через интервал времени, равный фазе, сменится повышением давления и т.д. Процесс можно проанализировать так же, как для гидравлического удара, начинающегося с повышения давления.

С резкого понижения давления начинается и гидравлический удар при внезапной остановке насоса. Вода из нагнетательной линии после отражения с большой скоростью возвращается по направлению к насосу. Если на напорной линии за насосом установлен обратный клапан, при ударе воды об обратный клапан пониженное давление сменится резким повышением давления.

## 8.2. Скорость распространения волны гидравлического удара

Определим скорость распространения ударной волны в упругом трубопроводе круглого поперечного сечения. Рассмотрим отсек длиной  $\Delta l$  (см. рис. 9.14).

В течение времени  $\Delta t$  движение жидкости выше рассматриваемого участка  $\Delta l$  происходит, как и до закрытия затвора, со скоростью  $v_0$ . За счет этого в рассматриваемый отсек за время  $\Delta t$  войдет объем жидкости:

$$\Delta W = Q\Delta t = \omega_0 v_0 \Delta t. \quad (9.20)$$

Этот объем займет часть объема отсека  $\Delta l$ , который образовался за счет растяжения стенок трубопровода ( $\Delta W_1$ ) из-за повышения давления на  $\Delta p$  и за счет сжатия жидкости в отсеке ( $\Delta W_2$ ).

При растяжении стенок радиус трубы станет равным  $r = r_0 + \Delta r$ , площадь сечения трубы  $\omega$  увеличится по сравнению с первоначальным значением  $\omega_0$  и  $\Delta W_1$  примет вид:

$$\Delta W_1 = (\omega - \omega_0)\Delta l = \Delta\omega\Delta l. \quad (9.21)$$

Первоначальный объем жидкости в отсеке  $\omega_0\Delta l$  при увеличении давления на  $\Delta p$  уменьшится на величину:

$$\Delta W_2 = \beta_c \omega_0 \Delta l \Delta p, \quad (9.22)$$

или с учетом того, что  $\beta_c = 1/E_{жс}$ , на величину:

$$\Delta W_2 = \omega_0 \Delta l \Delta p / E_{жс}. \quad (9.23)$$

Понятно, что

$$\Delta W = \Delta W_1 + \Delta W_2.$$

Подставляя значения  $\Delta W$ ,  $\Delta W_1$  и  $\Delta W_2$  по (9.20), (9.21) и (9.22), получаем:

$$\omega_0 v_0 \Delta t = \omega_0 \Delta l \frac{\Delta p}{E_{жс}} + \Delta \omega \Delta l \quad (9.24)$$

или 
$$v_0 \frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{\Delta \omega}{\omega_0} + \frac{\Delta p}{E_{жс}}. \quad (9.25)$$

Подставляя из (9.19)  $v_0$  и переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем:

$$\frac{dp}{\rho c^2} = \frac{d\omega}{\omega_0} + \frac{dp}{E_{жс}}.$$

Отсюда скорость распространения ударной волны

$$c = \sqrt{\frac{dp/\rho}{dp/E_{жс} + d\omega/\omega_0}}. \quad (9.30)$$

Приведем формулу (9.26) к виду, удобному для использования в расчетах. Примем, что напряжение в стенках трубы подчиняется формуле Мариотта:

$$\sigma = pD/2e.$$

Далее принимаем, что деформации подчиняются закону Гука,  $E$  и  $E_{жс}$  не зависят от давления. С учетом сказанного:

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{d(\pi r^2)}{\pi r_0^2} = 2 \frac{\pi r dr}{\pi r_0^2} = 2 \frac{dr}{r_0}.$$

Заменяя относительное удлинение  $dr/r_0 = d\sigma/E$ , получаем:

$$\frac{d\omega}{\omega_0} = 2 \frac{d\sigma}{E}.$$

Подставив согласно формуле Мариотта:

$$d\sigma = \frac{D}{2e} dp,$$

получим 
$$\frac{d\omega}{\omega_0} = \frac{dp}{E} \frac{D}{e}. \quad (9.27)$$

Подставив (9.27) в (9.28), найдем:

$$c = \sqrt{\frac{E_{жс}/\rho}{1 + \frac{D}{e} \cdot \frac{E_{жс}}{E}}}. \quad (9.28)$$

Если труба абсолютно жесткая ( $E = \infty$ ), то:

$$c_0 = \sqrt{E_{жс}/\rho}. \quad (9.29)$$

Последнее выражение представляет собой скорость распространения возмущений (в данном случае – ударной волны) при неупругих стенках трубопровода. Она равна скорости звука  $c_0$  в жидкости, занимающей неограниченно большой объем.

Если стенки трубы упругие, то  $(D/e)(K/E) > 0$  и  $c < c_0$ . При температуре воды 10 °С принимают  $c_0 = 1425 \div 1435$  м/с. Для расчетов примем  $E_{жс} = 20,3 \cdot 10^8$  Па, тогда:

$$c_0 = \sqrt{\frac{20,3 \cdot 10^8}{1000}} = 1425 \text{ м/с,}$$

для воды

$$c = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{D}{e} \cdot \frac{E_{жс}}{E}}}. \quad (9.30)$$

### 8.3. Гидравлический удар при резком понижении давления (с разрывом сплошности потока)

Если давление в трубопроводе понизится до давления (упругости) насыщенных паров жидкости при данной температуре, то начнется «холодное кипение», образуются пары жидкости. При резком уменьшении давления могут образоваться полости, заполненные смесью пара и воздуха (при достаточно низком давлении), то есть произойдет *разрыв сплошности потока*, разрыв «колонны» жидкости. Так как движение жидкости в трубопроводе не остановилось, то при возникновении отраженных волн с изменением направления массы жидкости устремляются к месту разрыва сплошности. При быстром сжатии полости с пониженным давлением происходит соударение масс (колонн) жидкости. Повышение давления при этом превышает  $\Delta p$ , найденное по формуле Жуковского.

По исследованиям различных авторов повышение давления при разрыве сплошности  $\Delta p_{p.cn.}$  может быть найдено по следующему соотношению:

$$\Delta p_{p.cn.} = \rho c v_0 + (1 \div 2) p_0,$$

где  $p_0$  – давление при установившемся движении.

Для уточнения коэффициента перед  $p$  требуется дальнейшее накопление экспериментальных данных.

Гидравлический удар с разрывом сплошности потока может произойти при внезапной остановке насоса. Подача воды насосом прекращается, а движение воды по инерции по трубопроводу еще происходит. При этом в потоке могут возникнуть разрывы сплошности. При перемене направления движения, которая произойдет вследствие отражения и преломления волн гидравлического удара, разорвавшиеся части колонны жидкости встречаются, и давление очень сильно возрастает по сравнению с гидравлическим ударом без разрыва сплошности.

На характер и количественные характеристики гидравлического удара с разрывом сплошности помимо указанных факторов (модуля упругости жидкости и материала стенок трубопровода, отношения диаметра к толщине стенки, относительного времени закрытия регулирующего устройства, воздухоудержания, объемного содержания твердых частиц и т.д.) влияют и такие важные факторы, как режимы работы насосной станции, очертание трассы трубопровода (наличие переломов в вертикальном профиле и конфигурация сети в плане, наличие обратных клапанов, тупиковых участков, отводов, мест разделения и соединения потоков, резких поворотов трубопроводов и т.д.).

Влияние этих факторов на место образования разрывов сплошности, объемы полостей, образующихся при разрыве, длины и скорости движения соударяющихся колонн приводятся в нормативных документах.

Разрыв сплошности потока возможен, если повышение давления при гидравлическом ударе, найденное по формуле Жуковского, будет больше, чем сумма давления  $\rho g H_0$  и практически максимально возможного вакуумметрического давления, то есть:

$$\rho c v_0 > \rho g (H_0 + h_{\text{вак. max}}).$$

Как известно, максимальное значение  $h_{\text{вак. max}} \approx 7 \div 8$  м. Наиболее опасными с точки зрения возникновения разрыва сплошности являются места непосредственно у насосной станции (у насосов) и места переломов трассы с выпуклостью на продольном профиле, обращенной вверх.

#### **8.4. Защита от воздействия гидравлических ударов**

При проектировании гидросистем должны предусматриваться как мероприятия по недопущению опасных повышений и понижений давления в трубопроводе, так и меры по защите, если опасные колебания давления возникнут. Эти меры отражены в нормативах.

Ниже приводятся основные меры по гашению гидравлических ударов.

1. *Сброс части жидкости* из трубопровода при повышении давления, если такой сброс возможен по соображениям охраны окружающей среды.

Воду сбрасывают в какие-либо понижения местности, в водоемы или обратно в источник водоснабжения. В последнем случае вода может быть пропущена через насос и всасывающую линию, если на напорном (нагнетательном) трубопроводе нет обратного клапана; через обводные линии (байпасы) в обход обратного клапана и насоса; через медленно закрывающиеся обратные клапаны. В этих случаях необходимо учитывать, что насос при обратном направлении движения воды и отсутствии тормозов может работать как турбина с недопустимой частотой вращения. При большой скорости движения воды в обводных линиях могут появиться кавитационные явления, что уменьшает расход, проходящий по этим линиям.

К этим мерам защиты относится и сброс воды через специальные предохранительные клапаны или другие устройства (например, разрывные мембраны). При превышении давления клапаны, протарированные на определенное давление, открываются и давление понижается. Разрывные мембраны, изготовленные из тонкого листа металла, устанавливаются на отводе от основного трубопровода. Мембрана полностью перекрывает поперечное сечение отвода. При превышении определенного давления мембрана разрушается, и часть жидкости выливается.

После сброса жидкости клапаны должны автоматически закрываться.

*2. Впуск и заземление воздуха.* Если возможно образование разрыва сплошности потока, то эффективным средством борьбы с чрезмерным повышением давления здесь может служить впуск воздуха в места образования разрыва сплошности и последующее заземление воздуха. Для впуска и заземления воздуха служат специальные устройства – клапаны. Заземленный в местах разрыва сплошности потока воздух не позволяет разошедшимся колоннам воды при обратном движении соударяться, ибо такое соударение вызвало бы, как ранее указывалось, очень сильное повышение давления.

Воздух после гашения гидравлического удара должен быть удален из трубопровода, причем это удаление должно выполняться так, чтобы не возникли в трубопроводе нежелательные колебания давления.

*3. Впуск воды в трубопровод* осуществляется из бассейнов, которые отделены от защищаемых трубопроводов обратными клапанами. При понижении давления в трубопроводе вследствие остановки насосов на соединительной (бассейн – трубопровод) линии открывается обратный клапан, и вода из бассейна в необходимом количестве поступает в трубопровод. Когда давление начнет подниматься (но не до того большого значения, как это было без впуска воды), то обратный клапан закроется, и впуск воды в трубопровод прекратится.

Впуск и заземление воздуха, и впуск воды целесообразно осуществлять во всех сечениях, где возможен разрыв сплошности потока, или, по крайней мере, в нескольких, наиболее опасных местах.

4. *Воздушно-гидравлические колпаки* применяются для гашения гидравлических ударов, возникающих в напорных трубопроводах. Размеры колпаков при установке их на напорных трубопроводах насосных станций определяются из условий пуска и остановки насосного агрегата.

### 8.5. Гидравлический таран

В настоящее время особый интерес представляют неэнергоёмкие механизмы, в частности для водоснабжения. Одним из таких механизмов является гидравлический таран, в котором процессы, происходящие при гидравлическом ударе, используются для подъема воды.

Гидравлический таран состоит (рис. 9.23) из ударного клапана 1, нагнетательного клапана 2, воздушного колпака 3. Через питающую трубу 4 таран соединяется с бассейном 5, через нагнетательный трубопровод 6 – с приемным резервуаром 7.

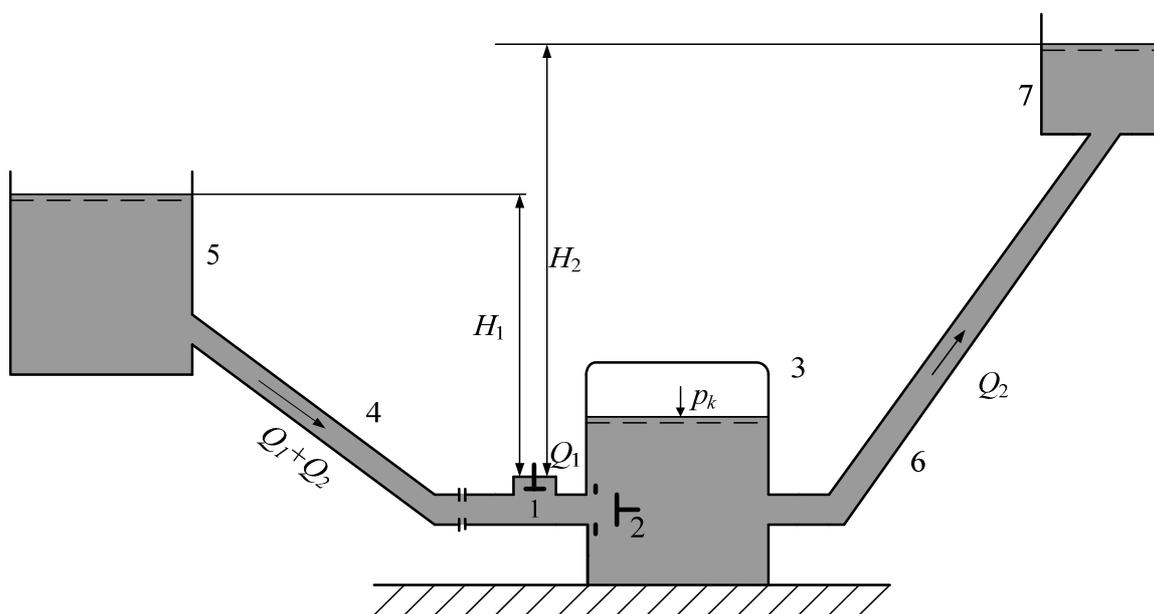


Рис. 9.23. Гидравлический таран

Представим, что в начальный момент времени нагнетательный и ударный клапаны закрыты, избыточное давление в воздушном колпаке  $p_k = \rho gh$ , а вода в питающей трубе 4 неподвижна. Для того чтобы таран начал автоматически работать, необходимо резко открыть ударный кла-

пан 1. Через клапан начнется истечение воды, скорость которой вследствие инерции воды, находящейся в питающей трубе 4, будет постепенно увеличиваться от нуля в первоначальный момент времени до какой-то конечной величины  $v$ , стремясь в пределе к скорости установившегося движения  $v_0$ , соответствующей напору  $H_1$  и гидравлическим сопротивлениям системы «питательный трубопровод – ударный клапан».

С увеличением скорости истечения гидродинамическое давление, действующее снизу вверх на ударный клапан, будет увеличиваться. Когда сила гидродинамического давления превысит вес клапана, он резко закроется. Произойдет гидравлический удар, давление в трубе 4 перед нагнетательным клапаном повысится до некоторого значения  $p > p_k$ , нагнетательный клапан 2 откроется и вода под повышенным давлением начнет поступать в воздушный колпак 3, сжимая в нем воздух. Из воздушного колпака вода по нагнетательному трубопроводу 6 поступит в приемный резервуар 7. В момент закрытия ударного клапана 1 в питающей трубе 4 начнется волновой процесс, который приведет к уменьшению скорости и изменению давления в питающем трубопроводе 6. В связи с этим спустя некоторое время после закрытия ударного клапана давление в питательном трубопроводе падает, нагнетательный клапан 2 закрывается, а ударный клапан 1 автоматически открывается; начинается новый цикл, протекающий так же, как и первый. Таран начинает работать автоматически, подавая воду определенными порциями в воздушный колпак, который сглаживает изменение скорости нагнетаемой воды, обеспечивая сравнительно равномерное движение (во времени) в нагнетательном трубопроводе. Таран непосредственно использует энергию падающей воды для подъема части этой воды на необходимую высоту.

Если через  $Q_1$  обозначить расход воды, сбрасываемой через ударный клапан 1, а через  $Q_2$  – расход, поступающий в приемный резервуар, то коэффициент полезного действия таранной установки выразится отношением:

$$\eta = \frac{Q_2 H_2}{(Q_1 + Q_2) H_1}.$$

Такие простые установки, какими являются гидравлические тараны, могут обеспечивать подъем воды на высоту  $H_2 = (2 \div 10) H_1$ . При этом расход  $Q_2 = (0,4 \div 0,07) Q_1$ , а коэффициент полезного действия  $\eta = (0,85 \div 0,2)$ . Надо отметить, что при работе гидравлического тарана весьма велики непроизводительные потери воды.

## 9. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

**Пример 1.** Расход воды по стальному сифонному трубопроводу (рис. 1) с эквивалентной шероховатостью  $\Delta = 0,4$  мм, диаметром  $d = 25$  мм и общей длиной  $l = 12$  м,  $Q = 1,0$  л/с. Температура воды  $t = 20$  °С.

Определить потребный напор  $H$  и давления в наивысшей точке сифона (сечение 3-3), если  $z = 4$  м,  $l_1 = 4,5$  м. Потерей напора в плавном закруглении пренебречь.

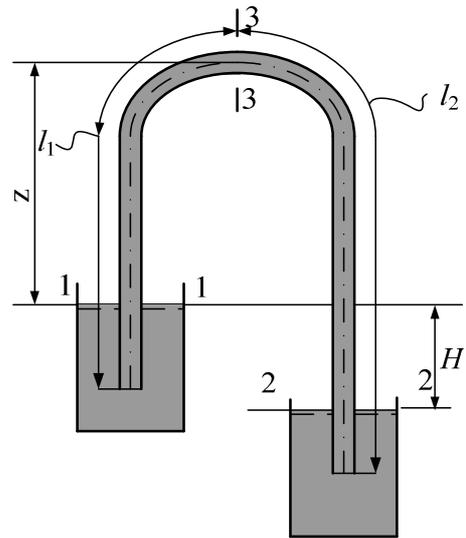


Рис. 1. Пример 1

1. Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 относительно плоскости 2-2:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + H = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{1-2}.$$

Так как  $p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$ , а  $v_1 = v_2 = 0$ , то из уравнения имеем:

$$H = h_{1-2}.$$

2. Скорость движения воды:

$$v = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d^2} = \frac{4,0 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,025^2} = 2,04 \text{ м/с}.$$

3. Кинематический коэффициент вязкости воды:

$$\nu_{20} = 0,0101 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}.$$

4. Число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\nu} = \frac{2,04 \cdot 0,025}{0,0101 \cdot 10^{-4}} = 50495.$$

5. Параметр, определяющий зону гидравлического сопротивления:

$$Re \frac{\Delta}{d} = 50495 \frac{0,4}{25} = 808 > 500 \text{ – зона квадратичного сопротивления.}$$

6. Коэффициент гидравлического трения:

$$\lambda = 0,114 \sqrt{\frac{\Delta}{d}} = 0,114 \sqrt{\frac{0,4}{25}} = 0,039.$$

7. Сумма коэффициентов местных сопротивлений:

$$\Sigma \zeta = \zeta_{\text{вх}} + \zeta_{\text{вых}} = 0,5 + 1 = 1,5.$$

8. Потребный напор:

$$H = \left( \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right) \frac{v^2}{2g} = \left( 0,039 \frac{12}{0,025} + 1,5 \right) \frac{2,04^2}{2 \cdot 9,81} = 4,3 \text{ м.}$$

9. Составляя уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 3-3 относительно плоскости 1-1, получим:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\rho g} + \frac{v_3^2}{2g} + z + h_{1-3}.$$

Отсюда с учетом того, что  $v_1 = 0$ ,  $v_3 = 2,04$  м/с,  $p_1 = p_{атм} = 0,1 \cdot 10^6$  Па, имеем:

$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{p_a}{\rho g} - \frac{v_3^2}{2g} - z - h_{1-3}.$$

Так как  $h_{1-3} = \left( \lambda \frac{l}{d} + \Sigma \zeta \right) \frac{v^2}{2g}$ ,

где  $\Sigma \zeta = \zeta_{вх} = 0,5$ ,

то 
$$\frac{p_3}{\rho g} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{1000 \cdot 9,81} - 4 - \left( 0,039 \frac{4,5}{0,025} + 0,5 \right) \frac{2,04^2}{2 \cdot 9,81} = 4,53 \text{ м}$$

или 
$$p_3 = 1000 \cdot 9,81 \cdot 4,5 = 44145 \text{ Па} = 44 \text{ кПа.}$$

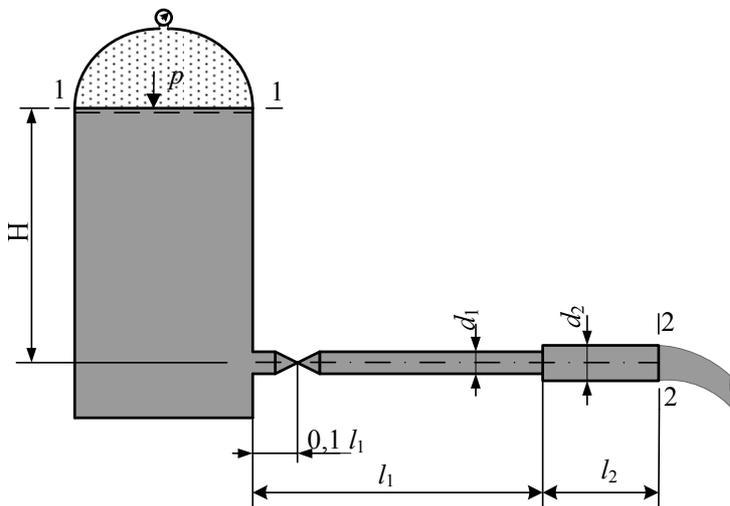


Рис. 2. К примеру 2

**Пример 2.** Вода из закрытого резервуара, избыточное давление над свободной поверхностью, в котором  $p = 30$  кПа, (рис. 2) вытекает в атмосферу по трубопроводу переменного сечения с геометрическими размерами:  $d_1 = 32$  мм,  $l_1 = 65$  м;  $d_2 = 38$  мм;  $l_2 = 35$  м. Уровень свободной поверхности относительно оси трубы в питающем резервуаре  $H = 8$  м. Температура воды  $t = 10$  °С. Эквивалентная шероховатость всех участков трубопровода  $\Delta = 0,15$  мм. Определить расход воды при полностью открытом запорном кране ( $\zeta_k = 4,5$ ), построить напорную и пьезометрическую линии.

резервуаре  $H = 8$  м. Температура воды  $t = 10$  °С. Эквивалентная шероховатость всех участков трубопровода  $\Delta = 0,15$  мм. Определить расход воды при полностью открытом запорном кране ( $\zeta_k = 4,5$ ), построить напорную и пьезометрическую линии.

Составим уравнение Бернулли для сечений 1-1 и 2-2 относительно оси трубы:

$$\frac{p}{\rho g} + H = \frac{v_2^2}{2g} + h_{mp};$$

$$\frac{p}{\rho g} + H = \lambda_1 \frac{l_1}{d} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{\text{ex}} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{\text{к}} \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \zeta_{\text{в.п.}} \frac{v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

По условию коэффициенты местных сопротивлений  $\zeta_{\text{вх}} = 0,5$ ;  $\zeta_{\text{к}} = 4,5$ :

$$\zeta_{\text{в.п.}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)^2 = \left(\frac{d_2^2}{d_1^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{38^2}{32^2} - 1\right)^2 = 0,17.$$

Пользуясь уравнением неразрывности, выразим скорость  $v_2$  через  $v_1$ :

$$v_1 \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}, v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}, v_2^2 = v_1^2 \frac{d_1^4}{d_2^4}.$$

Подставляя значения  $\zeta$  и  $v_2$  в исходное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho g} + H = & \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} + 0,5 \frac{v_1^2}{2g} + 4,5 \frac{v_1^2}{2g} + \\ & + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} + 0,17 \frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} + 1,0 \frac{v_1^2}{2g} \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Примем в первом приближении, что движение воды в обеих частях трубопровода отвечает квадратичной зоне сопротивления. Значения  $\lambda$  в этом случае:

$$\lambda_1 = 0,11 \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}} = 0,11 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,15}{32}} = 0,0288, \lambda_2 = 0,11 \sqrt[4]{\frac{0,15}{38}} = 0,0276.$$

Подставляя известные величины в уравнение (9.35) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{30 \cdot 10^3}{1000 \cdot 9,81} + 8 = & \frac{v_1^2}{2g} \cdot \left(0,0288 \frac{65}{0,032} + 0,5 + 4,5 + \right. \\ & \left. + 0,0276 \frac{35}{0,038} \frac{32^4}{38^4} + 0,17 \frac{32^4}{38^4} + \frac{32^4}{38^4}\right) = 11,06 = \frac{v_1^2}{2g} 76,79; \end{aligned}$$

$$11,06 = \frac{v_1^2}{2g} 76,79;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 11,06}{76,79}} = 1,68 \text{ м/с};$$

$$v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2} = 1,68 \frac{32^2}{38^2} = 1,19 \text{ м/с}.$$

Кинематический коэффициент вязкости воды  $\nu = 0,0131 \cdot 10^{-4}$  м/с.

