МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Российский Университет Транспорта

Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой

ВОЛОСОВА Н.К. (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана – Национальный исследовательский университет);

ВОЛОСОВ К.А., ВОЛОСОВА А.К. (Российский Университет Транспорта);

ПАСТУХОВ Д.Ф. ,ПАСТУХОВ Ю.Ф. (Полоцкий университет имени Евфросинии Полоцкой);

РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДЕЛОВ И ВЫЧИТАНИЙ

Москва

2024

УДК 519.6

Рецензенты:
М.И. Карлов, кандидат физико-математических наук, защитил степень к. ф.-м. н. на Механико – математическом факультете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;

Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф.

Разложение правильной рациональной дроби на простейшие последовательностью пределов и вычитаний: Учебное пособие/ Н.К. Волосова, К.А. Волосов, А.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов. – Москва: Российский Университет Транспорта, 2024. – 21 с.

В работе рассмотрен метод последовательных пределов и вычитаний дробей для разложения правильной рациональной дроби на элементарные дроби. Допускаются кратные действительные корни или кратные неразложимые квадратичные трехчлены в знаменателе дроби. В среднем для отыскания одного коэффициента элементарной дроби необходим одни предельный переход и одно вычитание дробей. Метод ППВ прост на практике.

Для студентов университетов, педагогических университетов, а также для студентов технических университетов, преподавателей, инженеров, студентов колледжей, программистов использующих в своей практической деятельности аналитические и численные методы интегрирования функций.

УДК 519.6

Российский Университет Транспорта, Полоцкий университет имени Евфросинии Полоцкой, 2024

Содержание

Введение

Данное учебное пособие посвящено методу интегрирования правильных рациональных дробей. Точнее, представлению правильной рациональной дроби в виде суммы простейших дробей. Алгоритм последовательных предельных переходов и вычитания дробей посвящен всего одной главе математического анализа – интегрированию функций представимых правильными рациональными дробями. Как известно, после замены переменных к интегрированию рациональной дроби можно свести некоторые функции с радикалами, тригонометрические выражения в виде дроби и так далее.

Новый метод ППВ по сравнению с известным методом неопределенных коэффициентов для разложения на элементарные дроби обладает рядом преимуществ. Используя метод неопределенных коэффициентов для отыскания n коэффициентов нужно вычислить разложение в n различных точках и составить систему линейных алгебраических уравнений СЛАУ из n уравнений, точное решение которых достаточно сложно при n>10. Метод последовательных пределов и вычитания дробей позволяет вычислять в среднем по одному коэффициенту на один шаг алгоритма (одно вычитание дробей и один предельный переход). Совместно со свойствами симметрии правильной рациональной дроби (четности либо нечетности исходной дроби) алгоритм ППВ позволяет ускорять процесс нахождения неизвестных коэффициентов.

Отметим, что алгоритм последовательных предельных переходов и вычитаний дробей охватывает любые возможные рациональные дроби. То есть, если знаменатель дроби содержит кратные простые корни или кратные квадратичные трехчлены неразложимые на простые множители или их комбинации.

Комбинирование обоих методов, метода неопределенных коэффициентов и метода последовательных предельных переходов и вычитаний рациональных дробей принесет большую пользу, чем один метод неопределенных коэффициентов на практике.

Несомненно, что метод последовательности вычисления пределов и вычитаний легко обобщить на любую другую функцию, не обязательно представимой в виде правильной рациональной дроби. Но при этом представимой в виде суммы элементарных функций.

В работе решено 6 примеров для всех указанных случаев знаменателя правильной рациональной дроби, выполнена проверка для каждого примера. В конце учебного пособия в корректной форме сформулирован алгоритм ППВ.

Пример 1. Знаменатель рациональной дроби имеет только кратные действительные корни.

Разложить рациональную дробь $Q(x)=\frac{1}{(x^2-1)^3}$ на простейшие дроби.

