МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.32 **DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-77-92**

ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ МОДЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ СКОРОСТЯМИ $a_1(x,t)$ И $a_2(x,t)$ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

д-р физ.-мат. наук, проф. Ф. Е. ЛОМОВЦЕВ
(Белорусский государственный университет, Минск)

Предложено новое одномерное двухскоростное линейное модельное волновое уравнение

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{tx}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)-a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t)-a_1(a_2)_x u_x(x,t)=f(x,t) \qquad (1)$$

с двумя переменными скоростями $a_{3-i}(x,t)\geq a_{3-i}^{(0)}>0,\ (x,t)\in G=]-\infty,+\infty[\times[0,+\infty[,\ a_{3-i}\in C^2(G),\ i=1,2.$ *Вычислено частное классическое решение F этого двухскоростного модельного волнового уравнения в верхней полуплоскости G. Проведена двойная проверка этого решения подстановкой F в уравнение (1) и в соответствующий канонический вид уравнения (1), из которого вычислялась функция F. Найден критерий гладкости правой части f уравнения (1) для классического решения F в верхней полуплоскости G. Обсуждается критерий гладкости на f для дважды непрерывной дифференцируемости F в первой четверти плоскости. С помощью классического решения F выведен общий интеграл уравнения (1) из множества всех его классических решений $u\in C^2(G)$, который нужен при решении задачи Коши и начально-граничных задач для уравнения (1). Эти результаты получены применением разработанного автором ранее нового «метода неявных характеристик» уравнения.*

Ключевые слова: *двухскоростное модельное волновое уравнение, переменные скорости двух волн, метод неявные характеристик, общий интеграл, классические решения, критерий гладкости.*

Введение. Односкоростное модельное волновое уравнение с переменной скоростью появилось в диссертации Барановской С. Н.[1]. Во втором разделе настоящей статьи построен общий интеграл (общее решение) классических решений двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями в верхней полуплоскости (теорема 1). Выведена явная формула частного классического решения этого модельного волнового уравнения. Вывод формулы частного классического решения уравнения основан на введенных двенадцати тождествах обращения двух неявных функций характеристик волнового уравнения и их четырёх обратных неявных функций. Правильность решения проверена его подстановкой в волновое уравнение и его канонический вид. Указан критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на правую часть двухскоростного модельного волнового уравнения с переменными скоростями для его дважды непрерывной дифференцируемости в верхней полуплоскости. Этот критерий гладкости правой части двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями в верхней полуплоскости совпадает с её критерием гладкости в задаче Коши для данного волнового уравнения.

Гладкость аналогичного частного решения односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью в первой четверти плоскости изучена в статьях [1; 2]. Пробные решения общего двухскоростного волнового уравнения с разными постоянными скоростями на первой четверти плоскости корректировались до классических решений и строились классические решения в [3]. В них же строились общие интегралы из классических решений этих волновых уравнений на первой четверти плоскости. Выводу явных классических решений и доказательству глобальных теорем корректности смешанных задач для двухскоростных волновых уравнений с разными постоянными скоростями посвящены работы Новикова Е. Н.[2] для случая нестационарных нехарактеристических первых косых производных и Точко Т. С., Устилко Е. В. [4; 5] – для нестационарных характеристических первых косых производных в граничных условиях. В статьях Лысенко В. В. и Спесивцевой К. А. [6; 7] выведены явные формулы классических решений и полные критерии корректности смешанных задач для двухскоростных волновых уравнений с разными постоянными скоростями соответственно при нестационарных нехарактеристических и характеристических

---

[1] Барановская С. Н. О классическом решении первой смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 1991. – 59 с.

[2] Новиков Е. Н. Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Минск, 2017. – 258 л.

вторых производных в граничных условиях. Глобальные теоремы корректности с явными классическими решениями первой и второй смешанных задач для односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью в первой четверти плоскости получены в [8; 9].

В третьем разделе настоящей статьи подробно обсуждаются возможности приложения результатов настоящей работы к смешанным (начально-граничным) задачам для двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями. Общий интеграл может использоваться для явного решения и вывода критериев корректности по Адамару смешанных задач для двухскоростного модельного волнового уравнения с разными переменными скоростями сначала в первой четверти плоскости. Потом методом «вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны» из [10] можно находить явные решения и критерии корректности по Адамару смешанных задач в полуполосе плоскости. Существуют белорусские работы [1–9; диссертации Барановской С. Н. и Новикова Е. Н.] с явными классическими решениями и доказательствами корректности смешанных задач для односкоростного модельного волнового уравнения с переменной скоростью и двухскоростного модельного волнового уравнения с постоянными скоростями. Отсутствуют аналогичные работы зарубежных авторов.

1. Двухскоростное модельное волновое уравнение в верхней полуплоскости. Решается одномерное двухскоростное модельное волновое уравнение в верхней полуплоскости $\dot{G} = R\times]0,+\infty[$, $R =]-\infty,+\infty[$,

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{tx}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)-a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t)-a_1(a_2)_x u_x(x,t)=f(x,t),\ (x,t)\in\dot{G}, \tag{1}$$

где его правая часть f и коэффициенты a_1, a_2 – заданные вещественные функции переменных x и t, $a_{3-i}(x,t)\ge a_{3-i}^{(0)}>0$, $(x,t)\in G=]-\infty,+\infty[\times[0,+\infty[$, $a_{3-i}\in C^2(G)$, $i=1,2$. Здесь $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на подмножестве $\Omega\subset R^2$, $R=]-\infty,+\infty[$, и $C^0(\Omega)=C(\Omega)$. Уравнению (1) соответствуют характеристические уравнения

$$dx=(-1)^i a_{3-i}(x,t)dt, i=1,2, \tag{2}$$

которые имеют общие интегралы $g_i(x,t)=C_i, C_i\in R, i=1,2.$ Если коэффициенты a_{3-i} строго положительны, т. е. $a_{3-i}x,t)\ge a_{3-i}^{(0)}>0$, $(x,t)\in G$, то переменная t на характеристиках $g_1(x,t)=C_1, C_1\in R$, строго убывает, на характеристиках $g_2(x,t)=C_2, C_2\in R$, строго возрастает вместе с ростом x. Поэтому неявные функции $y_i=g_i(x,t)=C_i, x\in R, t\ge 0$, обладают строго монотонными обратными функциями $x=h_i\{y_i,t\}, t\ge 0$, $t=h^{(i)}[x,y_i], x\in R$, $i=1,2$. По определению обратных отображений на G они удовлетворяют следующим тождествам обращения [8]:

$$g_i(h_i\{y_i,t\},t)=y_i,\quad t\ge 0,\quad h_i\{g_i(x,t),t\}=x,\quad x\in R,\quad i=1,2, \tag{3}$$

$$g_i(x,h^{(i)}[x,y_i])=y_i,\quad x\in R,\quad h^{(i)}[x,g_i(x,t)]=t,\quad t\ge 0,\quad i=1,2, \tag{4}$$

$$h_i\{y_i,h^{(i)}[x,y_i]\}=x,\quad x\in R,\quad h^{(i)}[h_i\{y_i,t\},y_i]=t,\quad t\ge 0,\quad i=1,2. \tag{5}$$

В правых частях тождеств (3)–(5) вместе с взаимообратными функциями исключаются переменные, повторяющиеся дважды в левых частях, если даже в левых частях этих тождеств повторяется дважды лишь одно из возможных значений этих переменных. Если коэффициенты $a_{3-i}(x,t)\ge a_{3-i}^{(0)}>0$, $(x,t)\in G$, $a_{3-i}\in C^2(G)$, то функции g_i, h_i, $h^{(i)}$ дважды непрерывно дифференцируемы по x, t, y_i, $i=1,2$, на G [8].

Замечание 1. В случае $a_{3-i}(x,t)=const>0$, $i=1,2$, ими являются функции: $g_1(x,t)=x+a_2t$, $g_2(x,t)=x-a_1t$, $h_1\{y_1,t\}=y_1-a_2t$, $h_2\{y_2,t\}=y_2+a_1t$, $h^{(1)}[x,y_1]=(y_1-x)/a_2$, $h^{(2)}[x,y_2]=(x-y_2)/a_1$.

