УДК 517.983 **DOI 10.52928/2070-1624-2023-41-2-93-103**

ДВУМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

д-р физ.-мат. наук, доц. С. М. СИТНИК
(Белгородский государственный национальный исследовательский университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК, М. В. ПАПКОВИЧ
(Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой)

Изучено двумерное интегральное H*-преобразование в пространствах интегрируемых функций* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$*. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора такого преобразования из одних пространств* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемого преобразования. Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования.*

Ключевые слова: *двумерное интегральное* H*-преобразование, пространство интегрируемых функций, специальные функции в ядрах, двумерное преобразование Меллина, дробные интегралы и производные.*

Введение. Рассматривается интегральное преобразование [1, формула (43)]

$$\left(\mathrm{H} f\right)(\mathrm{x})=\int_0^\infty \mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\mathrm{x\,t}\left|\begin{smallmatrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,q}\end{smallmatrix}\right.\right]f(\mathrm{t})d\,\mathrm{t}\ \ (\mathrm{x}>0), \tag{1}$$

где (см., например, [1; 2; 3, §28.4; 4, гл. 1; 5; 6]) $\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R^2$; $\mathrm{t}=(t_1,t_2)\in R^2$ – векторы; $\mathrm{x}\cdot\mathrm{t}=\sum_{k=1}^{2}x_kt_k$ – их скалярное произведение, в частности, $\mathrm{x}\cdot 1=\sum_{k=1}^{2}x_k$ для $1=(1,1)$; $\mathrm{x}>\mathrm{t}$ означает $x_1>t_1$, $x_2>t_2$ и аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int_0^\infty:=\int_0^\infty\int_0^\infty$; $N=\{1,2,...\}$ – множество натуральных чисел, $N_0=N\cup\{0\}$, $N_0^2=N_0\times N_0$; $k=(k_1,k_2)\in N_0^2$, где $k_1\in N_0$, $k_2\in N_0$, – мультииндекс, $k!=k_1!k_2!$ и $|k|=k_1+k_2$; $R_+^2=R_+^1\times R_+^1=\{\mathrm{x}\in R^2,\mathrm{x}>0\}$; для $l=(l_1,l_2)\in R_+^2$ $D^k=\dfrac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}(\partial x_2)^{l_2}}$; $\mathrm{d\,t}=d\,t_1\cdot d\,t_2$; $\mathrm{t}^l=t^{l_1}\cdot t^{l_2}$; $f(\mathbf{t})=(t_1,t_2)$; $z=(z_1,z_2)$ $(z_j\in C, j=1,2)$; $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2)$ $(\lambda_j\in C, j=1,2)$; $\overline{h}=(h_1,h_2)$, $(h_i\in R\setminus\{0\}, i=1,2)$; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\,x}}=\dfrac{d}{dx_1dx_2}$; $\mathrm{m}=(m_1,m_2)\in N_0^2$ и $m_1=m_2$; $\mathrm{n}=(n_1,n_2)\in N_0^2$ и $n_1=n_2$; $\mathrm{p}=(p_1,p_2)\in N_0^2$ и $p_1=p_2$; $\mathrm{q}=(q_1,q_2)\in N_0^2$ и $q_1=q_2$ $(0\leq\mathrm{m}\leq\mathrm{q}, 0\leq\mathrm{n}\leq\mathrm{p})$; $\mathbf{a}_i=(a_{i_1},a_{i_2})$, $1\leq i\leq\mathrm{p}$, $a_{i_1},a_{i_2}\in C$ $(1\leq i_1\leq p_1, 1\leq i_2\leq p_2)$; $\mathbf{b}_j=(b_{j_1},b_{j_2})$, $1\leq j\leq\mathrm{q}$, $\mathrm{b}_{j_1},\mathrm{b}_{j_2}\in C$ $(1\leq j_1\leq q_1, 1\leq j_2\leq q_2)$; $\overline{\alpha}_i=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2})$, $1\leq i\leq\mathrm{p}$, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}\in R_+^1$ $(1\leq i_1\leq p_1, 1\leq i_2\leq p_2)$; $\overline{\beta}_i=(\beta_{j_1},\beta_{j_2})$, $1\leq j\leq\mathrm{q}$, $\beta_{j_1},\beta_{j_2}\in R_+^1$ $(1\leq j_1\leq q_1, 1\leq j_2\leq q_2)$.

Функция $\mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]$ в ядре (1) представляет собой произведение *H*-функций $\mathrm{H}^{m,n}_{p,q}[z]$:

$$\mathrm{H}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}\left[\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}}\left|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right.\right]=\prod_{k=1}^{2}\mathrm{H}^{m_k,n_k}_{p_k,q_k}\left[\frac{x_k}{t_k}\left|\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right.\right]. \tag{2}$$

Для целых неотрицательных m, n, p, q $(0 \le m \le q, 0 \le n \le p)$, комплексных $a_i, b_j \in C$ и положительных α_i, β_j $(1 \le i \le p, 1 \le j \le q)$ H-функция $H_{p,q}^{m,n}[z]$ определяется интегралом Меллина – Барнса:

$$H_{p,q}^{m,n}[z] = H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds,\ z \ne 0, \tag{3}$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}\left[\begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right| s \Bigg] = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_j s)\prod_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_i s)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_j s)}. \tag{4}$$

Пустые произведения в (4), если таковые имеются, считаются равными единице, а полюса

$$b_{jl} = \frac{-b_j - l}{\beta_j},\ j = 1, 2, ..., m;\ l = 0, 1, 2, ..., \tag{5}$$

гамма-функций $\Gamma(b_j + \beta_j s)$ и полюса

$$a_{ik} = \frac{1 - a_i + k}{\alpha_i},\ i = 1, 2, ..., n;\ k = 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

гамма-функций $\Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)$ не совпадают:

$$\alpha_i(b_j + l) \ne \beta_j(a_i - k - 1),\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., m;\ k, l = 0, 1, 2, ...$$

В (3) L – специально выбранный бесконечный контур, оставляющий полюса b_{jl} в (5) слева, а полюса a_{ik} в (6) – справа от контура L.