Решение. Разложим знаменатель дроби на простые делители. С учетом кратности простых делителей представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{1}{(x^2-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)} \tag{1}$$

1.1 шаг. Найдем B_1. Умножим левую и правую части (1) на $(x-1)^3$ и перейдем к пределу при

$$x\to 1:\ \frac{(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^3}=\left(\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}\right)(x-1)^3 \underset{x\to 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\left.\frac{1}{(x+1)^3}\right|_{x=1}=B_1 \Leftrightarrow B_1=\frac{1}{8}$$

1.2 шаг. Вычтем из левой части формулы (1) найденную дробь в правой части $\frac{1}{8(x-1)^3}$

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}-\frac{1}{8(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\right)=\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}$$

Приводить к общему знаменателю левую часть в последнем выражении не обязательно.

2.1 шаг. Найдем B_2. Умножим левую и правую части (1) на $(x-1)^2$ и, используя правило Лопиталя в левой части перейдем к пределу при $x\to 1$ в левой и правой части последнего выражения

$$\frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}\right)(x-1)^2 \underset{x\to 1}{\Leftrightarrow}$$

$$B_2=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)'}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}\right)'=\left.\frac{-3}{(x+1)^4}\right|_{x=1}=-\frac{3}{16}$$

3.1 шаг. Вычтем из левой части формулы (1) уже две найденные дроби в правой части $\frac{1}{8(x-1)^3}$ и $-\frac{3}{16(x-1)^2}$, получим

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}-\frac{1}{8(x-1)^3}+\frac{3}{16(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\right)=$$

$$=\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}$$

3.2 шаг. Найдем B_3. Последнее выражение умножим на x-1 и, используя правило Лопиталя в левой части перейдем к пределу при $x\to 1$ в левой и правой части последнего выражения

$$\frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}\right)(x-1) \underset{x\to 1}{\Leftrightarrow}$$

$$B_3=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}-\frac{1}{8(x-1)}+\frac{3}{16}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}+\frac{3(x-1)}{16}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left((x-1)^2\right)'}\left(\frac{1}{(x+1)^3}-\frac{1}{8}+\frac{3(x-1)}{16}\right)'=\lim_{x\to1}\frac{1}{2(x-1)}\left(\frac{-3}{(x+1)^4}+\frac{3}{16}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1}{2(x-1)'}\left(\frac{-3}{(x+1)^4}\right)'=$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{2}\left(\frac{12}{(x+1)^5}\right)=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}.$$

Заметим, что исходная рациональная дробь является четной функцией аргумента x, то есть

$$Q(-x)=\frac{1}{\left((-x)^2-1\right)^3}=\frac{1}{\left(x^2-1\right)^3}=Q(x)=\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{3}{16(x-1)^2}+\frac{3}{16(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}$$

4.1 шаг. Найдем B_4. Умножим левую и правую части (1) на $(x+1)^3$ и перейдем к пределу при

$$x\to-1:\ \frac{(x+1)^3}{(x+1)^3(x-1)^3}=\left(\frac{B_1}{(x-1)^3}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_4}{(x+1)^3}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}\right)(x+1)^3\underset{x\to-1}{\Leftrightarrow}$$
$$\left.\frac{1}{(x-1)^3}\right|_{x=-1}=B_4\Leftrightarrow B_4=-\frac{1}{8}$$

Аналогично, в силу четности функции Q(x) получим, что сумма элементарных дробей с нечетными степенями в знаменателе должна быть четной функцией.

$$\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{1}{8(x+1)^3}\underset{x\to-x}{=}\frac{1}{8(-x-1)^3}-\frac{1}{8(-x+1)^3}=\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{1}{8(x+1)^3}$$
$$\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_6}{(x+1)}\underset{x\to-x}{=}\frac{B_3}{(-x-1)}+\frac{B_6}{(-x+1)}=-\frac{B_6}{(x-1)}-\frac{B_3}{(x+1)}\Leftrightarrow B_6=-B_3=\frac{3}{16}$$

4.2 шаг. Найдем B_5. Вычтем из левой части формулы (1) найденную дробь $-\frac{1}{8(x+1)^3}$

$$\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}+\frac{1}{8(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^3}\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\right)=\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}.$$