Определение 1. Классическим решением уравнения (1) называется функция $u\in C^2(G)$, удовлетворяющая уравнению (1) в каждой внутренней точке $(x,t)\in\dot{G}$ множества G.

Найти в явном виде общий интеграл классических решений и критерий (необходимые и достаточные условия) гладкости правой части f нового модельного волнового уравнения (1) в верхней полуплоскости G. В будущем найденный общий интеграл классических решений потребуется нам для явного решения и вывода критериев корректности по Адамару смешанных (начально-граничных) задач для одномерного модельного волнового уравнения (1) сначала на полупрямой и потом на ограниченном отрезке.

Из определения 1 классических решений уравнения (1) следует необходимость непрерывности функции $f \in C(G)$. Ниже мы укажем и обсудим дополнительные необходимые и достаточные требования гладкости на f в верхней полуплоскости G и в первой четверти G_∞.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $(x,t) \in G =]-\infty, +\infty[\times[0, +\infty[$, $a_{3-i} \in C^2(G)$, $i = 1, 2$. *Тогда общим интегралом уравнения (1) в верхней полуплоскости* G *с критерием гладкости*

$$f \in C(G), \quad \int_0^t f(h_i\{g_i(x,t), \tau\}, \tau)\, d\tau \in C^1(G), \; i = 1, 2, \tag{6}$$

из классических (дважды непрерывно дифференцируемых на G *) решений являются функции*

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t), \; (x,t) \in G, \tag{7}$$

$$F(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)} \exp\left\{ \int_{g_1(\delta,\tau)}^{g_1(x,t)} \frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}} - a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau}) + a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2 \left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}} ds \right\} d\delta, \tag{8}$$

где $\tilde{f}_1$ *и* $\tilde{f}_2$ *– любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от* ξ *и* η *вида*

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)), \quad \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)). \tag{9}$$

Доказательство. При равных переменных коэффициентах $a_1(x,t) \equiv a_2(x,t) \equiv a(x,t)$ двухскоростное модельное волновое уравнение (1) становится односкоростным модельным волновым уравнением из работ [1; 2]. Согласно этим работам в первой четверти плоскости $G_\infty = [0, +\infty[\times[0, +\infty[$ на подмножестве G_-, где выполняется неравенство $g_2(x,t) > g_2(0,0)$, требования гладкости (6) с функциями f, a_1, a_2 под интегралом F без модуля $|\delta|$ переменной δ необходимы и достаточны для дважды непрерывной дифференцируемости решения F вида (8) неоднородного уравнения (1) с коэффициентами $a_1(x,t) \equiv a_2(x,t)$ на G_- и, следовательно, на верхней полуплоскости G в теореме 1. Аналогичному переходу от множества G_- к верхней полуплоскости G также посвящено замечание 3 статьи [3] для уравнения (1) с различными постоянными коэффициентами $a_i(x,t) = a_i^{(0)} = const$, $i = 1, 2$, которое остаётся справедливым и для различных переменных коэффициентов $a_1(x,t) \neq a_2(x,t)$ на верхней полуплоскости G.

Вывод формулы решения. Приводим уравнение (1) к каноническому виду заменой переменных

$$\xi = g_1(x,t), \quad \eta = g_2(x,t) \tag{10}$$

с невырожденным якобианом $J(x,t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \neq 0$ в G, так как $a_{3-i}(x,t) \geq a_{3-i}^{(0)} > 0$, $i = 1, 2$, в G. Сначала для новой функции $u(x,t) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) = \tilde{u}(\xi(x,t), \eta(x,t))$ вычисляем первые и вторые производные

$$u_t = \tilde{u}_\xi \xi_t + \tilde{u}_\eta \eta_t, \;\; u_x = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \; u_{tt} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_t)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_t)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{tt} + \tilde{u}_\eta \eta_{tt},$$

$$u_{tx} = \left(\tilde{u}_{\xi\xi}\xi_x + \tilde{u}_{\xi\eta}\eta_x\right)\xi_t + \left(\tilde{u}_{\eta\xi}\xi_x + \tilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\right)\eta_t + \tilde{u}_\xi \xi_{tx} + \tilde{u}_\eta \eta_{tx},$$

$$u_{xx} = \tilde{u}_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\tilde{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \tilde{u}_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + \tilde{u}_\xi \xi_{xx} + \tilde{u}_\eta \eta_{xx}. \tag{11}$$

Согласно уравнениям (2) полные дифференциалы от характеристик $g_i(x,t) = C_i, i = 1, 2,$ равны нулю

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = [(g_i)_t + (-1)^i a_{3-i}(x,t)(g_i)_x]dt \equiv 0, \quad (x,t) \in G, \;\; i = 1, 2,$$

и, следовательно, находим соотношения первых частных производных от характеристик

$$(g_i)_t = (-1)^{i+1} a_{3-i}(x,t)(g_i)_x, \quad (x,t) \in G, \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

Отсюда для новых переменных из (10) мы имеем тождества

$$\xi_t - a_2(x,t)\xi_x = 0, \quad \eta_t + a_1(x,t)\eta_x = 0, \quad (x,t) \in G. \tag{13}$$

Первое уравнение из (13) один раз дифференцируем сначала только по t и потом только по x, результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент a_1 результата дифференцирования по x, в полученной сумме применяем первое уравнение из (13) и выводим равенство

$$\xi_{tt} + (a_1 - a_2)\xi_{tx} - a_1 a_2 \xi_{xx} = (a_2)_t \xi_x + a_1 (a_2)_x \xi_x = a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t + a_1 (a_2)_x \xi_x, \quad (x,t) \in G_\infty. \tag{14}$$

Второе уравнение из (13) один раз дифференцируем сначала только по t и потом только по x, результаты дифференцирования по t складываем с произведением на коэффициент $-a_2$ результата дифференцирования по x, в полученной сумме применяем второе уравнение из (13) и выводим

$$\eta_{tt} + (a_1 - a_2)\eta_{tx} - a_1 a_2 \eta_{xx} = (a_2)_t \eta_x + a_1 (a_2)_x \eta_x = a_2^{-1}(a_2)_t \eta_t + a_1 (a_2)_x \eta_x, \quad (x,t) \in G_\infty. \tag{15}$$

Теперь частные производные из (11) подставляем в уравнение (1) и вычисляем коэффициенты при следующих частных производных:

$$\tilde{u}_{\xi\xi}: \ (\xi_t)^2 + (a_1 - a_2)\xi_t \xi_x - a_1 a_2 (\xi_x)^2 = (\xi_t + a_1 \xi_x)(\xi_t - a_2 \xi_x) = 0,$$

$$2\tilde{u}_{\xi\eta}: \ \xi_t \eta_t + (a_1 - a_2)\left(\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t\right) - a_1 a_2 \xi_x \eta_x = a_2 \xi_x \eta_t + \frac{1}{2} a_1 \left(\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t\right) - \frac{1}{2} a_2 \left(\xi_t \eta_x + \xi_x \eta_t\right) - a_1 \xi_t \eta_x =$$

$$= \frac{1}{2} a_2 \xi_x \eta_t + \frac{1}{2} a_1 \xi_x \eta_t - \frac{1}{2} a_2 \xi_t \eta_x - \frac{1}{2} a_1 \xi_t \eta_x = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\left(\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x\right) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) J(x,t),$$

$$\tilde{u}_{\eta\eta}: \ (\eta_t)^2 + (a_1 - a_2)\eta_t \eta_x - a_1 a_2 (\eta_x)^2 = (\eta_t + a_1 \eta_x)(\eta_t - a_2 \eta_x) = 0,$$

$$\tilde{u}_{\xi}: \ \xi_{tt} + (a_1 - a_2)\xi_{tx} - a_1 a_2 \xi_{xx} - a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t - a_1 (a_2)_x \xi_x =$$

$$= a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t + a_1 (a_2)_x \xi_x - a_2^{-1}(a_2)_t \xi_t - a_1 (a_2)_x \xi_x = 0,$$

$$\tilde{u}_{\eta}: \ \eta_{tt} + (a_1 - a_2)\eta_{tx} - a_1 a_2 \eta_{xx} - a_2^{-1}(a_2)_t \eta_t - a_1 (a_2)_x \eta_x =$$

$$= a_1^{-1}(a_1)_t \eta_t + a_2 (a_1)_x \eta_x - a_2^{-1}(a_2)_t \eta_t - a_1 (a_2)_x \eta_x =$$

$$= \left[a_1^{-1}(a_1)_t - a_2^{-1}(a_2)_t\right]\eta_t + \left[a_2 (a_1)_x - a_1 (a_2)_x\right]\eta_x = \left[\frac{(a_1)_t}{a_1} - \frac{(a_2)_t}{a_2}\right]\eta_t + \left[(a_1)_x a_2 - a_1 (a_2)_x\right]\eta_x =$$

$$= a_2^2 \frac{(a_1/a_2)_t}{a_1 a_2} \eta_t + a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_x \eta_x = \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)_t (g_2)_t + a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_x (g_2)_x = \left[a_2^2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_x - a_2 \left(\frac{a_1}{a_2}\right)_t\right](g_2)_x.$$

