УДК 621.833

КОМБИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЕТЕЙ ТРАНСПОРТИРОВКИ ГАЗА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ ЭВРИСТИК

канд. техн. наук, доц. Д.О. ГЛУХОВ, С.А. АВИЛКИН
(Полоцкий государственный университет)

Представлен алгоритм решения системы нелинейных уравнений с применением локальных эвристик, учитывающий особенности таких систем в моделях сетей транспортировки газа. Проведены сравнительные тесты разработанного алгоритма с классическими алгоритмами: методом координатной, блочной релаксации, методом сопряженных градиентов. Определены особенности выбранного класса систем нелинейных уравнений. Сделан вывод о высокой чувствительности алгоритмов для решения такого класса систем от начального приближения и параметров итерационного процесса. Предложен метод самооптимизации алгоритма для решения задачи в рамках конкретной сети транспортировки газа. Определены рекомендации по использованию локальных эвристик в процессе решения такого рода систем.

Введение. Нелинейные системы уравнений активно применяются для моделирования процессов широкого круга прикладных задач. Поиск решения таких систем представляет собой самостоятельную задачу. При решении систем нелинейных уравнений большой размерности при выборе метода поиска корней обозначенной системы, кроме оценки принципиальной возможности решения поставленной задачи, необходимо учитывать и фактор времени выполнения расчетов.

Основанием для разработки данного алгоритма послужила необходимость решения газодинамической задачи с целью расчета запасов газа в системе магистральных газопроводов Беларуси по результатам математического моделирования. Постановка задачи была представлена системами нелинейных уравнений – математической моделью стационарного и неизотермического движения газа в системах газотранспортных обществ (ГТО) Республики Беларусь. Размерность системы зависит от масштаба моделируемого участка схемы и варьируется от фрагмента газотранспортной системы (ГТС) до масштаба газотранспортной системы Беларуси [1].

Неизвестными параметрами решаемой системы выступали параметры режима транспорта газа по ГТС при целом ряде определенных критериев. Значительная часть переменных характеризовалась большой степенью связности (то есть взаимозависимостью и возможностью значительного влияния изменения одной из переменных на режим транспорта газа в целом), что обусловлено спецификой рассматриваемой предметной области [2; 3].

В отличие от систем линейных алгебраических уравнений, для систем нелинейных уравнений неизвестны прямые методы решения. Лишь в отдельных случаях систему можно решить аналитически, более того, постановка задачи требовала построения универсального решателя, способного производить поиск корней в системе с варьирующимся набором входных данных.

В литературе рассматриваются методы решения, основанные на лианеризации системы нелинейных уравнений на каждом шаге итерационного процесса [4].

Применение алгоритмов, основанных на лианеризации, не учитывает особенности математической модели. Однако при разработке данных алгоритмов был наработан определенный теоретический задел, который позволяет нам, во-первых, сократить число неизвестных в системе, переформулировав задачу как задачу поиска исключительно давлений, а во-вторых, для учета неизотермического процесса организовать быстросходящийся вложенный итерационный процесс определения температур [1; 4; 5].

В процессе решения поставленной задачи были предприняты попытки получить удовлетворительные результаты посредством использования известных методов решения систем нелинейных уравнений. В частности, после некоторой оптимизации использование метода наискорейшего (градиентного) спуска позволило получить результат, однако при использовании данного метода за одну итерацию движение в пространстве решения осуществляется только вдоль одной из координат. Указанный факт приводит к значительному количеству итераций, требуемых для приближения всех переменных к истинному значению, что в свою очередь приводит к увеличению времени выполнения расчетов. Особенно это сказывается при решении систем большой размерности, что не позволяет использовать метод градиентного спуска для поиска корней обозначенной задачи.

Вышеописанный минус отсутствует в алгоритме наискорейшего спуска с групповым шагом. В данном подходе за одну итерацию осуществляется изменение одновременно всех переменных.