Умножим левую и правую части (1) на $(x+1)^2$

$$\frac{1}{(x+1)}\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{B_1}{(x-1)^2}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)}+\frac{B_5}{(x+1)^2}+\frac{B_6}{(x+1)}\right)(x+1)^2$$

Используя правило Лопиталя, перейдем к пределу при x→-1

$$B_5=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)}\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x+1)'}\left(\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\right)'=\lim_{x\to-1}\left(\frac{-3}{(x-1)^4}\right)=\frac{-3}{16}.$$

Итак, окончательно получили разложение исходной правильной рациональной дроби

$$Q(x)=\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{3}{16(x-1)^2}+\frac{3}{16(x-1)}-\frac{1}{8(x+1)^3}-\frac{3}{16(x+1)^2}-\frac{3}{16(x+1)}$$

Сделаем проверку.

Поскольку $\frac{1}{8(x-1)^3}-\frac{1}{8(x+1)^3}=\frac{2\left(x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1\right)}{16(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{2\left(6x^2+2\right)}{16(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{4\left(3x^2+1\right)}{16(x-1)^3(x+1)^3}$

$$-\frac{3}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x+1)^2}=\frac{-6}{16}\frac{\left(x^2+1\right)}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{-6\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)}{16(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$\frac{3}{16}\left(\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{(x+1)}\right)=\frac{6}{16}\left(\frac{1}{x^2-1}\right)=\frac{6\left(x^2-1\right)^2}{16(x-1)^3(x+1)^3}$$

$$Q(x)=\frac{6\left(x^2-1\right)^2-6\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)+4\left(3x^2+1\right)}{16(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{16}{16(x-1)^3(x+1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3(x+1)^3}=Q(x)$$

Пример 2. Знаменатель рациональной дроби имеет действительный корень и кратный множитель с парой комплексно сопряженных корней $x_{1,2}= \pm i$. Разложить рациональную дробь $Q(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}$ на простейшие дроби.

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}+\frac{C}{x+1} \qquad (2)$$

1.1 шаг. Найдем С. Умножим левую и правую части (2) на (x+1) и перейдем к пределу при

$$x\to-1:\ \frac{(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=\left(\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}\right)(x+1)\underset{x\to-1}{\Leftrightarrow} C=\left.\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right|_{x=-1}\Leftrightarrow C=\frac{1}{4}$$

2.1 шаг. Перейдем к пределу в бесконечно удаленной точке, в которой правая часть формулы (2) имеет два последних слагаемых как нуль первого порядка. Сначала умножим левую и правую части (2) на x и перейдем к пределу при $x\to\infty$

$$\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=\left(\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}\right)x,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=0=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}\right)x\Leftrightarrow A_2=-C=-\frac{1}{4}.$$

3 шаг. Легко вычислить значение выражения (2) в точке x=0, в которой выражение (2) максимально простой вид

$$Q(0)=\frac{1}{\left(0^2+1\right)^2(0+1)}=1=\frac{A_1 0+B_1}{\left(0^2+1\right)^2}+\frac{A_2 0+B_2}{0^2+1}+\frac{C}{0+1}\Leftrightarrow C+B_1+B_2=1$$

3.1 шаг. Вычтем в левую часть все дроби, в том числе и две найденных, кроме дроби $\dfrac{B_2}{x^2+1}$

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)}-\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{B_2}{x^2+1}$$

Последнее выражение умножим на x^2 : $\dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-x^2\left(\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{x}{4(x^2+1)}\right)-\left(\dfrac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)x^2=\dfrac{x^2B_2}{x^2+1}$

3.2 шаг. Вычислим коэффициент B_2. Перейдем к пределу на плюс бесконечности с учетом

$$-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)}=\frac{1}{4}\frac{x^2+x-x^2-1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{x-1}{4(x+1)(x^2+1)}$$

$$B_2=\lim_{x\to\infty}x^2\left(-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x}{4(x^2+1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-x^2}{4(x+1)(x^2+1)}\right)=\frac{1}{4}$$