Здесь коэффициенты при вторых производных $\tilde{u}_{\xi\xi}$ и $\tilde{u}_{\eta\eta}$ обратились в ноль в силу тождеств (13). В коэффициенте при смешанной производной $\tilde{u}_{\xi\eta}$ нами также применены тождества (13). В коэффициентах при первых производных $\tilde{u}_{\xi}$ и $\tilde{u}_{\eta}$ соответственно использовались равенства (14) и (15), а при первой производной $\tilde{u}_{\eta}$ – ещё замена переменных (10) и равенство (12) при $i = 2$. Когда в уравнении (1) коэффициенты равны $a_1(x,t) = a_2(x,t)$, тогда здесь коэффициент при первой производной $\tilde{u}_{\eta}$, очевидно, тоже обращается в ноль и двухскоростное модельное волновое уравнение (1) настоящей работы становится односкоростным модельным волновым уравнением из работы [8].

В результате замены (10) уравнение (1) на G приводится к уравнению

$$(a_1+a_2)J(x,t)\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)+\left\{\left[a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t\right](g_2)_x\right\}\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ t=t(\xi,\eta)}}\tilde{u}_\eta(\xi,\eta)=\tilde{f}(\xi,\eta),\quad (\xi,\eta)\in\tilde{G},$$

с правой частью $\tilde{f}(\xi,\eta)=f(x(\xi,\eta),t(\xi,\eta))$ на образе $\tilde{G}$ первой четверти плоскости G при замене переменных (10). Уравнение (1) на G равносильно его следующему каноническому виду на $\tilde{G}$:

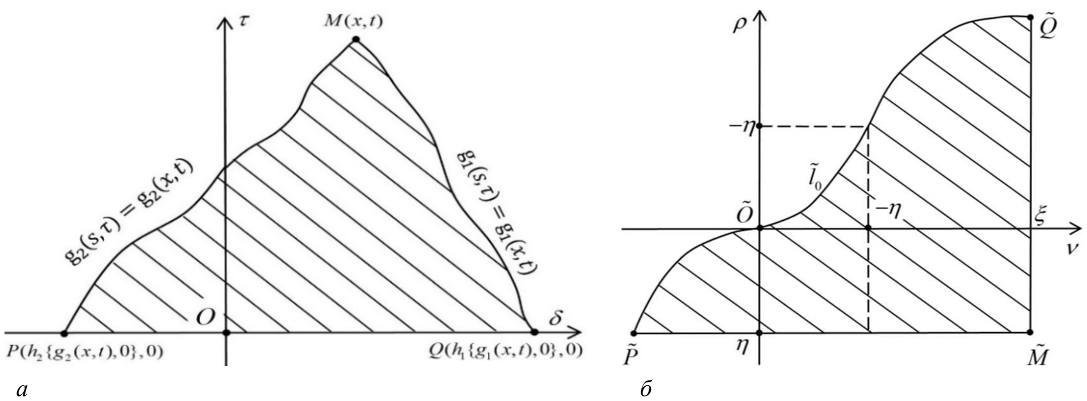
$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta)+\frac{\left[a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t\right](g_2)_x}{(a_1+a_2)J(x,t)}\Bigg|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ t=t(\xi,\eta)}}\tilde{u}_\eta(\xi,\eta)=\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)\tilde{J}(\xi,\eta)}{\tilde{a}_1(\xi,\eta)+\tilde{a}_2(\xi,\eta)},\quad (\xi,\eta)\in\tilde{G},\tag{16}$$

где якобиан обратной замены к (10) равен $\tilde{J}(\xi,\eta)=x_\xi t_\eta-x_\eta t_\xi\neq 0$ на $\tilde{G}$ и $J(x,t)\ \tilde{J}(\xi,\eta)=1$.

Для каждого фиксированного значения η находим интегрирующий множитель уравнения (16)

$$\mu(\xi)=\exp\left\{\int\limits_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi}\frac{\left[a_2^2\left(a_1/a_2\right)_\delta-a_2\left(a_1/a_2\right)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{\nu},\eta)\\ \tau=\tau(\tilde{\nu},\eta)}}d\tilde{\nu}\right\},\tag{17}$$

где подынтегральная функция берется до указанной ниже замены (18) с независимыми переменными в плоскости $O\delta\tau$ и вершиной $M(x,t)$ характеристического треугольника ΔMPQ на рисунке 1, *а*.



***а* – для функции F ; *б* – для функции $\tilde{F}$**

Рисунок 1. – Характеристические треугольники ΔMPQ и $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

В интеграле (17) нижний предел интегрирования $\nu=g_1(h_2\{\rho,0\},0)$ в плоскости $\tilde{O}\nu\rho$ является уравнением кривой $\tilde{l}_0$ криволинейного основания $\tilde{P}\tilde{Q}$ треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, *б*. Треугольник $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ представляет собой образ треугольника ΔMPQ при замене переменных, равносильной на G замене (10), т. е.

$$\nu=g_1(\delta,\tau),\quad \rho=g_2(\delta,\tau),\quad (\delta,\tau)\in G.\tag{18}$$

В интеграле (17) верхний предел интегрирования $\nu=\xi$ соответствует уравнению прямой $\tilde{M}\tilde{Q}$, т. е. уравнению стороны характеристического треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, *б*.

Умножаем уравнение (16) на интегрирующий множитель $\mu(\xi)$, для каждого фиксированного значения η интегрируем результат этого умножения по ξ, т. е. по ν, от $\nu=g_1(h_2\{\eta,0\},0)$ до $\nu=\xi$ также, как в множителе $\mu(\xi)$, и находим функцию

$$\mu(\xi)\tilde{u}_\eta(\xi,\eta)=\int\limits_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{f}(\nu,\eta)\tilde{J}(\nu,\eta)}{\tilde{a}_1(\nu,\eta)+\tilde{a}_2(\nu,\eta)}\exp\left\{\int\limits_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\nu}\frac{\left[a_2^2\left(a_1/a_2\right)_\delta-a_2\left(a_1/a_2\right)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{\nu},\eta)\\ \tau=\tau(\tilde{\nu},\eta)}}d\tilde{\nu}\right\}d\nu.\tag{19}$$

Функцию (19) делим на $\mu(\xi)$, при каждом фиксированном значении ξ интегрируем результат умножения по η, т. е. по ρ, и получаем частное решение $\tilde{F}(\xi,\eta)$ неоднородного канонического уравнения (16)

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\int\limits_{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}^{\eta}\int\limits_{g_1(h_2\{\rho,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{f}(\nu,\rho)\tilde{J}(\nu,\rho)}{\tilde{a}_1(\nu,\rho)+\tilde{a}_2(\nu,\rho)}\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{\nu}\frac{\left[a_2^2\left(a_1/a_2\right)_\delta-a_2\left(a_1/a_2\right)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{\nu},\rho)\\ \tau=\tau(\tilde{\nu},\rho)}}d\tilde{\nu}\right\}d\nu d\rho. \tag{20}$$

Во внешнем интеграле пределы интегрирования совпадают со вторыми координатами вершин $\tilde{M}(\xi,\eta)$ и $\tilde{Q}\left(\xi,g_2(h_1\{\xi,0\},0)\right)$ характеристического треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ из рисунка 1, *б*.