Направление изменения каждой из переменных выбирается на основе сравнения невязок целевой системы при изменении рассматриваемой переменной на величину шага в сторону увеличения или уменьшения. Выбор следующего направления предпочтителен в пользу того, которое улучшило общую невязку системы и дало меньшее значение. Тем не менее для многих классов задач (в том числе для рассматриваемой в данной статье) представленный способ не следует использовать по следующей причине: определение направления и применение группового шага в общем случае производятся при разных контекстах решаемой системы. Для каждой неизвестной производится анализ, как изменится невязка системы, если по окончании текущей итерации изменить значение данной переменной. Однако не учитывается, что в будущем изменениям могут подвергнуться и все остальные неизвестные.

Другими словами, решение об изменении искомой переменной может приниматься при одном окружении (т.е. значениях остальных переменных), а применение данных изменений – уже при другом. В терминах предметной области это означает, что решение об изменении значения того или иного параметра будет принято для другого состояния газотранспортной сети, а не для того, в котором оно используется. Это может приводить к «дребезгу» в вычислении переменных, что в лучшем случае замедлит сходимость алгоритма, в худшем – алгоритм вообще не будет сходиться.

Существует еще одна важная проблема, вытекающая из сильной связи между переменными. Изменение одной переменной может потребоваться только по окончании итерации, после изменения переменной, с которой она функционально связана. Эта ситуация приводит к волновому перераспределению влияния на общую невязку системы, когда ошибка корректируется от одного участка газотранспортной сети к другому и цикл волны корректировок может длиться десятки итераций.

Избежать вышеописанной проблемы несоответствия контекстов и волнового перераспределения ошибки можно, модифицировав процедуру выбора следующего направления движения поиска в пространстве переменных. Необходимо вместо независимого определения направления движения для каждой из неизвестных использовать интегрированную оценку невязки – организовать перебор всех возможных комбинаций изменения направления переменных во всех направлениях и производить оценку невязки для каждого набора.

Набор, давший минимальное значение невязки, следует использовать в качестве следующего направления изменений неизвестных. Однако организация подобного перебора потребует дополнительно 2^{N-1} итераций к каждой глобальной итерации, где N – количество неизвестных системы, что будет означать значительное увеличение времени расчетов, особенно с ростом количества искомых переменных.

Анализ существующих методов решения систем нелинейных уравнений показал, что существующие методы не удовлетворяют одновременным требованиям приемлемой скорости сходимости и получения корней системы уравнений с заданной точностью для систем уравнений, обладающих вышеперечисленными особенностями [6 – 8].

В результате был разработан алгоритм, цель которого обеспечить решение подобного класса задач за приемлемое время с обеспечением заданной точности.

В основе большинства известных методов решения систем нелинейных уравнений лежит одна общая идея. Первоначально все неизвестные системы инициализируются некоторыми приближенными значениями. Затем производится оценка погрешности (ошибки), возникающей в решении рассматриваемой системы при заданных значениях. Если погрешность решения превышает допустимую, значение одной или нескольких переменных изменяют согласно определенному правилу, обычно на величину некоторого шага в заданном направлении.

После этого вновь повторяют вычисление системы и оценивают погрешность при новых измененных значениях переменных. Данный процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность. Главной сложностью, стоящей перед подобным классом задач, являются выбор правильного значения шага, который необходимо использовать на текущей итерации, и направления изменения движения в пространстве переменных.

Предложенный в данной статье алгоритм предлагает способ определения данных параметров на основе накопления и обработки статистики.

Кроме этого, с целью дополнительного сокращения количества итераций, необходимых для нахождения решения, в разработанном алгоритме в процессе решения применяется периодическое «встряхивание» пространства поиска корней, смысл которого заключается в устранении невязки по переменной. Эта переменная наибольшим образом оказывает влияние на общую невязку исходной системы на основе полученных к текущему моменту значений остальных переменных. Предполагается, что одна переменная (с наибольшим вкладом в общую невязку) «выбивается» из общего промежуточного решения, в отличие от всех остальных, с которыми она функционально связана (посредством некоторых уравнений). Изменение её значения осуществляется и в дальнейшем.