4.1 шаг. Вычтем из левой части выражения (2) три найденные дроби, получим

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}\Leftrightarrow\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{2}{4(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4.2 шаг. Найдем коэффициент A_1.Умножим последнее выражение на x^3

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{x^3}{2(x+1)\left(x^2+1\right)}=\left(\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)x^3$$

Перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^3}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{x^3}{2(x+1)\left(x^2+1\right)}=\left(\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)x^3,\ A_1=\lim_{x\to\infty}-\frac{x^3}{2(x+1)\left(x^2+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

Наконец, из пункта 3 находим $C+B_1+B_2=1,\ B_1=1-C-B_2=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

Выполним проверку

$$\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{x^2+1}+\frac{C}{x+1}=\frac{2(1-x)}{4\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1-x}{4\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{4(x+1)}=$$

$$=\frac{2(1-x)(x+1)+(1-x)(x+1)\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)^2}{4\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=\frac{2\left(1-x^2\right)+1-x^4+x^4+2x^2+1}{4\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}=Q(x)$$

Пример 3. Знаменатель рациональной дроби представляет собой квадратный трехчлен кратности два с парой комплексно сопряженных корней. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$Q(x)=\frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)}\tag{3}$$

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)}$$

1 шаг. Вычислим выражение (3) в точке x=0, получим

$$\frac{0^2+1}{\left(0^2+0+1\right)^2}=\frac{A_10+B_1}{\left(0^2+0+1\right)^2}+\frac{A_20+B_2}{\left(0^2+0+1\right)}\Leftrightarrow B_1+B_2=1$$

2.1 шаг. Найдем коэффициент A_2. Умножим последнее выражение на x и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^3+x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x^2+B_1x}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x^2+B_2x}{\left(x^2+x+1\right)},\ A_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3+x}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{A_1x^2+B_1x}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{B_2x}{\left(x^2+x+1\right)}\right]=0$$

3.1 шаг. Найдем коэффициент B_2. Умножим последнее выражение (3) на x^2 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^4+x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x^3+B_1x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x^3+B_2x^2}{\left(x^2+x+1\right)},\ B_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4+x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{A_1x^3+B_1x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right]=1$$

3.2 шаг. Вычтем из левой части (3) найденное второе слагаемое в правой части, получим

$$\frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x^2+1-\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\Leftrightarrow A_1=-1, B_1=0$$

Убедимся также в справедливости условия 1

$B_1+B_2=1\Leftrightarrow 0+1=1$

Выполним проверку

$$\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{-x}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{-x+x^2+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=Q(x)$$

Пример 4. Знаменатель рациональной дроби представляет собой квадратный трехчлен кратности три с парой комплексно сопряженных корней. В числителе дроби кубический многочлен. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$Q(x)=\frac{x^3+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}\qquad(4)$$

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{x^3+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(x^2+x+1\right)}$$

1.1 шаг. Найдем коэффициент A_3. Умножим последнее выражение на x и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^4+x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x^2+B_1x}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x^2+B_2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_3x^2+B_3x}{\left(x^2+x+1\right)}$$

$$A_3=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4+x^2+x}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_1x^2+B_1x}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_2x^2+B_2x}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{B_3x}{\left(x^2+x+1\right)}\right]=0$$

2.1 шаг. Найдем коэффициент B_3. Умножим выражение (4) на x^2 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^5+x^3+x^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x^3+B_1x^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x^3+B_2x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_3x^3+B_3x^2}{\left(x^2+x+1\right)},\ B_3=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^5+x^3+x^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_1x^3+B_1x^2}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_2x^3+B_2x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right]=0$$

3 шаг. Найдем максимально простую связь на коэффициенты выражения (4) в точке x=0

$$\frac{0^3+0+1}{\left(0^2+0+1\right)^3}=\frac{A_10+B_1}{\left(0^2+0+1\right)^3}+\frac{A_20+B_2}{\left(0^2+0+1\right)^2}+\frac{A_30+B_3}{\left(0^2+0+1\right)}\Leftrightarrow B_1+B_2+B_3=1$$