Если интегрируем канонической вид (16) на треугольнике $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$, то имеем общий интеграл

$$\tilde{u}(\xi,\eta)=\tilde{f}_1(\xi)+\tilde{f}_2(\eta)+\tilde{F}(\xi,\eta),\quad(\xi,\eta)\in\tilde{G}, \tag{21}$$

где частное решение $\tilde{F}(\xi,\eta)$ уравнения (16) равно двойному повторному интегралу вида (20) и $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции соответственно переменных ξ и η. Из этого общего интеграла (21) на $\tilde{G}$ обратной заменой к (10) выводим общий интеграл уравнения (1) на G

$$u(x,t)=\tilde{f}_1(g_1(x,t))+\tilde{f}_2(g_2(x,t))+F(x,t),\quad(x,t)\in G, \tag{22}$$

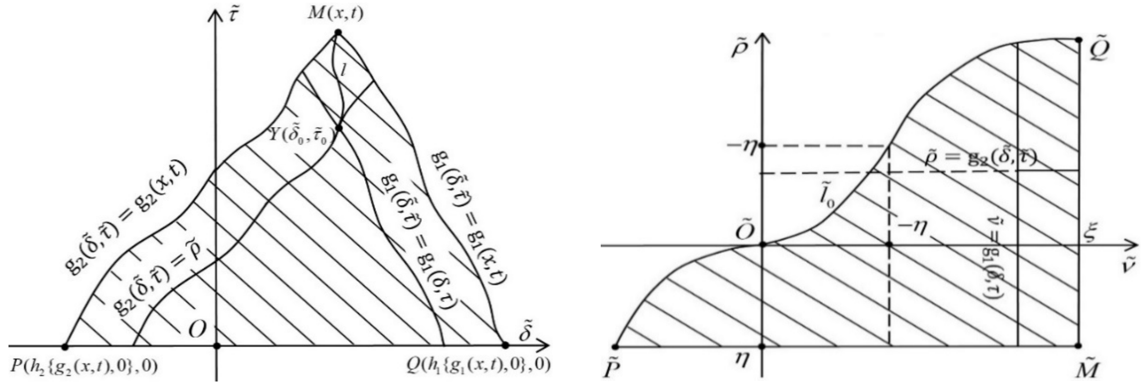
в котором частное решение $F(x,t)$ уравнения (16) равно двойному повторному интегралу (8) из теоремы 1 и $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ – любые дважды непрерывно дифференцируемые функции от ξ, η из (9). При этом благодаря формулам (12) для интеграла (8) в интеграле (20) мы воспользовались значением якобиана

$$J(\delta,\tau)=\nu_\delta\rho_\tau-\nu_\tau\rho_\delta=(g_1)_\delta(g_2)_\tau-(g_1)_\tau(g_2)_\delta=-(a_1+a_2)(g_1)_\delta(g_2)_\delta.$$

На плоскости $\tilde{O}\tilde{\nu}\tilde{\rho}$ в показателе экспоненты решения (20) для каждого фиксированного ρ берется определенный интеграл по длине ds отрезка прямой $\tilde{\rho}=\rho$ от $\tilde{\nu}=\xi$ до $\tilde{\nu}=\nu$ треугольника $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ (рисунок 2, *б*). Поэтому на плоскости $O\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ после обратной замены переменных к замене $\tilde{\nu}=g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})$, $\tilde{\rho}=g_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})$ типа (18) с волнами над всеми переменными этот интеграл становится интегралом по длине ds кривой l в треугольнике ΔMPQ, т. е. криволинейным интегралом первого типа в (8) в плоскости $O\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ (рисунок 2, *а*). Следовательно, на плоскости $O\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ в этом криволинейном интеграле первого типа подынтегральная функция определяется от точки $Y(\tilde{\delta}_0,\tilde{\tau}_0)$ до точки $Z(\tilde{\delta}_1,\tilde{\tau}_1)$ треугольника ΔMPQ из рисунка 2, *а*. Таким образом, в плоскости $O\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ для каждого фиксированного $\rho=\tilde{\rho}$ в показателе экспоненты этот криволинейный интеграл берется от меняющейся точки $Y(\tilde{\delta}_0,\tilde{\tau}_0)$ пересечения характеристики $g_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=\tilde{\rho}$ с характеристикой $g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=g_1(\delta,\tau)$ из рисунка 2, *а*, т. е. её координаты являются единственным решением системы уравнений $h_2\{\tilde{\rho},\tilde{\tau}_0\}=h_1\{g_1(\delta,\tau),\tilde{\tau}_0\}$, $\tilde{\delta}_0=h_2\{\tilde{\rho},\tilde{\tau}_0\}$ в силу строгой монотонности функций g_i,h_i, $i=1,2$, и формул обращения (3). В экспоненте формулы (8) этот криволинейный интеграл берется до точки $Z(\tilde{\delta}_1,\tilde{\tau}_1)$ пересечения характеристики $g_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=\tilde{\rho}$ при обязательном значении $\tilde{\rho}=g_2(x,t)$ с характеристикой $g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=g_1(x,t)$, которые, очевидно, пересекаются в точке $M(x,t)$. Итак, в треугольнике ΔMPQ плоскости $O\tilde{\delta}\tilde{\tau}$ у точки Z координаты

$$Z(\tilde{\delta}_1,\tilde{\tau}_1)=M(x,t)\;\Leftrightarrow\;\tilde{\delta}_1=x,\quad\tilde{\tau}_1=t. \tag{23}$$

В подынтегральной функции показателя экспоненты решения (20) мы не перешли к новым переменным (18), потому что ниже в этой подынтегральной функции мы должны делать обратную замену переменных к (18).



а *б*

***а* – для функции F ; *б* – для функции $\tilde{F}$**

Рисунок 2. – Характеристические треугольники ΔMPQ и $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$

Проверка формулы решения 1. Самой точной проверкой решений уравнения (1) является их подстановка в это же уравнение (1). Вычисляем первые частные производные от функции F вида (8)

$$F_t(x,t)=\int_0^t\left[\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\,\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\mathrm{e}^{B(x,t)}\right]d\tau-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}\right|_{\substack{\tilde{\delta}=x\\ \tilde{\tau}=t}}(g_1)_t\,d\delta,$$

$$F_x(x,t)=\int_0^t\left[\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\,\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\mathrm{e}^{B(x,t)}\right]d\tau-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}\right|_{\substack{\tilde{\delta}=x\\ \tilde{\tau}=t}}(g_1)_x\,d\delta,\ (x,t)\in G, \tag{24}$$

где показателями экспонент являются интегральные функции

$$A(x,t)\equiv\int_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(x,\,t)}\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}ds,$$

$$B(x,t)\equiv\int_{g_1(\delta,\,\tau)}^{g_1(h_2\{g_2(x,\,t),\tau\},\tau)}\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}ds,$$

так как в первых интегралах $g_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)=g_1(x,t)$ по первому тождеству обращения из (3) при $i=1$ и во вторых интегралах значение подынтегральной функции из $A(x,t)$ взято при $\tilde{\delta}_1=x,\ \tilde{\tau}_1=t$ в силу (23).