Числа Рейнольдса:

$$Re_1 = \frac{v_1 \cdot d_1}{\nu} = \frac{1,68 \cdot 0,032}{0,0131 \cdot 10^{-4}} = 41038; \quad Re_2 = \frac{1,19 \cdot 0,038}{0,0131 \cdot 10^{-4}} = 34519.$$

Проверяем условие квадратичности зоны сопротивления:

$$Re_1 \cdot \frac{\Delta}{d_1} = 41038 \cdot \frac{0,15}{32} = 192 < 500; \quad Re_2 \cdot \frac{\Delta}{d_2} = 34519 \cdot \frac{0,15}{38} = 136 < 500.$$

Уточняем коэффициент гидравлического трения:

$$\lambda_1 = 0,11 \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d_1} + \frac{68}{Re_1}} = 0,11 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,15}{32} + \frac{68}{41038}} = 0,031;$$

$$\lambda_2 = 0,11 \cdot \sqrt[4]{\frac{0,15}{38} + \frac{68}{34519}} = 0,0305.$$

Скорости движения воды по участкам трубопровода во втором приближении:

$$\frac{v_1^2}{2g} \left( 0,031 \frac{65}{0,032} + 0,5 + 4,5 + 0,0305 \frac{35}{0,038} \cdot \frac{32^4}{38^4} + 0,17 \frac{32^4}{38^4} + \frac{32^4}{38^4} \right) = 11,06;$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 11,06}{82,6}} = 1,62 \text{ м/с}, \quad v_2 = 1,62 \frac{32^2}{38^2} = 1,15 \text{ м/с}.$$

Расход воды в трубопроводе

$$Q = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot v_1 = \frac{3,14 \cdot 0,032^2}{4} \cdot 1,62 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ л/с} = 1,3 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Потери по длине и в местных сопротивлениях

$$h_{ex} = 0,5 \frac{1,62^2}{2 \cdot 9,81} = 0,067 \text{ м}; \quad h_{\kappa} = 4,5 \frac{1,62^2}{2 \cdot 9,81} = 0,6 \text{ м};$$

$$h_{l_1} = \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} \cdot \frac{v_1^2}{2g} = 0,031 \frac{65}{0,032} \cdot \frac{1,62^2}{2 \cdot 9,81} = 8,4 \text{ м};$$

$$h_{l_2} = \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \cdot \frac{v_2^2}{2g} = 0,0305 \frac{35}{0,038} \cdot \frac{1,15^2}{2 \cdot 9,81} = 1,89 \text{ м};$$

$$h_{ep} = 0,17 \frac{1,15^2}{2 \cdot 9,81} = 0,01 \text{ м}.$$

Скоростной напор в выходном сечении  $\frac{v_2^2}{2g} = \frac{1,15^2}{2 \cdot 9,81} = 0,067 \text{ м}.$

Скоростной напор в трубе  $d_1$   $\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1,62^2}{2 \cdot 9,81} = 0,13 \text{ м}$

Построение напорной и пьезометрической линии показано на рис. 3.

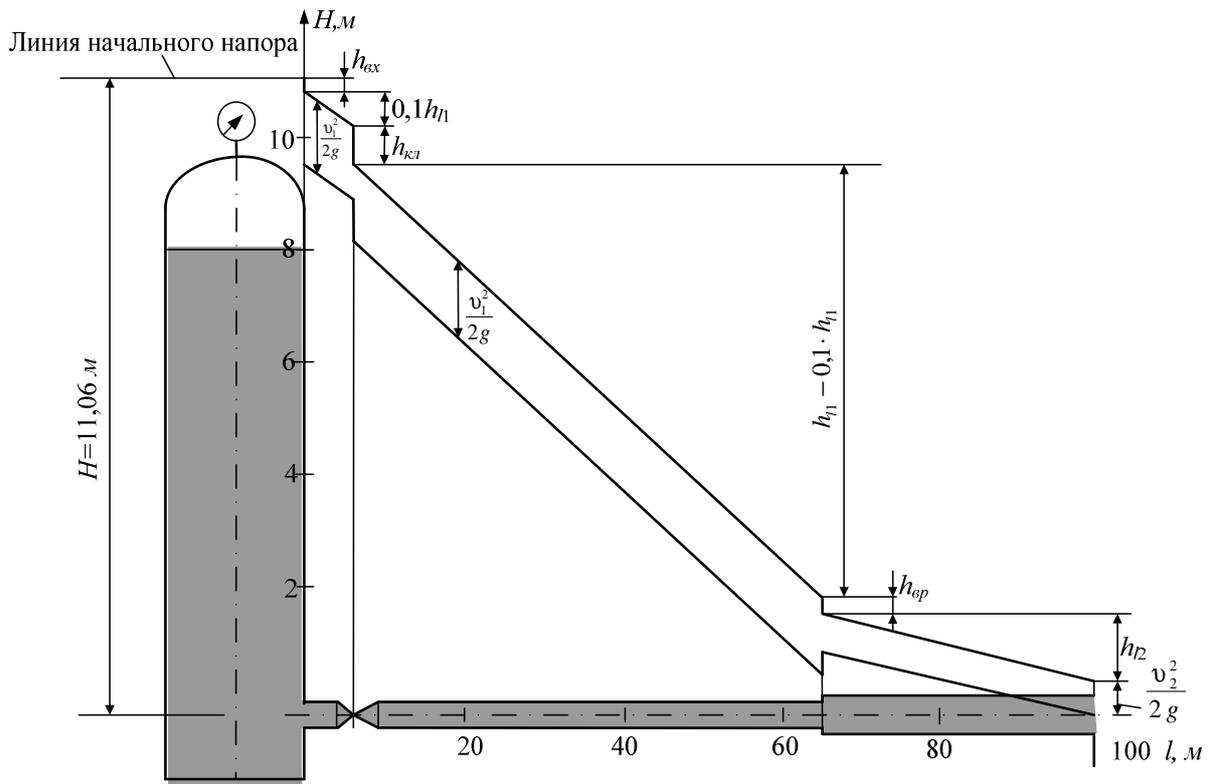


Рис. 3. Напорная и пьезометрическая линии

**Задача 1.** Общая длина одной из исполнительных магистралей гидросистемы  $l = 10$  м; диаметр  $d = 10$  мм; скорость движения рабочей жидкости  $v = 7,5$  м/с; вязкость  $\nu = 0,5$  Ст. В связи с нагреванием рабочей жидкости в системе происходит понижение вязкости до  $\nu = 0,15$  Ст и турбулизация потока в гидравлически гладкой трубе. Насколько изменится суммарная потеря напора в указанной магистрали при турбулизации потока и неизменном расходе жидкости?

Ответ:  $h_{nom} = 14,6$  м.

**Задача 2.** Определить расход керосина в гладкой горизонтальной трубе длиной  $l = 40$  м; диаметром  $d = 40$  мм, если разность давлений в начальном и конечном сечениях трубы  $\Delta p = 160$  кПа. Вязкость керосина  $\nu = 0,02$  Ст; плотность  $\rho = 800$  кг/м<sup>3</sup>.

Указание. Задачу следует решать методом последовательных приближений, задавшись сначала значением коэффициента  $\lambda$ , в первом приближении.

Ответ:  $Q = 58$  л/с.

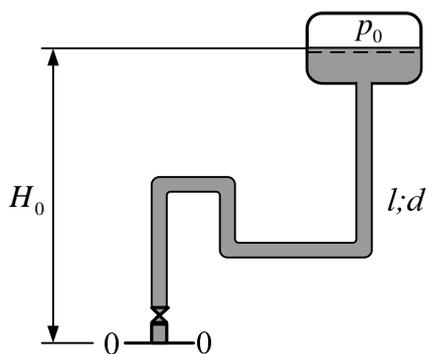


Рис. 4. К задаче 3

**Задача 3.** Определить потребный напор, который необходимо создать в сечении 0-0 для подачи в бак воды с вязкостью  $\nu = 0,008$  Ст, если длина трубопровода  $l = 80$  м; его диаметр  $d = 50$  мм; расход жидкости  $Q = 15$  л/с; высота  $H_0 = 30$  м; давление в баке  $p_2 = 0,2$  МПа; коэффициент сопротивления крана  $\zeta_1 = 5$ ; колена  $\zeta_2 = 0,8$ ; шероховатость стенок трубы  $\Delta = 0,04$  мм.

Ответ:  $H_{nom} = 169,5$  м.

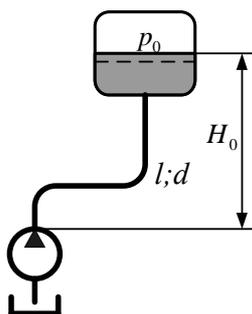


Рис. 4. К задаче 4

**Задача 4.** При каком диаметре трубопровода подача насоса составит  $Q = 1$  л/с, если на выходе из него располагаемый напор  $H_{расч} = 9,6$  м; длина трубопровода  $l = 10$  м; эквивалентная шероховатость  $\Delta = 0,05$  мм; давление в баке  $p_0 = 30$  кПа; высота  $H_0 = 4$  м; вязкость жидкости  $\nu = 0,015$  Ст и ее плотность  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>? Местными гидравлическими сопротивлениями в трубопроводе пренебречь. Учесть потери при входе в бак.

Ответ:  $d = 24,1$  мм.

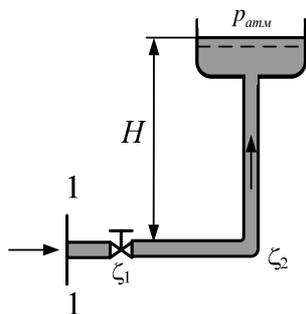


Рис. 5. К задаче 4

**Задача 5.** Определить расход в трубе для подачи воды (вязкость  $\nu = 0,01$  Ст) на высоту  $H = 16,5$  м, если диаметр трубы  $d = 10$  мм; ее длина  $l = 20$  м; располагаемый напор в сечении трубы перед краном  $H_{расч} = 20$  м; коэффициент сопротивления крана  $\zeta_1 = 4$ , колена  $\zeta_2 = 1$ . Трубу считать гидравлически гладкой.

*Указание.* Задачу решить методом последовательных приближений, задавшись коэффициентом Дарси  $\lambda$ , а затем уточняя его.

## 10. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой трубопровод называется простым?
2. При каких условиях в трубопроводе будет наблюдаться установившееся движение жидкости?
3. Какой трубопровод называется гидравлически длинным?
4. Какой трубопровод называется гидравлически коротким?
5. Проведите расчет простого трубопровода для случая истечения под уровень.
6. Проведите расчет простого трубопровода для случая истечения в атмосферу.

7. Порядок расчета задачи первого типа для простого трубопровода.
8. Порядок расчета задачи второго типа для простого трубопровода.
9. Порядок расчета задачи третьего типа для простого трубопровода.
10. Расскажите, как произвести расчет трубопровода из последовательно соединенных труб.
11. Расскажите, как произвести расчет трубопровода из параллельно соединенных труб.
12. Расскажите, как произвести расчет трубопровода с непрерывным изменением расхода по длине.
13. Какой трубопровод называется сифонным?
14. Объясните, как происходит движение жидкости по сифонному трубопроводу.
15. В каком сечении сифонного трубопровода будет наблюдаться наибольшая величина вакуума? Отчего зависит величина вакуума?
16. В каком случае сифон может прекратить работать?
17. Расскажите, как произвести расчет разветвленного трубопровода.
18. Какое явление в трубопроводе называется гидравлическим ударом?
19. Какие причины могут привести к гидравлическому удару?
20. Расскажите, как происходит распространение фронта ударной волны при мгновенном закрытии затвора.
21. Расскажите, как формируется обратная отраженная волна при мгновенном закрытии затвора.
22. Что называется фазой удара при гидравлическом ударе?
23. Расскажите, как с течением времени происходит изменение давления в сечении трубопровода при гидравлическом ударе.
24. Запишите формулу, позволяющую определить скорость распространения ударной волны в трубопроводе.
25. Объясните, как возникает гидравлический удар при резком понижении давления (с разрывом сплошности потока)?
26. Какие меры существуют для защиты от воздействия гидравлических ударов?
27. Объясните принцип работы гидравлического тарана.

## 11. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кисилев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Выш. шк., 1998. – 311 с.
6. Рабинович, Е.З. Гидравлика / Е.З. Рабинович. – М.: Физматгиз, 1963. – 408 с.

## МОДУЛЬ 10

### ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования истечения жидкости из отверстий и насадков имеют большое практическое значение, так как результаты этих исследований находят применение при решении многих технических задач (при измерении количества проходящей жидкости, при расчете и создании сильной, дальнобойной и компактной струи, при расчете распространения свободной струи в массе жидкости, расчете воздушных завес, обеспечении быстрого опорожнения резервуаров, при конструировании сопел и форсунок и в ряде других случаев).

При истечении из отверстий и присоединенных к отверстиям достаточно коротких патрубков-насадков можно считать, что потери напора состоят лишь из местных потерь.

При движении жидкости в коротких трубах местные потери и потери на преодоление сопротивлений по длине имеют сопоставимое значение и вследствие этого следует учитывать оба эти вида потерь, суммируя их при расчете.

Истечение жидкости из отверстий и насадков может происходить в различных условиях. Вытекающая струя может непосредственно на выходе из отверстия и насадка находиться под атмосферным давлением – это будет *истечение в атмосферу*. Могут быть случаи, когда струя вытекает *под уровень жидкости*, находящейся в другом сосуде, резервуаре, водохранилище.

И в том, и в другом случае истечение может происходить при постоянном напоре (когда  $H$  или  $z$  постоянны) или при переменном напоре, когда  $H$  или  $z$  изменяются во время истечения.

Истечение из отверстий и насадков происходит при преобладающем действии сил тяжести (к действующим факторам относятся также силы вязкости и поверхностного натяжения), под воздействием напора  $H$  – при истечении в атмосферу или разности уровней  $z$  – при истечении под уровень из затопленного отверстия или насадка.

Различают следующие виды отверстий: по относительному размеру отверстия – *малое* и *большое*, по относительной толщине стенки – отверстия в *тонкой* и *толстой* стенке.

*Малым* считается такое отверстие, диаметр (или вертикальный размер – для отверстий, форма которых отличается от круглой) которого менее чем  $0,1 H$ . Такое ограничение относительного вертикального размера отверстия позволяет считать с практически приемлемой погрешностью скорости отдельных струек в живом сечении вытекающей струи одинаковыми.

*Большим отверстием* соответственно считают такое, для которого  $d > 0,1 H$ , где  $d$  – диаметр или наибольший размер отверстия по вертикали.

Отверстием в *тонкой стенке* называется отверстие, края которого имеют острую кромку, а толщина стенки не превышает  $3d$ . В этом случае вытекающая из отверстия струя не касается стенки в пределах ее толщины и стенка вследствие этого не оказывает прямого воздействия на форму струи и гидравлические характеристики отверстия.

В створе самого отверстия траектории частиц жидкости криволинейны, причем кривизна их достаточно велика. На некотором расстоянии от стенки кривизна линий токов уменьшается, отдельные струйки располагаются почти параллельно, происходит заметное уменьшение живого сечения вытекающей струи. Для круглого малого отверстия в тонкой стенке наибольшее сжатие струи наблюдается на расстоянии около  $0,5$  диаметра от внутренней плоскости стенки сосуда. Это сечение называется *сжатым*. Сжатие струи характеризуется коэффициентом сжатия  $\varepsilon$ , представляющим собой отношение площади сжатого живого сечения  $\omega_c$  к площади отверстия  $\omega$ :

$$\varepsilon = \omega_c / \omega.$$

Виды сжатия струи при истечении могут быть различными.

Когда струя испытывает сжатие по всему периметру отверстия, наблюдается *полное сжатие*.

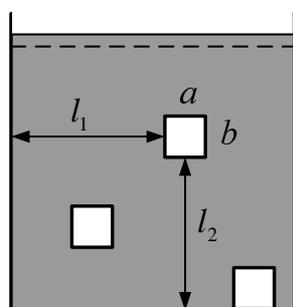


Рис. 10.1. Неполное сжатие

*Неполное сжатие* происходит в тех случаях, когда струя не испытывает сжатия по одной стороне или же по нескольким сторонам отверстия. Такие случаи могут встречаться, если прямоугольное отверстие в вертикальной или наклонной боковой стенке сосуда примыкает непосредственно к дну (отсутствует сжатие по одной из сторон, рис. 10.1) или расположено в углу и также примыкает к дну (сжатие отсутствует по двум сторонам). Такое положение может создаться при соответствующем расположении отверстия в дне сосуда.

При неполном сжатии коэффициенты сжатия имеют большие значения, чем в случае полного сжатия. При полном сжатии можно выделить случаи совершенного и несовершенного сжатия.

Если отверстие расположено достаточно далеко от боковых стенок, свободной поверхности и дна, то кривизна траекторий крайних струек вытекающей струи будет наибольшей, сжатие также будет максимальным. В этом случае *сжатие совершенное*. Совершенное сжатие наблюдается, когда расстояние от крайних граней контура отверстия до стенок и дна сосуда превышает утроенный соответствующий поперечный размер отверстия, то есть если  $l_1 > 3a$ ;  $l_2 > 3b$  (рис. 10.2).

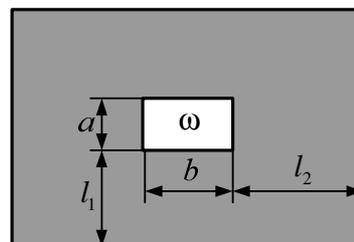


Рис. 10.2. Совершенное сжатие

Несовершенное сжатие наблюдается, когда отверстие расположено ближе к стенкам и дну, чем на указанные выше расстояния, то есть если  $l_1 < 3a$  и  $l_2 < 3b$ . При несовершенном сжатии коэффициенты сжатия больше, чем при совершенном сжатии.

## 2. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ

### 2.1. Истечение через малое незатопленное отверстие с острой кромкой

Рассмотрим истечение жидкости плотностью  $\rho$  из резервуара через малое незатопленное отверстие (рис. 10.3, а). Глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью равна  $H$  (напор).

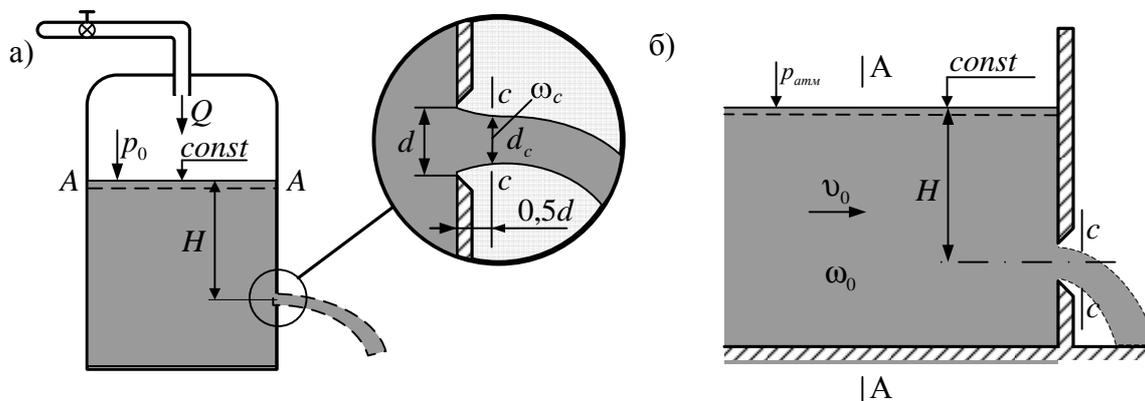


Рис. 10.3. Истечение жидкости через отверстие при постоянном напоре

Истечение происходит при постоянном напоре, то есть уровень жидкости в резервуаре является неизменным. Это возможно, если свободная

поверхность жидкости занимает большую площадь (рис. 10.3, б) или если в резервуар подается такой же расход, что и вытекает через отверстие (рис. 10.3, а).

При постоянном напоре скорости истечения будут неизменными во времени, то есть движение будет установившимся. При этом линии тока и траектории движения частиц жидкости совпадают.

*Малым отверстием* называется такое, у которого наибольший вертикальный размер  $d$  не превышает  $0,1H$ . При выполнении этого условия скорости на верхней и нижней границах вытекающей из отверстия струи можно считать одинаковыми.

Пусть свободная поверхность жидкости в резервуаре находится под давлением  $p_0$ . Истечение происходит в газовую среду с давлением  $p_c$  через незатопленное отверстие с острой кромкой.

Траектории частиц при приближении к отверстию искривляются. Действующая центробежная сила направлена внутрь формирующейся струи. Сечения струи постепенно уменьшаются. Сжатие продолжается и на некотором расстоянии от плоской стенки после выхода струи из резервуара. Движение жидкости на этом участке вблизи стенки неравномерное. Живые сечения потока на этом участке криволинейные, постепенно уменьшающиеся. По мере удаления от отверстия кривизна линий тока уменьшается, и на некотором расстоянии от стенки движение приближается к плавно изменяющемуся.

В связи с криволинейностью линий тока давление и местные скорости в сечениях струи на участке сужения изменяются весьма сложно.

Ближайшее к отверстию сечение струи, в котором движение может быть принято плавно изменяющимся, находится на расстоянии примерно  $0,5d$  от внутренней поверхности стенки резервуара. Это сечение называется *сжатым сечением* струи.

Скорости во всех точках сжатого живого сечения можно считать параллельными и в силу малости отверстия одинаковыми.

Коэффициент сжатия есть отношение площади сжатого живого сечения  $\omega_c$  к площади отверстия  $\omega$ :

$$\varepsilon = \omega_c / \omega. \quad (10.1)$$

Ниже сжатого сечения площади живых сечений струи изменяются слабо и жидкость движется в виде компактной струи. На достаточно большом расстоянии от отверстия в связи с насыщением струи воздухом (аэрация) струя начинает дробиться и теряет компактность.

Чтобы получить формулы для определения скорости и расхода, применим уравнение Бернулли. Составим его для сечений, движение в которых можно считать плавно изменяющимся. Выберем сечения  $A-A$  в резервуаре (см. рис. 10.3,  $a$ ,  $b$ ) и сжатое сечение струи  $C-C$ . В сжатом сечении давления не распределяются по гидростатическому закону, так как здесь  $p = \text{const}$ . Но для малого отверстия этим можно пренебречь и принять в пределах сечения справедливым соотношение  $z + p / \rho g = \text{const}$ . Горизонтальную плоскость сравнения удобно провести через центр *сжатого* сечения. Тогда:

$$H + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{mp}, \quad (10.2)$$

где  $H$  – глубина погружения центра тяжести выходного отверстия в стенке резервуара;

$p_0$  и  $p_c$  – давление в выбранных точках в сечениях  $A-A$  и  $C-C$ ;

$v_0$  и  $v_c$  – средняя скорость движения жидкости соответственно в сечениях  $A-A$  и  $C-C$ ;

$\alpha_0$  и  $\alpha_c$  – коэффициенты Кориолиса в сечениях  $A-A$  и  $C-C$ ;

$h_{mp}$  – потери напора на участке между сечениями  $A-A$  и  $C-C$ .

Потери удельной энергии (в данном случае местные потери) здесь выразим как:

$$h_{mp} = \zeta_{o.k.} \frac{v_c^2}{2g},$$

где  $\zeta_{o.k.}$  – коэффициент потерь при истечении из отверстия с острой кромкой.

Перенеся известные величины в левую часть уравнения (10.2), получим:

$$H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g} = (\alpha_c + \zeta_{o.k.}) \frac{v_c^2}{2g} - \frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}.$$

Учитывая, что по уравнению неразрывности  $v_c \cdot \omega_c = v_0 \cdot \omega_0$  или  $v_c \cdot \varepsilon \cdot \omega = v_0 \cdot \omega_0$  ( $\omega_0$  – площадь сечения резервуара  $A-A$ ), имеем:

$$H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g} = \left[ \alpha_c + \zeta_{o.k.} - \alpha_0 \left( \frac{\varepsilon \omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \frac{v_c^2}{2g}.$$

Отсюда в общем случае ( $p_0 \neq p_{am}$ ):

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{o.k.} - \alpha_0 (\omega \varepsilon / \omega_0)^2}} \sqrt{2g \left( H + \frac{p_0 - p_c}{\rho g} \right)}. \quad (10.3)$$

В большинстве случаев в гидротехнической практике происходит истечение в атмосферу ( $p_c = p_{am}$ ) из сосудов или резервуаров, на свободной поверхности которых  $p_0 = p_{am}$ , то есть:

$$p_0 = p_{am} = p_c.$$

Тогда для средней скорости в сжатом сечении получим:

$$v_c = \varphi_0 \sqrt{2gH}, \quad (10.4)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{o.k.} - \alpha_0 (\varepsilon \omega / \omega_0)^2}}. \quad (10.5)$$

Этот множитель называется *коэффициентом скорости*.

Определим расход с учетом (10.1):

$$Q = \omega_c v_c = \varepsilon \omega v_c.$$

Используя (10.3), получаем:

$$Q = \varepsilon \cdot \varphi_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH};$$

или

$$Q = \mu_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH}. \quad (10.6)$$

где  $\mu_0$  – *коэффициент расхода*, который является произведением коэффициента сжатия  $\varepsilon$  и коэффициента скорости  $\varphi_0$ .

Зная коэффициенты  $\varepsilon$  и  $\varphi_0$ , а также  $\omega$ ,  $\omega_0$  и  $H$ , можно вычислить расход  $Q$  по (10.6).

Коэффициент скорости  $\varphi_0$  отражает влияние распределения скоростей в сжатом сечении (коэффициент Кориолиса  $\alpha_c$ ), потерь напора (коэффициент  $\zeta_{o.k.}$ ) и соотношения площадей  $\varepsilon \cdot \omega = \omega_c$  (в жатом сечении) и  $\omega_0$  (в сечении  $A-A$  в резервуаре).

Часто при  $p_0 = p_c$  формулу для средней скорости в сжатом сечении из (10.2) получают в виде:

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0}, \quad (10.7)$$

где выражение  $H_0 = H + \frac{\alpha_0^2 v_0^2}{2g}$  называется *напором с учетом скорости подхода*  $v_0$ :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \zeta_{o.k.}}}. \quad (10.8)$$

Множитель  $\varphi$ , также как и  $\varphi_0$ , называется *коэффициентом скорости*. Коэффициент скорости  $\varphi$  отражает влияние распределения скоростей в сжатом сечении ( $\alpha_c$ ) и потерь напора ( $\zeta_{o.k.}$ ).

Для расхода запишем:

$$Q = \omega_c v_c,$$

или с учетом (10.1) и (10.5):

$$Q = \varepsilon \cdot \varphi \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH_0},$$

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH_0}. \quad (10.9)$$

В невязкой (идеальной) жидкости сопротивления отсутствуют:  $h_{mp} = 0$ ;  $\alpha_c = 1$ ;  $\zeta_{o.k.} = 0$ ;  $\varphi = 1$ . При движении вязкой жидкости имеются потери напора:  $\zeta_{o.k.} > 0$ ,  $\alpha_c > 1$ ,  $\varphi < 1$ . Обычно условно принимается  $\alpha_c = 1$ , хотя распределение скоростей в пределах сжатого сечения, строго говоря, неравномерное.

В тех случаях, когда можно пренебречь влиянием соотношения площадей  $\varepsilon \cdot \omega$  к  $\omega_0$  или влиянием скоростного напора  $\alpha_0 v_0^2 / 2g$ , в расчетах используются только коэффициент скорости  $\varphi = 1 / \sqrt{\alpha_c + \zeta_{o.k.}}$  и коэффициент расхода  $\mu = \varepsilon \varphi$ .