3.1 шаг. Найдем коэффициент A_2. Умножим обе части выражение (4) на x^3 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^6+x^4+x^3}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x^4+B_1x^3}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x^4+B_2x^3}{\left(x^2+x+1\right)^2}\quad A_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^6+x^4+x^3}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_1x^4+B_1x^3}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{B_2x^3}{\left(x^2+x+1\right)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6+x^4+x^3}{\left(x^2+x+1\right)^3}=1$$

4.1 шаг. Вычтем из левой части(4)три найденные дроби.

$$\frac{x^3+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x^3+x+1-\left(x^3+x^2+x\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{-x^2-1}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{B_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

4.2 шаг. Найдем B_2. Последнее выражение умножим обе части выражение (4) на x^4 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{-x^6-x^4}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x^5+B_1x^4}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{B_2x^4}{\left(x^2+x+1\right)^2}\quad B_2=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-x^6-x^4}{\left(x^2+x+1\right)^3}-\frac{A_1x^5+B_1x^4}{\left(x^2+x+1\right)^3}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^6-x^4}{\left(x^2+x+1\right)^3}=-1$$

5.1 шаг. Вычтем из левой части (4) все найденные дроби.

$$\frac{x^3+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{-x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x^3+x+1+(1-x)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{x+2}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^3}\Leftrightarrow$$

$A_1=1, B_1=2$,очевидно, условие $B_1+B_2+B_3=1\Leftrightarrow 2-1+0=1$ выполнено.

Выполним проверку.

$$\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+x+1\right)^2}+\frac{A_3x+B_3}{\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x+2}{\left(x^2+x+1\right)^3}+\frac{x-1}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{x+2+(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{x^3+x+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}=Q(x)$$

Пример 5. Знаменатель рациональной дроби представляет собой два квадратных трехчлена кратности один с парами комплексно сопряженных корней. Старшие коэффициенты квадратных трехчленов имеют равные значения. В числителе дроби кубический многочлен. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$Q(x)=\frac{x^3+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2-x+1\right)}\qquad(5)$$

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{x^3+1}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A_1x+B_1}{\left(x^2+x+1\right)}+\frac{A_2x+B_2}{\left(x^2-x+1\right)}$$

1.1 шаг. Найдем коэффициент A_1 и A_2. Умножим последнее выражение на x и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^4+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\frac{A_1x^2+B_1x}{\left(x^2+x+1\right)}+\frac{A_2x^2+B_2x}{\left(x^2-x+1\right)}$$

$$A_2+A_1=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^4+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}-\frac{B_1x}{\left(x^2+x+1\right)}+\frac{B_2x}{\left(x^2-x+1\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=1$$

1.2 шаг. Вычтем из левой части выражения(5) две дроби с коэффициентами A_1,A_2, получим

$$\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}-\left(\frac{A_1x}{(x^2+x+1)}+\frac{A_2x}{(x^2-x+1)}\right)=\frac{x^3+1-(A_1+A_2)(x^3+x)+x^2(A_1-A_2)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{1-x+x^2(A_1-A_2)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{B_1}{(x^2+x+1)}+\frac{B_2}{(x^2-x+1)}$$

2.1 шаг. Умножим последнее выражение на x^2 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$\frac{x^2-x^3+x^4(A_1-A_2)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\left(\frac{B_1}{(x^2+x+1)}+\frac{B_2}{(x^2-x+1)}\right)x^2 \underset{x\to\infty}{\Leftrightarrow} A_1-A_2=B_1+B_2$$

3a) шаг. Вычислим выражение (5) в точке x=0, получим

$$B_1+B_2=1$$

Последнее условие используем для пункта 2.1

$$A_1-A_2=B_1+B_2=1 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1-A_2=1 \\ A_1+A_2=1 \end{cases} \Leftrightarrow A_1=1, A_2=0$$