Находим вторые частные производные от функции F из (8):

$$F_{tt}(x,t)=\frac{f(x,t)}{a_1(x,t)+a_2(x,t)}a_2(x,t)-\frac{f(x,t)}{a_1(x,t)+a_2(x,t)}(-a_1(x,t))+$$

$$+\int_0^t\left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\right)_t-\left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right)_t e^{B(x,t)}\right]d\tau+\int_0^t\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}e^{B(x,t)}\times$$

$$\times\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}(g_1)_t d\tau-\int_0^t\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}e^{B(x,t)}\times$$

$$\times\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\delta}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\tau}}{\left[a_1(\tilde\delta,\tilde\tau)+a_2(\tilde\delta,\tilde\tau)\right]^2\left(g_1(\tilde\delta,\tilde\tau)\right)_{\tilde\delta}}\right|_{\substack{\tilde\delta=\tilde\delta_0\\ \tilde\tau=\tilde\tau_0}}\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial t}d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\delta}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\tau}}{\left[a_1(\tilde\delta,\tilde\tau)+a_2(\tilde\delta,\tilde\tau)\right]^2\left(g_1(\tilde\delta,\tilde\tau)\right)_{\tilde\delta}}\right|_{\substack{\tilde\delta=x\\ \tilde\tau=t}}(g_1)_t d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}e^{B(x,t)}\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_t d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}e^{A(x,t)}d\delta\left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}\left(g_1(x,t)\right)_t\right)^2-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}e^{A(x,t)}d\delta\left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}\left(g_1(x,t)\right)_t\right)_t,\quad (x,t)\in G, \tag{25}$$

$$F_{tx}(x,t)=\int_0^t\left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\right)_x-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right)_x e^{B(x,t)}\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}e^{B(x,t)}\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}(g_1)_x d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}e^{B(x,t)}\times$$

$$\times\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\delta}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde\tau}}{\left[a_1(\tilde\delta,\tilde\tau)+a_2(\tilde\delta,\tilde\tau)\right]^2\left(g_1(\tilde\delta,\tilde\tau)\right)_{\tilde\delta}}\right|_{\substack{\tilde\delta=\tilde\delta_0\\ \tilde\tau=\tilde\tau_0}}\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial x}d\tau-$$

$$-\int_0^t \frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} \left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}\right|_{\substack{\tilde{\delta}=x\\ \tilde{\tau}=t}} (g_1)_t\,d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\, \mathrm{e}^{B(x,t)} \frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_t\,d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,d\delta \left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}\right)^2 (g_1)_t(g_1)_x-$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,d\delta \left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_t\right)_x,\quad (x,t)\in G, \tag{26}$$

$$F_{xx}(x,t)=\int_0^t\left[\left(\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}\right)_x-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right)_x \mathrm{e}^{B(x,t)}\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\, \mathrm{e}^{B(x,t)} \frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}(g_1)_x\,d\tau-$$

$$-\int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\, \mathrm{e}^{B(x,t)}\times$$

$$\times\left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}\right|_{\substack{\tilde{\delta}=\tilde{\delta}_0\\ \tilde{\tau}=\tilde{\tau}_0}} \frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial x}\,d\tau-$$

$$-\int_0^t \frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} \left.\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\delta}}-a_2\left(a_1/a_2\right)_{\tilde{\tau}}}{\left[a_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})+a_2(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right]^2\left(g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\right)_{\tilde{\delta}}}\right|_{\substack{\tilde{\delta}=x\\ \tilde{\tau}=t}} (g_1)_x\,d\tau+$$

$$+\int_0^t \frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)} \frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\, \mathrm{e}^{B(x,t)} \frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_x\,d\tau+$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,d\delta \left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_x\right)^2-$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}\,\mathrm{e}^{A(x,t)}\,d\delta \left(\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1\right)_x}(g_1)_x\right)_x,\quad (x,t)\in G. \tag{27}$$

В этих вторых производных нижними индексами x и t функций и выражений обозначены их первые частные производные соответственно по переменным x и t.

Суммируем коэффициенты при подобных интегралах после подстановки первых и вторых производных (24)–(27) в (1). Коэффициент интегралов с первыми производными по x и t от $C(x,t)$ равен

$$C_t(x,t)(h_1)_t\{\bullet\}+(a_1-a_2)C_x(h_1)_t\{\bullet\}-a_1a_2C_x(h_1)_x\{\bullet\}=$$

$$=a_2C_x(x,t)(h_1)_t\{\bullet\}+(a_1-a_2)C_x(h_1)_t\{\bullet\}-a_1a_2C_x(h_1)_x\{\bullet\}=$$

$$=a_1C_x(h_1)_t\{\bullet\}-a_1a_2C_x(h_1)_x\{\bullet\}=a_1a_2C_x(h_1)_x\{\bullet\}-a_1a_2C_x(h_1)_x\{\bullet\}=0,\ \ (x,t)\in G, \tag{28}$$

где символ $\{\bullet\}=\{g_1(x,t),\tau\}$ и функция

$$C(x,t)\equiv\frac{f(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}.$$

В равенствах (28) мы применили при $i=1$ по одному из двух тождеств на G

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)+a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}\right)=\frac{\partial}{\partial g_i}\left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)+a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}\right)(g_i)_t=$$

$$=(-1)^{i+1}a_{3-i}\frac{\partial}{\partial g_i}\left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)+a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}\right)(g_i)_x=(-1)^{i+1}a_{3-i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}{a_1(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)+a_2(h_i\{\bullet\bullet\bullet\},\tau)}\right),\ i=1,2, \tag{29}$$

$$\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial t}=\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_t=(-1)^{i+1}a_{3-i}\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial g_i}(g_i)_x=(-1)^{i+1}a_{3-i}\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\bullet\}}{\partial x},\ i=1,2,\ (x,t)\in G, \tag{30}$$

где символы $\{\bullet\bullet\bullet\}=\{g_i(x,t),\tau\}$. Для вывода (29) и (30) нами использованы равенства из (12) при $i=1,2$.

Согласно (30) при $i=1$ коэффициент под интегралами от $C(x,t)$ равен

$$(h_1)_{tt}\{\bullet\}+(a_1-a_2)(h_1)_{tx}\{\bullet\}-a_1a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_1)_t\{\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}=$$

$$=(a_2)_t(h_1)_x\{\bullet\}+a_2(h_1)_{tx}\{\bullet\}+(a_1-a_2)(h_1)_{tx}\{\bullet\}-a_1a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_1)_t\{\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}=$$

$$=(a_2)_t(h_1)_x\{\bullet\}+a_1(h_1)_{tx}\{\bullet\}-a_1a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-(a_2)_t(h_1)_x\{\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}=a_1[(h_1)_{tx}\{\bullet\}-$$

$$-a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}]=a_1[(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}+a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-a_2(h_1)_{xx}\{\bullet\}-(a_2)_x(h_1)_x\{\bullet\}]=0,\ (x,t)\in G, \tag{31}$$

потому что справедливы ещё тождества

$$\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial t^2}=(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial t}\left[a_{3-i}\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x}\right]=(-1)^{i+1}\left[(a_{3-i})_t\frac{\partial h_i\{(\bullet\bullet)\}}{\partial x}+a_{3-i}\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial t\partial x}\right],\ i=1,2,\ (x,t)\in G, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x\partial t}=(-1)^{i+1}\frac{\partial}{\partial x}\left[a_{3-i}\frac{\partial h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x}\right]=(-1)^{i+1}\left[(a_{3-i})_x\frac{\partial h_i\{(\bullet\bullet)\}}{\partial x}+a_{3-i}\frac{\partial^2 h_i\{\bullet\bullet\}}{\partial x^2}\right],\ i=1,2,\ (x,t)\in G, \tag{33}$$

в которых нами использованы тождества (30) с символами $\{\bullet\bullet\}=\{g_i(x,t),\tau\}$ при $i=1,2$.

Коэффициент у интегралов с первыми производными по x и t от функции $D(x,t)$ равен

$$e^{B(x,t)}\ [D_t(x,t)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}+(a_1-a_2)D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1a_2D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=\mathrm{e}^{B(x,t)}[-a_1D_x(x,t)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}+(a_1-a_2)D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1a_2D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}]=$$

$$=\mathrm{e}^{B(x,t)}[-a_2D_x(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1a_2D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}]=\mathrm{e}^{B(x,t)}[a_1a_2D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_1a_2D_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}]=0,\ (x,t)\in G, \quad (34)$$

где символ $\{\bullet\bullet\}=\{g_2(x,t),\tau\}$ и функция

$$D(x,t)\equiv\frac{f(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{a_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)+a_2(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}.$$

В равенствах (34) мы применили при $i=2$ по одному из двух тождеств в (29) и (30).