Суть применения таких локальных эвристик для ускорения сходимости процесса поиска решений системы нелинейных уравнений заключается в следующем. Каждые N_{LH} итераций (значение N_{LH} определяется в зависимости от специфики задачи, например 100 итераций) определяется переменная x_{LH}, вносящая наибольший вклад в общую невязку системы. Для x_{LH} определяются все уравнения, имеющие функциональную связь с данной переменной. Выбранный набор уравнений образует новую систему уравнений, которая изолируется от исходной. В новой системе значения других переменных, отличных от x_k, фиксируются значениями, достигнутыми ими ранее в процессе решения основной исходной системы уравнений. Таким образом, новая система уравнений содержит только одну неизвестную x_k, что наделяет полученную систему свойством разрешимости (при условии разрешимости исходной системы нелинейных уравнений). Полученное в результате решения такой системы значение x_k передается в исходную систему нелинейных уравнений, где используется в следующей итерации основного алгоритма поиска корней исходной системы. Описанный процесс повторяется в основном процессе поиска решения исходной системы нелинейных уравнений каждые N итераций, пока решение в исходной системе не будет найдено.

Основная часть. Особенностью предлагаемого алгоритма является то, что для каждой искомой переменной создается вектор ведения истории изменений её значений $V(x_i)$, $i = 0, 1, ..., N$, который хранит некоторое количество последних шагов. Количество элементов N_V вектора $V(x)_i$ определяет глубину ведения истории изменений всех переменных. Начальные значения переменных инициализируются начальным приближением, начальное значение шага – некоторым числом, значение которого можно выбрать на основе специфики задачи. Основная идея алгоритма заключается в последовательном повторении двух основных этапов алгоритма до достижения критерия остановки описанной итерационной процедуры – стабилизации значений неизвестных переменных с требуемой точностью.

На первом этапе осуществляется покоординатный спуск в пространстве решений. На каждой итерации шаг осуществляет только одна переменная x_j, $j \in \{0, 1, ..., N\}$, изменение которой дает наилучшую минимизацию целевой функции. Идентификация такой переменной осуществляется посредством анализа невязки системы при возможных изменениях каждой переменной: в направлении увеличения на значение текущего шага и в направлении уменьшения. После выбора активной (то есть той, которая наилучшим образом минимизирует целевую функцию) переменной x_j данной итерации её значение изменяется на соответствующий шаг в соответствующем направлении. А сами значения используемого шага и направления сохраняются в соответствующий вектор $V(x_j)$ ведения истории данной переменной. Для всех остальных, неактивных, переменных x_k, $k \in \{0, 1, ..., N\}$, $k \neq j$ текущей итерации соответствующие значения векторов истории заполняются нулями. Количество итераций первого этапа зависит от первоначального задания глубины N_V векторов истории. Первый этап продолжается пока не будет выполнено одно из двух условий:

- невязка системы достигнет значения, удовлетворяющего требуемой точности;
- пока не будет выполнено N_V итераций, производящих изменения одной из переменных, это будет означать, что для каждой из переменных накоплена своя статистика изменений за наблюдаемый период (определяемый N_V) и требуется переход ко второму этапу.

Если в процессе выполнения первого этапа история ещё не накоплена, а при текущем шаге уже невозможно уменьшить невязку, шаг изменяется делением на параметр уменьшения шага.

На втором этапе осуществляется групповой шаг в пространстве решений, что значительно увеличивает скорость сходимости алгоритма для рассматриваемого класса задач. Для каждой переменной X_j, $j \in \{0, 1, ..., N\}$ вычисляется свой шаг и направление спуска, который остается неизменным на всех итерациях данного этапа. Данный параметр определяется на основе приобретенной статистики и вычисляется как усредненное значение за предыдущие итерации, умноженное на суперрелаксационный множитель.

Второй этап продолжается до тех пор, пока не будет выполнено одно из следующих условий:

- невязка системы достигает значение, удовлетворяющее требуемой точности;
- на данной итерации невозможно улучшить невязку системы при заданных значениях шагов и направлений для каждой переменной. Это означает, что данные истории «устарели» и следует произвести их обновление и требуется переход к этапу 1.

Таким образом, алгоритм состоит из двух основных частей:

1) этапа накопления истории и покоординатного спуска;
2) этапа использования накопленной статистики и группового спуска на основе полученной статистики.

Математическое описание алгоритма

Пусть имеется нелинейная система уравнений, представляющая целевую функцию:

$$\begin{cases} F_1(x_0,\ x_1,\ \ldots, x_N) = 0; \\ F_2(x_0,\ x_1,\ \ldots, x_N) = 0; \\ \qquad \ldots \\ F_N(x_0,\ x_1,\ \ldots, x_N) = 0, \end{cases}$$

или в векторной форме:

$$F(X) = 0,$$

где $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \ldots \\ F_N \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{bmatrix}.$

Задача решения данной системы эквивалентна задаче минимизации функции:

$$D(X) = \left(\sum_{i=1}^{N} (|F_i(x_0,\ x_1,\ \ldots, x_N)|^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

или какой-либо другой возрастающей функции от абсолютных величин $|F_i|$ невязок $F_i(x_0,\ x_1,\ \ldots, x_N)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$.

Представленный алгоритм является итерационным процессом, производящим параметрическую оптимизацию искомой системы:

1) неизвестные инициализируются начальными значениями;

2) для данных значений вычисляется значение невязки $D(X)$. Если $D(X)$ не удовлетворяет требуемой точности, начинается процесс уточнения неизвестных;

3) каждая итерация уточняет значение одной или нескольких переменных в зависимости от того, на каком этапе находится исполняемый алгоритм. Первый – накопление статистики, второй – применение группового шага на основе приобретенной статистики. Каждые N_{LH} итераций осуществляется вложенный процесс решения относительно переменной с наибольшим вкладом в общую невязку на основе локальной эвристики.

Последовательность выполняемых действий следующая:

1. Задаются начальные приближения x_i^0 для каждого x_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N$ и требуемая точность расчета $P \in R$, где R – множество вещественных чисел.

2. Задаются векторы хранения истории для каждой из искомых переменных $V(x_i)$ размером N_V и инициализируются нулевыми начальными значениями.

3. Обозначим как X_i^+ вектор искомых переменных, для которого

$$\begin{cases} x_j^+ = x_j,\ \ j \neq i; \\ x_j^+ = x_j + \lambda,\ \ j = i, \end{cases}$$

и вектор X_i^- как вектор искомых переменных, для которого

$$\begin{cases} x_j^- = x_j,\ \ j \neq i; \\ x_j^- = x_j - \lambda,\ \ j = i, \end{cases}$$

где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;$ λ – шаг текущей итерации.

4. *Этап 1.* Определяем индекс переменной k в векторе X, изменение которой наилучшим образом минимизирует целевую функцию:

$$D(X_k^+ | X_k^+) = \min(min_i(D(X_k^+)),\ min_i(D(X_k^-))).$$

5. Если $D(X_k^+ | X_k^-) > D(X)$, изменяем шаг движения искомых переменных:

$$\lambda = \lambda \cdot K_\lambda,$$

где K_λ – коэффициент уменьшения шага, $K_\lambda \in (0,1)$,
и переходим к пункту 4.

6. Если $D(X_k^+ | X_k^-) < D(X)$, изменяем значение *k*-й переменной, в вектор историй $V(x_k)$ заносим значение λ и направление изменения, в векторы $V(X)_i$, $i \neq k$ заносим нулевые значения для текущей итерации.

7. Если $D(X_k^+ | X_k^-) < P$, успешное окончание решения.

8. Если количество итераций достигло N_{LH}, переход к пункту 15 с переходом по окончании его выполнения к пункту 9.

9. Если количество записей в истории не достигло N_V, переходим к пункту 4.

10. *Этап 2.* Для каждой искомой переменной определяется индивидуальный шаг, с которым ей следует продвигаться дальше, как произведение суперрелаксационного множителя на среднее арифметическое всех шагов, проделанных данной переменной за наблюдаемый период истории ведения статистики:

$$\lambda_i = S \cdot \sum_{j=1}^{N_V} V_j(x_i),$$

или как произведение суперрелаксационного множителя на среднее взвешенное значение:

$$\lambda_i = S \cdot \frac{\sum_{j=1}^{N_V} \left(\frac{j \cdot V_j(x_i)}{N_V} \right)}{\sum_{j=1}^{N_V} \left(\frac{j}{N_V} \right)},$$

где S – суперрелаксационный множитель; $i = 1, 2, ..., N$. В самом младшем элементе V_j хранится шаг, осуществленный *j*-й переменной N_V итераций назад, в старшем – шаг, осуществленный на последней итерации.

11. Для каждой из искомых переменных применяем преобразование:

$$x_i^{j+1} = x_i^j + \lambda,$$

где $i = 1, 2, ..., N$.

12. Если $D(X^j) < D(X^{j+1})$, делаем откат произведенных в пункте 11 изменений и переход к пункту 4.

13. Если $D(X^j) > D(X^{j+1})$ и $D(X^{j+1}) < P$, успешное окончание решения.

14. Если количество итераций достигло N_{LH}, переход к пункту 15 с переходом по окончании его выполнения к пункту 11.

15. Определяем переменную x_{LH}, вклад которой в общую невязку системы наибольший. Формируем систему уравнений, состоящую из уравнений в которых присутствует x_{LH}. Производим решение сформированной системы уравнений относительно x_{LH} изолированно от исходной нелинейной системы уравнений.

При решении уравнения предполагается знание начальных приближений к изолированному решению из постановки конкретной задачи.

Применительно к предметной области, для которой разрабатывался алгоритм, начальные приближения необходимо определять из истории режима функционирования ГТС до момента начала расчета. Если же таких данных нет, то имеется возможность использования некоторых рекомендаций для конкретных видов уравнений.

Весьма значимыми для предложенного алгоритма являются численные значения суперрелаксационного коэффициента S и глубины ведения истории N_V. Взаимосвязь между этими параметрами носит сложный характер, не позволяющий давать рекомендации по их выбору для общего случая. Для каждой конкретной реализации указанные параметры должны выбираться на основе специфики решаемой задачи.

В решаемой в данной статье задаче параметры выбирались для каждой конкретной топологии схемы участков магистральных газопроводов отдельно, для некоторых участков был применен адаптивный алгоритм их вычисления, когда система, осуществляющая периодический перерасчет всех параметров ГТС, анализирует время выполнения вычислений при различных значениях S, N_V и балансирует этими значениями, таким образом осуществляя самооптимизацию вычислений. В перспективе данный способ самоперерасчета позволит системе автоматически адаптироваться к изменению топологии схемы ГТС, подбирая для каждой конфигурации свои оптимальные значения S и N_V.

На рисунке 1 представлен график зависимости усредненного количества итераций от требуемой точности, полученный в результате решения газодинамической задачи в выбранном участке системы магистральных газопроводов Беларуси, содержащей 52 неизвестных узла по результатам математического моделирования. На рисунке 2 – сравнительный график, отражающий зависимость скорости сходимости разработанного алгоритма с использованием в решении локальных эвристик и без.

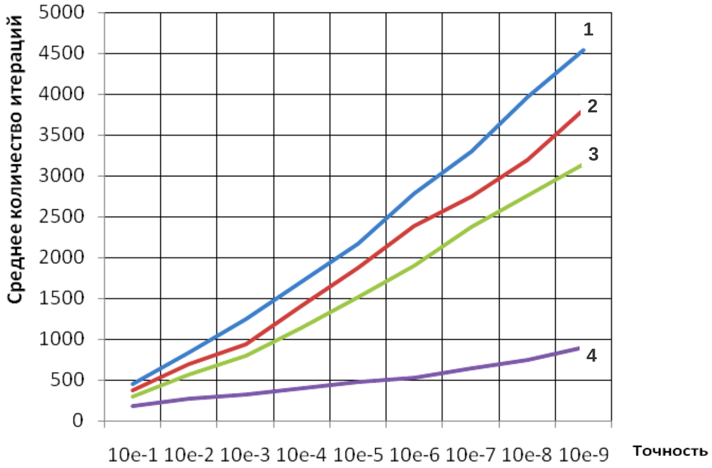

Рис. 1. Зависимости усредненного количества итераций от требуемой точности:
1 – градиентный метод; 2 – метод блочной релаксации;
3 – метод сопряженных градиентов; 4 – предлагаемый метод

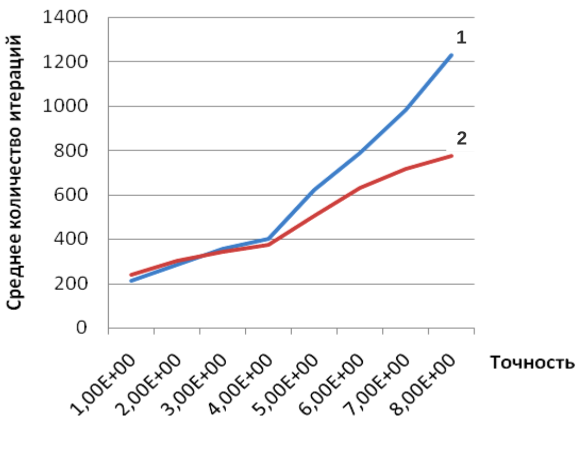

Рис. 2. Зависимости усредненного количества итераций
от требуемой точности с(без) применением(я) локальных эвристик:
1 – без применения локальных эвристик; 2 – с применением локальных эвристик

Как видно из полученных результатов, применение локальных эвристик может оказаться необоснованным (так как требует дополнительных затрат машинных ресурсов) при низких требованиях к точности получаемых результатов или решения задач, сходимость которых довольно хорошая и не требует большого количества итераций для получения решения. Однако с ростом сложности задачи (её размерности) или требований высокой точности (более 10е-3) использование в процессе поиска решения локальных эвристик позволяет значительно сократить необходимое для этого количество итераций.

Заключение. Описанный алгоритм поиска решения систем нелинейных уравнений может быть использован для решения широкого класса задач, при поиске решений которых приходится сталкиваться с особенностями математической модели, описанными в данной статье. Алгоритм дает решение с требуемой точностью за приемлемое время и подходит для решения как линейных, так и нелинейных систем большой размерности [9].

Алгоритм реализован и прошел апробацию в рамках разрабатываемого в Полоцком государственном университете программного комплекса расчета запаса газа на магистральном газопроводе ОАО «Белтрансгаз» (рис. 3).

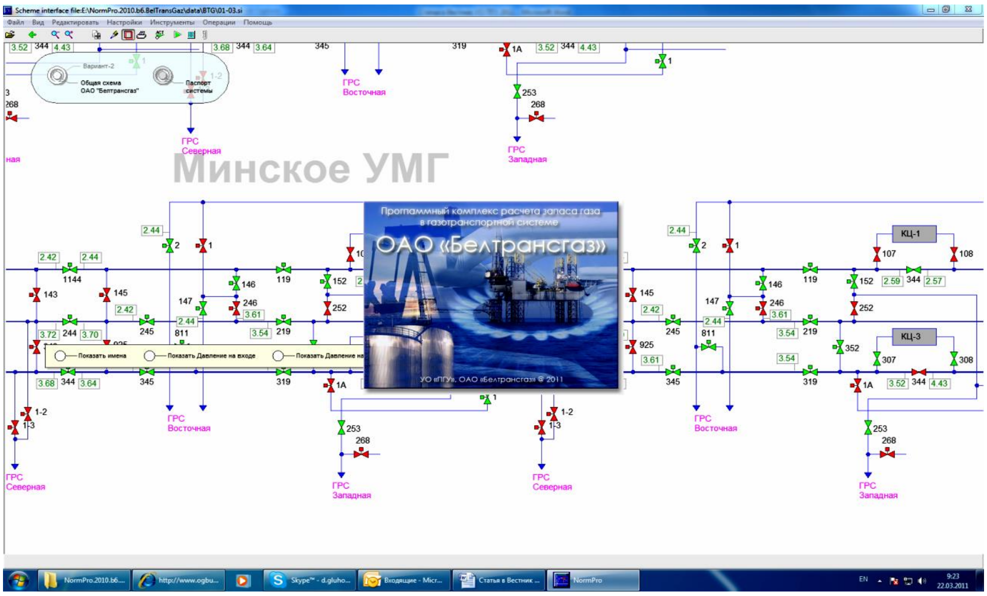

Рис. 3. Главное окно программы расчета запаса газа ОАО «Белтрансгаз»

ЛИТЕРАТУРА

1. Семухин, М.В. Алгоритм расчета сети материальных потоков, имеющей древовидную подструктуру / М.В. Семухин // Изв. вузов «Нефть и газ». – Тюмень: ТюмГНУ, 1998. – Вып. 3. – С. 82 – 85.
2. Самойлов, Р.В. Математическое и программное обеспечение задач оптимального управления функционированием и развитием газопроводных сетей и систем: дис. … канд. техн. наук: 05.13.11 / Р.В. Самойлов. – М., 2005. – 210 с. – РГБ ОД, 61:05-5/2548.
3. Новоселов, В.Ф. Типовые расчеты при проектировании и эксплуатации газопроводов / В.Ф. Новоселов, А.И. Гольянов, Е.М. Муфтахов. – М.: Недра, 1982.
4. Modelovani dynamiky rozsahlych siti / J. Kralik [and others]. – Praha: Akademia, 1984. – 364 p.
5. Семухин, М.В. Многоуровневая система моделей для расчета режимов работы сетевого межпромыслового коллектора и газосборных сетей / М.В. Семухин // Нефтегазовое дело. – 2007. – С. 1.
6. Каханер, Д. Численные методы и математическое обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш; пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
8. Stroud, A. Approximate Calculation of Multiple Integrals / A. Stroud. – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.
9. Глухов, Д.О. Комбинированный алгоритм решения системы нелинейных уравнений газодинамической задачи для сетей транспортировки газа / Д.О. Глухов, А.Ф. Оськин, С.А. Авилкин // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Серия С. Фундаментальные науки. – 2011. – № 4. – С. 8 – 14.

Поступила 24.09.2011

COMBINED ALGORITHM FOR SOLVING SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS GASDYNAMIC PROBLEM FOR GAS TRANSPORTATION NETWORKS

D. HLUKHAU, S. AVILKIN

This paper presents an algorithm for solving systems of nonlinear equations with usage a local heuristics, taking into account the features of such systems in models of networks of gas transportation. We analyze results of the comparative tests of the algorithm with classical algorithms such as the method of coordinate relaxation, block relaxation, conjugate gradient method, and, also, features of the selected class of nonlinear systems. We concluded about high sensitivity of algorithms for solving this class of systems from the initial approximation and the parameters of the iterative process. We proposed method for self-optimization for solving the problem for specific networks of gas transmission. Also recommendations about usageof thelocal heuristics in the solution process of the such systems are determined.