3b) шаг. Вычислим выражение (5) в точке x=-1, получим

$$Q(-1)=\frac{(-1)^3+1}{((-1)^2-1+1)((-1)^2+1+1)}=\frac{-A_1+B_1}{((-1)^2-1+1)}+\frac{-A_2+B_2}{((-1)^2+1+1)} \Leftrightarrow B_1-A_1+\frac{B_2-A_2}{3}=0$$

$$B_1-A_1+\frac{B_2-A_2}{3}=0, \begin{cases} B_1+\dfrac{B_2}{3}=A_1+\dfrac{A_2}{3}=1+0=1 \\ B_1+B_2=1 \Rightarrow B_2=0, B_1=1 \end{cases}$$

Окончательно, получили разложение исходной рациональной дроби на простейшие

$$Q(x)=\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x+1}{(x^2+x+1)}$$

Выполним проверку

$$Q(x)=\frac{x^3+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x+1}{(x^2+x+1)}$$

Замечание. Если числитель исходной рациональной дроби делится нацело на некоторую степень квадратичного трехчлена в знаменателе, то слагаемое в разложении дроби на простейшие с той же степенью квадратичного трехчлена в знаменателе отсутствует, как в примере 5.

Пример 6. Знаменатель рациональной дроби представляет собой квадратный трехчлен кратности восемь с парами комплексно сопряженных корней. В числителе дроби многочлен шестой степени. Разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби

$$Q(x)=\frac{x^6+1}{(x^2+1)^8} \qquad (6)$$

Решение. Представим исходную дробь в виде суммы простейших дробей согласно правилу [1],[2]

$$Q(x)=\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}=\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}+\frac{B_3}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{B_4}{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{B_5}{\left(x^2+1\right)^4}+\frac{B_6}{\left(x^2+1\right)^3}+\frac{B_7}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{B_8}{\left(x^2+1\right)}$$

В силу четности исходной рациональной дроби каждая простейшая рациональная дробь в сумме также должна быть четной функцией, а это значит, что в числителях простейших дробей отсутствуют линейные по x слагаемые. Именно этим фактом объясняется вид правой части разложения правильной рациональной дроби в примере 6.

1.1 шаг. Найдем коэффициент B_8. Умножим последнее выражение на x^2 и перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$B_8=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}\right)x^2=0$$

2.1 шаг. Найдем B_7. Выражение(6) умножим на x^4 перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$B_7=\lim_{x\to\infty}x^4\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}\right)=0$$

3.1 шаг. Найдем B_6. Выражение(6) умножим на x^6 перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$B_6=\lim_{x\to\infty}x^6\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}\right)=0$$

4.1 шаг. Найдем B_5. Выражение(6) умножим на x^8 перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$B_5=\lim_{x\to\infty}x^8\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}\right)=0$$

5.1 шаг. Найдем B_4. Выражение(6) умножим на x^{10} перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$B_4=\lim_{x\to\infty}x^{10}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}\right)=1$$

5.2 шаг. Вычтем из левой части выражения (6) все найденные дроби

$$\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}=\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}+\frac{B_3}{\left(x^2+1\right)^6}$$

6.1 шаг. Вычислим коэффициент B_3. Умножим последнее выражение на x^{12} перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$x^{12}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}\right)=\left(\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}+\frac{B_3}{\left(x^2+1\right)^6}\right)x^{12}\underset{x\to\infty}{\Leftrightarrow}$$

$$B_3=\lim_{x\to\infty}\left[x^{12}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}-\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x^{12}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{18}+x^{12}}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{x^{12}}{\left(x^2+1\right)^5}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{18}+x^{12}-x^{12}\left(x^2+1\right)^3}{\left(x^2+1\right)^8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{18}+x^{12}-x^{12}\left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^8}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{18}+x^{12}-x^{12}\left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^8}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^{16}-3x^{14}}{\left(x^2+1\right)^8}=-3$$

6.2 шаг. Вычтем из левой части выражения (6) все найденные дроби

$$\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{3}{\left(x^2+1\right)^6}=\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}$$