Тогда основные расчетные формулы принимают вид:

$$v_c = \varphi \cdot \sqrt{2gH}. \quad (10.10)$$

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH}. \quad (10.11)$$

При истечении из отверстия происходит изменение сечения струи, называемое *инверсией струи*. Наиболее ярко это явление проявляется при истечении через отверстия полигональной формы. На рис. 10.4 показаны несколько примеров, характеризующих инверсию струи. При истечении через квадратное отверстие струя постепенно превращается в крест с тонкими прозрачными ребрами, ориентированными нормально к сторонам квадрата. Вытекающая через треугольное отверстие струя постепенно принимает форму звезды с ребрами, перпендикулярными сторонам треугольника. Объясняется это интересное и зрелищно красивое явление совместным действием поверхностного натяжения (благодаря которому углы сначала притупляются, а затем образуются «звезды») и инерции.

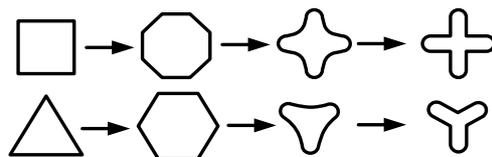


Рис. 10.4. Инверсия струи

## 2.2. Коэффициенты сжатия, скорости и расхода при истечении через незатопленное малое отверстие

Для вычисления площади, скорости и расхода струи необходимо знать коэффициенты истечения  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  и  $\mu$ . Значения этих коэффициентов могут зависеть от нескольких факторов: формы и кромки отверстия, режима движения жидкости, поверхностного натяжения, а также от положения отверстия относительно стенок резервуара. Значение коэффициента сжатия  $\varepsilon = \omega_c / \omega$  для данного отверстия зависит от степени сжатия струи.

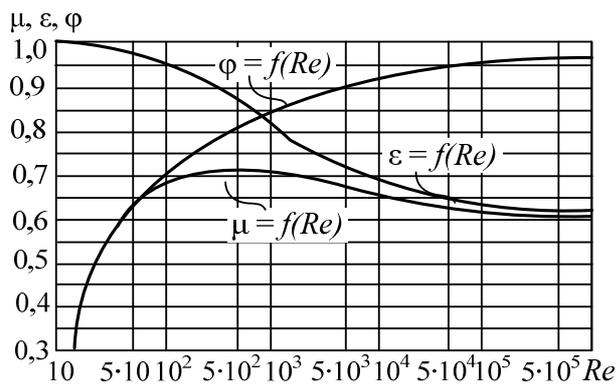


Рис. 10.5. Графики зависимости  $\varepsilon$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$  от числа  $Re$

Полученные зависимости  $\varepsilon$ ,  $\varphi$  и  $\mu$  при совершенном сжатии от  $Re$  представлены на рис. 10.5. Как видно, с увеличением  $Re$  до  $10^5$  коэффициент скорости  $\varphi$  растет, при дальнейшем увеличении  $Re$  значения  $\varphi$  могут считаться постоянными и равными  $\varphi = 0,97$ .

Коэффициент сжатия  $\varepsilon$  с ростом  $Re$  уменьшается, а при  $Re > 10^5$  коэффициент  $\varepsilon$  также может считаться постоянным и приниматься равным для совершенного сжатия  $0,61 \div 0,64$ .

Зависимость  $\mu$  от  $Re$  достаточно сложная. Вначале при небольших значениях  $Re$  коэффициент  $\mu$  растет, достигает максимума, а затем уменьшается, приближаясь при больших  $Re$  к постоянному значению, приблизительно равному 0,6.

При  $Re > 10^5$  можно считать, что для круглого отверстия  $\mu$  не зависит от  $Re$  (наступает автомодельная область относительно  $Re$ ). Точнее,  $\mu$ , перестает зависеть от  $Re$  при  $Re_H > 3 \cdot 10^5$ . В этих условиях  $\mu = 0,6 \div 0,62$ .

## 2.3. Истечение через малое затопленное отверстие с острой кромкой

При истечении через отверстие под уровень жидкости отверстие называется *затопленным*. Рассмотрим истечение через затопленное отверстие (рис. 10.6) при условии, что положения свободных поверхностей жидкости по обе стороны от отверстия не изменяются во времени, давление на свободной поверхности до отверстия и за ним атмосферное.

Запишем уравнение Бернулли для сечений  $A-A$  и  $B-B$ , совпадающих со свободной поверхностью до отверстия и за ним. Плоскость сравнения  $0-0$  проведем через центр отверстия. Пренебрегая скоростными напорами в сечениях  $A-A$  и  $B-B$ , получим:

$$z_1 = z_2 + \sum h_{mp}$$

или

$$z = \sum h_{mp},$$

где

$$z = z_1 - z_2; \sum h_{mp} = \sum \xi v_c^2 / 2g.$$

Здесь  $z$  – разность (перепад) уровней жидкости до отверстия и за ним;

$v_c$  – средняя скорость в сжатом сечении  $C-C$  затопленной струи.

Между сечениями  $A-A$  и  $B-B$  должны быть учтены потери напора:

а) потери между сечениями  $A-A$  и  $C-C$ , аналогичные потерям при истечении в атмосферу через малое отверстие с острой кромкой:

$$h_{mp} = \xi_{o.k.} \frac{v_c^2}{2g};$$

б) потери между сечениями  $C-C$  и  $B-B$ , связанные с внезапным расширением струи от сжатого сечения до сечения во втором резервуаре, равные:

$$h_{mp} = \alpha_c \frac{v_c^2}{2g}.$$

Соответственно скорость в сжатом сечении

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha_c + \xi_{o.k.}}} \sqrt{2gz}$$

или

$$v_c = \phi \sqrt{2gz}$$

Так как площадь струи в сжатом сечении, как и ранее, равна  $\omega_c = \epsilon \omega$ , то расход, проходящий через затопленное отверстие, при указанных выше условиях равен:

$$Q = \epsilon \phi \omega \sqrt{2gz}$$

или

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gz}.$$

Подчеркнем, что при истечении через малое *затопленное* отверстие в формулы для скорости и расхода входит  $z$  – разность отметок уровней жидкости до отверстия и за ним.

Опыты показывают, что коэффициент расхода  $\mu$  при истечении через затопленное отверстие может приниматься равным коэффициенту  $\mu$  для незатопленного отверстия.

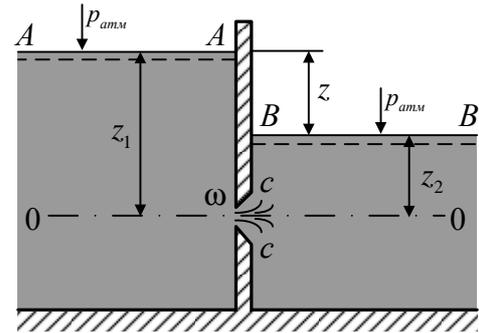


Рис. 10.6. Истечение через затопленное отверстие

## 2.4. Истечение через насадки

*Насадками* называются присоединенные к отверстию короткие трубки определенной длины. При истечении в газовую среду насадок будет называться *незатопленным*.

*Внешним цилиндрическим насадком* (насадком Вентури) называется прямая цилиндрическая трубка длиной  $l = (3 \div 4)d$ , присоединенная под прямым углом с внешней стороны резервуара к отверстию того же диаметра (рис. 10.7).

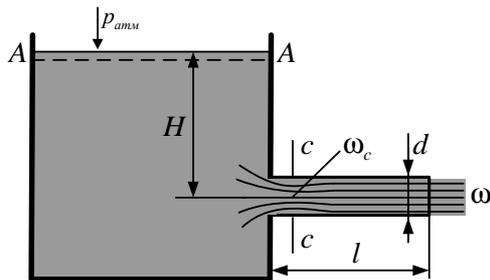


Рис. 10.7. Истечение через внешний цилиндрический насадок

При входе в такую короткую трубку кривизна линий тока (траекторий) значительна, благодаря чему во входной части трубки происходит сжатие потока. Площадь сжатого сечения равна  $\omega_c$ . За сжатым сечением следует расширение потока до заполнения всего поперечного сечения насадка. Между транзитной струей и стенкой насадка образуется кольцевая вихревая водоворотная зона.

Содержащийся в воде воздух и выделившиеся из жидкости пары, зажатые в водоворотной зоне, довольно быстро уносятся транзитным (поступательно движущимся) потоком. В этой зоне понижается давление, создается вакуум. Значение вакуума, как будет показано ниже, зависит от скорости движения жидкости или, в конечном счете, от напора.

Значение вакуума по длине водоворотной зоны изменяется: увеличиваясь от входа, достигает максимума в сжатом сечении, а затем уменьшается до нуля примерно в конце водоворотной зоны.

Если в створе сжатого сечения к насадку присоединить жидкостный вакуумметр (рис. 10.8), то вакуумметрическая высота, определяемая по высоте поднятия жидкости в трубке прибора, будет равна

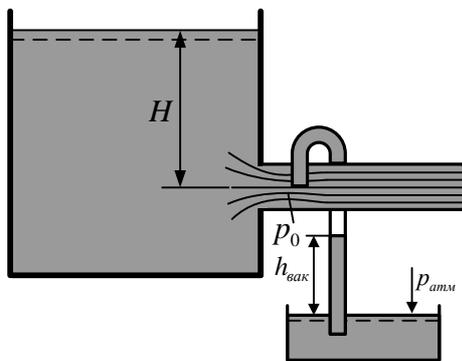


Рис. 10.8. Вакуум в насадке

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_c}{\rho g}.$$

В связи с наличием вакуума действующий напор увеличивается на значения вакуума в сжатом сечении. Скорость в сжатом сечении увеличивается по сравнению с истечением через отверстие с острой кромкой. Насадок как бы «подсасывает» жидкость.

В то же время в насадке происходят и дополнительные по сравнению с отверстием с острой кромкой потери напора, связанные с внезапным расширением струи за сжатым сечением. Соотношение влияния «подсасывания» и указанных дополнительных потерь напора на пропускную способность и определяет степень изменения расхода через насадку по сравнению с отверстием.

Запишем уравнение Бернулли, выбрав два сечения: на поверхности жидкости в резервуаре  $A-A$  и в струе на выходе из насадка.

Считая на выходе из насадка  $\alpha = 1$  и пренебрегая скоростным напором в сечении  $A-A$   $\alpha_0 v_0 / 2g$ , получим:

$$H = (1 + \sum \zeta_{ц.н}) \frac{v^2}{2g},$$

где  $v$  – скорость в выходном сечении насадка.

В рассматриваемом случае сопротивления движению жидкости состоят из сопротивлений при сужении, аналогичных сопротивлениям в отверстии с острой кромкой в стенке резервуара и сопротивлений при внезапном расширении струи  $\zeta_{в.р}$  от площади сжатого сечения  $\omega_c$  до площади на выходе из насадка  $\omega$ .

Обозначим коэффициент сопротивлений при истечении через отверстие с острой кромкой через  $\zeta_{о.к}$ , тогда:

$$\sum \zeta_{ц.н} = \zeta_{о.к} + \zeta_{в.р},$$

при этом целесообразно все коэффициенты сопротивлений отнести к скорости  $v$  в выходном сечении насадка.

Подсчитаем численные значения коэффициентов сопротивлений при достаточно больших значениях числа  $Re$ , когда коэффициент сжатия  $\varepsilon$  не зависит от числа  $Re$ . Коэффициент  $\zeta_{о.к}$ , отнесенный к скорости в сжатом сечении  $v_c$ , равен 0,06. С учетом  $\frac{v}{v_c} = \frac{\omega_c}{\omega} = 0,61 \div 0,64$ , если отнести, как

указывалось,  $\zeta_{о.к}$  к  $v$ , получим:

$$\zeta_{о.к} = 0,06 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 = 0,16 \div 0,146.$$

При внезапном расширении струи в насадке от  $\omega_c$  до  $\omega$ , приняв  $\omega_c / \omega = \varepsilon = 0,61 \div 0,64$ , получим:

$$\zeta_{в.р} = \left( \frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right)^2 = 0,40 \div 0,32.$$

Коэффициентом сопротивлений при входе в трубку является сумма коэффициентов сопротивлений на сужение и на расширение струи внутри насадка, равная при средних значениях  $\zeta_{o.k}$  и  $\zeta_{в.p}$ :

$$\zeta_{ц.н} = \zeta_{o.k} + \zeta_{в.p} \approx 0,5.$$

Тогда 
$$v_{ц.н} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{ц.н}}} \sqrt{2gh} = \varphi_{ц.н} \sqrt{2gH}. \quad (10.12)$$

Здесь для цилиндрического насадка:

$$\varphi_{ц.н} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_{ц.н}}},$$

где  $\zeta_{ц.н} = 0,5$  или можно принять  $\varphi_{ц.н} = 0,82$ .

Расход внешнего цилиндрического насадка:

$$Q_{ц.н} = \mu_{ц.н} \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH},$$

где  $\mu_{ц.н}$  – коэффициенты расхода внешнего цилиндрического насадка;

$\omega$  – площадь выходного отверстия насадка.

Для внешнего цилиндрического насадка:

$$\mu_{ц.н} = \varepsilon \varphi_{ц.н} = \varphi_{ц.н}, \quad (10.13)$$

так как *сжатия потока на выходе из насадка нет*, то есть  $\varepsilon = 1$ .

*Коэффициенты расхода внешнего цилиндрического насадка  $\mu_{ц.н}$  в общем случае зависят от числа Рейнольдса, Фруда, Вебера, относительной длины, конструктивных особенностей и относительной шероховатости проточной части насадка. Влиянием сил поверхностного натяжения и сил тяжести на коэффициенты расхода рассматриваемых насадков можно пренебречь при  $We_n > 200$  и  $Fr_n > 10$ .*

Для насадка с острыми входными кромками и  $l = (3 \div 4)d$  получены следующие опытные данные: при  $Re_n = 10^3$ ;  $5 \cdot 10^3$ ;  $\geq 10^4$  соответственно  $\mu_{ц.н} = 0,73$ ;  $0,8$ ;  $0,82$ .

Итак, при истечении через внешний цилиндрический насадок коэффициент расхода  $\mu_{ц.н}$  на 32 % больше, чем  $\mu_{o.k}$  (отверстие с острой кромкой), при достаточно больших  $Re$  и прочих равных условиях.

При необходимости увеличить расход через отверстие достаточно присоединить к внешней стенке резервуара цилиндрический насадок.

## 2.5. Вакуум во внешнем цилиндрическом насадке

Найдем выражение для вакуума в сжатом сечении при истечении через внешний цилиндрический насадок в атмосферу. Составив уравнение Бернулли для сечений  $A-A$  и  $C-C$ , получим, пренебрегая  $\alpha_0 v_0^2 / 2g$ :

$$H + \frac{P_{атм}}{\rho g} = \frac{P_c}{\rho g} + \frac{\alpha_0 v_c^2}{2g} + h_{мп}.$$

Заменим 
$$v_c^2 = \frac{v^2}{\varepsilon^2}; h_{мп} = \xi_{о.к.} \frac{v_c^2}{2g} = \frac{\xi_{о.к.}}{\varepsilon^2} \frac{v^2}{2g},$$

где  $v = v_{цн}$  – скорость в выходном сечении внешнего цилиндрического насадка.

Тогда 
$$\frac{P_{атм} - P_c}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} \left( \frac{\alpha_c}{\varepsilon^2} + \frac{\xi_{о.к.}}{\varepsilon^2} \right) - H.$$

Учитывая, что  $v^2 / 2g = \varphi_{цн}^2 H$ , запишем:

$$\frac{P_{атм} - P_c}{\rho g} = h_{вак} = \left[ \frac{\varphi_{цн}^2 (\alpha_c + \xi_{ок})}{\varepsilon^2} - 1 \right] H.$$

Приняв  $\alpha_c = 1$  и подставив известные уже значения  $\varphi_{ц.н} = 0,82$ ,  $\xi_{о.к.} = 0,06$  и  $\varepsilon = 0,64$  (для сжатого сечения), получим значение вакуума во внешнем цилиндрическом насадке при истечении жидкости в атмосферу:

$$h_{вак} = \frac{P_{атм} - P_c}{\rho g} \approx 0,75H. \quad (10.14)$$

Предельное (из физических соотношений) значение вакуума ограничено возможным наименьшим давлением в сжатом сечении, которое из условия отсутствия разрыва сплошности жидкости не должно быть меньше давления насыщенных паров жидкости  $P_{нп}$  (или упругости паров жидкости) при температуре в условиях истечения. Поэтому для воды при  $t = 20^\circ \text{C}$  можно получить предельное значение вакуумметрической высоты, соответствующей максимально возможному вакуумметрическому давлению:

$$h_{вак} = \frac{P_{атм} - P_{нп}}{\rho g} \approx 9,8 \text{ м},$$

а с учетом (10.14) – предельное значение напора для внешнего цилиндрического насадка:

$$H_{нр} \approx 1,3 \frac{P_{атм} - P_{нп}}{\rho g} \approx 13 \text{ м}.$$

При напорах, близких к  $H_{np}$ , возможно появление кавитации и нарушение сплошности потока.

Практически при истечении воды в атмосферу и  $h_{вак} \approx 8$  м начинается поступление воздуха через выходное сечение, жидкость частично или полностью отрывается от стенок, то есть происходит срыв вакуума и переход к истечению из отверстия. Соответственно коэффициент расхода уменьшается и насадок теряет свои преимущества в пропускной способности по сравнению с отверстием в тонкой стенке.

Исходя из описанного явления, считают, что допустимое значение вакуума в рассматриваемом насадке соответствует вакуумметрической высоте  $h_{вак.дон} = 8$  м.

Практически принимаемое значение предельного напора, при котором  $h_{вак}$  не превысит  $h_{вак.дон} = 8$  м, то есть насадок будет устойчиво работать с полностью заполненным сечением:

$$H_{np.дон} = \frac{h_{вак.дон}}{0,75} \cong 10,7 \text{ м.}$$

Таким образом, при проектировании гидротехнических сооружений и устройств, работающих по типу внешних цилиндрических насадков, следует предусматривать максимальные напоры не более 10,7 м. На практике иногда в водоворотную область по специальным воздухопроводам подают воздух, находящийся под атмосферным давлением, для обеспечения устойчивой работы, для уменьшения возможной вибрации конструкций. Естественно, коэффициент расхода при этом уменьшается, но надежность работы сооружения повышается.

## **2.6. Истечение через внешний затопленный цилиндрический насадок**

Для случая истечения через внешний затопленный цилиндрический насадок (рис. 10.9) применим уравнение Бернулли к сечениям  $A-A$  и  $B-B$ . Последнее сечение нормально к направлению вытекающего потока, горизонтальная плоскость сравнения проходит по оси насадка. Пренебрегая скоростными напорами в сечениях, получим:

$$z_1 = z_2 + \Sigma \zeta \cdot v^2 / 2g.$$

Отсюда:

$$v = \varphi \cdot \sqrt{2g \cdot z}, \quad (10.15)$$

где  $z = z_1 - z_2$ .

Расход определяется по формуле:

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g \cdot z}.$$

Значения коэффициентов расхода при истечении через затопленный и незатопленный насадки принимаются равными.

Найдем выражение для значения вакуума в сжатом сечении затопленного внешнего цилиндрического насадка, используя уравнение Бернулли.

Выберем сечения  $A-A$  и  $C-C$ , горизонтальная плоскость сравнения проходит по оси насадка. Имеем:

$$z_2 + z + \frac{P_{атм}}{\rho g} = \frac{P_c}{\rho g} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_{мп}.$$

Заменим  $v_c^2 = \frac{v^2}{\epsilon^2}$ ;  $h_{мп} = \zeta_{ок} \frac{v_c^2}{2g} = \frac{\zeta_{ок}}{\epsilon^2} \frac{v^2}{2g}$ .

Тогда  $\frac{P_{атм} - P_c}{\rho g} = \frac{v^2}{2g} \left( \frac{\alpha_c}{\epsilon^2} + \frac{\zeta_{ок}}{\epsilon^2} \right) - z - z_2$ .

Учитывая, что из (10.12)  $v^2 / 2g = \varphi^2 z$ , получаем:

$$\frac{P_{атм} - P_c}{\rho g} = \left[ \frac{\varphi^2 (\alpha_c + \zeta_{ок})}{\epsilon^2} - 1 \right] z - z_2.$$

Подставив  $\alpha_c = 1$ ;  $\varphi_{цн} = 0,82$ ;  $\zeta_{о.к} = 0,06$  и  $\epsilon = 0,64$ , получим значение вакуума в затопленном внешнем цилиндрическом насадке:

$$h_{вак} \approx 0,75 \cdot (z_1 - z_2). \quad (10.16)$$

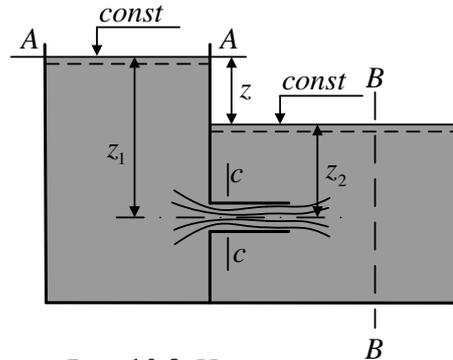


Рис. 10.9. Истечение через внешний затопленный цилиндрический насадок

## 2.7. Истечение через нецилиндрические насадки

*Сходящиеся насадки.* Насадок, имеющий форму усеченного конуса, сходящегося по направлению к выходному отверстию, называется коническим (круглого сечения) *сходящимся насадком* (рис. 10.10, а). В водомерных устройствах на каналах мелиоративных систем применяются также сходящиеся насадки с квадратным и прямоугольным поперечными сечениями.

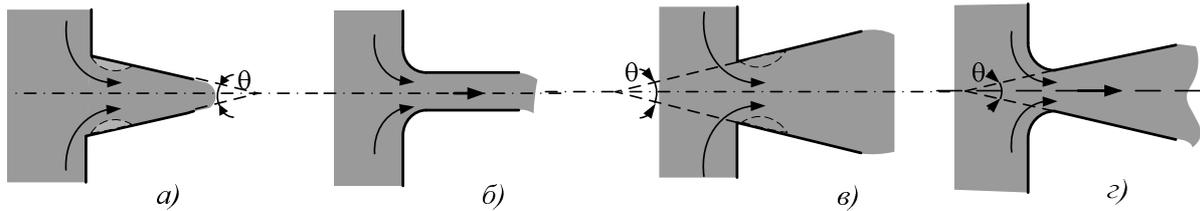


Рис. 10.10. Нецилиндрические насадки: *а* – конически сходящийся насадок; *б* – коноидальный насадок; *в* – конически расходящийся насадок; *г* – коноидально расходящийся насадок

Опытные данные показывают, что при изменении угла конусности  $\theta$  изменяются и коэффициенты  $\mu$ ,  $\varphi$  и  $\varepsilon$ .

Но если коэффициент  $\mu$  достигает максимального значения, равного 0,946 при  $\theta = 13,4^\circ$ , а затем уменьшается, то коэффициент скорости  $\varphi$  непрерывно растет и при  $\theta = 49^\circ$  равен 0,984. Сжатие струи, происходящее при выходе из насадка, оценивается коэффициентом  $\varepsilon = 0,98$  при  $\theta = 13 \div 14^\circ$ .

Увеличение угла конусности приводит к уменьшению потерь на расширение струи после сжатия в пределах насадка. При углах  $\theta = 13,4^\circ$  эти потери практически ничтожны, так как в этом случае  $\omega_c$  примерно равна площади  $\omega$  на выходе из насадка.

Соответственно коэффициент  $\mu$  достигает максимума при  $\theta = 13,4^\circ$ . При дальнейшем увеличении  $\theta$  сжатие на выходе из насадка увеличивается, коэффициент  $\mu$  уменьшается.

*Конoidalные насадки* (рис. 10.10, *б*) имеют сложную форму. Вход выполняется по форме вытекающей через отверстия струи, а выходной участок цилиндрический. За счет этого сжатие струи на выходе из насадка отсутствует,  $\varepsilon = 1$ . Коэффициенты  $\mu = \varphi = 0,97 \div 0,98$  при достаточно больших числах  $Re$ .

*Расходящиеся насадки* (рис. 10.10, *в, г*). Расходящаяся форма насадка способствует отрыву потока от стенок насадка. Вакуум в сжатом сечении расходящегося насадка больше, чем в сжатом сечении внешнего цилиндрического насадка. С увеличением угла конусности  $\theta$  растет и вакуум. По этим соображениям принимают  $\theta = 5 \div 7^\circ$ , а предельный напор меньшим, чем у внешнего цилиндрического насадка, чтобы обеспечить работу расходящегося насадка без срыва вакуума, то есть полным сечением.

Сжатия струи в выходном сечении нет,  $\varepsilon = 1$ , поэтому  $\mu = \varphi$ .

При  $\theta = 5 \div 7^\circ$  и острой кромке входного отверстия применительно к формуле  $Q = \mu \omega_{\text{вых}} \sqrt{2gH}$  рекомендуется  $\mu = \varphi \approx 0,45$ .

Если к отверстию в тонкой стенке присоединить внешний цилиндрический или расходящийся насадки, то во втором случае при прочих одинаковых условиях расход будет значительно больше. При этом за расходящимся насадком скорость и кинетическая энергия струи будут меньше.

Такие насадки применяют при необходимости пропустить относительно большой расход при малых скоростях на выходе или в устройствах, когда необходимо достичь значительного вакуума (водоструйные насосы, гидроэлеваторы и т.п.). Как правило, отсасывающие трубы гидравлических турбин также представляют собой расходящиеся насадки.

При соединении входной части, выполненной по форме струи с расходящимся коническим насадком, можно получить наибольшее возможное увеличение расхода.

## 2.8. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков

При проектировании конструкций, в которых происходит истечение через отверстия и насадки, необходимо сравнивать различные водопропускные устройства по проходящему через них расходу и кинетической энергии, соответствующей этому расходу.

Известно, что при незатопленных отверстиях и насадках:

$$Q = \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2gH} \text{ и } v = \varphi \cdot \sqrt{2gH} .$$

Кинетическая энергия проходящего в единицу времени количества жидкости:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{\rho Q v^2}{2} = \rho \cdot g \cdot \mu \cdot \varphi^2 \cdot \omega \cdot H \cdot \sqrt{2gH} .$$

Тогда при равенстве площадей  $\omega$  и напоров  $H$  расход зависит от  $\mu$ , а кинетическая энергия – от  $\mu\varphi^2$ , что и учитывают при сравнении водопропускных элементов. Осредненные данные этих параметров для больших чисел  $Re$  сведены в табл. 10.1.