Отметим, что большинство элементарных и специальных функций являются частными случаями H-функции (3). Более подробно с H-функцией и ее свойствами можно ознакомиться, например, в книгах [7, гл. 2; 8, гл. 1; 9, §8.3; 10, гл. 1, 2].

Настоящая работа посвящена изучению Н-преобразования (1) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ $(\nu_1 = \nu_2)$, $\overline{2} = (2,2)$, интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ на R_+^2, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}} < \infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}} = \left\{ \int_{R_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot 2-1}\left[\int_{R_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot 2-1}\left|f(x_1,x_2)\right|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

На основании полученных в [2] результатов в работе построена $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория двумерного интегрального Н-преобразования (1).

Результаты исследования обобщают полученные ранее для соответствующего одномерного преобразования [10, гл. 3]

$$(\mathrm{H} f)(x) = \int_0^\infty H_{p,q}^{m,n}\left[xt \left| \begin{matrix} (a_i,\alpha_i)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(t) dt \quad (x > 0) \tag{7}$$

в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-интегрируемых по Лебегу функций f на $\mathrm{R}_+ = (0, \infty)$ таких, что

$$\int_0^\infty \left| t^\nu f(t) \right|^2 \frac{dt}{t} < \infty \quad (\nu \in R).$$

H-преобразование обобщает многие интегральные преобразования: преобразования с G-функцией Мейера, преобразования Ханкеля и Лапласа, преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса, преобразования с функцией Бесселя и другими гипергеометрическими функциями в ядрах. Основные результаты и библиография представлены в монографии [10]. В работах [1; 12–16] были изучены интегральные преобразования типа Бушмана – Эрдейи. Следует отметить, что тематика данной работы тесно связана с теорией преобразований, изложенной в [17–21].

1. Предварительные сведения. Свойства H-функции $H^{m,n}_{p,q}\left[z\right]$ (3) зависят от следующих постоянных [10, (1.1.7)–(1.1.15)]:

$$a^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j,\quad \Delta = \sum_{j=1}^{q}\beta_j - \sum_{i=1}^{p}\alpha_i, \tag{8}$$

$$\delta = \prod_{i=1}^{p}\alpha_i^{-\alpha_i}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{\beta_j}, \tag{9}$$

$$\mu = \sum_{j=1}^{q}b_j - \sum_{i=1}^{p}a_i + \frac{p-q}{2}, \tag{10}$$

$$a_1^* = \sum_{j=1}^{m}\beta_j - \sum_{i=n+1}^{p}\alpha_i;\quad a_2^* = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i - \sum_{j=m+1}^{q}\beta_j,\quad a_1^* + a_2^* = a^*, a_1^* - a_2^* = \Delta, \tag{11}$$

$$\xi = \sum_{j=1}^{m}b_j - \sum_{j=m+1}^{q}b_j + \sum_{i=1}^{n}a_i - \sum_{i=n+1}^{p}a_i, \tag{12}$$

$$c^* = m + n - \frac{p+q}{2}. \tag{13}$$

Пустые суммы в (8), (10), (11), (12) и пустые произведения в (9), если таковые имеются, считаются равными единице и нулю соответственно.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1 [10, лемма 1.2]. Для $\sigma, t \in R$ выполняется оценка

$$\left|\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(\sigma + it)\right| \sim C\left|t\right|^{\Delta\sigma + \mathrm{Re}(\mu)}\exp^{-\pi[|t|a^* + \mathrm{Im}(\xi)sign(t)]/2}\quad (|t| \to \infty) \tag{14}$$

равномерно в σ на любом ограниченном интервале в R, где

$$C = (2\pi)^{c^*}\exp^{-c^* - \Delta\sigma - \mathrm{Re}(\mu)}\,\delta^{\sigma}\prod_{i=1}^{p}\alpha_i^{1/2 - \mathrm{Re}(a_i)}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{\mathrm{Re}(b_j) - 1/2}, \tag{15}$$

ξ дается в (12).

Теорема 1 [10, теорема 3.4]. Пусть $\alpha < \gamma < \beta$ и выполняется одно из условий: $a^* > 0$ или $\Delta\gamma + \mathrm{Re}(\mu) < -1$. Тогда для $x > 0$, кроме $x = \delta$, когда $a^* = 0$ и $\Delta = 0$, выполняется равенство

$$H^{m,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right|t\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right]x^{-t}dt \tag{16}$$

и справедлива оценка

$$\left|H^{m,n}_{p,q}\left[x\left|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right.\right]\right| \le A_\gamma x^{-\gamma}, \tag{17}$$

где A_γ – положительная постоянная, зависящая только от γ.