7.1 шаг. Вычислим коэффициент B_2. Умножим последнее выражение на x^{14} перейдем к пределу на плюс бесконечности

$$x^{14}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{3}{\left(x^2+1\right)^6}\right)=\left(\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}+\frac{B_2}{\left(x^2+1\right)^7}\right)x^{14}$$

$$B_2=\lim_{x\to\infty}\left[x^{14}\left(\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{3}{\left(x^2+1\right)^6}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{14}}{\left(x^2+1\right)^8}\left(x^6+1-\left(x^2+1\right)^3+3\left(x^2+1\right)^2\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{14}}{\left(x^2+1\right)^8}\left(x^6+1-\left(x^6+3x^4+3x^2+1\right)+3\left(x^4+2x^2+1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{14}}{\left(x^2+1\right)^8}\left(3x^2+3\right)=3$$

7.2 шаг. Вычислим коэффициент B_1. Вычтем из левой части выражения (6) все найденные дроби

$$\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}+\frac{3}{\left(x^2+1\right)^6}-\frac{3}{\left(x^2+1\right)^7}=\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)^8}\left(x^6+1-\left(x^2+1\right)^3+3\left(x^2+1\right)^2-3\left(x^2+1\right)\right)=\frac{B_1}{\left(x^2+1\right)^8}\Leftrightarrow B_1=3\left(x^2+1\right)-3\left(x^2+1\right)=0$$

Выполним проверку, для этого запишем все найденные элементарные дроби в правой части формулы(6)

$$\frac{3}{\left(x^2+1\right)^7}-\frac{3}{\left(x^2+1\right)^6}+\frac{1}{\left(x^2+1\right)^5}=\frac{1}{\left(x^2+1\right)^7}\left(3-3\left(x^2+1\right)+\left(x^2+1\right)^2\right)=\frac{x^4-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^7}=\frac{\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^8}=$$

$$\frac{\left(x^4-x^2+1\right)\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^8}=\frac{x^6+1}{\left(x^2+1\right)^8}=Q(x)$$

Шесть решенных примеров позволяют корректно сформулировать алгоритм разложения правильной рациональной дроби на простейшие с помощью ***последовательности предельных переходов и вычитания дробей*** (сокращенно алгоритм ППВ-последовательность пределов и вычитаний).

1)Разбить знаменатель правильной рациональной дроби на простые множители и множители квадратичных трехчленов с учетом их кратности.

2)Кратность простого корня m_i в знаменателе рациональной дроби в точке $x=x_i$ будет полюсом той же кратности m_i для исходной рациональной дроби

3)Умножая последовательно обе части разложения рациональной дроби на $(x-x_i)^{m_i}$, а затем, вычисляя предел выражения при $x \to x_i$ получим коэффициент простейший дроби справа для полюса кратности m_i. Затем вычитая найденную дробь в левую часть разложения, повторим процесс. Умножим последнее выражение на $(x-x_i)^{m_i-1}$. Перейдем к пределу при $x \to x_i$ найдем коэффициент в правой части разложения при полюсе с порядком m_i -1в точке $x=x_i$.И так далее до тех пор, пока не определим коэффициент для элементарной дроби с полюсом первого порядка в точке $x=x_i$.

4) Как видно из приведенных примеров, вычисление пределов исходной дроби может повторяться несколько раз до тех пор, пока в правой части разложения рациональной дроби на элементарные появится первый ненулевой коэффициент. Именно с этого момента надлежит вычесть влево найденную ненулевую элементарную дробь, умножить на некоторую степень скобки $(x=x_i)$ последнее выражение, перейти к пределу в точке $x=x_i$. Повторить алгоритм, пока не будут найдены все коэффициенты.

5)Для квадратных трехчленов в знаменателе правильной рациональной дроби кратности два и более следует воспользоваться бесконечно удаленной точкой $x\to\infty$. Затем умножая исходную дробь на x(вычисляем первый коэффициент разложения для нуля первого порядка при $x\to\infty$). А затем на x^2 (поскольку в числителе элементарной дроби 2 неизвестных коэффициента). При этом чтобы найти второй коэффициент нужно вычесть влево найденную половину элементарной дроби и только затем умножить все выражение на x^2. В конце алгоритма следует умножить обе части выражения на x^{2mi} перейти к пределу при $x\to\infty$.