Таблица 10.1

Осредненные данные  $\varphi$ ,  $\mu$ ,  $\zeta$  для отверстия и насадков

Отверстие и насадок	$\varphi$	$\mu$	$\mu\varphi^2$	$\zeta = 1/\varphi^2 - 1$
Отверстие в тонкой стенке	0,97	0,62	0,583	0,06
Внешний цилиндрический насадок	0,82	0,82	0,551	0,49
Конический сходящийся насадок ( $\theta = 13^\circ$ )	0,97	0,95	0,894	0,06
Коноидальный насадок	0,97	0,97	0,913	0,06
Конический расходящийся насадок (данные отнесены к выходному сечению)	0,45	0,45	0,091	3,94

Проведем сравнение, как указывалось, при равенстве  $\omega$  и  $H$  во всех случаях. Наибольшая скорость истечения, как видно из табл. 10.1, обеспечивается при истечении через отверстие в тонкой стенке, через сходящийся и коноидальный насадки. Максимальная пропускная способность наблюдается при истечении через расходящийся и коноидальный насадки.

Расход при истечении через внешний цилиндрический насадок больше, чем через отверстие в тонкой стенке, но вытекающая через отверстие струя обладает большей кинетической энергией, чем при истечении через внешний цилиндрический насадок.

Из всех сравниваемых устройств коноидальный насадок характеризуется максимальной кинетической энергией струи.

Расходящиеся насадки обеспечивают минимальные значения скорости и кинетической энергии струи. Наибольшее значение  $\zeta$  у конического расходящегося насадка.

### 3. ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

#### 3.1. Общая характеристика явления

Изменение напора при истечении может быть вызвано:

- 1) изменением положения уровня в резервуаре (сосуде, водохранилище и т.п.), из которого вытекает жидкость (в питателе);
- 2) изменением положения уровня в резервуаре, в который втекает жидкость (в приемнике);
- 3) одновременным изменением положений уровней в обоих резервуарах (в питателе и приемнике);
- 4) другими причинами, например, изменением давления над свободными поверхностями жидкости.

При изменении напора во времени изменяются параметры потока (расход, скорости, давление). Поэтому истечение жидкости из резервуара при переменном напоре представляет один из случаев неустановившегося движения.

Для определения параметров неустановившегося движения уравнение Бернулли, полученное для установившегося движения, в общем случае не пригодно. Однако при истечении из резервуара большой площади  $\Omega$  (питателя), через отверстие, насадок или трубу площадью  $\omega \ll \Omega$  в другой резервуар (приемник) также большой площади или в газовую среду уровни в резервуарах изменяются медленно; ускорения струи малы, скорость изменяется заметно, только если процесс продолжителен. Имеет место *квазиустановившееся* движение.

При расчете параметров квазиустановившихся потоков принято время процессов разбивать на бесконечно большое число бесконечно малых интервалов  $dt$  и в пределах каждого интервала считать движение установившимся и пользоваться уравнением Бернулли.

Основная задача при рассмотрении истечения с переменным напором – определение времени, за которое напор изменится от начального значения  $H_1$  до некоторого назначенного значения  $H_2$ .

Истечение при переменном напоре может происходить через незатопленные или затопленные отверстия, насадки различных форм, трубы. В процессе истечения убыль жидкости в резервуаре-питателе может частично восполняться притоком от внешнего источника, а может и не восполняться. Площади поперечных сечений резервуаров могут быть постоянными или переменными по высоте, так как имеются многообразные схемы истечения.

### 3.2. Истечение при переменном напоре и постоянном притоке

Рассмотрим истечение из резервуара через отверстие в атмосферу. Площадь резервуара  $\Omega$  не постоянна по высоте, площадь отверстия  $\omega (\omega \leq \Omega; v \gg v_0)$ , начальный напор над центром отверстия  $H_1$ . В резервуар от внешнего источника поступает жидкость, расход притока  $Q_{np} = \text{const}$ . Пренебрегая  $\alpha_0 v_0^2 / 2g$ , получим, что при неизменности напора, то есть при установившемся движении, для вытекания расхода  $Q_{np}$  через отверстие площадью  $\omega$  потребуется напор  $H_{np}$ , определяемый из формулы

$$Q_{np} = \mu \omega \sqrt{2gH_{np}}. \quad (10.17)$$

Отсюда 
$$H_{np} = \frac{Q_{np}^2}{2g\mu^2\omega^2}.$$

Если напор над центром отверстия равен  $H_{np}$ , то движение будет установившимся, напор не будет изменяться и из отверстия будет вытекать точно такой же расход, что и поступает в резервуар, то есть  $Q_{np}$ .

Если напор  $H_1$  над центром отверстия в начальный момент времени не равен  $H_{np}$ , то возможны два случая:

1) при  $H_1 < H_{np}$  через отверстие будет вытекать расход  $Q < Q_{np}$ . Объем жидкости в резервуаре будет увеличиваться, напор повышаться, а расход постепенно увеличиваться. Когда напор станет равным  $H_{np}$ , расход достигнет значения  $Q_{np}$ , то есть отток станет равным притоку, движение станет установившимся;

2) при  $H_1 > H_{np}$  через отверстие будет вытекать расход  $Q > Q_{np}$ . В связи с этим уровень жидкости в резервуаре будет постепенно понижаться, напор и расход будут уменьшаться до тех пор, пока напор не станет равным  $H_{np}$  и соответственно вытекающий расход не сравняется с расходом притока  $Q_{np}$ . После этого будет происходить истечение при постоянном напоре  $H_{np}$  и расходе  $Q = Q_{np}$ .

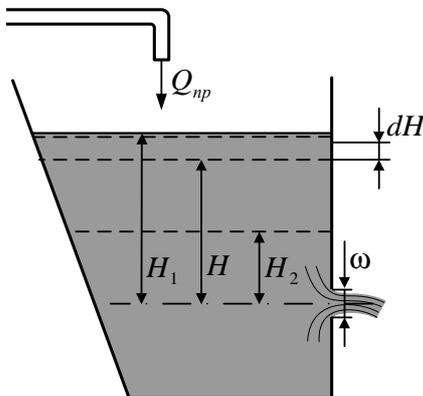


Рис. 10.11. Истечение при переменном напоре

Определим время изменения напора в резервуаре от  $H_1$  до  $H_2$ . Используя изложенное выше допущение о возможности применения формулы расхода при постоянном напоре (то есть при установившемся движении), рассмотрим истечение за бесконечно малый интервал времени  $dt$  при некотором промежуточном значении напора  $H$  (рис. 10.11).

За время  $dt$  через отверстие вытечет объем жидкости:

$$dW = Qdt = \mu\omega\sqrt{2gH}dt,$$

а втечет в резервуар объем жидкости, равный  $Q_{np}dt$ . Изменение объема жидкости в резервуаре за время  $dt$  составит:

$$(Q_{np} - \mu\omega\sqrt{2gH})dt.$$

Заключенное в скобки выражение может быть положительным или отрицательным в зависимости от соотношения  $Q$  и  $Q_{np}$ .

В результате изменения объема за время  $dt$  уровень жидкости в резервуаре изменится (поднимется или опустится) на бесконечно малую величину  $dH$ . При этом изменение объема жидкости равно  $\Omega dH$ , где  $\Omega$  – площадь поперечного сечения резервуара на уровне  $H$ .

Очевидно, что:

$$\Omega dH = (Q_{np} - \mu \omega \sqrt{2gH}) dt.$$

Подставив  $Q_{np}$  по (10.17), получим:

$$\Omega dH = \mu \omega \sqrt{2g} (\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H}) dt.$$

Отсюда:

$$dt = \frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{dH}{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H}}. \quad (10.18)$$

Введем новую переменную:  $y = \sqrt{H_{np}} - \sqrt{H}$ , тогда  $dy = -dH / 2\sqrt{H}$  и  $dH = -2\sqrt{H} dy$ .

Но  $-\sqrt{H} = y - \sqrt{H_{np}}$ , поэтому  $dH = 2(y - \sqrt{H_{np}}) dy$ . Подставив  $dH = 2(y - \sqrt{H_{np}}) dy$  и  $\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H} = y$  в (10.18), получим:

$$dt = \frac{\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \cdot \frac{2(y - \sqrt{H_{np}}) dy}{y} = \frac{2\Omega}{\mu \omega \sqrt{2g}} \left( dy - \frac{\sqrt{H_{np}} dy}{y} \right).$$

Отсюда находим выражение для времени  $t$ , за которое напор над центром отверстия изменится от  $H_1$  до  $H_2$ :

$$t = \frac{2}{\omega \sqrt{2g}} \int_{y_1 = \sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_1}}^{y_2 = \sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_2}} \frac{\Omega}{\mu} \left( 1 - \frac{\sqrt{H_{np}}}{y} \right) dy. \quad (10.19)$$

В (10.19) под знаком интеграла кроме переменной  $y$  имеются еще переменные  $\Omega$  и  $\mu$ . В общем случае  $\Omega$  может зависеть от  $H$ , а коэффициент расхода  $\mu$  также может изменяться с изменением напора, так как при этом изменяются числа Рейнольдса, Вебера, Фруда, которые могут влиять на  $\mu$ . Рассмотрим только те случаи, когда допустимо принимать изменения коэффициента расхода в процессе истечения настолько незначительным, что можно принять  $\mu$  постоянным.

Далее могут представиться два случая:

1. Площадь поперечного сечения резервуара с глубиной не изменяется ( $\Omega = \text{const}$ ), тогда в (10.19) можно вынести  $\Omega$  за знак интеграла:

$$y_2 = \sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_2};$$

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{y_1=\sqrt{H_{np}}-\sqrt{H_1}}^{y_2=\sqrt{H_{np}}-\sqrt{H_2}} \left(1 - \frac{\sqrt{H_{np}}}{y}\right) dy$$

или

$$t = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left( \sqrt{H_1} - \sqrt{H_2} + \sqrt{H_{np}} \ln \frac{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_1}}{\sqrt{H_{np}} - \sqrt{H_2}} \right). \quad (10.20)$$

2. Площадь поперечного сечения резервуара изменяется в зависимости от глубины и тем самым от напора  $H$ .

Здесь также возможны два случая:

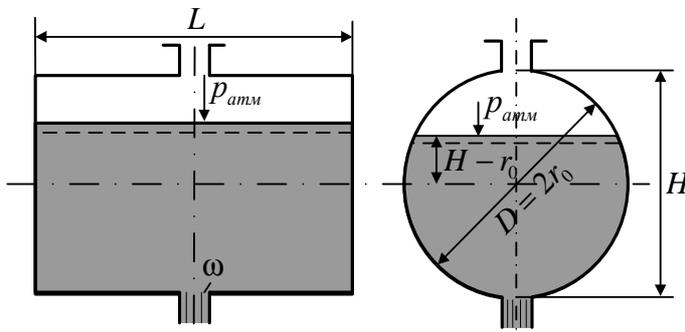


Рис. 10.12. Истечение при переменном напоре из цилиндрического резервуара

а) зависимость площади  $\Omega$  от  $H$  можно выразить аналитически:  $\Omega = f(H)$ . Примером является горизонтальный цилиндрический резервуар диаметром  $D = 2r_0$ , длиной  $L$  (рис. 10.12).

При истечении жидкости из такого резервуара при отсутствии притока ( $Q_{np} = 0$ ;  $H_{np} = 0$ ):

$$dt = - \frac{\Omega}{\mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{dH}{\sqrt{H}}. \quad (10.21)$$

Выразив площадь  $\Omega$  через  $H$ :

$$\Omega = 2L\sqrt{H(2r_0 - H)},$$

проинтегрируем (10.21), заменив  $dH$  через  $d(2r_0 - H)$ . Получим:

$$t = \frac{2L}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{2r_0}^0 \sqrt{2r_0 - H} d(2r_0 - H).$$

Время, за которое из резервуара выльется вся жидкость (время полного опорожнения резервуара), равно:

$$T = \frac{4LD\sqrt{D}}{3 \cdot \mu \cdot \omega \cdot \sqrt{2g}}. \quad (10.22)$$

б) зависимость площади  $\Omega$  от  $H$  не выражается аналитически. Примерами таких резервуаров служат водохранилища и пруды. Если зависимость  $\Omega = f(H)$  не выражается аналитически, то взять интеграл (10.21) невозможно.

Рассмотрим приближенное решение задачи об опорожнении водохранилища (рис. 10.13) через донный водовыпуск площадью выходного сечения  $\omega$  при условии, что задан приток  $Q_{np}$ , коэффициент расхода водовыпуска  $\mu$  и кривая  $\Omega = f(H)$ .

Объем жидкости, которая должна вытечь из водохранилища, разобьем горизонтальными плоскостями на  $m$  слоев равной высоты  $\Delta h$  (значения  $\Delta h$  принимаются исходя из необходимой точности расчета). Объем  $n$ -ного слоя:

$$\Delta W = \Omega \Delta h = \frac{\Omega_{n-1} + \Omega_n}{2} \Delta h;$$

$$t_{H_1}^{H_m} = \frac{\Delta h}{2\mu\omega\sqrt{2g}} \left[ \left( \frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right) + \right.$$

$$\left. \left[ \left( \frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \frac{\Omega_3}{\sqrt{H_3} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right) + \dots \right] = \right.$$

$$\left. = \frac{\Delta h}{2\mu\omega\sqrt{2g}} \left[ \frac{\Omega_1}{\sqrt{H_1} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \frac{\Omega_2}{\sqrt{H_2} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} + \dots + \frac{\Omega_n}{\sqrt{H_m} - \frac{Q_{np}}{\mu\omega\sqrt{2g}}} \right]. \quad (10.23)$$

Величины  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$  находятся по кривой  $\Omega = f(H)$ .

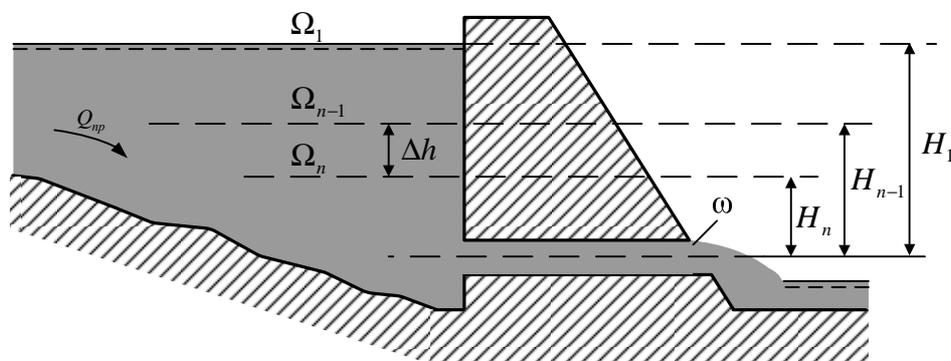


Рис. 10.13. Схема к решению задачи об опорожнении водохранилища

## 4. МАТЕРИАЛЫ К ЛАБОРАТОРНОМУ ЗАНЯТИЮ

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. «ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ МАЛЫЕ ОТВЕРСТИЯ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ»

#### Цель работы

Определить опытным путем коэффициенты скорости  $\phi$ , расхода  $\mu$ , сжатия  $\varepsilon$  и сопротивления  $\zeta$  при истечении через малое отверстие.

#### Общие сведения

При истечении реальной жидкости из резервуара через малое отверстие при условии, что уровень жидкости в резервуаре остается постоянным, уравнение Бернулли, записанное для сечений I и II относительно некоторой плоскости сравнения 0-0, примет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_n.$$

Сумма левой и правой части уравнения и первые три слагаемые в правой представляют удельные энергии жидкости, отнесенные к единице ее веса (напоры) в рассматриваемых сечениях. Формула потерь напора при прохождении жидкости через отверстие имеет вид:

$$h_n = \zeta_0 v_2^2 / 2g,$$

где  $\zeta$  – коэффициент местного сопротивления.

Считая  $v_1 = 0$  получили, что средняя скорость вытекающей струи:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \zeta_0}} \sqrt{2g(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}},$$

где  $v_2$  – действительная скорость истечения реальной жидкости ( $v_d$ ).

Обозначив разность геометрических напоров  $z_1 - z_2 = h$  и считая  $\alpha_1 = 1$  получим:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2gH},$$

где  $H = h + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$  – действительный напор. Чаще всего  $p_1 = p_2$ , поэтому:

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}} \sqrt{2gh},$$

$$v_m = \sqrt{2g \cdot h},$$

где  $v_m$  – теоретическая скорость или скорость истечения идеальной жидкости ( $h_n = 0$ ):

$$\varphi = \frac{v_d}{v_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_0}},$$

где  $\varphi$  – коэффициент скорости. Здесь  $v_d = v_2$ .

В случае, когда скорость  $v_1$  можно считать равной нулю и когда максимальный вертикальный размер отверстия  $(A-B) < 0,2H$  отверстие называется малым. При:

$$Re = \frac{\sqrt{2gH} \cdot d_0}{\nu} < 10^5, \varphi = \text{const}.$$

Для круглых отверстий с тонкой стенкой (толщина стенки  $2d$ ) и острой кромки  $\varphi = 0,97 - 0,98$ ; коэффициент  $\zeta_0 = \frac{1}{\varphi^2} - 1 \approx 0,05$ .

При истечении через малое отверстие жидкость испытывает сжатие при огибании кромок отверстий за счет инверсии своих частиц. Поэтому площадь сечения струи  $\omega_c$  меньше отверстия  $\omega_0$ . Отношение  $\omega_c / \omega_0 = 0,64$  называется коэффициентом сжатия  $\varepsilon$  для малых отверстий. Действительный расход через малое отверстие равен:

$$Q_d = v_d \cdot \omega_c = \varphi \cdot \varepsilon \cdot \omega_0 \cdot v_m = \mu \cdot \omega_0 \sqrt{2gH},$$

так как

$$Q_m = \omega_0 \sqrt{2gH},$$

то

$$\mu = Q_d / Q_m.$$

При  $Re < 10^5$  коэффициенты  $\mu$ ,  $\varepsilon$ ,  $\rho$ ,  $\rho_0$  являются функцией числа  $Re$ .

Коэффициент скорости  $\varphi$  может быть определен координатным способом. Дальность полета струи  $x$  вытекающей из отверстия находящегося на высоте  $y$  над горизонтальной плоскостью может быть выражена как:

$$x = v_d \cdot t, \quad y = \frac{gt^2}{2},$$

где  $t$  – время полета струи до плоскости.

Из этих уравнений:

$$v_d = \frac{x\sqrt{g}}{\sqrt{2y}}. \quad v_m = \sqrt{2gH}.$$

Таким образом:

$$\varphi = \frac{v_d}{v_m} = \frac{x}{2\sqrt{y \cdot H}}.$$

## Описание опытной установки

Схема лабораторной установки представлена на рис. 1. Установка состоит из напорного 1 и питающего 2 баков, соединенных между собой трубопроводом 3. Вода из питающего бака в напорный подается центробежным насосом 4. Расход жидкости, а следовательно, и скорость истечения струи регулируется с помощью задвижки 5. Напорный патрубок насоса дросселируется так, чтобы поддерживался постоянный напор.

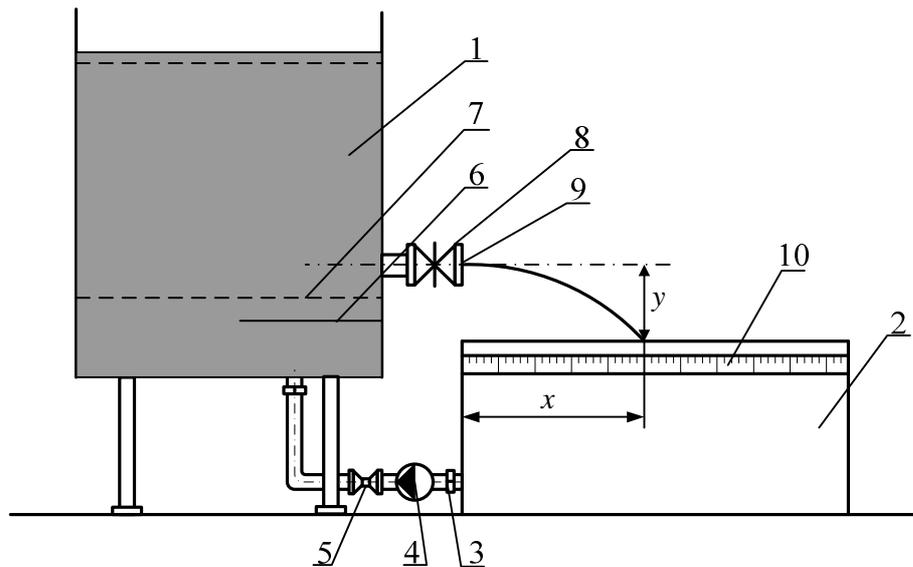


Рис. 1. Схема лабораторной установки:  
1 – напорный бак; 2 – питающий бак; 3 – соединительный трубопровод; 4 – центробежный насос; 5 – кран, регулирующий расход воды; 6 – отражательный щиток; 7 – диффлектор; 8 – фланец; 9 – диафрагма; 10 – измерительная линейка

## Порядок выполнения работы

1. Установить на шайбе диафрагму с круговым отверстием.
2. Включить насос и дождаться установления в напорном баке постоянного напора.
3. Записать величину напора  $H$  по водомерному стеклу (пьезометру).
4. Измерить дальность полета струи  $x$ .
5. Записать значение  $y$ .
6. Поворачивая в резьбе диафрагмы винты, подвести их острия к поверхности струи, после чего закрыть задвижку 2.

7. Штангенциркулем измерить расстояние между отверстиями, то есть диаметр струи, а затем – диаметр отверстия.
8. Открыть сливную задвижку 5.
9. Понизить напор на 9 – 10 см и повторить замеры.
10. Полученные данные поместить в таблицу и произвести необходимые расчеты. Привести пример расчета.

**Таблица экспериментов**

Определяемые величины	Размерность	Истечение из отверстий		
		опыты		
		1	2	3
1. Диаметр отверстия, $d_0$	мм			
2. Диаметр струи, $d_c$	мм			
3. Площадь отверстия, $\omega_0$	см <sup>2</sup>			
4. Площадь живого сечения струи, $\omega_c$	см <sup>2</sup>			
5. Действующий напор по пьезометру, $H$	см			
6. Вертикальная проекция струи, $y$	см			
7. Горизонтальная проекция струи, $x$	см			
8. Коэффициент сжатия струи, $\varepsilon = \omega_c / \omega_0$	б. п.			
9. Коэффициент скорости струи, $\varphi = \frac{v_d}{v_m} = \frac{x}{2\sqrt{y \cdot H}}$	б. п.			
10. Действительная скорость, $v_d = \frac{x\sqrt{g}}{\sqrt{2y}}$	см/с			
11. Теоретическая скорость, $v_m = \sqrt{2gH}$	см/с			
12. Расход действительный, $Q_d = v_d \cdot \omega_c$	см <sup>3</sup> /с			
13. Расход теоретический, $Q_m = \omega_0 \sqrt{2gH}$	см <sup>3</sup> /с			
14. Коэффициент расхода, $\mu = Q_d / Q_m$	б. п.			
15. Коэффициент сопротивления, $\zeta_0 = \frac{1}{\varphi^2} - 1$	б. п.			

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7.  
«ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ  
ПРИ ПОСТОЯННОМ НАПОРЕ»

**Цель работы**

1. Определение коэффициентов  $\varphi$ ,  $\zeta$ ,  $\mu$  насадка Вентури, конически расходящегося и конически сходящегося насадков.
2. Измерение вакуумметрического давления.

**Общие сведения**

Насадками называются короткие патрубки длиной 3 – 4 диаметра входного отверстия.

Различаются цилиндрические, конические и коноидальные насадки, внутренняя поверхность которых выполнена в форме поверхности вытекающей струи.

Цилиндрические насадки делятся на внутренние (насадки Борда) и внешние (насадки Вентури), конические насадки могут быть сходящиеся и расходящиеся (рис. 1, а, в).

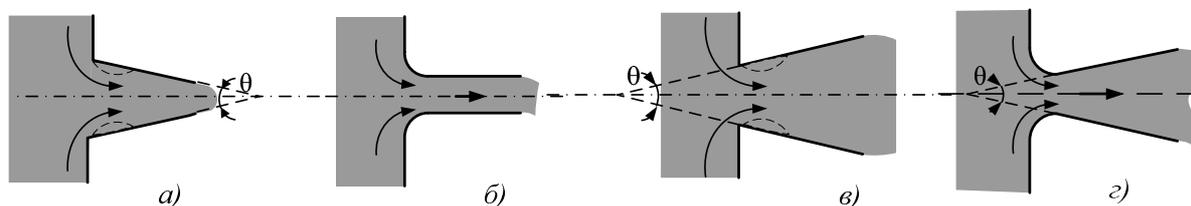


Рис. 1. Нецилиндрические насадки: а – конически сходящийся насадок; б – коноидальный насадок; в – конически расходящийся насадок; г – коноидально расходящийся насадок

Струя при входе в насадок, как и в отверстиях, претерпевает сжатие, далее расширяется и заполняет все сечение насадки. Над сжатым сечением образуется зона с пониженным (ниже атмосферного) давлением жидкости – область вакуумметрического давления. Сопротивление насадка обусловлено сжатием и последующим расширением струи. Коэффициент сопротивления  $\zeta_n$  является суммой коэффициентов сопротивлений входа  $\zeta_{вх}$  и расширения  $\zeta_{расш}$ .

Струя жидкости на выходе из насадка заполняет его сечение полностью, то есть коэффициент сжатия насадки  $\epsilon_n = 1$  (рис. 2). Вакуум в сжатом сечении насадка увеличивает действующий напор. При турбулентном движении, когда потери напора по длине малы вследствие короткой длины насадка, а вакуум достигает примерно  $0,75 \cdot H$ , пропускная способность

внешнего цилиндрического насадка существенно больше (до 33 %) при прочих равных условиях расхода через отверстие. При ламинарном истечении, потери по длине, соизмеримы с местными, вследствие малого сжатия величина вакуума не велика. Поэтому расход через насадок оказывается меньше расхода через отверстие. Записывая уравнение Бернулли для сечений  $A-A$  и  $B-B$  и считая, что  $v_A = 0$ , определим скорость истечения через насадок:

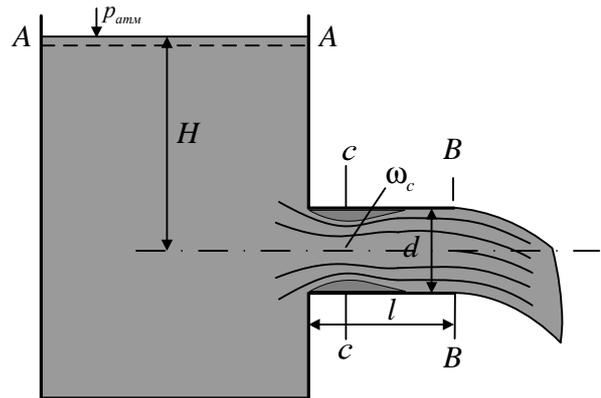


Рис. 2. Истечение через цилиндрический насадок

$$v_B = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_n}} \cdot \sqrt{2gH} = v_d, v_m = \sqrt{2gH},$$

где  $\frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_n}} = \varphi$  – коэффициент скорости насадка;

$v_d$  – действительная, а  $v_m$  – теоретическая скорость истечения.

Расход  $Q$  через насадок определяется как:

$$Q = \omega_B \cdot v_B = \omega_B \cdot \mu \cdot \sqrt{2gH} = \omega_B \cdot \varphi \cdot \sqrt{2gH}.$$

Так как  $\mu = \varepsilon \cdot \varphi$ , то при  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = \varphi$ .

$\omega$  – площадь сечения струи (или отверстия) на выходе из насадка.

Коэффициент скорости  $\varphi = v_d / v_m$  может быть определен координатным методом по формуле:

$$\varphi = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y \cdot H}},$$

где  $x = v_d t$  – дальность полета струи,

$$y = \frac{g \cdot t^2}{2} – \text{высота падения струи.}$$

Тогда коэффициент сопротивления насадка  $\zeta_f = 1/\varphi - 1$ . Следует заметить, что практически при одинаковых диаметрах входных отверстий  $\zeta_{ex}$  насадков примерно равны. Коэффициент  $\zeta_n$ , в основном, зависит от  $\zeta_{расш} = (\omega_2 / \omega_1 - 1)^2$ .

Таким образом, с увеличением  $\omega_2$  при постоянном  $\omega_1$ , (а  $\omega_1$ , зависит только от  $H$ )  $\zeta_{расш}$  увеличивается. Соответственно растет  $\zeta_n$  и уменьшается  $\varphi$  насадка. То есть у конически расходящихся насадков коэффициент  $\varphi$  и, соответственно,  $\mu$  меньше, чем хотя бы у цилиндрических с тем же диаметром

входного отверстия. Коэффициент расхода  $\mu$  может быть определен как  $\mu = Q_o / Q_m$  путем замера действительного расхода  $Q_o$  и подсчета теоретического расхода  $Q_m = \omega_0 \cdot \sqrt{2g \cdot H}$ , где  $\omega_0$  – площадь выходного отверстия.

Вакуум, образующийся над сжатым сечением струи в насадке оказывает всасывающее воздействие на струю, что ведет к увеличению скорости жидкости в сжатом сечении и к увеличению расхода через насадок в целом. Кроме того, с увеличением выходного отверстия, расход через насадок также увеличивается. Все это обуславливает повышенный расход через конически расходящийся насадок.

При больших напорах  $H$  струи истекающей жидкости (через конически расходящиеся и цилиндрические насадки) могут оторваться от стенок (явление срыва струи) за счет того, что давление в зоне сжатия струи (сечение  $C-C$  на рис. 2) станет меньше давления парообразования. В этом случае жидкость вскипает, и струя отрывается от стенки. Практически это наступает при значении вакуумметрического давления в зоне сжатия струи  $6 \div 7$  м вод. ст. Вакуумметрическое давление может быть измерено с помощью вакуумметра по схеме на рис. 3. Опыты показывают что

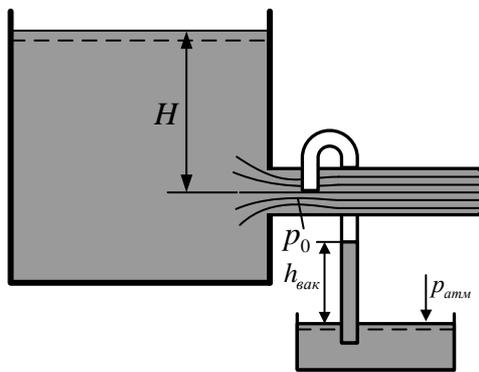


Рис. 3. Вакуум в насадке

$h_{вак} = 0,75H$ .

### Описание установки

На напорном баке 1 (рис. 4) установлена задвижка, 2 к наружному фланцу которой крепится шайба с резьбовым отверстием. В отверстие ввинчивается исследуемый насадок. При повороте маховика задвижки 2 жидкость струей вытекает через насадок. Для измерения дальности полета  $x$  струи на борту бака 3 установлена линейка 4. Высота падения струи  $y$  указана на шайбе. Напор  $H$  измеряется по пьезометру 5. Для измерения действительного расхода внутри бака 3 установлен мерный бак 6 с делениями в литрах на внутренней стенке. Для понижения уровня жидкости в баке 1 служит сливная задвижка 7.

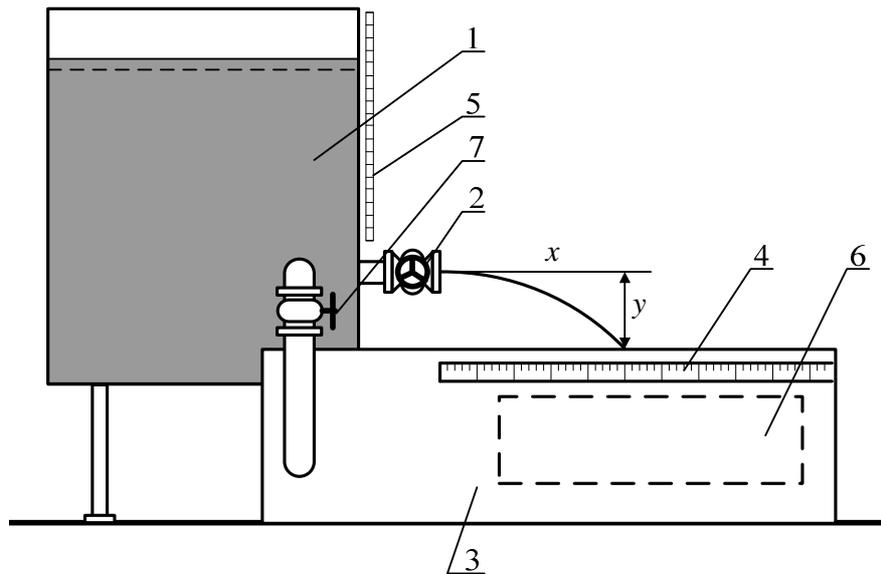


Рис. 4. Лабораторная установка

### Порядок проведения работы

*а) цилиндрический и конический сходящийся насадок:*

1. Установить на шайбе исследуемый насадок.
2. Записать величину напора по пьезометру 5.
3. Открыть полностью задвижку 2.
4. Замерить координату струи  $x$ .
5. Закрыть задвижку и сменить насадок.

*б) конически расходящийся насадок:*

1. Установить на шайбе насадок.
2. Присоединить к штуцеру насадка резиновую трубку, соединенную со стеклянной, конец которой должен быть опущен в стакан с водой или подкрашенной жидкостью.
3. Зажать резиновую трубку зажимом.
4. Закрыть выходное отверстие насадка пробкой.
5. Открыть полностью задвижку 2.
6. Закрыть отверстие в мерном баке 6 пробкой.
7. Резко выдернуть пробку из насадка и одновременно включить секундомер.
8. Замерить координату струи  $x$ ,  $h_{\text{бак}}$  и величину напора по пьезометру 5.
9. Определить время  $t$  наполнения 50 или 100 л воды в мерном баке.
10. Данные занести в таблицу.
11. Закрыть задвижку, воду из мерного бака слить.
12. Открытием задвижки 7 понизить уровень жидкости в баке 1 на  $5 \div 8$  см и повторить опыты описанные в а) и б).

## Обработка опытных данных

По измеренным  $x$  и  $y$  определить коэффициенты скорости  $\varphi$ , сопротивления  $\zeta_n$ , расхода  $\mu$  всех насадков. Определить отношение  $h_{\text{вак}} / H$ . Для конически расходящегося насадка определить коэффициент расхода как отношение по формуле:

$$\mu = Q_{\text{д}} / Q_m.$$

**Таблица экспериментов**

Измеряемые и определяемые величины	Тип насадка		
	конически сходящийся	цилиндрический	конически расходящийся
Напор $H$			
Координата $x$			
Координата $y$			
Коэффициент скорости $\varphi$			
Коэффициент сопротивления $\zeta_n$			
Коэффициент расхода $\mu$			
Вакуумметрическая высота $h_{\text{вак}}$			
Площадь выходного отверстия $\omega_0 = \pi d^2 / 4$			
Теоретический расход $Q_m = \omega_0 \sqrt{2gH}$			
Объем воды $V$			
Время наполнения $t$			
Действительный расход $Q_{\text{д}} = V / t$			

## 5. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое отверстие называется малым?
2. Какое отверстие называется большим?
3. Какое отверстие считается отверстием в тонкой стенке?
4. В каком случае наблюдается полное сжатие струи?
5. В каком случае наблюдается неполное сжатие струи?
6. В каком случае наблюдается совершенное сжатие струи?
7. Объясните, как формируется сжатое сечение струи.
8. Выведите формулу для определения скорости истечения жидкости из отверстия.
9. Выведите формулу для определения расхода жидкости при истечении из отверстия.

10. Что показывает коэффициент скорости  $\varphi$ ?
11. Что называется инверсией струи?
12. Как коэффициенты сжатия  $\varepsilon$ , скорости  $\varphi$  и расхода  $\mu$  зависят от числа  $Re$ ?
13. Как определить расход жидкости при истечении через малое затопленное отверстие с острой кромкой?
14. Что называется насадками?
15. Как происходит истечение жидкости через внешний цилиндрический насадок?
16. Объясните, почему при истечении жидкости через внешний цилиндрический насадок в сжатом сечении образуется вакуум?
17. Какие причины приводят к возникновению сопротивления движения жидкости через внешний цилиндрический насадок?
18. Как можно увеличить расход жидкости через отверстие, если не изменять напор и диаметр отверстия?
19. Какой величиной ограничено вакуумметрическое давление в сжатом сечении при истечении жидкости через насадок?
20. Чему равно предельное значение вакуумметрического давления при истечении жидкости через насадок?
21. Чему равно предельное значение напора при истечении жидкости через насадок?
22. Какие существуют виды нецилиндрических насадков?
23. У какого насадка наибольшая скорость истечения? Почему?
24. У какого насадка наибольший расход? Почему?
25. По какой формуле можно определить время истечения жидкости из отверстия при переменном напоре?

## 6. ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А.Д. Гидравлика и аэродинамика / А.Д. Альтшуль, П.Г. Кислев. – М.: Стройиздат, 1975. – 323 с.
2. Штеренлихт, Д.В. Гидравлика: учебник для вузов / Д.В. Штеренлихт. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 640 с.
3. Чугаев, Р.Р. Гидравлика / Р.Р. Чугаев. – Л.: Энергия, 1982. – 600 с.
4. Ботук, Б.О. Гидравлика / Б.О. Ботук. – М.: Высш. шк., 1962. – 450 с.
5. Медведев, В.Ф. Гидравлика и гидравлические машины: учеб. пособие / В.Ф. Медведев. – Минск: Высш. шк., 1998. – 311 с.

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению курсовой расчетно-графической работы «Гидравлический расчет простого трубопровода» по курсу «Техническая гидромеханика» для студентов специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ»

### ВВЕДЕНИЕ

Курсовая расчетно-графическая работа по дисциплине «Техническая гидромеханика» выполняется студентами специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ» в пятом семестре обучения.

Целью работы является закрепление знаний, полученных студентами при изучении теоретического материала, выработка у них навыков практического применения этих знаний при решении инженерных задач.

В курсовую работу входит гидравлический расчет трубопровода заданной геометрии. Работа должна состоять из расчетно-пояснительной записки с включенными в нее результатами расчетов и чертежа, выполненного на миллиметровой бумаге, на котором схематически изображается трубопровод, и наносятся линии полного и пьезометрического напоров, а также указываются все составляющие потери напора.

### 1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

Каждому студенту преподаватель (руководитель курсовой работы) сообщает шифр индивидуального задания, в соответствии с которым студент из прил. 1 выбирает данные своего задания.

В гидравлической системе следует определить расход жидкости, если давление в емкости  $p_m$ , а высота уровня жидкости –  $H_0$ .

Схемы гидравлических систем, таблицы их геометрических размеров и значений исходных данных приведены в прил. 1.

Запорный ventиль в схемах А, В, Д, Ж, И, К открыт полностью, а в схемах Б, Г, Е, З, Л, М – частично. Трубы стальные, новые.

### 2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Простым трубопроводом называют трубопровод, по которому жидкость транспортируется без промежуточных ответвлений потока. В коротких трубопроводах местные потери напора соизмеримы с потерями на трение.

Исходным при расчетах простого трубопровода является уравнение Бернулли, составленное для потока жидкости от плоскости свободной поверхности питающего резервуара до плоскости выходного сечения трубопровода.

При установившемся движении жидкости имеем:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} = z_k + \frac{p_k}{\gamma} + \alpha_k \frac{v_k^2}{2g} + \sum_{i=1}^n h_{mi} \quad (1)$$

где  $z_0; z_k$  – ординаты, определяющие высоту положения центра выбранного сечения над произвольной горизонтальной плоскостью сравнения;

$\frac{p_0}{\gamma}; \frac{p_k}{\gamma}$  – пьезометрический напор в сечениях 0–0 и К–К;

$\alpha_0 \frac{v_0^2}{2g}; \alpha_k \frac{v_k^2}{2g}$  – скоростной напор в сечениях 0–0 и К–К;

$\alpha_0; \alpha_k$  – коэффициенты Кориолиса, учитывающие неравномерность распределения скоростей в соответствующих живых сечениях потока;

$\sum_{i=1}^n h_{mi}$  – сумма потерь напора на всех участках трубопровода на пути

между выбранными сечениями, состоящая из потерь на трение по длине и потерь в местных сопротивлениях на каждом из участков ( $h_{mi} = h_{лmpi} + h_{mi}$ );

$n$  – количество участков.

Для удобства расчетов вводится понятие располагаемого напора трубопровода, который представляет перепад гидравлических напоров, действующих в выбранных сечениях потока:

$$H = \left(z_0 + \frac{p_0}{\gamma}\right) - \left(z_k + \frac{p_k}{\gamma}\right) = z_0 - z_k + \frac{p_0 - p_k}{\gamma}, \quad (2)$$

где  $z_0 - z_k = H_0$  (для схем А, Б, Д, Е, Ж, З, И, К, Л, М),

$z_0 - z_k = H_0 + h$  (для схем В, Г) – при условии, что плоскость сравнения проходит через центр сечения выходного отверстия бака;

$\frac{p_0 - p_k}{\gamma} = \frac{p_m}{\gamma}$  – при условии, что  $p_k = p_a$  (давление на выходе из трубопровода равно атмосферному).

Преобразуя, с учетом (2), уравнение Бернулли (1), получим общий вид расчетного уравнения простого трубопровода:

$$H = \alpha_k \frac{v_k^2}{2g} - \alpha_0 \frac{v_0^2}{2g} + \sum_{i=1}^n h_{mi} \quad (3)$$

Так как площадь свободной поверхности питающего резервуара достаточно велика по сравнению с сечением трубопровода, скорости в

сечении 0–0 будут малы и скоростным напором в этом сечении можно пренебречь.

После этого расчетное уравнение примет вид:

$$H = \alpha_k \frac{v_k^2}{2g} + \sum_{i=1}^n h_{mi} \quad (4)$$

Выражая потери на трение по длине и местные потери формулами:

$$h_{лmpi} = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \cdot \frac{v_i^2}{2g} \quad (5)$$

$$h_{mi} = \zeta_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (6)$$

получим значение располагаемого напора:

$$H = \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \frac{v_i^2}{2g} + \alpha_k \frac{v_k^2}{2g} \quad (7)$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент гидравлического трения на каждом участке;

$l_i$  – длина каждого линейного участка;

$d_i$  – диаметр трубопровода на каждом участке;

$\zeta_i$  – коэффициент местных сопротивлений, имеющих на участке;

$v_i$  – средняя скорость потока на каждом участке;

$\alpha_k$  – коэффициент Кориолиса для сечения К-К (принимается  $\alpha_k = 1,1$ ).

Используя уравнение неразрывности

$$Q = v_1 S_1 \dots = v_i S_i = v_k S_k \quad (8)$$

получим расчетное уравнение трубопровода в окончательной форме:

$$H = \frac{v_k^2}{2g} \left[ \alpha_k + \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \frac{S_k^2}{S_i^2} \right] \quad (9)$$

где  $S_k$  – площадь выходного сечения трубопровода;

$S_i$  – площадь живого сечения на каждом участке.

Графики напоров (диаграмма уравнения Бернулли) показывают изменение по длине трубопровода полного напора потока и его составляющих. Линия напора (удельной механической энергии потока) строится путем последовательного вычитания (по направлению потока) потерь на каждом из участков из начального напора потока (заданного пьезометрическим уравнением в питающем резервуаре). Пьезометрическая линия (дающая изменение гидростатического напора потока) строится путем вычитания скоростного напора в каждом сечении из полного напора потока, соответствующего данному сечению.

Величина пьезометрического напора  $p_i/\gamma$  на каждом участке трубопровода определяется на графике заглублием центра сечения данного участка трубопровода под пьезометрической линией:

$$p_i/\gamma = H_i - z_i, \quad (10)$$

где  $z_i$  – отметка  $i$ -го сечения (превышение центра сечения над плоскостью сравнения).

Величина скоростного напора  $\alpha_i \frac{v_i^2}{2g}$  – определяется вертикальным расстоянием между пьезометрической линией и линией полного напора для данного участка.

На участках местной деформации потока, где ход изменения напора может быть показан только качественно, линии напоров даются пунктиром.

### 3. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа «Гидравлический расчет простого трубопровода» состоит в определении расхода жидкости  $Q$  в простом трубопроводе и построении его напорной и пьезометрической линий.

Работу рекомендуется выполнять по этапам.

#### 1 ЭТАП

##### Построение схемы трубопровода

На миллиметровой бумаге в масштабе 1:100 вычерчивается схема трубопровода с указанием всех его геометрических размеров. Напорный бак на схеме следует располагать слева в нижней части листа.

Весь трубопровод условно разбивается на  $n$  линейных участков  $l_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ , границами которых служат местные сопротивления. Каждому линейному участку и каждому местному сопротивлению присваивается порядковый номер  $i$ , при этом местному сопротивлению присваивается тот же порядковый номер, что и линейному участку, который оно ограничивает снизу по потоку. Местному сопротивлению «вход в трубопровод из резервуара» порядковый номер не присваивается, а значение коэффициента местного сопротивления для него  $\zeta_{ex}$  суммируется со значением коэффициента местного сопротивления, имеющего порядковый номер 1, и в дальнейшем это суммарное значение используется в расчетах, как  $\zeta_1$ .

## 2 ЭТАП

### Определение режима движения жидкости

Режим движения жидкости в трубопроводе определяется путем сравнения располагаемого напора  $H$  с его критическим значением. Располагаемый напор определяется по формуле (2).

Формулу для получения критического напора, соответствующего переходу от ламинарного режима движения жидкости к турбулентному можно получить, воспользовавшись формулой для определения потерь напора на трение при ламинарном движении:

$$H_{\text{лам}} = \frac{64}{\text{Re}} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{32 \cdot v \cdot l \cdot v}{g \cdot d^2}, \quad (11)$$

При этом для определения числа  $\text{Re}$  используем формулу:

$$\text{Re} = v \cdot d / \nu. \quad (12)$$

Имея в виду, что критический напор  $H_{\text{кр}}$  соответствует критической скорости  $v_{\text{кр}}$ , подставим в (11) значение  $v_{\text{кр}}$ , выраженное через критическое значение числа  $\text{Re}_{\text{кр}}$ :

$$v_{\text{кр}} = \text{Re}_{\text{кр}} \nu / d \quad (13)$$

и получим выражение для критического напора:

$$H_{\text{кр}} = \frac{32 \cdot v \cdot l \cdot v_{\text{кр}}}{gd^2} = \frac{32 \cdot v^2 \cdot l \cdot \text{Re}_{\text{кр}}}{gd^3} \quad (14)$$

Значение  $\text{Re}_{\text{кр}}$  можно принимать равным 2320.

Если  $H < H_{\text{кр}}$  – режим ламинарный; если  $H > H_{\text{кр}}$  – режим турбулентный.

## 3 ЭТАП

### Определение скорости истечения жидкости из трубопровода

Задаемся определенным значением числа  $\text{Re}$ . В случае ламинарного режима целесообразно, в качестве первоначального, принимать значения  $\text{Re} = 2320$ , в случае турбулентного –  $\text{Re} = 500 \frac{d}{\Delta_9}$ , где  $d_i$  – диаметр трубопровода на рассматриваемом участке;  $\Delta_9$  – абсолютная величина эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости.

В соответствии с принятыми значениями числа  $\text{Re}$  для каждого линейного участка трубопровода определяем значение коэффициентов гидравлического трения  $\lambda_i$  и для каждого местного сопротивления – значение коэффициента местного сопротивления  $\zeta_i$ .

#### 4 ЭТАП

##### Определение расхода жидкости трубопровода

Подставляя значения коэффициентов гидравлического трения  $\lambda_i$  и коэффициентов местного сопротивления  $\zeta_i$  в формулу (9), определяем из нее значение скорости истечения жидкости из трубопровода по выражению:

$$v_k = \sqrt{\frac{2gH}{\alpha_k + \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \frac{S_k^2}{S_i^2}}} \quad (15)$$

Значение расхода определяем по формуле:

$$Q = v_k \cdot S_k \quad (16)$$

#### 5 ЭТАП

##### Определение скоростей течения жидкости и чисел $Re_i$ на всех линейных участках трубопровода

Используя формулу (8), по найденному значению расхода определяем значение скоростей на всех линейных участках трубопровода и по ним – значения чисел  $Re_i$  для каждого участка. Проведенный расчет чисел  $Re_i$  (первое приближение) студент предъявляет руководителю курсовой работы и если полученные значения чисел  $Re_i$  отличаются от принятых в начале расчетов (см. 3 этап) более, чем на 10 %, тогда расчет проводится вновь, при этом в основу расчета кладутся числа  $Re_i$  полученные при выполнении настоящего этапа.

Такие последовательные расчеты проводятся до тех пор, пока полученные в результате очередного расчета числа  $Re_i$  не будут отличаться от чисел  $Re_i$  положенных в основу этого расчета, менее, чем на 10 %.

#### 6 ЭТАП

##### Уточнение коэффициентов гидравлического трения и коэффициентов местного сопротивления

В соответствии с полученными в 5 этапе значениями числа  $Re_i$  определяем окончательное значение коэффициента гидравлического трения для каждого линейного участка, учитывая что:

1) если  $Re_i \cdot \frac{\Delta_2}{d_i} < 10$ , то  $\lambda_i$  определяется по формуле Блазиуса (зона гидравлически гладких труб):

$$\lambda = 0,3164 / Re^{0,25} \quad (17)$$

2) если  $10 < Re_i \cdot \frac{\Delta_{\vartheta}}{d_i} < 500$ , то  $\lambda_i$  определяется по формуле Альтшуля

(переходная зона):

$$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta_{\vartheta}}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25} \quad (18)$$

3) если  $Re_i \cdot \frac{\Delta_{\vartheta}}{d_i} > 500$ , то  $\lambda_i$  определяется по формуле Шифринсона

(квадратичная зона – вполне шероховатые трубы):

$$\lambda = 0,11 (\Delta_{\vartheta} / d)^{0,25}, \quad (19)$$

где  $d_i$  – диаметр трубопровода на рассматриваемом участке;

$\Delta_{\vartheta}$  – абсолютная величина эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости.

В соответствии с полученными в 5 этапе значениями числа  $Re_i$ , определяем значение коэффициентов местных сопротивлений ( $\zeta_i$ ) по прил. 2 или справочной литературе в зависимости от вида местного сопротивления.

## 7 ЭТАП

### Определение скоростного напора

В соответствии с формулой (1), скоростной напор на каждом из линейных участков трубопровода определяем по формуле:

$$h_{v_i} = \alpha_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (20)$$

## 8 ЭТАП

### Определение потерь напора на трение

По формуле (5) определяем потери напора на трение для всех линейных участков трубопровода.

## 9 ЭТАП

### Определение потерь напора на местные сопротивления

По формуле (6) определяем потери напора на местные сопротивления.

## 10 ЭТАП

### Проверка проведенных расчетов

Проверку проведенных расчетов проводим, сравнивая исходное значение располагаемого напора, полученного по формуле (2) со значением располагаемого напора, полученного по формуле (4). Погрешность вычислений выражаем в процентах:

$$\Delta = \frac{H' - H''}{H'} \cdot 100\% , \quad (21)$$

где  $H'$  – располагаемый напор, определенный по формуле (2),  
 $H''$  – располагаемый напор, определенный по формуле (4).

## 11 ЭТАП

### Построение диаграммы Бернулли

На миллиметровой бумаге проводим вверх вертикальную линию, перпендикулярную плоскости сравнения от центра сечения выходного отверстия напорного бака (выход трубопровода из бака), которая проходит по линии, являющейся проекцией правой стенки бака на схеме (см. этап 1). Откладываем на этой линии вверх в масштабе 1:100 значение располагаемого напора, определенного во 2 этапе.

От полученной точки строим напорную линию, которая получается путем последовательного вычитания (по направлению потока) потерь на каждом из участков из начального напора потока (диаграмму уравнения Бернулли).

Пьезометрическая линия (показывающая изменение гидростатического напора потока) строится путем вычитания скоростного напора в каждом сечении из полного напора потока, соответствующего данному сечению.

## СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ

(термины, определения, используемые сокращения)

<i>Абсолютное полное гидростатическое давление</i>	Напряжение сжатия жидкости, фактически существующее в данной точке.
<i>Атмосферное давление</i>	Давление атмосферного воздуха на находящиеся в нем предметы и на земную поверхность. В каждой точке атмосферы атмосферное давление равно весу вышележащего столба воздуха с основанием, равным единице площади. С высотой атмосферное давление убывает.
<i>Бар</i>	Внесистемная единица давления. Один бар равен силе в 1 000 000 дин, действующей на площадь в 1 см <sup>2</sup> , что эквивалентно давлению ртутного столба высотой в 750,08 мм или 100 кПа.
<i>Вакуумметрическое давление (вакуум)</i>	Разность между атмосферным давлением и полным (абсолютным) давлением в жидкости (газе).
<i>Внутреннее трение</i>	Совокупность процессов: – происходящих в твердых, жидких и газообразных телах при их деформации; – приводящих к необратимому рассеянию механической энергии и ее превращению во внутреннюю энергию
<i>Водоворотная зона</i>	Область, занятая вращающимися массами жидкости, граничащая с основным течением данного потока.
<i>Высота приведенная</i>	Высота столба жидкости, который соответствует абсолютному (полному) давлению в данной точке жидкости.
<i>Высота пьезометрическая</i>	Высота столба жидкости, вес которой при давлении, равном нулю на его свободной поверхности, уравнивает давление в данной точке, то есть высота столба жидкости, равная $p/\rho g$ .
<i>Вязкость</i>	Свойство жидкости оказывать сопротивление относительному движению (сдвигу) частиц жидкости.
<i>Газообразные жидкости</i>	Жидкости, которые: – занимают все предоставленное им пространство; – не имеют свободной поверхности; – значительно изменяют свой объем, сжимаясь и расширяясь под воздействием внешних сил.
<i>Гидравлика</i>	Отдел механики жидкости, изучающий кроме общих законов равновесия и движения жидкости специальные вопросы, связанные с инженерной практикой.
<i>Гидравлический удар</i>	Резкое изменение давления жидкости при напорном режиме, вызываемое резким изменением скорости за весьма малый промежуток времени.

<i>Гидравлический уклон</i>	Уменьшение удельной энергии потока, отнесенное к его длине.
<i>Гидродинамика</i>	Раздел механики жидкости (гидромеханики), изучающий движение жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами при их относительном движении.
<i>Гидромеханика</i>	Механика жидкости, раздел механики, изучающий движение и равновесие жидкости, а также взаимодействие между жидкостью и твердыми телами, полностью или частично погруженными в жидкость.
<i>Гидростатика</i>	Раздел гидравлики, изучающий жидкости, находящиеся в состоянии относительного покоя, когда отсутствуют перемещения частиц относительно друг друга.
<i>Гидростатическое давление</i>	Давление, вызываемое весом жидкости. Гидростатическое давление зависит от координат точки, в которой оно измеряется.
<i>Градиент скорости</i>	Интенсивность изменения скорости по нормали к ее изопотенциальной поверхности
<i>Давление</i>	Физическая скалярная величина, равная отношению перпендикулярной составляющей силы, равномерно распределенной по поверхности тела, к площади этой поверхности.
<i>Давление жидкости на стенку</i>	Сила, с которой жидкость давит на рассматриваемую площадь заданной плоской или криволинейной поверхности.
<i>Давление манометрическое</i>	Превышение давления в жидкости (газе) над атмосферным.
<i>Движение безвихревое (потенциальное)</i>	Движение жидкости без вращения ее частиц вокруг своих центров тяжести.
<i>Движение безнапорное</i>	Движение жидкости со свободной поверхностью.
<i>Движение ламинарное</i>	Слоистое упорядоченное движение жидкости при котором отдельные слои жидкости скользят относительно друг друга, не смешиваясь между собой.
<i>Движение плавно изменяющееся</i>	Неравномерное движение жидкости, при котором кривизна линий тока и угол расхождения между ними весьма малы.
<i>Движение плоское (плоскопараллельное)</i>	Движение жидкости, параллельное некоторой неподвижной плоскости, при котором его характеристики (скорость, давление и др.) не зависят от расстояния частиц жидкости от этой плоскости.
<i>Движение пробковое</i>	Движение, при котором газовая фаза смеси периодически полностью занимает поперечное сечение трубопровода.
<i>Движение равномерное</i>	Движение, при котором скорости в сходственных точках двух смежных сечений равны между собой.
<i>Движение турбулентное</i>	Движение жидкости с пульсацией скорости вследствие молярного перемешивания жидкости.
<i>Движение установившееся</i>	Движение жидкости, при котором его характеристики в любой точке потока остаются неизменными во времени.

<i>Динамическая вязкость (или коэффициент вязкости)</i>	Характеристика вязкости жидкости, выражаемая отношением касательного напряжения в точке поверхности соприкосновения слоев жидкости к градиенту скорости в данной точке по нормали к поверхности соприкосновения при движении жидкости параллельными слоями.
<i>Живое сечение потока жидкости</i>	Поверхность, являющаяся геометрическим местом частиц жидкости, скорости которых перпендикулярны к соответствующим элементам поверхности. Для установившегося течения жидкости в заполненной гладкой трубе живое сечение потока задается плоскостью, перпендикулярной оси трубы и ограниченной внутренней поверхностью трубы.
<i>Жидкость</i>	Тело, обладающее свойством текучести, то есть способное сколь угодно сильно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил, но, в отличие от газа, весьма мало изменяющее свою плотность при изменении давления.
<i>Жидкость гидрофобная</i>	Водоотталкивающая жидкость.
<i>Жидкость капельная</i>	Термин, который применяется для отличия жидкости от газа в тех случаях, когда газ рассматривают как «сжимаемую жидкость».
<i>Жидкость ньютоновская</i>	Вязкая жидкость, точно отвечающая закону трения жидких тел Ньютона $\tau = \mu \frac{du}{dn}$ ; неньютоновская – жидкость не отвечающая этим законам.
<i>Жидкость однородная</i>	Жидкость, плотность которой во всех точках постоянна.
<i>Закон Бернулли</i>	Физический закон, в соответствии с которым: В каждой точке установившегося потока жидкости сумма внешнего, гидростатического и динамического давления есть величина постоянная.
<i>Закон Паскаля</i>	Основной закон гидростатики, в соответствии с которым жидкости и газы передают производимое на них давление одинаково по всем направлениям. На основе закона Паскаля работают гидравлические устройства, тормозные системы автомобилей, домкраты, прессы и т.п.
<i>Идеальная жидкость(невязкая)</i>	Жидкость, обладающая: – абсолютной подвижностью, то есть у нее отсутствуют силы трения и касательные напряжения; – абсолютной неизменностью объема под воздействием внешних сил; – отсутствием вязкости. Идеальная жидкость является физической моделью реальных жидкостей.

<i>Инверсия струи</i>	Изменение формы поперечного сечения струи по ее длине (при истечении жидкости из отверстия в атмосферу).
<i>Кавитация</i>	Явление нарушения сплошности текущей жидкости из-за выделения внутри нее пузырьков газа или паров самой жидкости.
<i>Кинематическая вязкость <math>\nu</math></i>	Отношение динамической вязкости к плотности жидкости.
<i>Коэффициент кинетической энергии потока (коэффициент Кориолиса)</i>	Отношение действительной удельной величины кинетической энергии потока к величине удельной кинетической энергии, вычисленной в предположении, что скорости во всех точках живого сечения равны средней скорости.
<i>Коэффициент количества движения потока (коэффициент Буссинеска)</i>	Отношение действительной величины количества движения потока к величине количества движения, вычисленного в предположении, что скорости во всех точках живого сечения равны средней скорости потока.
<i>Коэффициент сопротивления по длине (коэффициент Дарси)</i>	Безразмерная величина, зависящая от шероховатости стенок русла и числа Рейнольдса.
<i>Коэффициент Шези (или скоростной множитель)</i>	Наименование размерного коэффициента $C$ в формуле средней скорости потока при равномерном движении, то есть в формуле Шези $v = C \cdot \sqrt{R \cdot i}$ .
<i>Критическая скорость Рейнольдса</i>	Величина средней скорости потока, соответствующая критическому числу Рейнольдса при данных условиях.
<i>Критический уклон</i>	Уклон дна, при котором нормальная глубина потока равна критической глубине.
<i>Линия тока</i>	Линия, проведенная через ряд последовательно расположенных точек, скорость течения в которых направлена по касательной к этой линии.
<i>Манометр</i>	Прибор, предназначенный для измерения давления или разности давлений жидкостей и газов. Действие манометра основано на зависимости ряда физических параметров от давления.
<i>Местные потери напора</i>	Затраты удельной энергии потока на преодоление местных сопротивлений.
<i>Миллиметр ртутного столба (мм рт. ст.)</i>	Внесистемная единица давления. 1 мм рт. ст. – гидростатическое давление 1 мм ртутного столба плотностью 13595,1 кг/м <sup>3</sup> при 0 °С и нормальном значении ускорения свободного падения. 1 мм рт. ст. = 133,322 Па.
<i>Напор</i>	Сумма трех высот: высоты положения, высоты давления и скоростной высоты.

<i>Нормальная атмосфера (атм)</i>	Внесистемная единица давления, равная давлению столба ртути 760 мм при 0 °С, плотности ртути 13595,1 кг/м <sup>3</sup> и нормальном ускорении свободного падения. 1 атм = 101325 Па
<i>Парциальное давление газа</i>	Давление, которое создал бы каждый из газов смеси, если остальные газы удалить из объема, занимаемого смесью. Давление смеси газов определяется законом Дальтона.
<i>Паскаль</i>	Единица давления в СИ. 1 паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м <sup>2</sup> , расположенной перпендикулярно силе.
<i>Потери напора по длине</i>	Затраты удельной энергии потока жидкости на преодоление сил трения, пропорциональные длине расчетного участка.
<i>Поток жидкости</i>	Движение массы жидкости, ограниченной системой поверхностей твердых тел и / или поверхностей соприкосновения жидких и газообразных тел
<i>Пьезометрический уклон</i>	Уменьшение потенциальной энергии потока, отнесенное к его длине.
<i>Расход</i>	Объем жидкости, протекающий в единицу времени через поперечное сечение потока.
<i>Расходная характеристика</i>	Расход в заданном русле при гидравлическом уклоне, равном единице.
<i>Реальные жидкости</i>	Жидкости, обладающие: – сжимаемостью; – сопротивлением сдвигающим усилиям; – вязкостью.
<i>Свободная поверхность</i>	Поверхность раздела между жидкостью и газообразной средой с постоянным давлением.
<i>Скоростная высота (скоростной напор)</i>	Высота, при свободном падении с которой частица жидкости приобретает данную скорость, то есть высота равная $v^2 / 2g$ .
<i>Скорость местная</i>	Скорость в данной точке.
<i>Скорость осредненная</i>	Средняя величина местных скоростей за достаточно большой промежуток времени.
<i>Сообщающиеся сосуды</i>	Сосуды, имеющие в нижней части соединительные каналы. Если капиллярными явлениями можно пренебречь, то в сообщающихся сосудах свободные поверхности покоящейся жидкости находятся на одном уровне.
<i>Средняя скорость потока</i>	Скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости через живое сечение потока, чтобы расход был равен расходу, проходящему через это сечение при действительном распределении скоростей.
<i>Техническая атмосфера (ат)</i>	Внесистемная единица давления, равная давлению 9,80665 Н/см <sup>2</sup> . 1 ат = 98066,5 Па

<i>Торричелли (Торр)</i>	Внесистемная единица давления, равная 1 мм рт. ст. 1 торр = 133,332 Па
<i>Трубка Пито</i>	Прибор для измерения динамического давления текущей жидкости, представляющий собой изогнутую трубку, отверстие которой расположено перпендикулярно линиям тока жидкости, а противоположное колено ориентировано вертикально. Высота столба жидкости в вертикальном колене прямопропорциональна динамическому давлению жидкости.
<i>Трубка тока</i>	Трубка, образованная системой линий тока, проходящих через точки малого замкнутого контура.
<i>Удельная энергия</i>	Механическая энергия жидкости, приходящаяся на единицу весового расхода, определяемая относительно произвольно выбранной горизонтальной плоскости (численно равна напору.)
<i>Уравнение неразрывности</i>	Для стационарного течения жидкости – соотношение, связывающее: – плотность жидкости; – скорость жидкости в трубе; – площадь поперечного сечения трубы.
<i>Формула Торричелли</i>	Выражение, определяющее скорость вытекания жидкости через отверстие в стенке сосуда в зависимости от расстояния от оси отверстия до поверхности жидкости.
<i>Число Рейнольдса (Re)</i>	Отношение сил инерции к силам трения. Число Рейнольдса используется в гидродинамике для моделирования условий обтекания потоком различных тел, а также для установления режима движения жидкости в трубах и руслах.

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

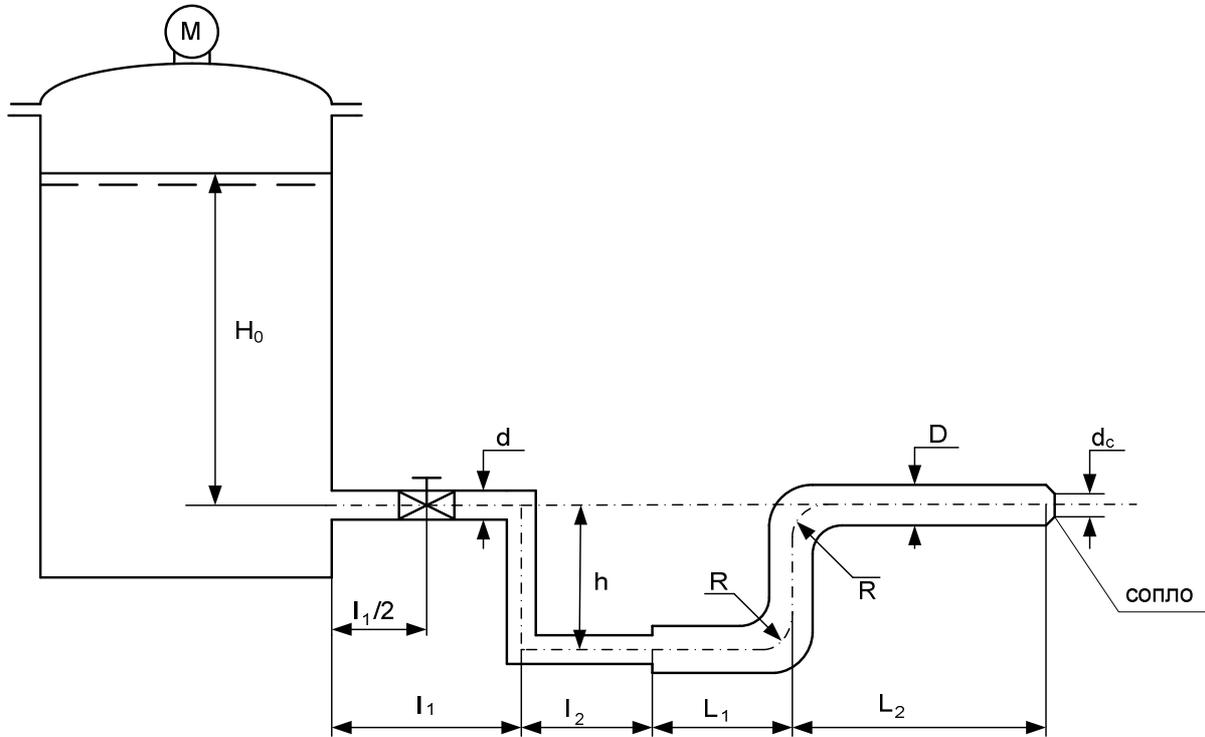
1. Гидравлика и аэродинамика: учеб. для вузов / А. Д. Альтшуль [и др.]. – М.: Стройиздат, 1987 – 323 с
2. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М. : Машиностроение, 1976. – 256 с.
3. Примеры расчетов по гидравлике: учеб. пособие для вузов / под ред. А. Д. Альтшуля. – М. : Стройиздат. 1977. – 256 с.
4. Справочное пособие по гидравлике, гидромашинам и гидроприводам / Я. М. Вильнер [и др.] ; под общ. ред. Б. Б. Некрасова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк. 1985. – 382 с.
5. Штеренлихт, Д. В. Гидравлика : учеб. для студ. вузов / Д. В. Штеренлихт. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : КолосС, 2005 – 655 с.

### Дополнительная

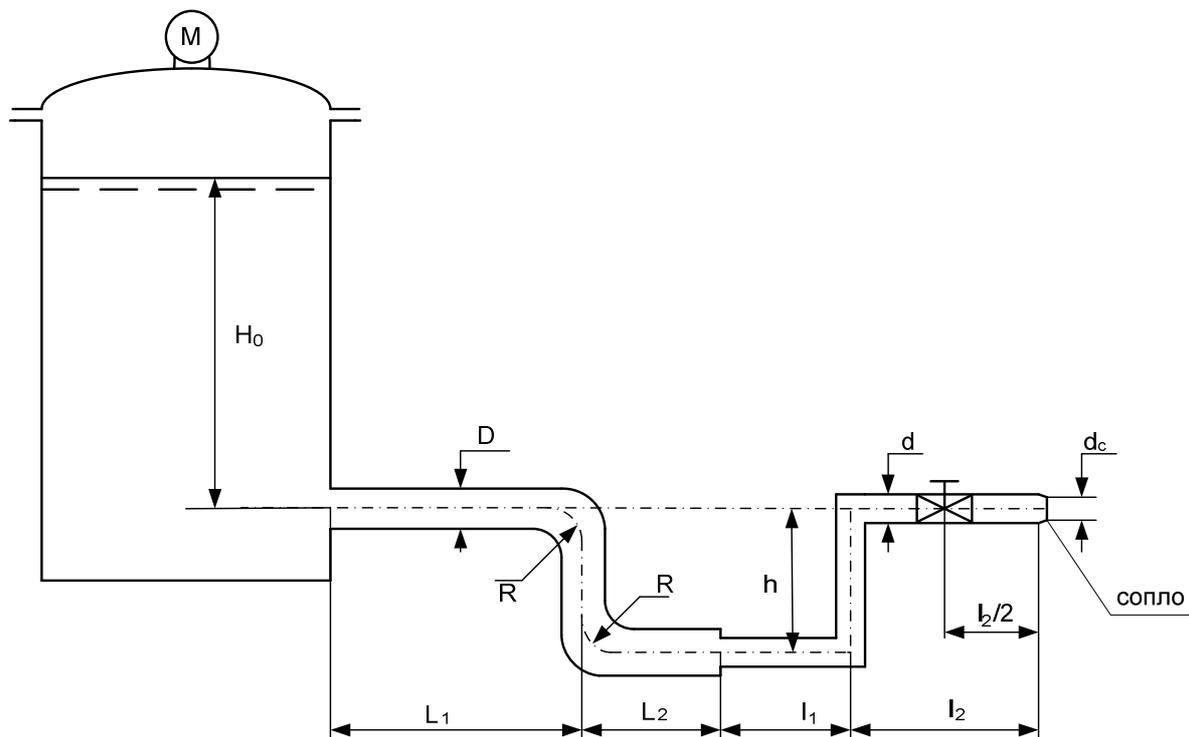
1. Ильина, Т. Н. Основы гидравлического расчета инженерных сетей : учеб. пособие / Т. Н. Ильина. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 186 с.
2. Калицун, В. И. Гидравлика, водоснабжение и канализация : учеб. пособие / В. И. Калицун, В. С. Кедров, Ю. М. Ласков. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 2000. – 397с.
3. Медведев, В. Ф. Гидравлика и гидравлические машины : учеб. пособие / В. Ф. Медведев. – Минск : Выш. шк., 1998. – 311 с.
4. Механика жидкости и газа : учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-70 04 02 / сост. В. К. Липский, Д. П. Комаровский ; под общ. ред. В. К. Липского. – Новополоцк : ПГУ, 2006. – 299 с.
5. Механика жидкости и газа : учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотв. и охрана водных ресурсов» / М-во образования РБ, Полоцкий гос. ун-т; сост. Д. П. Комаровский, В. К. Липский; под общ. ред. В. К. Липского. – Новополоцк : ПГУ, 2008. – 355 с.
6. Справочник инженера : инженерная механика / авт.-сост. М. Клиффорд; пер. с англ. и науч. ред. А. В. Добровольского. – М. : Изд-во АСВ, 2003. – 279 с.

ВАРИАНТЫ СХЕМ

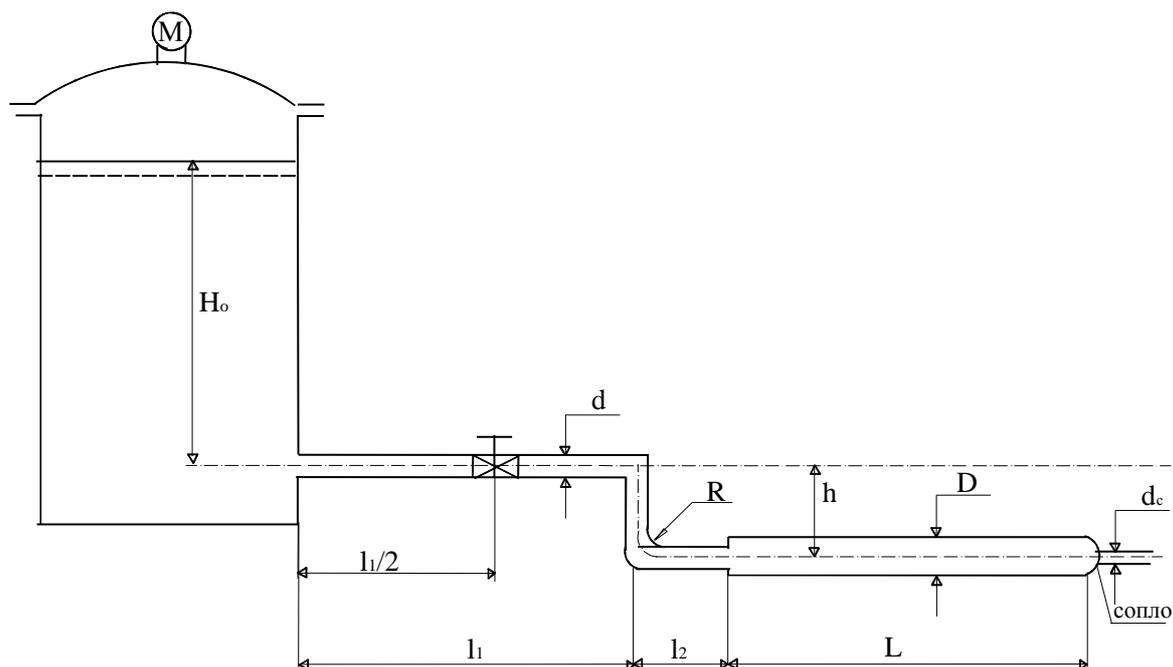
Тип А



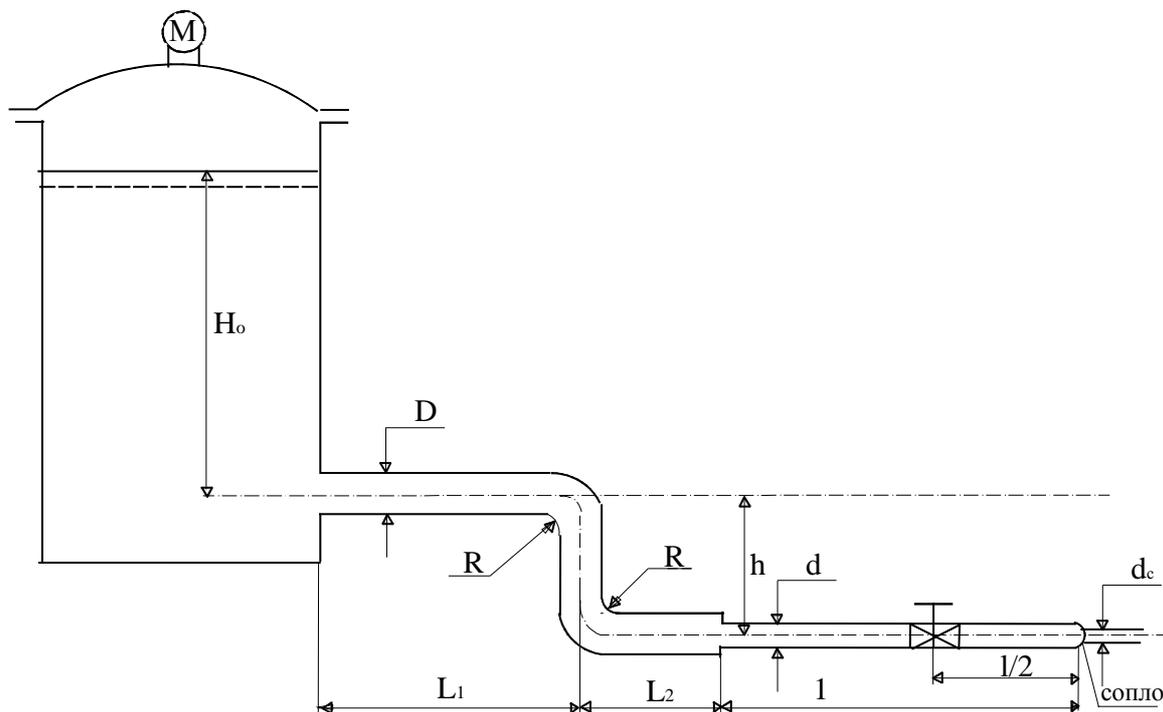
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d_c$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
1	5,0	10	4,0	0,10	10	5	0,20	20	10	0,08	0,2	20	Вода
2	4,5	12	4,1	0,15	8	5	0,20	15	10	0,10	0,2	20	Керосин
3	5,5	6	5,2	0,10	12	3	0,18	18	12	0,10	0,2	15	Бензин
4	4,0	7	5,3	0,10	7	7	0,15	10	18	0,06	0,3	25	Вода
5	3,5	14	5,4	0,12	6	10	0,18	14	14	0,06	0,3	15	Вода
6	4,2	12	5,0	0,12	8	12	0,15	12	10	0,06	0,3	20	Керосин
7	4,8	10	5,1	0,10	9	9	0,16	16	8	0,05	0,3	20	Бензин
8	5,0	10	5,2	0,12	10	10	0,20	20	20	0,08	0,2	10	Вода
9	5,4	12	5,3	0,11	15	10	0,20	22	15	0,08	0,2	18	Вода
10	5,5	8	5,4	0,11	12	15	0,18	25	10	0,06	0,3	30	Вода



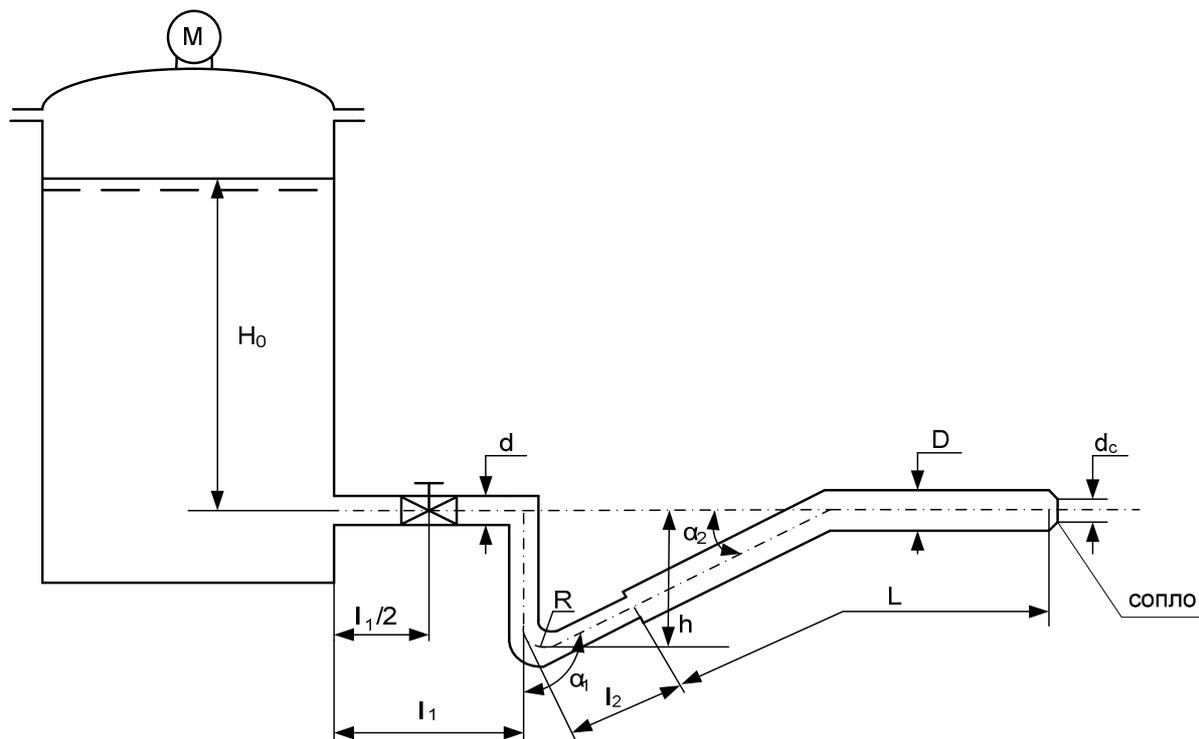
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l_1$	$l_2$	$d_c$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
1	4,0	10	3,5	0,20	12	10	0,15	10	12	0,06	0,3	20	Вода
2	4,2	10	4	0,20	20	10	0,10	5	8	0,05	0,2	15	Керосин
3	4,7	12	4,5	0,22	18	15	0,15	4	10	0,06	0,3	25	Вода
4	5,0	8	4	0,15	15	10	0,10	5	12	0,05	0,2	15	Бензин
5	4,5	14	4,5	0,18	16	8	0,10	7	8	0,05	0,2	15	Вода
6	3,5	10	4	0,15	14	6	0,12	10	7	0,05	0,2	20	Бензин
7	3,8	8	3,5	0,20	16	4	0,14	9	10	0,05	0,3	20	Керосин
8	4,2	10	3	0,18	12	10	0,12	10	15	0,05	0,2	30	Вода
9	4,5	12	4	0,16	18	12	0,12	15	8	0,05	0,3	10	Вода
10	4,0	14	4,4	0,16	14	11	0,10	10	10	0,05	0,3	18	Вода



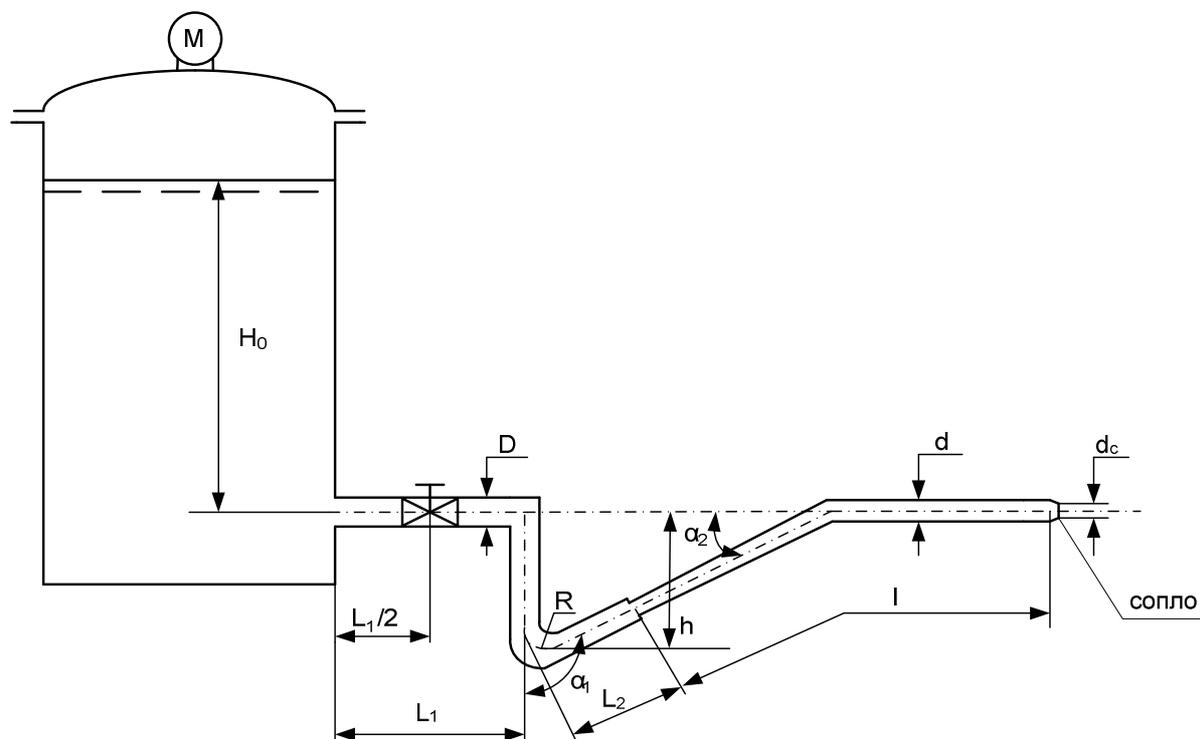
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L$	$d_c$	$R$	$t$	жидкость
	$\text{кг/см}^2$											
1	3,0	5	4,0	0,10	12	10	0,20	40	0,08	0,2	20	Вода
2	3,2	5	4,2	0,10	10	8	0,15	35	0,09	0,3	15	бензин
3	2,5	7	4,5	0,12	8	12	0,20	42	0,10	0,2	15	вода
4	3,0	4	4,5	0,12	6	10	0,19	45	0,09	0,3	20	керосин
5	3,2	4	5,0	0,15	10	10	0,18	30	0,08	0,2	30	Вода
6	3,5	6	3,5	0,15	12	12	0,15	25	0,07	0,3	20	бензин
7	3,4	5	3,0	0,10	11	10	0,14	40	0,06	0,2	10	вода
8	5,0	6	4,0	0,12	10	10	0,16	35	0,05	0,2	15	керосин
9	3,5	5	4,5	0,11	10	14	0,20	45	0,07	0,3	25	Вода
10	5,0	4	3,0	0,11	14	12	0,16	40	0,08	0,2	18	Вода



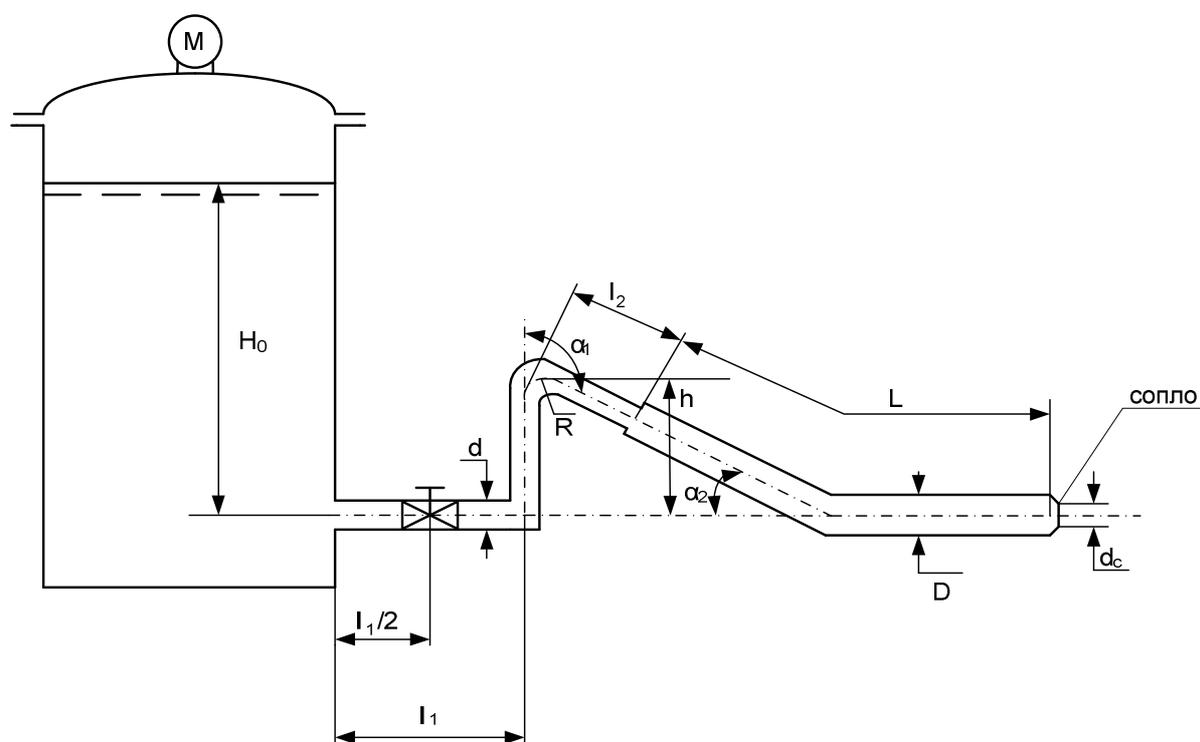
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l$	$d_c$	$R$	$t$	жидкость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
1	2,5	10	4,0	0,20	20	15	0,10	12	0,05	0,2	20	Вода
2	2,8	8	4,5	0,20	15	15	0,15	10	0,06	0,4	15	вода
3	3,0	7	4,0	0,15	18	15	0,12	10	0,06	0,5	15	Керосин
4	3,5	5	4,2	0,15	15	12	0,10	12	0,05	0,3	20	Бензин
5	4,0	10	4,5	0,20	20	17	0,12	14	0,05	0,2	25	Вода
6	3,5	10	4,8	0,20	16	16	0,12	16	0,06	0,2	20	Керосин
7	3,3	6	3,5	0,22	18	14	0,14	20	0,06	0,3	30	Вода
8	3,5	9	3,0	0,18	14	20	0,10	18	0,05	0,2	10	Бензин
9	3,2	7	4,0	0,16	30	10	0,12	25	0,05	0,3	10	Вода
10	4,0	8	3,0	0,16	25	12	0,10	15	0,05	0,3	18	Вода



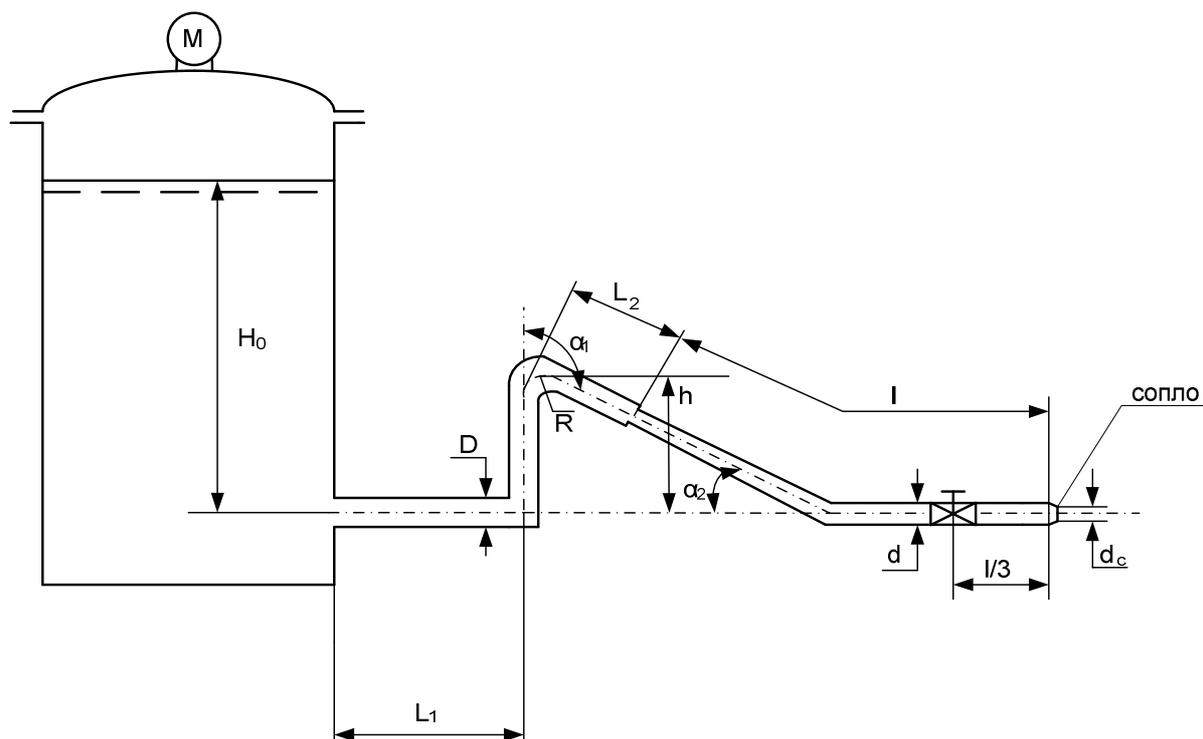
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L$	$d_c$	$R$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	град	°С	
1	4,0	12	4	0,10	10	5	0,20	20	0,08	0,2	120	30	20	Вода
2	4,5	10	4,5	0,10	12	4	0,15	18	0,06	0,2	135	45	15	Вода
3	5,0	8	4	0,15	8	5	0,20	30	0,08	0,2	110	20	20	Керо- син
4	3,5	14	5	0,12	14	8	0,20	25	0,08	0,2	120	30	20	Бензин
5	4,5	8	4	0,12	16	4	0,18	20	0,06	0,2	135	45	30	Вода
6	4,0	7	4,5	0,10	14	4	0,18	25	0,06	0,2	120	30	25	Бензин
7	3,8	10	3,5	0,10	10	3	0,16	22	0,06	0,15	120	30	15	Керо- син
8	3,6	9	3	0,14	12	3	0,20	28	0,08	0,2	110	20	25	Вода
9	4,2	10	3,6	0,11	8	4	0,18	26	0,08	0,2	135	45	16	Вода
10	4,4	8	4	0,11	11	4	0,16	32	0,08	0,15	110	20	18	Вода



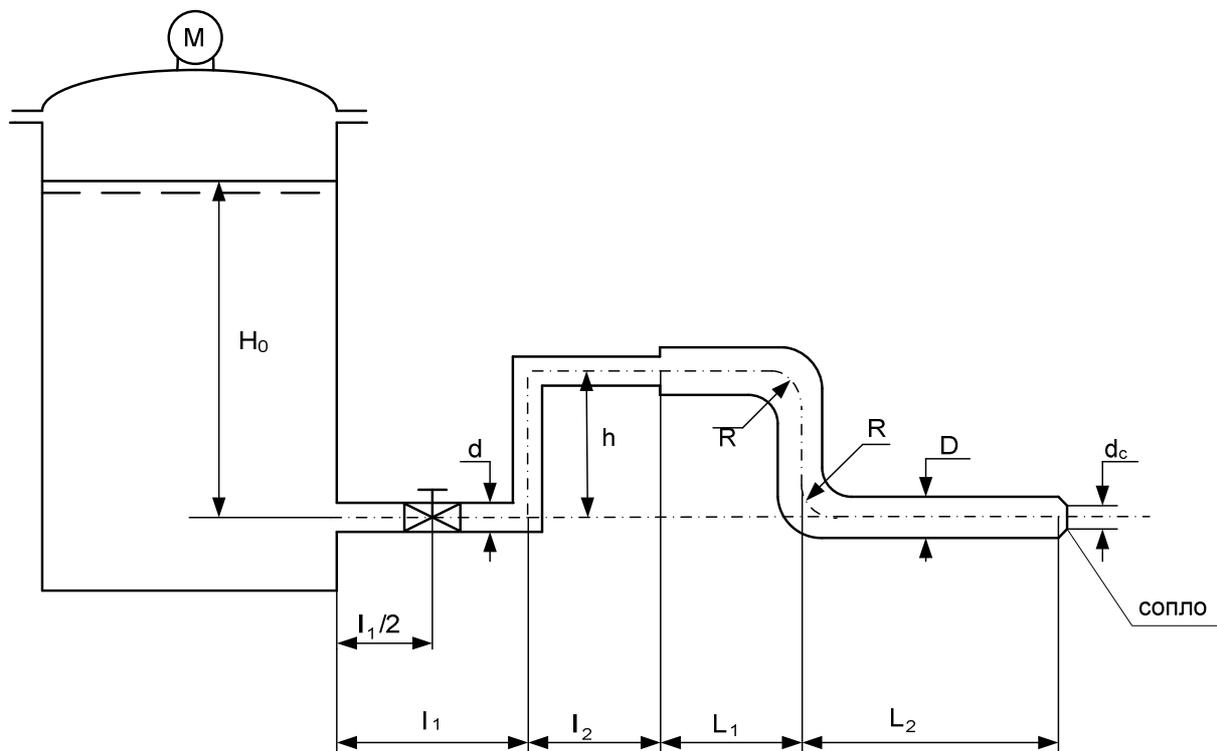
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l$	$d_c$	$R$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	град	°С	
1	5,0	10	5,0	0,20	20	6	0,10	20	0,05	0,2	120	30	20	Вода
2	4,5	12	4,5	0,18	18	6	0,10	18	0,05	0,2	110	20	20	Бен- зин
3	4,0	10	3,0	0,15	12	4	0,10	15	0,05	0,15	135	45	15	Вода
4	4,5	8	3,5	0,20	16	4	0,15	20	0,06	0,2	120	30	20	Керо- син
5	3,5	12	4,0	0,20	20	5	0,18	25	0,06	0,2	110	20	30	Вода
6	4,0	10	4,5	0,18	18	6	0,12	20	0,06	0,1	120	30	25	Вода
7	4,4	6	4,0	0,20	25	4	0,14	25	0,06	0,2	120	30	15	Бен- зин
8	4,5	8	3,5	0,20	30	4	0,12	28	0,05	0,2	110	20	18	Вода
9	4,2	10	3,0	0,16	25	3	0,12	30	0,05	0,2	135	45	10	Вода
10	4,0	12	2,5	0,16	24	3	0,10	25	0,05	0,2	120	30	16	Вода



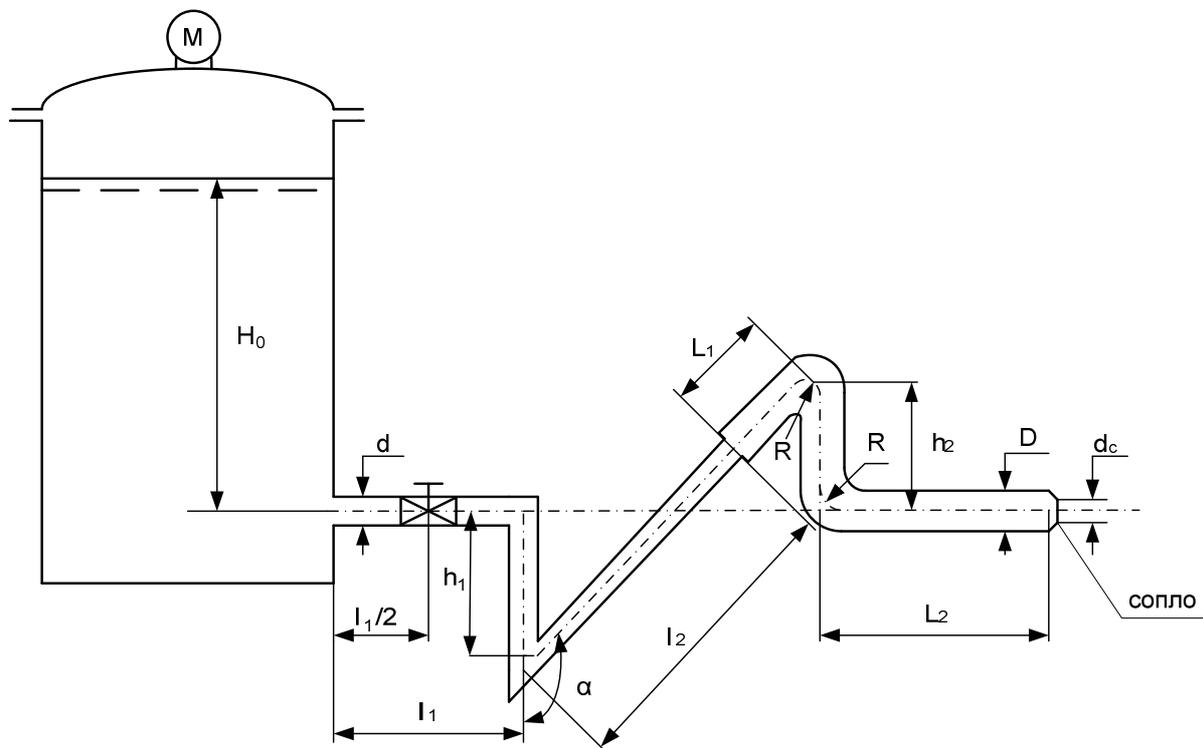
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L$	$d_c$	$R$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	град	°С	
1	3,0	5,0	3,0	0,10	12	5,0	0,20	20	0,08	0,10	120	30	20	Вода
2	3,5	4,0	3,0	0,10	10	4,0	0,15	18	0,06	0,10	120	30	20	Керо- син
3	4,0	4,5	3,5	0,12	8	4,0	0,20	25	0,08	0,10	135	45	30	Вода
4	3,0	4,0	2,5	0,15	12	3,0	0,20	20	0,08	0,15	135	45	20	Бен- зин
5	3,5	5,0	3,0	0,10	14	4,0	0,18	15	0,06	0,10	110	20	15	Вода
6	3,0	4,5	3,5	0,12	12	3,0	0,18	18	0,06	0,20	120	30	20	Керо- син
7	4,0	4,0	2,5	0,10	10	3,0	0,16	20	0,06	0,15	110	20	15	Бен- зин
8	4,4	4,0	2,8	0,12	15	2,5	0,16	22	0,06	0,15	135	45	25	Вода
9	4,5	4,5	3,0	0,11	18	3,0	0,20	25	0,08	0,20	120	30	16	Вода
10	4,2	5,0	3,2	0,11	16	3,5	0,16	18	0,08	0,15	110	20	18	Вода



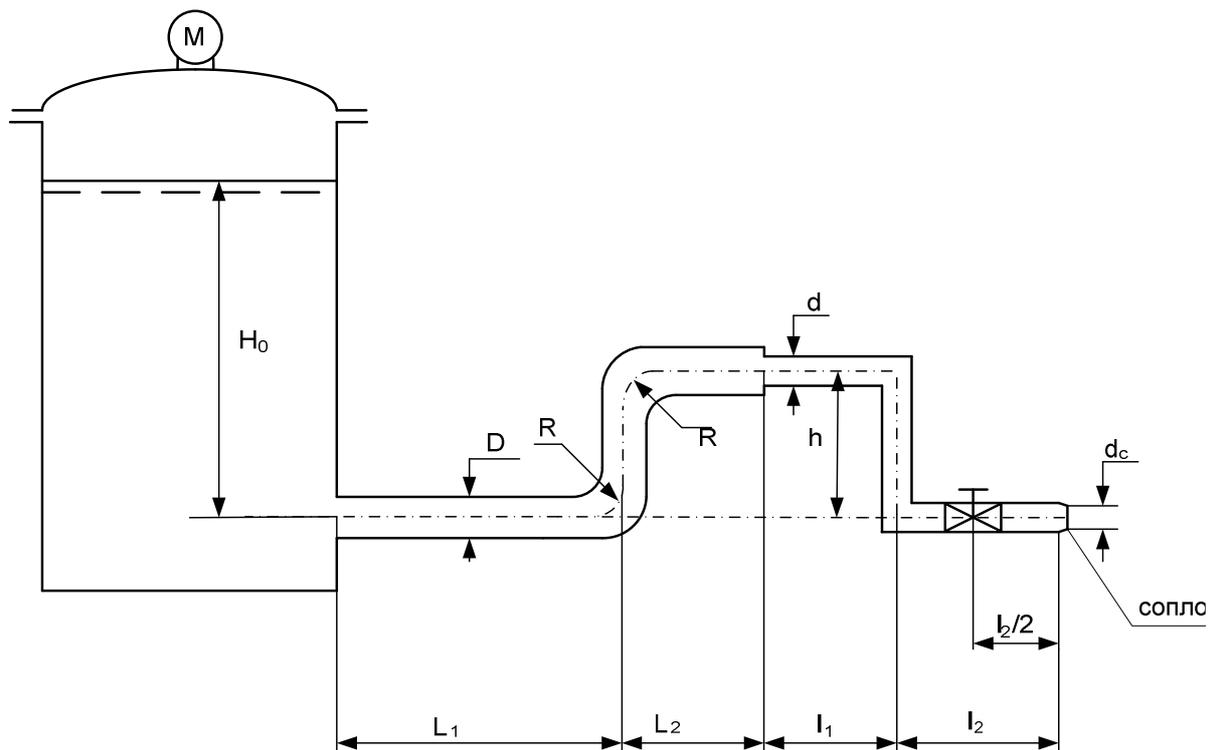
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l$	$d_c$	$R$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	град	°С	
1	3,5	5,0	3,0	0,2	12	5,0	0,10	20	0,05	0,1	120	30	20	Вода
2	3,0	4,5	2,5	0,2	14	4,0	0,15	25	0,05	0,15	110	20	15	Бен- зин
3	3,0	5,0	3,5	0,15	18	5,0	0,10	20	0,05	0,1	110	20	15	Вода
4	3,5	4,0	3,0	0,18	16	4,0	0,10	18	0,05	0,1	135	45	15	Керо- син
5	4,0	4,5	3,0	0,2	20	4,0	0,12	15	0,05	0,1	135	45	30	Вода
6	3,5	4,5	2,5	0,18	18	3,0	0,12	19	0,05	0,1	120	30	25	Вода
7	4,2	5,0	3,0	0,2	16	4,0	0,11	20	0,05	0,2	120	30	20	Бен- зин
8	4,5	5,0	3,0	0,2	15	3,5	0,14	22	0,05	0,2	135	45	10	Бен- зин
9	4,0	4,5	2,8	0,16	10	3,0	0,10	24	0,05	0,2	110	20	16	Вода
10	3,7	4,8	2,5	0,16	14	3,2	0,20	18	0,05	0,15	120	30	20	Керо- син



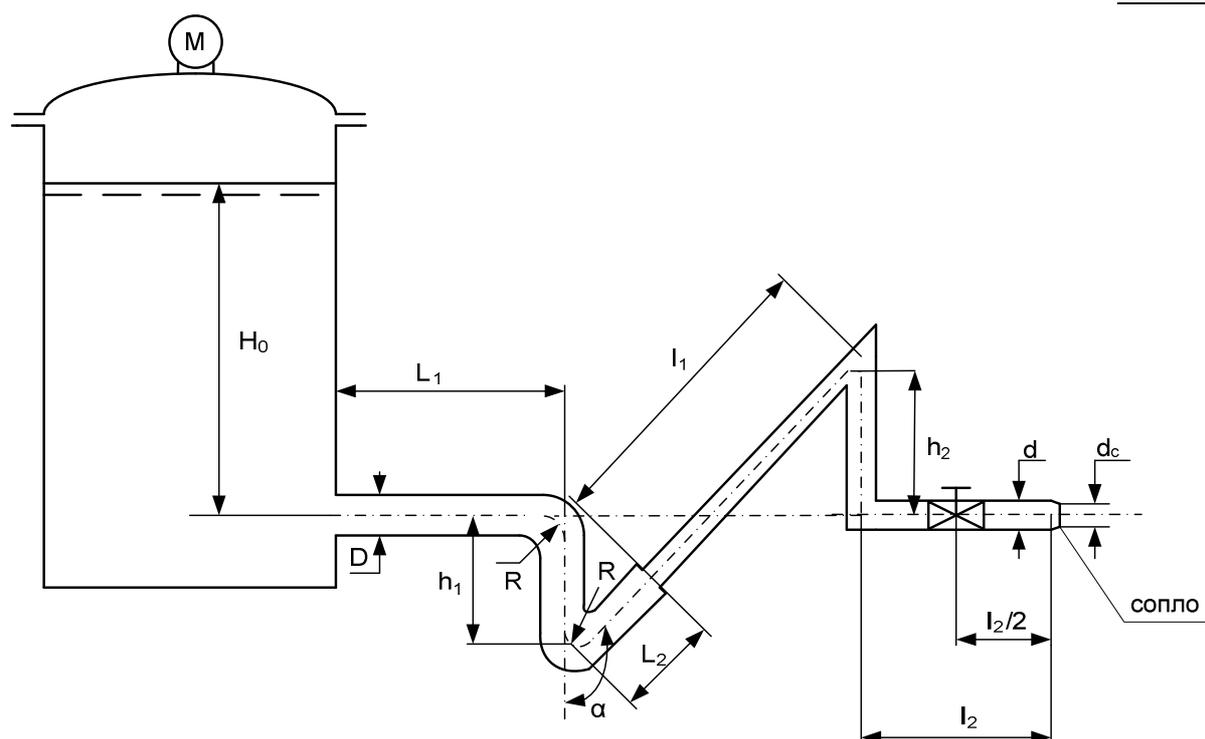
№	$P_M$	$H_0$	$h$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d_c$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
1	4,0	6,0	3,0	0,10	10	6	0,20	20	20	0,08	0,2	20	Вода
2	4,2	5,0	3,5	0,10	12	8	0,15	15	20	0,06	0,15	15	Вода
3	4,5	5,5	3,0	0,12	10	10	0,18	20	15	0,06	0,2	20	Бензин
4	4,3	5,2	3,5	0,15	8	10	0,20	15	18	0,08	0,2	20	Керосин
5	3,8	4,8	2,5	0,10	14	8	0,18	20	18	0,08	0,2	10	Вода
6	4,6	5,0	3,2	0,12	15	10	0,20	18	25	0,08	0,2	15	Керосин
7	4,8	5,5	3,0	0,10	14	14	0,16	16	16	0,08	0,2	25	Вода
8	5,0	5,2	3,5	0,11	12	20	0,15	25	10	0,08	0,15	15	Бензин
9	4,5	4,5	3,2	0,12	20	10	0,18	22	20	0,08	0,2	10	Керосин
10	4,0	5,0	2,5	0,11	18	8	0,17	16	14	0,08	0,2	30	Вода



№	$P_M$	$H_0$	$h_1$	$h_2$	$d$	$l_1$	$l_2$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d_c$	$\alpha$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	м	°С	
1	4,0	4,0	2,0	3,0	0,10	10	3,5	0,20	7,5	7,5	0,08	120	0,2	20	Вода
2	4,2	3,5	1,6	2,4	0,10	8	3,0	0,15	5,0	6,0	0,06	120	0,15	20	Бензин
3	4,5	4,2	2,0	2,0	0,12	10	3,0	0,20	2,66	10,0	0,08	135	0,2	20	Керо- син
4	3,5	4,5	3,0	3,0	0,12	9	4,0	0,18	4,5	8,0	0,06	135	0,2	16	Вода
5	3,8	5,0	4,0	2,0	0,12	8	2,4	0,15	4,5	7,0	0,06	150	0,15	25	Вода
6	4,0	5,2	2,0	2,0	0,10	7	2,3	0,18	2,3	10	0,08	150	0,2	15	Керо- син
7	4,3	4,4	2,0	4,0	0,10	10	3,5	0,17	5,0	7,5	0,06	135	0,17	15	Бензин
8	3,0	4,8	3,0	3,0	0,15	12	4,0	0,20	8,0	15	0,08	120	0,2	10	Вода
9	3,4	4,6	2,5	2,0	0,11	10	5,0	0,17	4,0	10	0,06	120	0,2	30	Вода
10	3,6	4,1	1,0	3,6	0,11	9	2,3	0,20	3,0	12	0,08	150	0,2	10	Бензин



№	$P_M$	$H_0$	$h$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l_1$	$l_2$	$d_c$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
1	4,5	3,5	2,0	0,2	15	12	0,10	15	10	0,05	0,2	20	Вода
2	4,3	3,0	2,2	0,2	16	14	0,15	12	14	0,06	0,2	20	Бензин
3	4,0	3,2	2,0	0,15	20	15	0,10	10	16	0,05	0,15	15	Вода
4	3,8	4,0	2,5	0,13	18	16	0,10	16	8	0,05	0,2	25	Вода
5	4,0	4,4	3,0	0,18	20	20	0,12	18	12	0,05	0,15	20	Керосин
6	4,4	8,0	2,6	0,18	25	12	0,14	12	14	0,06	0,15	15	Бензин
7	4,2	4,0	3,0	0,16	20	16	0,10	10	10	0,05	0,2	10	Вода
8	4,0	3,5	2,8	0,16	15	15	0,12	12	8	0,05	0,2	10	Керосин
9	3,5	4,5	3,0	0,17	20	16	0,10	11	9	0,05	0,1	16	Вода
10	4,5	4,0	2,5	0,17	18	20	0,11	10	12	0,05	0,2	30	Вода



№	$P_M$	$H_0$	$h_1$	$h_2$	$D$	$L_1$	$L_2$	$d$	$l_1$	$l_2$	$d_c$	$\alpha$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	м	°С	
1	4,5	5,0	2,0	3,0	0,2	12	3,0	0,10	7,0	10	0,06	120	0,10	20	Вода
2	4,4	4,5	3,0	2,0	0,2	16	5,0	0,15	5,0	16	0,06	120	0,15	10	Вода
3	4,0	4,8	2,6	2,0	0,2	14	2,3	0,15	3,0	15	0,06	150	0,15	20	Бензин
4	4,2	4,0	1,5	2,5	0,2	15	2,3	0,15	2,3	14	0,06	150	0,15	25	Вода
5	3,8	3,5	2,3	2,3	0,18	14	3,5	0,12	3,0	10	0,06	135	0,12	16	Вода
6	3,6	4,0	2,4	2,4	0,18	16	2,5	0,10	3,0	10	0,05	135	0,10	10	Бензин
7	3,5	3,8	1,5	1,5	0,17	12	4,0	0,20	5,0	12	0,05	120	0,20	15	Бензин
8	4,2	3,6	3,0	3,0	0,15	10	2,0	0,10	4,9	10	0,06	150	0,10	20	Керосин
9	4,3	4,4	3,0	3,0	0,16	12	6,0	0,10	6,0	8	0,06	120	0,10	15	Керосин
10	4,0	4,8	4,0	4,0	0,14	10	3,0	0,10	5,5	10	0,05	135	0,10	15	Вода

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Таблица 1

Размерности величин в различных системах измерения

Величина	СИ	Перевод в другие единицы
Длина	м	1 м = 100 см = 1000 мм
Площадь	м <sup>2</sup>	1 м <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> см <sup>2</sup> = 10 <sup>6</sup> мм <sup>2</sup>
Объём	м <sup>3</sup>	1 м <sup>3</sup> = 10 <sup>6</sup> см <sup>3</sup> = 1000 л
Масса	кг	1 кг = 1000 г
Сила, вес	Н	10 Н ≈ 1 кгс = 10 <sup>-3</sup> тс
Плотность	кг/м <sup>3</sup>	1000 кг/м <sup>3</sup> = 1 г/см <sup>3</sup>
Удельный вес	Н/м <sup>3</sup>	10 <sup>4</sup> Н/м <sup>3</sup> = 1 тс/м <sup>3</sup>
Вязкость кинематическая	м <sup>2</sup> /с	1 м <sup>2</sup> /с = 10 <sup>4</sup> см <sup>2</sup> /с
Давление	Па = Н/м <sup>2</sup>	100000 Па ≈ 1 ат = 1 кгс/см <sup>2</sup> = = 10 м вод. ст. = 760 мм рт. ст.

Таблица 2

Связь между единицами давления

Единица	Па	дин/см <sup>2</sup>	кгс/м <sup>2</sup>	кгс/см <sup>2</sup>	атм.	мм рт. ст.
1 Па	1	10	0,102	1,02	9,87·10 <sup>-6</sup>	7,5·10 <sup>-3</sup>
1 дин/см <sup>2</sup>	0,1	1	1,02	1,02·10 <sup>-6</sup>	9,87·10 <sup>-7</sup>	7,5·10 <sup>-4</sup>
1 кгс/м <sup>2</sup>	9,81	98,1	1	10 <sup>-4</sup>	9,68·10 <sup>-5</sup>	7,36·10 <sup>-2</sup>
1 кгс/см <sup>2</sup>	9,81·10 <sup>4</sup>	9,81·10 <sup>5</sup>	10 <sup>4</sup>	1	0,968	7,36·10 <sup>2</sup>
1 атм	1,01·10 <sup>5</sup>	1,01·10 <sup>6</sup>	1,03·10 <sup>4</sup>	1,03	1	7,5·10 <sup>2</sup>
1 мм рт. ст.	1,33·10 <sup>2</sup>	1,33·10 <sup>3</sup>	13,6	1,36·10 <sup>-3</sup>	1,32·10 <sup>-3</sup>	1

Таблица 3

Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры

t, °C	-30	-20	-10	0	10	20	30	40	50
p <sub>н.п.</sub> , Па	50,5	125,6	279,6	612	1179	2335	4240	7360	12320

Таблица 4

Зависимость коэффициента кинематической вязкости воды от температуры

t, °C	0	5	7	10	12
v, см <sup>2</sup> /с	0,0179	0,0152	0,0143	0,0131	0,0124
t, °C	15	17	20	25	30
v, см <sup>2</sup> /с	0,0114	0,0109	0,0101	0,009	0,008

Таблица 5

Плотность  $\rho$  воды

$t, ^\circ\text{C}$	+10	+20	+30	+40	+50
$\rho, \text{кг/м}^3$	999,73	998,23	995,67	992,24	988,07

Таблица 6

## Шероховатость труб

Характеристика поверхности труб	Материал	$\Delta$ , мм
1. Цельнотянутые трубы	из латуни	0,0015 – 0,01
	новые стальные	0,02 – 0,1
	стальные, находящиеся в эксплуатации	1,2 – 1,5
2. Цельносварные стальные трубы	новые	0,04 – 0,1
	бывшие в эксплуатации	0,1 – 0,15
3. Чугунные трубы	новые	0,25 – 1,0
	новые битумизированные	0,1 – 0,15
	бывшие в эксплуатации	1,0 – 1,5
4. Бетонные и асбестоцементные трубы	бетонные трубы при хорошей поверхности с затиркой	0,3 – 0,8
	бетонные трубы с шероховатой поверхностью	3,0 – 9,0
	новые асбестоцементные трубы	0,05 – 0,1
	асбестоцементные трубы, бывшие в эксплуатации	0,6
5. Стекланые трубы	трубы из чистого стекла	0,0015 – 0,01

Таблица 7

## Значения коэффициента при внезапном расширении трубопровода

$n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\zeta_{\text{в.р}}$	81	64	49	36	25	16	9	4	1	0

Таблица 8

Значение коэффициента  $\zeta_{\text{в.с.}}$  при внезапном сужении трубопровода

$n = \frac{\omega_2}{\omega_1}$	0,01	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\zeta_{\text{в.с.}}$	0,41	0,4	0,38	0,36	0,34	0,3	0,27	0,2	0,16	0,1	0

Таблица 9

Значения коэффициента  $\zeta_{\text{диафр}}$  диафрагмы в трубопроводе

$n_{\text{диафр}} = \frac{\omega_0}{\omega}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\zeta_{\text{диафр}}$	224	60,2	19,9	9,8	4,4	2,4	1,22

Таблица 10

Значения  $A$  и  $\zeta_{\text{кв}}$  для некоторых местных сопротивлений

Наименование сопротивлений	$A$	$\zeta_{\text{кв}}$
Пробочный кран	150	0,40
Вентиль обыкновенный	3000	4,0
Вентиль «Косва»	900	2,5
Угловой вентиль	400	0,8
Шаровой клапан	5000	45
Угольник 90°	400	1,4
Угольник 135°	600	0,4
Колено 90°	130	0,2
Тройник	150	0,3
Задвижка (полное открытие)	75	0,15
Задвижка ( $n = 0,75$ )	350	0,2
Задвижка ( $n = 0,5$ )	1300	2,0
Задвижка ( $n = 0,25$ )	3000	20
Диафрагма ( $n = 0,64$ )	70	1
Диафрагма ( $n = 0,40$ )	120	7
Диафрагма ( $n = 0,16$ )	500	70
Диафрагма ( $n = 0,05$ )	3200	800

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### БЛАНК ЗАДАНИЯ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

Министерство образования Республики Беларусь  
УО «Полоцкий государственный университет»

#### Технологический факультет

«Утверждаю»  
Заведующий кафедры  
трубопроводного транспорта  
и гидравлики \_\_\_\_\_ В. К. Липский  
«\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

#### ЗАДАНИЕ по курсовому проектированию по дисциплине «Техническая гидромеханика»

Студенту \_\_\_\_\_ группа \_\_\_\_\_ курс \_\_\_\_\_

Специальность \_\_\_\_\_

**1. Тема курсовой работы:** Гидравлический расчет простого трубопровода.

2. Срок сдачи студентом законченной курсовой работы \_\_\_\_\_

3. Исходные данные по курсовой работе:

Вариант схемы: Тип \_\_ (А,Б,В,Г,И,Л)

№ варианта	$P_m$	$H_0$	$h$	$D$	$d$	$L_1$	$L_2$	$l_1$	$l_2$	$d_c$	$R$	$t$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	м	°С	
—													

Тип \_\_ (Д,Е,Ж,З,К,М)

№ варианта	$P_m$	$H_0$	$h$	$D$	$d$	$L_1(L_2)$	$l_1(l_2)$	$d_c$	$R$	$t$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	жид- кость
	кг/см <sup>2</sup>	м	м	м	м	м	м	м	м	м	град	град	
—													

4. Содержание расчетно-пояснительной записки (перечень вопросов, которые подлежат разработке)

Схема трубопровода

Определение расхода жидкости, разбивка трубопровода на участки и определение скорости по каждому из них.

Определение потерь напора на трение на всех линейных участках.

Определение напора на местных сопротивлениях.

Проверка расчетов, построение диаграммы Бернулли.



## СОДЕРЖАНИЕ

МОДУЛЬ 0. Введение в курс «Техническая гидромеханика».....	3
1. Предмет гидравлики и гидромеханики .....	3
2. Краткий исторический обзор развития механики жидкости .....	5
3. Цель преподавания дисциплины .....	9
4. Задачи изучения дисциплины .....	9
МОДУЛЬ 1. Физические свойства жидкости .....	11
1. Введение.....	11
2. Основы научно-теоретических знаний по модулю.....	12
2.1. Вязкость жидкости. Формула Ньютона .....	12
2.2. Плотность жидкости .....	15
2.3. Сжимаемость .....	16
2.4. Поверхностное натяжение (капиллярность).....	17
2.5. Растворимость газов в капельных жидкостях .....	18
2.6. Кипение и кавитация.....	19
3. Словарь понятий.....	19
4. Материалы, используемые в процессе обучения .....	20
4.1. Материалы к лекции .....	20
4.2. Задание к практическому занятию .....	20
5. Контрольные вопросы .....	25
6. Литература .....	26
МОДУЛЬ 2. Силы, действующие в жидкости.....	27
1. Основы научно-теоретических знаний по модулю.....	27
1.1. Классификация сил, действующих в жидкости .....	27
1.2. Свойства напряжений внутренних сил, действующих в жидкости .....	30
1.3. Уравнения движения жидкости в напряжениях.....	35
2. Словарь понятий.....	37
3. Материалы, использованные в процессе обучения .....	37
4. Контрольные вопросы .....	37
5. Литература .....	38
МОДУЛЬ 3. Гидростатика жидкости.....	39
1. Введение.....	39
2. Основы научно-теоретических знаний по модулю.....	39
2.1. Дифференциальное уравнение равновесия жидкости (уравнение Эйлера) .....	39
2.2. Уравнения гидростатики и их интегрирование.....	40
2.3. Геометрическая интерпретация основного уравнения гидростатики.....	43
2.4. Закон Паскаля и его практическое приложение. Графическое изображение давления .....	45
2.5. Абсолютное и манометрическое давление. Вакуум. Приборы для измерения давления.....	47
2.6. Давление жидкости на плоские стенки.....	53
2.7. Давление жидкости на цилиндрические стенки.....	56
2.8. Закон Архимеда.....	59
3. Словарь понятий.....	60

4. Материалы, использованные в процессе обучения .....	60
4.1. Материалы к лекции .....	60
4.2. Задание к лабораторному занятию .....	61
4.3. Задание к практическому занятию .....	69
5. Контрольные вопросы .....	77
6. Литература .....	78
МОДУЛЬ 4. Кинематика жидкости.....	79
1. Введение.....	79
2. Два метода изучения движения жидкости.....	79
3. Линия тока и элементарная струйка.....	82
4. Классификация потоков жидкости.....	84
5. Уравнение неразрывности.....	86
6. Анализ движения жидкой частицы .....	90
7. Основные характеристики вихревого движения жидкости.....	91
МОДУЛЬ 5. Динамика жидкости .....	93
1. Введение.....	93
2. Основы научно-теоретических знаний по модулю.....	94
2.1. Дифференциальное уравнение движения невязкой жидкости в форме Эйлера.....	94
2.2. Интеграл Бернулли для линии тока.....	95
2.3. Уравнение Бернулли для элементарной струйки вязкой жидкости.....	98
2.4. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.....	99
2.5. Условия применения уравнения Бернулли.....	102
3. Словарь понятий.....	103
4. Материалы, используемые в процессе обучения .....	103
4.1. Материалы к лекции .....	103
4.2. Задание к практическому занятию .....	104
5. Контрольные вопросы .....	112
6. Литература .....	113
МОДУЛЬ 6. Режимы движения вязкой жидкости .....	114
1. Введение.....	114
2. Ламинарный и турбулентный режимы движения жидкости. Число Рейнольдса и его критическое значение.....	114
3. Турбулентные потоки. Осредненные скорости и напряжения. Пульсационные составляющие .....	119
4. Словарь понятий.....	128
5. Материалы, использованные в процессе обучения .....	129
5.1. Материалы к лекции .....	129
5.2. Материалы к лабораторному занятию .....	129
6. Контрольные вопросы .....	133
7. Литература .....	134
МОДУЛЬ 7. Потери напора при равномерном движении жидкости в круглой трубе .....	135
1. Классификация потерь напора.....	135
2. Касательные напряжения и их распределение при равномерном движении.....	142

3. Потери напора при равномерном движении жидкости.....	144
А. Ламинарный режим движения.....	144
3.1. Распределение местных скоростей. Расход. Средняя скорость.....	144
3.2. Коэффициент Дарси при ламинарном напорном движении в трубе.....	148
Б. Турбулентный режим движения.....	149
3.3. Логарифмический закон распределения осредненных скоростей в турбулентном потоке.....	149
3.4. Шероховатость. Гидравлически гладкие и шероховатые трубы. Толщина вязкого подслоя.....	151
3.5. Экспериментальное изучение коэффициента Дарси. График Никурадзе.....	153
4. Материалы к лабораторному занятию.....	159
5. Задания для практических занятий.....	164
6. Контрольные вопросы.....	166
7. Литература.....	167
МОДУЛЬ 8. Потери напора при неравномерном движении жидкости.....	168
1. Введение.....	168
2. Потери напора на начальных участках трубопроводов.....	169
3. Потери напора в местных сопротивлениях.....	170
4. Потери напора при внезапном расширении. Формула Борда.....	172
5. Выход из трубы. Диффузор. Внезапное сужение. Вход в трубу. Конфузоры. Поворот.....	175
6. Эквивалентная длина. Взаимное влияние местных сопротивлений.....	177
7. Зависимость Коэффициентов местных сопротивлений от числа Рейнольдса.....	179
8. Материалы к лабораторному занятию.....	181
9. Контрольные вопросы.....	186
10. Литература.....	186
МОДУЛЬ 9. Гидравлические расчеты трубопроводов при напорном движении жидкости.....	187
1. Введение.....	187
2. Расчет простого трубопровода постоянного диаметра.....	189
3. Три типа задач расчета трубопровода.....	191
4. Последовательное и параллельное соединение труб.....	196
5. Расчет трубопровода с непрерывным изменением расхода по длине.....	199
6. Сифонный трубопровод.....	201
7. Гидравлический расчет разветвленного трубопровода.....	204
8. Гидравлический удар как неустановившееся движение упругой жидкости в упругих трубопроводах.....	207
8.1. Гидравлический удар при мгновенном закрытии затвора.....	208
8.2. Скорость распространения волны гидравлического удара.....	217
8.3. Гидравлический удар при резком понижении давления (с разрывом сплошности потока).....	219
8.4. Защита от воздействия гидравлических ударов.....	220
8.5. Гидравлический таран.....	222
9. Задания для практических занятий.....	224

10. Контрольные вопросы .....	229
11. Литература .....	230
МОДУЛЬ 10. Истечение жидкости из отверстий и насадков.....	231
1. Введение.....	231
2. Истечение жидкости при постоянном напоре.....	233
2.1. Истечение через малое незатопленное отверстие с острой кромкой.....	233
2.2. Коэффициенты сжатия, скорости и расхода при истечении через незатопленное малое отверстие.....	238
2.3. Истечение через малое затопленное отверстие с острой кромкой.....	238
2.4. Истечение через насадки .....	240
2.5. Вакуум во внешнем цилиндрическом насадке.....	243
2.6. Истечение через внешний затопленный цилиндрический насадок .....	244
2.7. Истечение через нецилиндрические насадки .....	245
2.8. Сравнение гидравлических характеристик отверстий и насадков.....	247
3. Истечение жидкости при переменном напоре .....	248
3.1. Общая характеристика явления .....	248
3.2. Истечение при переменном напоре и постоянном притоке.....	249
4. Материалы к лабораторному занятию .....	254
6. Контрольные вопросы .....	262
7. Литература .....	263
Методические указания к выполнению курсовой расчетно-графической работы.....	264
Введение .....	264
1. Задание на курсовую работу.....	264
2. Основные сведения.....	264
3. Порядок выполнения курсовой работы .....	264
Словарь понятий .....	272
Литература.....	278
Приложение 1. Варианты схем .....	279
Приложение 2. Справочные данные .....	279
Приложение 3. Бланк задания на курсовую работу .....	294

*Учебное издание*

В. К. ЛИПСКИЙ  
Д. П. КОМАРОВСКИЙ

## ТЕХНИЧЕСКАЯ ГИДРОМЕХАНИКА

Учебно-методический комплекс  
для студентов специальности 1-70 05 01 «Проектирование, сооружение  
и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ»  
и слушателей ИПК УО «ПГУ» специальности  
1-70 05 71 «Проектирование и эксплуатация газопроводов»

Редактор *Ю. В. Мацук*  
Дизайн обложки *В. А. Виноградовой*

---

Подписано в печать 02.09.09. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.  
Ризография. Усл.-печ. л. 17,4. Уч.-изд. л. 16,5. Тираж 75 экз. Заказ 1411.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования «Полоцкий государственный университет»

ЛИ № 02330/0548568 от 26.06.2009      ЛП № 02330/0494256 от 27.05.2009

211440 г. Новополоцк, ул. Блохина, 29