Обозначим через $[X,Y]$ множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y. Через $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$, $\overline{r}=(r_1,r_2)\in R^2$, $1<\overline{r}<\infty$, обозначим весовое пространство интегрируемых функций $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2)$ на R_+^2, для которых $\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}}<\infty$, где

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}}=\left\{\int_{R_+^1} x_2^{\nu_2\cdot r_2-1}\left\{\int_{R_+^1} x_1^{\nu_1\cdot r_1-1}\left|f(x_1,\ldots,x_n)\right|^{r_1}dx_1\right\}^{r_2/r_1}dx_2\right\}^{1/r_2}<\infty.$$

Для функции $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2)\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in \mathrm{R}^2,\ \nu_1=\nu_2,\ 1\le\overline{r}\le 2)$ двумерное преобразование Меллина $(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})$ определяется равенством

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})=f^*(\mathbf{s})=\int_{R_+^2} f(\mathrm{e}^{\boldsymbol{\tau}})\mathrm{e}^{\mathbf{s}\boldsymbol{\tau}}\,d\boldsymbol{\tau},\quad \mathbf{s}=\overline{\nu}+i\,\mathrm{t};\ \overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2),\ \mathrm{t}=(\mathrm{t}_1,\mathrm{t}_2)\in\mathrm{R}^2. \tag{18}$$

Если $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}\bigcap\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{1}}$, то (18) совпадает с классическим двумерным преобразованием Меллина функции $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2)$ $(\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R_+^2)$, определяемым формулой [4, формула (1.4.42)]

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})=\int_0^\infty f(\mathrm{t})\,\mathrm{t}^{\mathrm{s}-1}\,d\,\mathrm{t},\quad \mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu},\quad \mathbf{s}=(s_1,s_2),\ s_j\in C\ (j=1,2).$$

Обратное преобразование Меллина для $\mathrm{x}=(x_1,x_2)\in R_+^2$ дается формулой [3, формула (1.4.43)]

$$(\mathfrak{M}^{-1}\mathrm{g})(\mathrm{x})=\mathfrak{M}^{-1}\left[g(\mathbf{s})\right](\mathrm{x})\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\int_{\gamma_2-i\infty}^{\gamma_2+i\infty}\mathrm{x}^{-\mathrm{s}}\,\mathrm{g}(\mathbf{s})d\mathbf{s},\ \ \gamma_j=\mathrm{Re}(s_j)\ (j=1,2).$$

Нам понадобятся следующие пространства.

Через $L_{\overline{p}}(\mathrm{R}^2)$, как обычно, обозначим пространство функций $f(\mathrm{x})=f(x_1,x_2)$, для которых

$$\|f\|_{\overline{p}}=\left\{\int_{R^2}\left|f(\mathrm{x})\right|^{\overline{p}}\,\mathrm{d\,x}\right\}^{1/\overline{p}}<\infty,\quad \overline{p}=(\mathrm{p}_1,\mathrm{p}_2),\ 1\le\overline{p}<\infty.$$

При $\overline{p}=\infty$ пространство $L_\infty(\mathrm{R}^2)$ вводится как совокупность всех измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\|_{L_\infty(R^2)}=ess\sup\left|f(\mathrm{x})\right|, \tag{19}$$

где $ess\sup\left|f(\mathrm{x})\right|$ – существенный супремум функции $\left|f(\mathrm{x})\right|$ [25].

На основании утверждения 3.1 [10] непосредственно проверяется справедливость следующих свойств преобразования Меллина (18).

Лемма 2 [2, лемма 1]. *Справедливы следующие свойства преобразования Меллина (18):*

(a) преобразование (18) есть унитарное отображение пространства $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$, *на пространство* $L_{\overline{2}}(\mathrm{R}^2)$;

(b) для $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$,

$$f(\mathrm{x})=\frac{1}{(2\pi i)^2}\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to\infty}}\int_{\nu_1-iR_1}^{\nu_1+iR_1}\int_{\nu_2-iR_2}^{\nu_2+iR_2}\left(\mathfrak{M}f\right)(\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathrm{s}}\,d\mathbf{s}, \tag{20}$$

где предел берется в топологии пространства $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ ($\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$), *и если* $F(\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=\mathrm{F}_1(\nu_1+it_1)\mathrm{F}_2(\nu_2+it_2)$, $\mathrm{F}_k(\nu_k+it_k)\in L_1(-R,R)$, $k=1,2$, *то*

$$\int_{\nu_1-iR_1}^{\nu_1+iR_1}\int_{\nu_2-iR_2}^{\nu_2+iR_2}F(\mathbf{s})d\mathbf{s}=-\int_{-R_1}^{R_1}\int_{-R_2}^{R_2}F(\overline{\nu}+\mathrm{i}\,\mathrm{t})d\,\mathrm{t};$$

(с) для функции $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и функции* $g\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$ *справедливо равенство*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})d\,\mathrm{x}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\overline{\nu}-i\infty}^{\overline{\nu}+i\infty}(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})(\mathfrak{M}\mathrm{g})(1-\mathbf{s})\,\mathrm{x}^{-\mathrm{s}}\,d\mathbf{s}. \tag{21}$$

Рассмотрим общее двумерное интегральное преобразование [2, формула (1)]

$$(\mathrm{K}\,f)(\mathrm{x})=\overline{h}\,\mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{\mathrm{h}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\mathrm{x}}\mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{\mathrm{h}}}\int_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{k}(\mathrm{x}\,\mathrm{t})f(\mathrm{t})\mathrm{d}\,\mathrm{t}\quad(\mathrm{x}>0), \tag{22}$$

где функция $\mathrm{k}(\mathrm{x}\,\mathrm{t})$ в ядре (22) есть произведение некоторых специальных функций одного типа [2]

$$\mathrm{k}(\mathrm{x}\,\mathrm{t})=\mathrm{k}(x_1t_1)\cdot\mathrm{k}(x_2t_2).$$

Для преобразования (22) справедлива теорема 2.

Теорема 2 [2, теорема 1].