6) Полезно также вычисление дроби в точке x=0, иногда в других простых точках, чтобы получить уравнения для коэффициентов элементарных дробей. Приведенные примеры показывают, что алгоритмом ППВ удается найти не менее половины неизвестных коэффициентов в разложении на элементарные дроби в самых сложных случаях, а в некоторых и все коэффициенты.

7) Алгоритм ППВ автоматически определяет случай делимости числителя и знаменателя исходной правильной рациональной дроби на множитель больше единицы. Это справедливо как для случая кратного простого корня, так и для случая кратного квадратного трехчлена. В этом случае в разложении справа отсутствует простейшая элементарная дробь справа со знаменателем $(x-x_i)^m{}_i$ максимальной кратности m_i. Либо справа отсутствует простейшая элементарная дробь справа со знаменателем $(ax^2+bx+c)^m{}_i$,$b^2-4ac<0$. Эта ситуация является сигналом, чтобы провести сокращения числителя и знаменателя правильной рациональной дроби.

8) В отличие от метода неопределенных коэффициентов, в котором составляется система линейных алгебраических уравнений, алгоритм ППВ позволяет вычислять последовательно по одному коэффициенту либо записывать простые условия с несколькими коэффициентами. Если решить систему 16 линейных уравнений с 16 неизвестными, то даже современные программные приложения типа MATHCAD не способны получить решения СЛАУ в символьном рациональном виде с двойной точностью. Но в работе решен пример (6) алгоритмом ППВ без программных приложений (найдены 16 коэффициентов разложения с учетом симметрии задачи – четности или нечетности исходной рациональной дроби).

Литература

1. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие / В. Ф. Бутузов, Н. Ч. Крутицкая, Г. Н. Медведев, А. А. Шишкин. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 480 с. – ISBN 5-9221-0284-2. – EDN UGLCGJ.
2. Математический анализ в вопросах и задачах : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В. Ф. Бутузов [и др.] ; под ред. В. Ф. Бутузова. – Изд. 6-е, испр.. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2008. – 479 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). – ISBN 978-5-8114-0845-0. – EDN QJTTXD.

3. Иванов, Г. Г. Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 4(63). – С. 22-35. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35. – EDN WYUUAS.
4. Алиева, С. Т. Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка / С. Т. Алиева, К. Б. Мансимов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 4(63). – С. 5-11. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11. – EDN ACKUPX.
5. Сидлер, И. В. О численном решении начально-краевой задачи для гиперболической системы в модели гидравлического удара / И. В. Сидлер // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023) : материалы 5-й Международной конференции, Иркутск, 18–23 сентября 2023 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2023. – С. 209-212. – EDN UDJJGX.
6. Иванов, Г. Г. Компактность в пространстве квази абсолютно непрерывных функций / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3(62). – С. 13-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-3-13-18. – EDN LUSSLH.
7. Лутманов, С. В. Приведение возмущенного движения точки на базовую траекторию при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления / С. В. Лутманов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3(62). – С. 44-54. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-3-44-54. – EDN OIOEOV.
8. Макеев, Н. Н. Динамика перманентного движения твердого тела в псевдоевклидовом пространстве / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3(62). – С. 55-63. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-3-55-63. – EDN OPCJKF.
9. Поморцева, Т. Н. О возможности создания крупногабаритных конструкций в условиях открытого космоса / Т. Н. Поморцева, Л. А. Комар // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3(62). – С. 64-75. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-3-64-75. – EDN QHASCC.
10. Макеев, Н. Н. Динамическая модель твердого тела в магнитном поле / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 2(61). – С. 41-49. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-2-41-49. – EDN UBLHLE.
11. Гусаренко, С. А. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом / С. А. Гусаренко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 15-29. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-15-29. – EDN UBCKZF.
12. Иванов, В. