А. А. Козлов (ПГУ им. Евфросинии Полоцкой, Полоцк, Беларусь)

"Равномерная глобальная достижимость дискретных периодических систем" (14.11.2022).

Пусть $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ – множества целых и вещественных чисел соответственно; $\mathbb{R}^n$ – n-мерное векторное евклидово пространство; $\mathcal{M}_{mn}$ – пространство вещественных $m\times n$-матриц со спектральной (операторной) нормой; $\mathcal{M}_n := \mathcal{M}_{nn}$; $E \in \mathcal{M}_n$ – единичная матрица.

Рассмотрим линейную дискретную систему управления [1, с. 214]

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

в которой $\{A(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $\{B(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – ограниченные ω-периодические последовательности вещественных $n \times n$- и $n \times m$-матриц $(\omega \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ соответственно; $x = x(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы; $u = u(k) : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ – управляющее воздействие. Матричная функция $A : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_n$ также является *вполне ограниченной* [2] на $\mathbb{Z}$, т.е. при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k)$ обратима и найдётся число $a \geqslant 1$ такое, что будет справедливо неравенство $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\|A(k)\| + \|A^{-1}(k)\|) \leqslant a$.

Управление в системе (1) выберем линейным по состоянию $u(k) = U(k)x(k)$, где $U(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – некоторая последовательность вещественных $m \times n$-матриц. В результате получим замкнутую линейную однородную систему с дискретным временем

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)U(k))x(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Определение 1. Матричное управление $U : \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{mn}$ будем называть *допустимым* [3] для системы (1), если выполнены условия:

1) управление $U(\cdot)$ ограничено на $\mathbb{Z}$, т.е. справедливо неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|U(k)\| < \infty;$$

2) при каждом $k \in \mathbb{Z}$ матрица $A(k) + B(k)U(k)$ обратима, причём имеет место оценка

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| < \infty.$$

Обозначим через $X_U(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, матрицу Коши [1, с. 13–14] системы (2) с управлением U, а через $X(k,s) := X_0(k,s) \in \mathcal{M}_n$, $k,s \in \mathbb{Z}$, – матрицу Коши системы (2) с нулевым управлением, т.е. линейной дискретной системы $x(k+1) = A(k)x(k)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Будем говорить, что дискретная система (2) обладает свойством *равномерной глобальной достижимости*, если существует такое число $T > 0$, что для любых $r > 0$ и $\rho > 0$ найдётся величина $d = d(r,\rho) > 0$, при которой для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей неравенствам $\|\Lambda - E\| \leqslant r$ и $|\det\Lambda| \geqslant \rho$, и всякого числа $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует допустимое управление $U\colon [k_0, k_0+T] \to \mathcal{M}_{mn}$, удовлетворяющее при всех $k \in [k_0, k_0+T]$ оценке $\|U(k)\| \leqslant d(r,\rho)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(\,\cdot\,,\cdot\,)$ системы (2) с этим управлением на данном отрезке выполнение равенства $X_U(k_0+T, k_0) = \Lambda$.

Впервые термин "равномерная глобальная достижимость" был введен В.А. Зайцевым и Е.Л. Тонковым в работе [4] для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Свойство равномерной глобальной достижимости линейной системы (2) с дискретным временем (равно как и с непрерывным) даёт возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном целочисленном временно́м отрезке фиксированной длины $T \in \mathbb{N}$, т.е. позволяет построить такое допустимое управление U, что множество $\{x_i(k), k \in \mathbb{Z}\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями – соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ – через время T будет совпадать с произвольным наперёд заданным базисом этого пространства.

Задача о равномерной глобальной достижимости зачастую (см., например, [5, с. 281–324]) решается при условии равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей (2).

Определение 3 [6, 7]. Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $K \in \mathbb{N}$, что при любых числе $k_0 \in \mathbb{Z}$ и векторе $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдётся управление $u(k)$, $k = \overline{k_0, k_0 + K - 1}$, удовлетворяющее оценке $\|u(k)\| \leqslant \alpha \|x_1\|$, при котором для решения $x(k)$ системы (1) с этим управлением u и начальным условием $x(k_0) = 0$ обеспечивается равенство $x(k_0 + K) = x_1$.

В статье [8] автором настоящей работы получен критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В представленном докладе предложен частичный перенос этих результатов (достаточного условия) на дискретные периодические системы (2). Таким образом, основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть матрица $A(\cdot)$ системы (1) вполне ограничена, а матрица $B(\cdot)$ ограничена на $\mathbb{Z}$. Тогда если дискретная система управления (1) с ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая дискретная система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Данная теорема использует подход С.Н. Поповой, предложенный ею в [9], и основана на следующем утверждении, установленном коллективом авторов в работе [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть матрица $A(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, вполне ограничена, $B(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – ограничена, и система (1) является равномерно вполне управляемой. Тогда для любого $k_0 \in \mathbb{Z}$ существует матрица $F = F(k_0) \in \mathcal{M}_n$, обеспечивающая выполнение следующего свойства: при любых $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существуют не зависящие от k_0 величины $\beta_1(r, \rho) > 0$ и $\beta_2(r, \rho) > 0$ такие, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, главные угловые миноры которой не меньшие величины ρ, а сама матрица удовлетворяет оценке $\|H - E\| \leqslant r$, найдётся управление $U = U(k)$, $k = \overline{k_0, k_0 + K - 1}$, при котором выполняются соотношения $\max\limits_{k \in \{k_0, \ldots, k_0 + K - 1\}} \|U(k)\| \leqslant \beta_1(r, \rho) \|H - E\|$ и $\max\limits_{k \in \{k_0, \ldots, k_0 + K - 1\}} \|(A(k) + B(k)U(k))^{-1}\| \leqslant \beta_2(r, \rho)$, а для матрицы Коши системы (2) – равенство $X_U(k_0 + K, k_0) = X(k_0 + K, k_0) F H F^{-1}$.*

Также теорема 1 основана на найденной автором настоящей работы факторизации произвольной квадратной матрицы с отделённым от нуля положительным определителем.

Теорема 3. *Для любых числа $\rho > 0$ и матрицы $H \in \mathcal{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det H \geqslant \rho > 0$, найдутся величина $\theta = \theta(\rho) > 0$ и матрицы $H_i \in \mathcal{M}_n$, $i = \overline{1, 5}$, все главные угловые миноры которых не меньше величины θ, такие, что выполняется равенство $H = \prod_{i=1}^{5} H_i$.*

Литература. 1. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск, 2001. 2. Демидович В.Б. Об одном признаке устойчивости разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5. № 7. С. 1247–1255. 3. Babiarz A., Czornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems // SIAM J. on Control and Optimiz. 2017. V. 55. № 2. P. 671–692. 4. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56. 5. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск, 2012. 6. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. V. 5. № 1. P. 102–119. 7. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. 8. Козлов А.А. Критерий равномерной глобальной достижимости линейных периодических систем // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236. 9. Попова С.Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636.

В. Е. Хартовский (ФИТМ ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь) ”О методах асимптотической оценки решения линейных дифференциально-алгебраических систем с запаздыванием” (05.12.2022).

Объект исследования – линейная автономная дифференциально-алгебраическая система с запаздыванием

$$\frac{d}{dt}(Dx(t)) = A(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$y(t) = C(\lambda_h)x(t), \quad t > 0, \tag{2}$$