(а) Пусть оператор преобразования (22) удовлетворяет условию $\mathrm{K}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$, *тогда ядро* k *в правой части (22)* $\mathrm{k}\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если для* $\nu_1\neq1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/\mathrm{h}_1$, $\nu_2\neq1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/\mathrm{h}_2$, $(\nu_1=\nu_2)$ *выполняется*

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{k})(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=\frac{\theta(\mathrm{t})}{\overline{\lambda}+1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\overline{\mathrm{h}}}, \tag{23}$$

тогда $\theta\in L_\infty(\mathrm{R}^2)$ *и для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *имеет место формула*

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{K}\,f)(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})=\theta(\mathrm{t})(\mathfrak{M}\,f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t}); \tag{24}$$

(б) обратно, для данной функции $\theta\in L_\infty(\mathrm{R}^2)$, $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2)\in R^2$ $(\nu_1=\nu_2)$ *и* $\overline{h}=(h_1,h_2)\in R_+^2$ *существует преобразование* $\mathrm{K}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ *такое, что равенство (24) выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Более того, если* $\nu_1\neq1-(\mathrm{Re}(\lambda_1)+1)/h_1$, $\nu_2\neq1-(\mathrm{Re}(\lambda_2)+1)/h_2$, $(\nu_1=\nu_2)$, *то преобразование* $\mathrm{K}\,f$ *дается (22) с ядром* k, *определяется соотношением (23);*

(в) при выполнении условий (а) или (б) с $\theta\neq0$ *оператор преобразования* K *взаимно однозначно действует из пространства* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *в пространство* $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$, *если еще выполняется* $1/\theta\in L_\infty(\mathrm{R}^2)$, *то* K *отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$. *Для функций* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *верно равенство*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})(\mathrm{K}\,\mathrm{g})(\mathrm{x})\mathrm{d}\,\mathrm{x}=\int_0^\infty(\mathrm{K}\mathrm{f})(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{d}\,\mathrm{x}.$$

2. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ **-теория двумерного Н-преобразования.** Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ -теорию преобразования $\mathrm{H}\,f$ (1), нам понадобятся следующие двумерные постоянные [1, (57)–(60)]: $\tilde{\alpha}=(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2)$, $\tilde{\beta}=(\tilde{\beta}_1,\tilde{\beta}_2)$, где

$$\tilde{\alpha}_1 = \begin{cases} -\min\limits_{1 \le j_1 \le m_1} \left[\dfrac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \qquad \tilde{\alpha}_2 = \begin{cases} -\min\limits_{1 \le j_2 \le m_2} \left[\dfrac{\operatorname{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}_1 = \begin{cases} \min\limits_{1 \le i_1 \le \bar{n}_1} \left[\dfrac{1-\operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_1 = 0, \end{cases} \qquad \tilde{\beta}_2 = \begin{cases} \min\limits_{1 \le i_2 \le \bar{n}_2} \left[\dfrac{1-\operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & \bar{n}_2 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_2 = 0; \end{cases} \tag{25}$$

$a^* = (a_1^*, a_2^*)$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2)$, где

$$a_1^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, \quad a_2^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_2} \alpha_{i_2} - \sum_{i=\bar{n}_2+1}^{p_2} \alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j_2} - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_{j_2},$$

$$\Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}, \quad \Delta_2 = \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2}; \tag{26}$$

$\mu = (\mu_1, \mu_2)$, где

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \quad \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}. \tag{27}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}$ функции $\bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}(\mathbf{s})$

$$\bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}}(\mathbf{s}) \equiv \bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^{2} \mathcal{H}^{m_k, \bar{n}_k}_{p_k, q_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \middle| s_k \right] \tag{28}$$

назовем множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2) \in R^2$ $(\nu_1 = \nu_2)$ таких, что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2$, и функции вида (14) $\mathcal{H}^{m_1, \bar{n}_1}_{p_1, q_1}(s_1)$, $\mathcal{H}^{m_2, \bar{n}_2}_{p_2, q_2}(s_2)$ имеют нули на прямых $\operatorname{Re}(s_1) = 1 - \nu_1$, $\operatorname{Re}(s_2) = 1 - \nu_2$ соответственно.

Применяя двумерное преобразование Меллина (18) к преобразованию (1), получаем

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{H}\,f)(\mathbf{s}) = \bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{m,n}}_{\mathrm{p,q}} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M}f)(1 - \mathbf{s}). \tag{29}$$

Теорема 3. *Пусть*

$$\tilde{\alpha}_1 < 1 - \nu_1 < \tilde{\beta}_1, \ \tilde{\alpha}_2 < 1 - \nu_2 < \tilde{\beta}_2, \ \nu_1 = \nu_2 \tag{30}$$

и выполняется любое из условий

$$a_1^* > 0, \ a_2^* > 0 \tag{31}$$

или

$$a_1^* = 0, \ a_2^* = 0, \quad \Delta_1 [1 - \nu_1] + \operatorname{Re}(\mu_1) \le 0, \quad \Delta_2 [1 - \nu_2] + \operatorname{Re}(\mu_2) \le 0. \tag{32}$$

Верны следующие утверждения:

(а) существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{H} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}]$ *такое, что равенство (29) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *и* $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \bar{\nu}$. *Если* $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0$, $\Delta_1 [1 - \nu_1] + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2 [1 - \nu_2] + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0$, *и* $\bar{\nu} \notin \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}$, *то оператор преобразования* H *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{2}}$;

(б) если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, *то имеет место формула*

$$\int_0^\infty f(\mathrm{x})\left(\mathrm{H}\, g\right)(\mathrm{x})d\,\mathrm{x} = \int_0^\infty \left(\mathrm{H}\, f\right)(\mathrm{x})g(\mathrm{x})\mathrm{dx}; \tag{33}$$

(в) пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_1) \in C^2$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (1-\overline{\nu})\overline{h} - 1$, *преобразование* $\mathrm{H}\, f$ *представимо в виде*

$$(\mathrm{H}\, f)(\mathrm{x}) = \overline{h}\, \mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_0^\infty \mathrm{H}^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\mathrm{xt} \left| \begin{matrix} (-\overline{\lambda},\overline{h}),\, (\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}} \\ (\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}},\, (-\overline{\lambda}-1,\overline{h}) \end{matrix} \right. \right] f(\mathrm{t})\mathrm{dt}, \tag{34}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (1-\overline{\nu})\overline{h} - 1$ *дается формулой*

$$(\mathrm{H}\, f)(\mathrm{x}) = -\overline{h}\, \mathrm{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \mathrm{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int_0^\infty \mathrm{H}^{\mathrm{m+1,n}}_{\mathrm{p+1,q+1}} \left[\mathrm{xt} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}},\quad (-\overline{\lambda},\overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1,\overline{h}),(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}} \end{matrix} \right. \right] f(\mathrm{t})\mathrm{dt}; \tag{35}$$

(г) преобразование $\mathrm{H}\, f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\overline{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют (30) и выполняются условия (31) или (32), и если преобразования* $\mathrm{H}\, f$ *и* $\tilde{\mathrm{H}}\, f$ *определяются в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (29), то* $\mathrm{H}\, f = \tilde{\mathrm{H}}\, f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\overline{\nu}},\overline{2}} \cap \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

Доказательство. Пусть $\overline{\omega}(\mathrm{t}) = \overline{\mathcal{H}}(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \prod_{k=1}^{2} \mathcal{H}(1-\nu_k + i\,\mathrm{t}_k)$. На основании (4), (25) и условий (30) функции $\mathcal{H}^{m_1,\overline{n}_1}_{p_1,q_1}(s_1), \mathcal{H}^{m_2,\overline{n}_2}_{p_2,q_2}(s_2)$ аналитические в интервалах $\alpha_1 < 1-\nu_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1-\nu_2 < \beta_2$ соответственно. Согласно (14) и условию (31) или (32) $\overline{\omega}(\mathrm{t}) = O(1)$, когда $|\mathrm{t}| \to \infty$. Поэтому $\overline{\omega} \in L_\infty(R^2)$, и из утверждения пункта *(б)* теоремы 2 следует, что существует преобразование $\mathrm{H} \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ такое, что

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{H}\, f)(\mathrm{s})(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \overline{\mathcal{H}}(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})(\mathfrak{M}f)(\overline{\nu}-i\,\mathrm{t})\,,\ f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}.$$

Это означает, что равенство (29) выполняется для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\overline{\nu}$. Т. к. функции $\mathcal{H}^{m_1,\overline{n}_1}_{p_1,q_1}(s_1), \mathcal{H}^{m_2,\overline{n}_2}_{p_2,q_2}(s_2)$ аналитические в интервалах $\alpha_1 < 1-\nu_1 < \beta_1, \alpha_2 < 1-\nu_2 < \beta_2$ соответственно, и имеют изолированные нули, то $\overline{\omega}(\mathrm{t}) = \prod_{k=1}^{2} \omega(t_k) \neq 0$ почти везде. Тогда на основании пункти *(в)* теоремы 2 заключаем, что оператор преобразования $\mathrm{H} \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}]$ является взаимно однозначным. Если $a_1^* = 0,\ a_2^* = 0;\ \Delta_1[1-\nu_1] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[1-\nu_2] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0$ и $\overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$, тогда $1/\overline{\omega} \in L_\infty(R^2)$ и снова из пункта *(б)* теоремы 2 получаем, что оператор H биективно отображает $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ на $\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu},\overline{2}}$. Таким образом, утверждение *(а)* теоремы 3 доказано.

Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, тогда равенство (33) выполняется в соответствии с пунктом *(в)* теоремы 2.

Пусть $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. Чтобы показать справедливость отношения (34) достаточно вычислить ядро $\mathrm{k}(\mathrm{x\,t})$ в преобразовании (22) для таких $\overline{\lambda}$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (1-\overline{\nu})\overline{h} - 1$. Из (23) получаем равенство

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{k})(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) = \overline{\mathcal{H}}(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t}) \frac{1}{\overline{\lambda}+1-(1-\overline{\nu}+i\,\mathrm{t})\overline{\mathrm{h}}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{2} \overline{\mathcal{H}}(1-\nu_k + it_k) \frac{1}{\lambda_k + 1 - (1-\nu_k+it_k)\mathrm{h}_k}$$

или для $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = 1-\overline{\nu}$

$$(\mathfrak{M}\,\mathrm{k})(\mathbf{s}) = \overline{\mathcal{H}}(\mathbf{s})\frac{1}{\overline{\lambda}+1-\overline{h}\mathbf{s}} = \prod_{k=1}^{2}\mathcal{H}(s_k)\frac{1}{\lambda_k+1-h_k s_k}. \tag{36}$$

Далее, из (20) и (36) получаем формулу для ядра k, а именно

$$\mathrm{k}(\mathrm{x}) = \prod_{k=1}^{2}\mathrm{k}(x_k) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\prod_{k=1}^{2}\lim_{R\to\infty}\int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR}(\mathfrak{M}\,\mathrm{k})(s_k)x_k^{-s_k}\,ds_k =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\prod_{k=1}^{2}\lim_{R\to\infty}\int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR}\mathcal{H}_k(s_k)\frac{1}{\lambda_k+1-h_k s_k}x_k^{-s_k}\,ds_k, \tag{37}$$

где предел берется в топологии пространства $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

В соответствии с (4) и (28) имеем

$$\overline{\mathcal{H}}(\mathrm{s})\frac{1}{\overline{\lambda}+1-\overline{h}\mathbf{s}} = \overline{\mathcal{H}}(\mathbf{s})\frac{\Gamma(1-(-\overline{\lambda})-\overline{h}\mathbf{s})}{\Gamma(1-(-\overline{\lambda}-1)-\overline{h}\mathbf{s})} = \overline{\mathcal{H}}^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\left.\begin{matrix}(-\overline{\lambda},\overline{h}),(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}}\\ (\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}},(-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{2}\mathcal{H}^{m_k,\overline{n}_k+1}_{p_k+1,q_k+1}\left[\left.\begin{matrix}(-\lambda_k,h_k),(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,\mathrm{p}_k}\\ (b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k},(-\lambda_k-1,h_k)\end{matrix}\right|s_k\right]. \tag{38}$$

Обозначим через $\hat{\alpha}_k,\hat{\beta}_k\,(k=1,2)$ константы $\tilde{\alpha}_k,\tilde{\beta}_k\,(k=1,2)$ в (25) соответственно; через $\tilde{a}_k^*(k=1,2)$ – константы $a_k^*(k=1,2)$ в (26); через $\tilde{\Delta}_k(k=1,2)$ – константы $\Delta_k(k=1,2)$ в (26); через $\tilde{\mu}_k(k=1,2)$ – константы $\mu_k(k=1,2)$ в (27) соответственно для $\mathcal{H}^{m_1,\overline{n}_1}_{p_1,q_1}(s_1),\mathcal{H}^{m_2,\overline{n}_2}_{p_2,q_2}(s_2)$ в (38). Тогда $\hat{\alpha}_k=\tilde{\alpha}_k\ (k=1,2)$; $\hat{\beta}_k=\min\left[\tilde{\beta}_k,\ (1+\mathrm{Re}(\lambda_k))/h_k\right](k=1,2)$; $\tilde{a}_k^*=a_k^*(k=1,2)$; $\tilde{\Delta}_k=\Delta_k(k=1,2)$; $\tilde{\mu}_k=\mu_k-1\,(k=1,2)$.

Отсюда следует, что

(а') $\hat{\alpha}_1<1-\overline{\nu}<\hat{\beta}_1$, $\hat{\alpha}_2<1-\overline{\nu}<\hat{\beta}_2$ при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>(1-\overline{\nu})\overline{h}-1$

и любое из условий

(б') $\tilde{a}_1^*>0,\tilde{a}_2^*>0$

или

(в') $\tilde{a}_1^*=0,\ \tilde{a}_2^*=0,\quad \tilde{\Delta}_k\left(1-\overline{\nu}\right)+\mathrm{Re}(\tilde{\mu}_k)=\Delta_k\left(1-\tilde{\nu}\right)+\mathrm{Re}(\mu_k)-1\le-1\,(k=1,2)$

выполняется.

Применяя теорему 1 для $\mathrm{x}>0$, получаем, что равенство

$$\mathrm{H}^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\mathrm{x}\left|\begin{matrix}(-\overline{\lambda},\overline{h}),(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}}\\ (\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}},(-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right.\right] = \prod_{k=1}^{2}\mathrm{H}^{m_k,\overline{n}_k+1}_{p_k+1,q_k+1}\left[\mathrm{x}_k\left|\begin{matrix}(-\lambda_k,h_k),(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,\mathrm{p}_k}\\ (b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k},(-\lambda_k-1,h_k)\end{matrix}\right.\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\prod_{k=1}^{2}\lim_{R\to\infty}\int_{1-\nu_k-iR}^{1-\nu_k+iR}\mathcal{H}_k(s_k)\frac{1}{\lambda_k+1-h_k s_k}x_k^{-s_k}\,ds_k \tag{39}$$

выполняется почти везде. Тогда из формул (37) и (39) следует, что ядро k дается формулой

$$\mathrm{k}(\mathrm{x}) = \mathrm{H}^{\mathrm{m,n+1}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\mathrm{x}\left|\begin{matrix}(-\overline{\lambda},\overline{h}),(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}}\\ (\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}},(-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right.\right] = \prod_{k=1}^{2}\mathrm{H}^{m_k,\overline{n}_k+1}_{p_k+1,q_k+1}\left[\mathrm{x}_k\left|\begin{matrix}(-\lambda_k,h_k),(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,\mathrm{p}_k}\\ (b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k},(-\lambda_k-1,h_k)\end{matrix}\right.\right]$$

и (34) доказано.

Отношение (35) доказывается аналогично (34), если вместо (38) использовать равенство

$$\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{s})\frac{1}{\bar{\lambda}+1-\bar{h}\mathbf{s}} = -\bar{\mathcal{H}}(\mathbf{s})\frac{\Gamma(\bar{h}\mathbf{s}-\bar{\lambda}-1)}{\Gamma(\bar{h}\mathbf{s}-\bar{\lambda})} = -\bar{\mathcal{H}}^{\mathrm{m+1,n}}_{\mathrm{p+1,q+1}}\left[\left.\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathrm{p}},(-\bar{\lambda},\bar{h})\\(-\bar{\lambda}-1,\bar{h}),(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathrm{q}}\end{matrix}\right|\mathbf{s}\right] =$$

$$= \prod_{k=1}^{2}\mathcal{H}^{m_k+1,\bar{n}_k}_{p_k+1,q_k+1}\left[\left.\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,\mathrm{p}_k},(-\lambda_k,h_k)\\(-\lambda_k-1,h_k),(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right|s_k\right], \tag{40}$$

что завершает доказательство утверждения *(в)* теоремы 3.

Докажем пункт *(d)* теоремы 3. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\tilde{\nu}},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) > \max\left[(1-\bar{\nu})\bar{h}-1,(1-\bar{\tilde{\nu}})\bar{h}-1\right]$ или $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}) < \min\left[(1-\bar{\nu})\bar{h}-1,(1-\bar{\tilde{\nu}})\bar{h}-1\right]$, тогда оба преобразования $\mathrm{H}f$ и $\tilde{\mathrm{H}}f$ даются в (34) или (35) соответственно, что означает их независимость от $\bar{\nu}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-Dimensional and Multi-Dimensional Integral Transforms of Buschman–Erdélyi Type with Legendre Functions in Kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. – Birkhäuser, Cham. – 2020. – P. 293–319. – DOI: 10.1007/978-3-030-35914-0_13.
2. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-Dimensional Generalized Integral Transform in the Weighted Spaces of Summable Functions // Lobachevskii J. Math. – 2022. – Vol. 43, iss. 6. – P. 1408–1416. – DOI: 10.1134/S1995080222090244.
3. Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. – Switzerland; Philadelphia, Pa., USA: Gordon and Breach Science Publishers. – 1993. – 976 p.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies, vol. 204. – Elsevier, 2006. – 523 p. – DOI: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
5. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразования с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 1(114). – С. 11–25.
6. Ситник С. М., Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерные модифицированные G- и H-преобразования и их частные случаи // АМАДЕ-2021: сб. тр. 10-го междунар. науч. семинара, Минск, 13–17 сент. 2021 г. / Белорус. гос. ун-т. – Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – С. 104–116. – URL: https://elib.bsu.by/handle/123456789/282282).
7. Mathai A. M., Saxena R. K. The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines. – New Delhi: Wiley Eastern; New York: Halsted Press, 1978. – 192 p. – DOI: 10.2307/3314682.
8. Srivastava H. M., Gupta K. C., Goyal S. L. The H-Function of One and Two Variables with Applications. – New Delhi: South Asian Publishers, 1982. – 415 p.
9. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Vol. 3: More Special Functions. – New York: Gordon and Breach, 1990.
10. Kilbas A. A., Saigo M. H. H-Transforms. Theory and Applications. – London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. – 401 p.
11. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications. New York: Wiley and Son., 1994. – 205 p.
12. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. A boundary-value problem for the steady-state Schrodinger equation with a singular potential // Sov. Math. Dokl. – 1984. – Vol. 30, iss. 2. – P. 468–470.
13. Sitnik S. M. Factorization and estimates of the norm of Buschman–Erdeyi operators in weighted Lebesgue spaces // Sov. Math. Dokl. – 1992. – Vol. 44, iss. 2. – P. 641–646.
14. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators // Russ. Acad. Sci., Dokl. Math. – 1995. – Vol. 50, iss. 1. – P. 70–77.
15. Sitnik S. M. A short survey of recent results on Buschman-Erdeyi transmutations // J. of Inequalities and Special Functions (Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions). – 2017. – Vol. 8, iss. 1. – P. 140–157.
16. Скоромник О. В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода. – Новополоцк: ПГУ, 2019. – 180 с.
17. Katrakhov V. V., Sitnik S. M. The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations // CMFD. – 2018. – Vol. 64, iss. 2. – P. 211–426. DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
18. Shishkina E. L., Sitnik S. M. Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. – Elsevier, 2020.
19. Sitnik S. M., Shishkina E. L. Transmutation Method for Differential Equations with Bessel Operators. – Moscow: Fizmatlit, 2019.
20. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (Eds.). Transmutation Operators and Applications (Trends in Mathematics). – Birkhauser, 2020. – 703 p.
21. Fitouhi A., Jebabli I., Shishkina E. L. et al. Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations // Electron. J. Differential Equations. – 2018. – Vol. 2018, iss. 130. – P. 1–27. – DOI: 10.48550/arXiv.1805.06925.

22. Vu Kim Tuan, Marichev O. I., Yakubovich S. B. On a boundary-value problem for elliptic equations of the second order at the sphere domain // Dokl. AN SSSR. – 1986. – Vol. 286, iss. 4. – 786–790.
23. Marichev O. I. Method evaluation of integrals of Special Functions (Theory and Formulas Tables). – Minsk: Nauka i tekhnika, 1978. – 310 p.
24. Brychkov Yu. A., Glaeske H.-Y., Prudnikov A. P. et al. Multidimensional Integral Transformations. – Philadelphia: Gordon and Breach, 1992.
25. Nikolski S. M. Approximation of Functions of Many Variables and Embedding Theorems. Moscow: Nauka, 1975. – 455 p.
26. Rooney P. G. On integral transformations with G-function kernels // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1983. – Vol. 93. – P. 265–297. – DOI: 10.1017/S0308210500015973.
27. Rooney, P. G. On the range of the integral transformation // Canad. Math. Bul. – 1994. – Vol. 37, iss. 4. – P. 545–548.
28. Rooney, P. G. On the representation of functions by the Hankel and some related transformations // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. – 1995. – Vol. 125, iss. 3. – P. 449–463.
29. Sitnik S. M. Refinements and generalizations of classical inequalities // Studies in mathematical analysis. Series: Mathematical Forum. – 2009. – Vol. 3. – P. 221–226.

REFERENCES

1. Sitnik, S. M., & Skoromnik, O. V. (2020). One-Dimensional and Multi-Dimensional Integral Transforms of Buschman–Erdélyi Type with Legendre Functions in Kernels. In V. Kravchenko, & S. Sitnik (Eds.), *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics* (293–319). Birkhäuser, Cham. DOI: 10.1007/978-3-030-35914-0_13.
2. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Shlapakov, S. A. (2022). Multi-Dimensional Generalized Integral Transform in the Weighted Spaces of Summable Functions. *Lobachevskii J. Math*, *43*(6), 1408–1416. DOI: 10.1134/S1995080222090244.
3. Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Switzerland; Philadelphia, Pa., USA: Gordon and Breach Science Publishers.
4. Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies: vol. 204*. Elsevier. DOI: 10.1016/S0304-0208(06)80001-0.
5. Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modifitsirovannye G-preobrazovaniya i integral'nye preobrazovaniya s gipergeometricheskoi funktsiei Gaussa v yadrakh v vesovykh prostranstvakh summiruemykh funktsii [Multidimensional modified G-transformations and integral transformations with hypergeometric Gauss functions in kernels in weight spaces of summed functions]. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta [Bulletin of VSU]*, *1*(114), 11–25. (In Russ., abstr. in Engl.).
6. Sitnik, S. M., Skoromnik, O. V., & Papkovich, M. V. (2022). Mnogomernye modificirovannye G- i H-preobrazovanija i ih chastnye sluchai [Multidimensional Modified G- and H-Transforms and Their Special Cases]. In *Trudy 10-go mezhdunarodnogo nauchnogo seminara AMADE-2021 [Proc. 10th Intern. Workshop AMADE-2021]* (104–116). Minsk: BSU, ITC of the Ministry of Finance. (In Russ., abstr. in Engl.). https://elib.bsu.by/handle/123456789/282282).
7. Mathai, A. M., & Saxena, R. K. (1978). *The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines*. New Delhi: Wiley Eastern; New York: Halsted Press. DOI: 10.2307/3314682.
8. Srivastava, H. M., Gupta, K. C., & Goyal, S. L. (1982). *The H-Function of One and Two Variables with Applications*. New Delhi: South Asian Publishers.
9. Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A., & Marichev, O. I. (1990*). Integrals and Series. More Special Functions. Vol. 3: More Special Functions*. New York: Gordon and Breach.
10. Kilbas, A. A., & Saigo, M. H. (2004). *H-Transforms. Theory and Applications*. London [etc.]: Chapman and Hall. CRC Press.
11. Kiryakova V. (1994). *Generalized Fractional Calculus and Applications.* New York: Wiley and Son.
12. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (1984). A boundary-value problem for the steady-state Schrodinger equation with a singular potential, *Sov. Math. Dokl.*, *30*(2), 468–470.
13. Sitnik, S. M. (1992). Factorization and estimates of the norm of Buschman-Erdeyi operators in weighted Lebesgue spaces. *Sov. Math. Dokl.*, *44*(2), 641–646.
14. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (1995). Composition method for constructing B-elliptic, B-hyperbolic, and B-parabolic transformation operators. *Russ. Acad. Sci., Dokl. Math*., *50*(1), 70–77.
15. Sitnik, S. M. (2017). A short survey of recent results on Buschman-Erdeyi transmutations. *J. of Inequalities and Special Functions (Special issue to honor Prof. Ivan Dimovski's contributions)*, *8*(1), 140–157.
16. Skoromnik O. V. (2019). *Integral'nye preobrazovanija s funkcijami Gaussa i Lezhandra v jadrah i integral'nye uravnenija pervogo roda.* Novopolock: PSU. (In Russ.).
17. Katrakhov, V. V., & Sitnik, S. M. (2018). The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations. *CMFD*, *64*(2). 211–426. DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
18. Shishkina, E. L., & Sitnik S. M. (2020). *Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics*. Elsevier.
19. Sitnik, S. M., & Shishkina, E. L. (2019). Transmutation Method for Differential Equations with Bessel Operators. Moscow: Fizmatlit.
20. Kravchenko V. V., Sitnik S. M. (Eds.). (2020). *Transmutation Operators and Applications (Trends in Mathematics)*. Birkhauser.
21. Fitouhi, A., Jebabli, I., Shishkina, E. L., & Sitnik, S. M. (2018). Applications of integral transforms composition method to wave-type singular differential equations and index shift transmutations. *Electron. J. Differential Equations*, *2018*(130), 1–27. DOI: 10.48550/arXiv.1805.06925.
22. Vu Kim Tuan, Marichev, O. I., & Yakubovich, S. B. (1986). On a boundary-value problem for elliptic equations of the second order at the sphere domain. *Dokl. AN SSSR*, *286*(4), 786–790.

23. Marichev, O. I. (1978). *Method evaluation of integrals of Special Functions (Theory and Formulas Tables)*. Minsk: Nauka i tekhnika.
24. Brychkov, Yu. A., Glaeske, H.-Y., Prudnikov, A. P., & Vu Kim Tuan. (1992). *Multidimensional Integral Transformations*. Philadelphia: Gordon and Breach.
25. Nikolski, S. M. (1975). *Approximation of Functions of Many Variables and Embedding Theorems*. Moscow: Nauka.
26. Rooney, P. G. (1983). On integral transformations with G-function kernels. *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A,* (93), 265–297. DOI: 10.1017/S0308210500015973.
27. Rooney, P. G. (1994). On the range of the integral transformation. *Canad. Math. Bul.*, *37*(4), 545–548.
28. Rooney, P. G. (1995). On the representation of functions by the Hankel and some related transformations. *Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A*, *125*(3), 449–463.
29. Sitnik S. M. (2009). Refinements and generalizations of classical inequalities. *Studies in mathematical analysis. Series: Mathematical Forum*, (3), 221–226.

Поступила 20.10.2023

TWO-DIMENSIONAL INTEGRAL H-TRANSFORM IN WEIGHTED SPACES OF SUMMABLE FUNCTIONS

S. SITNIK
(Belgorod State National Research University "BelGU");
O. SKOROMNIK, M. PAPKOVICH
(Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk)

Two-dimensional integral H-transform in spaces of integrable functions $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ *has been studied. Conditions for the boundedness and one-to-one action of the operator of such a transform from one* $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$*-space to another have been obtained, an analogue of the formula for integration by parts has been proven, and various integral representations have been established for the transformation under consideration. The results of the study generalize those previously obtained for the corresponding one-dimensional transform.*

Keywords*: two-dimensional integral H-transform, space of integrable functions, special functions in kernels, two-dimensional Mellin transform, fractional integrals and derivatives.*