Согласно (30) при $i=2$ коэффициент под первыми интегралами от $D(x,t)\mathrm{e}^{B(x,t)}$ в (24)–(27) равен

$$(h_2)_{tt}\{\bullet\bullet\}+(a_1-a_2)(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\}-a_1a_2(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=-(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_1(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\}+(a_1-a_2)(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\}-a_1a_2(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=-(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_2(h_2)_{tx}\{\bullet\bullet\}-a_1a_2(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=-(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_2[-(a_1)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_1(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}]-a_1a_2(h_2)_{xx}\{\bullet\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=-(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}+(a_1)_xa_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_2^{-1}(a_2)_t(h_2)_t\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=-(a_1)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}+(a_1)_xa_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}+a_2^{-1}a_1(a_2)_t(h_2)_x\{\bullet\bullet\}-a_1(a_2)_x(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=\{[(a_1)_xa_2-a_1(a_2)_x]-[(a_1)_ta_2-a_1(a_2)_t]/a_2\}(h_2)_x\{\bullet\bullet\}=$$

$$=\left[a_2^2(a_1/a_2)_x-a_2(a_1/a_2)_t\right](h_2)_x\{\bullet\bullet\},\ \ (x,t)\in G. \quad (35)$$

Вывод равенств (35) основан на тождествах (30), (32), (33) при $i=2$.

Находим коэффициент функции $D(x,t)\mathrm{e}^{B(x,t)}$ после подстановки вторых и пятых интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1)

$$E(x,t)[2(h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_t+(a_1-a_2)\big((h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x+(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t\big)-2a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x]=$$

$$=E(x,t)[(h_2)_t\{\bullet\bullet\}a_2(g_1)_x+(a_1-a_2)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x-(h_2)_x\{\bullet\bullet\}a_1(g_1)_t+$$

$$+(a_1-a_2)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t-2a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x]=$$

$$=E(x,t)[a_1(h_2)_t\{\bullet\bullet\}(g_1)_x-a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x-a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_t-a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x]=$$

$$=E(x,t)\left[-a_1\left(a_1+a_2\right)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x-a_2\left(a_1+a_2\right)(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x\right]=-E(x,t)(a_1+a_2)^2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}(g_1)_x=$$

$$=-\left[a_2^2(a_1/a_2)_x-a_2(a_1/a_2)_t\right](h_2)_x\{\bullet\bullet\},\ \ (x,t)\in G. \quad (36)$$

в котором символом $E(x,t)$ обозначена подынтегральная функция из показателя экспоненты решения (7)

$$E(x,t)=\frac{a_2^2\left(a_1/a_2\right)_x-a_2\left(a_1/a_2\right)_t}{\left[a_1(x,t)+a_2(x,t)\right]^2\left(g_1(x,t)\right)_x}.$$

Равенства (35) получены нами с помощью тождеств (12) при $i=1$ и (30) при $i=2$.

Вычисляем коэффициент функции $D(x,t)\mathrm{e}^{B(x,t)}\,E(\tilde{\tilde{\delta}}_0,\tilde{\tau}_0)$ после подстановки третьих интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1)

$$-\Big[(h_2)_t\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_t+(a_1-a_2)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x-a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x\Big]=$$

$$=a_1(h_2)_t\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x-(a_1-a_2)(h_2)_t\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x+a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x=$$

$$=a_2(h_2)_t\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x+a_1a_2(h_2)_x\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x=$$

$$=a_2\Big[-a_1(h_2)_x\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x+a_1(h_2)_x\{\bullet\bullet\}\big(g_1(h_2\{\bullet\bullet\},\tau)\big)_x\Big]=0,\ \ (x,t)\in G, \tag{37}$$

где мы воспользовались тождеством (30) при $i=2$ и его аналогом

$$\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial t}=\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial g_2}(g_2)_t=$$

$$=-a_1\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial g_2}(g_2)_x=-a_1\frac{\partial g_1(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}{\partial x},\ \ (x,t)\in G. \tag{38}$$

Доказательство тождества (38) аналогично доказательству тождества (30) при $i=2$.

Коэффициент функции $K(\delta,\tau)\mathrm{e}^{A(x,t)}\big[E(x,t)\big]^2$ после подстановки предпоследних двойных интегралов из вторых производных (25)–(27) в уравнение (1) равен

$$\big((g_1)_t\big)^2+(a_1-a_2)(g_1)_t(g_1)_x-a_1a_2\big((g_1)_x\big)^2=a_2(g_1)_t(g_1)_x+(a_1-a_2)(g_1)_t(g_1)_x-a_1a_2\big((g_1)_x\big)^2=$$

$$=a_1(g_1)_t(g_1)_x-a_1a_2\big((g_1)_x\big)^2=a_1(g_1)_x\big[(g_1)_t-a_2(g_1)_x\big]=0,\ \ (x,t)\in G, \tag{39}$$

где символом $K(\delta,\tau)$ обозначена подынтегральная функция

$$K(\delta,\tau)=\frac{f(\delta,\tau)}{a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)}.$$

Доказательство равенств (39) основано на тождестве из (12) при $i=1$.

Находим коэффициент функции $K(\delta,\tau)\mathrm{e}^{A(x,t)}$ после подстановки последних двойных интегралов из первых и вторых производных (24)–(27) в уравнение (1)

$$-E_t(x,t)(g_1)_t-E(x,t)(g_1)_{tt}-(a_1-a_2)E_x(x,t)(g_1)_t+a_1a_2E_x(x,t)(g_1)_x+a_1a_2E(x,t)(g_1)_{xx}+a_2^{-1}(a_2)_tE(x,t)(g_1)_t+$$

$$+a_1(a_2)_xE(x,t)(g_1)_x=-E_t(x,t)(g_1)_t-(a_1-a_2)E_x(x,t)(g_1)_t+a_1a_2E_x(x,t)(g_1)_x-E(x,t)(g_1)_{tt}+a_1a_2E(x,t)(g_1)_{xx}+$$

$$+a_2^{-1}(a_2)_tE(x,t)(g_1)_t+a_1(a_2)_xE(x,t)(g_1)_x=-E_{g_1}(x,t)\Big[\big((g_1)_t\big)^2+(a_1-a_2)(g_1)_t(g_1)_x-a_1a_2\big((g_1)_x\big)^2\Big]-$$

$$-E(x,t)\Big[(g_1)_{tt}+(a_1-a_2)(g_1)_{tx}-a_1a_2(g_1)_{xx}-a_2^{-1}(a_2)_t(g_1)_t-a_1(a_2)_x(g_1)_x\Big]=$$

$$-E_{g_1}(x,t)\big[a_2(g_1)_t(g_1)_x+(a_1-a_2)(g_1)_t(g_1)_x-a_1(g_1)_t(g_1)_x\big]-$$

$$-E(x,t)\left[\xi_{tt}+(a_1-a_2)\xi_{tx}-a_1a_2\xi_{xx}-a_2^{-1}(a_2)_t\xi_t-a_1(a_2)_x\xi_x\right]=$$

$$=-E(x,t)\left[a_2^{-1}(a_2)_t\xi_t+a_1(a_2)_x\xi_x-a_2^{-1}(a_2)_t\xi_t-a_1(a_2)_x\xi_x\right]=0,\ (x,t)\in G, \tag{40}$$

на основании тождеств (12) при $i=1$, (14), $E_t(x,t)=E_{g_1}(x,t)(g_1)_t$, $E_x(x,t)=E_{g_1}(x,t)(g_1)_x$, так как подынтегральная функция $E(x,t)$ интеграла по длине ds характеристики $g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=g_1(x,t)$ из показателя экспоненты решения (7) фактически также представима в виде $E(x,t)=E(\tilde{\delta},\tilde{\tau})\big|_{g_1(\tilde{\delta},\tilde{\tau})=g_1(x,t)}$.

На основании равенств (28), (31), (34)–(37), (39), (40) заключаем, что в результате подстановки частных производных $F_t, F_x, F_{tt}, F_{tx}, F_{xx}$ из (24)–(27) в уравнение (1) получаем его правую часть $f(x,t)$ для всех $(x,t)\in G$, т. е. функция F вида (8) является классическим решением уравнения (1) на G.

Проверка формулы решения 2. Выше нами показано, что действительно функция F из (8) удовлетворяет уравнению (1) на G. Это, в частности, указывает на справедливость канонического вида (16) на $\tilde{G}$ и его решения $\tilde{F}$ вида (20), из которого нами найдено решение F вида (8) обратной заменой к (10). Поэтому, как правило, проверку формулы решения F из (8) уравнения (1) можно реализовать проще: подстановкой $\tilde{F}$ из (20) в уравнение (16). Канонические виды уравнений обычно содержат меньше слагаемых.

Берём от функции $\tilde{F}$ вида (20) сначала первую частную производную по η

$$\tilde{F}_\eta(\xi,\eta)=\int\limits_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{f}(\nu,\eta)\tilde{J}(\nu,\eta)}{\tilde{a}_1(\nu,\eta)+\tilde{a}_2(\nu,\eta)}\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{\nu}\frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_\delta-a_2(a_1/a_2)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}d\tilde{\nu}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{\nu},\eta)\\ \tau=\tau(\tilde{\nu},\eta)}}\right\}d\nu \tag{41}$$

и затем ещё первую частную производную по ξ

$$\tilde{F}_{\xi\eta}(\xi,\eta)=\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)\tilde{J}(\xi,\eta)}{\tilde{a}_1(\xi,\eta)+\tilde{a}_2(\xi,\eta)}-\frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_\delta-a_2(a_1/a_2)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\xi,\eta)\\ \tau=\tau(\xi,\eta)}}\times$$

$$\times\int\limits_{g_1(h_2\{\eta,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{f}(\nu,\eta)\tilde{J}(\nu,\eta)}{\tilde{a}_1(\nu,\eta)+\tilde{a}_2(\nu,\eta)}\exp\left\{\int\limits_{\xi}^{\nu}\frac{\left[a_2^2(a_1/a_2)_\delta-a_2(a_1/a_2)_\tau\right](g_2)_\delta}{\left(a_1(\delta,\tau)+a_2(\delta,\tau)\right)J(\delta,\tau)}\Bigg|_{\substack{\delta=\delta(\tilde{\nu},\eta)\\ \tau=\tau(\tilde{\nu},\eta)}}d\tilde{\nu}\right\}d\nu. \tag{42}$$

Подстановка производных (41), (42) в канонический вид (16) указывает на то, что $\tilde{F}$ из (20) удовлетворяет уравнению (16) на $\tilde{G}$. Отсюда вытекает правильность нашего краткого вывода частного решения (8) уравнения (1) из частного решения (20) уравнения (16). Если бы канонический вид (16) и, следовательно, решение (20) оказались ложными, то решение (8) тоже было бы ложным. Теорема 1 строго доказана.

Замечание 2. Ясно, что функции $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ и f_1, f_2 дважды непрерывно дифференцируемы одновременно в общем интеграле (7) уравнения (1) на G. Решения (8) однородного уравнения (1) при $f=0$ получены «методом погружения в решения с фиксированными значениями» из [6]. После подстановки функций (9) в общий интеграл (7) постоянная $f_2(g_2(0,0))$ конечно сокращается, но значение $\tilde{f}_2(g_2(0,0))=0$ в (9) существенно упрощает вычисления решений систем дифференциальных уравнений при нахождении классических решений смешанных задач для уравнений в частных производных методом характеристик [11].

Следствие 1. *Если правая часть f уравнений (1) зависит только от x или t, то утверждение теоремы 1 верно без интегральных требований гладкости из (6).*

В случае зависимости правой части уравнений (1) только от x или только от t необходимо и достаточно непрерывности правой части $f\in C(G)$ уравнения (1) [1–9; диссертация Новикова Е. Н.].

Следствие 2. *Указанная в требованиях гладкости (6) теоремы 1 принадлежность интегралов от непрерывной функции $f\in C(G)$ множеству $C^1(G)$ эквивалентна их принадлежности множеству $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$. Здесь $C^{(1,0)}(G)$ или $C^{(0,1)}(G)$ – соответственно множества непрерывно дифференцируемых по x или t и непрерывных по t или x функций в верхней полуплоскости G [1; 2].*

Замечание 3. Вместо уравнений $dx = (-1)^i a_{3-i}(x,t)dt, i = 1, 2,$ из (2) лучше было бы взять характеристические уравнения $dx = (-1)^i a_i(x,t)dt,\ i = 1, 2.$ В статье [8] взяты характеристические уравнения (2) только ради того, чтобы на G_- криволинейная формула Даламбера совпала с формулой Даламбера из диссертации Барановской С. Н.

2. Двухскоростное модельное волновое уравнение в первой четверти плоскости. В предыдущем разделе вывод общего решения двухскоростного модельного волнового уравнения в верхней полуплоскости соответствует его выводу на подмножестве G_- с неравенством $g_2(x,t) > g_2(0,0)$ из первой четверти плоскости $G_\infty = [0,+\infty[\times[0,+\infty[$.

В будущих решениях методом неявных характеристик смешанных (начально-граничных) задач для уравнения (1) на первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ в общем интеграле (7) на подмножестве $G_+ \subset G_\infty$, где выполняется обратное неравенство $g_2(x,t) \le g_2(0,0)$, под интегралом F переменную δ функций f, a_1, a_2 надо брать с модулем $|\delta|$, так как в смешанных задачах на первой четверти плоскости G_∞ функции f, a_1, a_2 заданы только для неотрицательных $x \ge 0$.

Кроме того, из статьи [3] известно, что при различных постоянных коэффициентах $a_1^{(0)} \ne a_2^{(0)}$, где $a_i(x,t) = a_i^{(0)} = const,\ i = 1, 2,$ в уравнении (1) для только непрерывных правых частей $f \in C(G_\infty)$, которые зависят одновременно от x и t, функция F из (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ функции f не является дважды непрерывно дифференцируемой на G_+. Поэтому в случае различных постоянных коэффициентов $a_1^{(0)} \ne a_2^{(0)}$ в уравнении (1) и не более гладких, зависящих от x и t правых частей, чем $f \in C(G_\infty)$, эта функция F из (8) вида

$$F(x,t) = \frac{1}{a_1^{(0)} + a_2^{(0)}} \int_0^t d\tau \int_{x-a_1^{(0)}(t-\tau)}^{x+a_2^{(0)}(t-\tau)} f(|\delta|,\tau)\, d\delta \tag{43}$$

требует корректировки на подмножестве G_+ первой четверти плоскости G_∞. Методом корректировки в [3 и др.] пробное обобщённое решение F вида (43) при $a_1^{(0)} \ne a_2^{(0)}$ неоднородного уравнения (1) корректируется соответствующими его обобщенными решениями до классических решений на подмножестве G_+. Более того, в теореме 3 работы [3 и др.] корректируются также классические решения (43) на G_- другими классическими решениями на G_- для того, чтобы потом из полученных скорректированных классических решений на G_+ и G_- на всей первой четверти плоскости G_∞ для уравнения (1) строить общие интегралы классических решений, которые дважды непрерывно дифференцируемы ещё и на критической характеристике $x = a_1^{(0)}t.$ При переменных коэффициентах $a_1(x,t),\ a_2(x,t)$ в (1) критическая характеристика имеет уравнение $g_2(x,t) = g_2(0,0)$.

Отметим, что в статье [3] для случая постоянных коэффициентов $a_1^{(0)} \ne a_2^{(0)}$ говорится, что для более гладких правых частей и, например, $f \in C^1(G_\infty)$ эта функция F вида (43) дважды непрерывно дифференцируема в первой четверти плоскости G_∞. Обращаем внимание читателей на то, что в этой статье [3] ищутся классические решения уравнения (1) с постоянными коэффициентами $a_i(x,t) = a_i^{(0)} = const,\ i = 1, 2,$ при минимальной гладкости его правой части f в первой четверти плоскости G_∞. При минимальной достаточной (необходимой) гладкости правой части f также надо искать классические решения уравнения (1) с различными переменными коэффициентами $a_1(x,t) \ne a_2(x,t)$ в первой четверти плоскости G_∞. В уравнении (1) с разными переменными коэффициентами $a_1(x,t) \ne a_2(x,t)$ гладкость функции F из (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ функций f, a_1, a_2 подробно не изучена в первой четверти плоскости G_∞.

Замечание 4. Можно предположить, что в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ интеграл (8) с модулем $|\delta|$ переменной δ в функциях f, a_1, a_2 является классическим (дважды непрерывно дифференцируемым на G_∞) решением уравнения (1) при одном коэффициенте $a_1 \equiv a_2$ и только один раз непрерывно дифференцируемой функцией на G_+ при двух коэффициентах $a_1 \ne a_2$.

Заключение. Предложено новое одномерное двухскоростное модельное волновое уравнение (1) с переменными скоростями $a_1(x,t)$ и $a_2(x,t)$ в верхней полуплоскости G. Найдена явная формула его классического решения F вида (8). Выведен общий интеграл (7) его классических (дважды непрерывно дифференцируемых) решений $u \in C^2(G)$. Справедливость формулы решения F проверена его подстановкой в уравнение (1) и канонический вид (16). Указан критерий (необходимые и достаточные требования) гладкости на правую часть двухскоростного модельного волнового уравнения с переменными скоростями для его дважды непрерывной дифференцируемости в верхней полуплоскости. Эти результаты получены разработанным новым «методом неявных характеристик» волнового уравнения и их неявных обратных функций. Общий интеграл (7) будет использован нами для явного решения и вывода критериев корректности смешанных задач для двухскоростного волнового уравнения (1) с переменными скоростями только там, где нет влияния граничных условий.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ № 11, «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы», НИР 1.2.02.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lomovtsev F. E. The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line // Труды 10-го междунар. науч. семинара АМАДЕ-2021. – Минск: БГУ: ИВЦ Минфина. – 2022. – С. 43–53.
2. Ломовцев Ф. Е. Критерий гладкости частного классического решения неоднородного модельного телеграфного уравнения в первой четверти плоскости // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С, Фундам. науки. – 2022. – № 11. – С. 99–116. – DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116.
3. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробного решения общего волнового уравнения в первой четверти плоскости для минимальной гладкости его правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2017. – № 3. – С. 38–52.
4. Ломовцев Ф. Е., Точко Т. С. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при характеристических нестационарных первых косых производных на концах // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 56–75.
5. Ломовцев Ф. Е., Устилко Е. В. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения при характеристической первой косой производной в нестационарном граничном режиме для гладких решений // Весн. Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2020. – № 2(56). – С. 21–36.
6. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. В. Нехарактеристическая смешанная задача для одномерного волнового уравнения в первой четверти плоскости при нестационарных граничных вторых производных // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2019. – № 3(104). – С. 5–17.
7. Ломовцев Ф. Е., Спесивцева К. А. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения с характеристическими вторыми производными в нестационарном граничном режиме // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, вып. 3. – С. 345–357. – DOI: 10.4213/mzm13243.
8. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2021. – № 1. – С. 18–38.
9. Ломовцев Ф. Е. Вторая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами в первой четверти плоскости // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2022. – Т. 12, № 3. – С. 50–70.
10. Ломовцев Ф. Е. Метод вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2015. – Ч. 2. – С. 74–75.
11. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 2004. – 798 с.

REFERENCES

1. Lomovtsev, F. E. (2022). The Smoothness Criterion for the Classical Solution to Inhomogeneous Model Telegraph Equation at the Rate *a(x,t)* on the Half-Line. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th International Workshop AMADE-2021]* (43–53). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ.).
2. Lomovtsev, F. E. (2022). Kriterii gladkosti chastnogo klassicheskogo resheniya neodnorodnogo model'nogo telegrafnogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti [Smoothness Criterion for a Particular Classical Solution of an Inhomogeneous Model Telegraph Equation in the First Quarter of the Plane]. *Vestnik Polotskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya C, Fundamental'nye nauki [Herald of Polotsk State University. Series C. Fundamental sciences]*, (11), 99–116. DOI: 10.52928/2070-1624-2022-39-11-99-116. (In Russ., abstr. in Engl.).
3. Lomovtsev, F. E. (2017). Metod korrektirovki probnogo resheniya obshchego volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti dlya minimal'noi gladkosti ego pravoi chasti [Correction method of test solutions of the general wave equation in the first quarter of the plane for the minimum smoothness of its right-hand side]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (3), 38–52. (In Russ., abstr. in Engl.).

4. Lomovtsev, F. E., & Tochko, T. S. (2019). Smeshannaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya kolebanii ogranichennoi struny pri kharakteristicheskikh nestatsionarnykh pervykh kosykh proizvodnykh na kontsakh [Mixed problem for an inhomogeneous vibration equation of a bounded string with characteristic non-stationary first oblique derivatives at the ends]. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 9*(2), 56–75. (In Russ.).
5. Lomovtsev, F. E., & Ustilko, E. V. (2020). Smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya pri kharakteristicheskoi pervoi kosoi proizvodnoi v nestatsionarnom granichnom rezhime dlya gladkikh reshenii [A mixed problem for a one-dimensional wave equation with a characteristic first oblique derivative in a non-stationary boundary regime for smooth solutions]. *Vesnik Magileuskaga dzyarzhaunaga universiteta imya A. A. Kulyashova. Ser B. Pryrodaznauchyya navuki [Mogilev State A. Kuleshov Bulletin. Series B. Natural Sciences], 2*(56), 21–36. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Lomovtsev, F. E., & Lysenko, V. V. (2019). Nekharakteristicheskaya smeshannaya zadacha dlya odnomernogo volnovogo uravneniya v pervoi chetverti ploskosti pri nestatsionarnykh granichnykh vtorykh proizvodnykh [A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of the Vitebsk Dzyarzhaunaga University], 3*(104), 5–17. (In Russ., abstr. in Engl.).
7. Lomovtsev, F. E., & Spesivtseva, K. A. (2021). Mixed Problem for a General 1D Wave Equation with Characteristic Second Derivatives in a Nonstationary Boundary Mode. *Math Notes*, *110*(3), 329–338. DOI: 10.1134/S0001434621090030.
8. Lomovtsev, F. E. (2021). Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoi [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line]. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika. Informatika [J. of the Belarusian State University. Mathematics and informatics]*, (1), 18–38. (In Russ., abstr. in Engl.).
9. Lomovtsev, F. E. (2022). Vtoraya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami v pervoi chetverti ploskosti [The second mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients in the first quarter of the plane]. *Vesnik Hrodzenskaha Dziarzhaunaha Universiteta imia Ianki Kupaly. Seryia 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, Vylichal'naia Tekhnika i Kiravanne [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 12*(3), 50–70. (In Russ., abstr. in Engl.).
10. Lomovtsev, F. E. (2015). Metod vspomogatel'nykh smeshannykh zadach dlya poluogranichennoi struny [Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string]. In S. G. Krasovskii (Eds.), *Shestye Bogdanovskie chteniya po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam: materialy Mezhdunar. matem. konf.:* v 2 ch. Ch. 2. *[Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations: Proceedings of Intern. math. Conf. (in 2 part, Part 2)]* (74–75). Minsk: BGU. (In Russ.).
11. Tikhonov, A. N., & Samarskii, A. A. (2004). *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow: Nauka. (In Russ.).

Поступила 15.05.2023

GENERAL INTEGRAL OF THE MODEL WAVE EQUATION WITH VARIABLE RATES $a_1(x,t)$ AND $a_2(x,t)$ IN THE UPPER HALF-PLANE

F. LOMOVTSEV
(Belarusian State University, Minsk)

A new one-dimensional two-rate linear model wave equation

$$u_{tt}(x,t)+(a_1-a_2)u_{tx}(x,t)-a_1a_2u_{xx}(x,t)-a_2^{-1}(a_2)_t u_t(x,t)-a_1(a_2)_x u_x(x,t)=f(x,t) \quad (1)$$

is proposed with two variable rates $a_{3-i}(x,t)\geq a_{3-i}^{(0)}>0$, $(x,t)\in G=]-\infty,+\infty[\times[0,+\infty[$, $a_{3-i}\in C^2(G)$, $i=1,2$. *A particular classical solution* F *of this two-rate model wave equation in the upper half-plane* G *is calculated. A double verification of this solution is made by substituting* F *into equation (1) and into the corresponding canonical form of equation (1), from which the function* F *was calculated. A smoothness criterion for the right-hand side* f *of Eq. (1) for the classical solution* F *in the upper half-plane* G *is found. A smoothness criterion on* f *for twice continuous differentiability* F *in the first quarter of the plane is discussed. With the help of the classical solution* F, *the general integral of equation (1) is derived from the set of all its classical solutions* $u\in C^2(G)$, *which is needed in solving the Cauchy problem and initial-boundary problems for equation (1). These results are obtained by applying the new "implicit characteristic method" of the equation developed earlier by the author.*

Keywords: *two-rate model wave equation, two-wave rate variables, implicit characteristic method, general integral, classical solutions, smoothness criterion.*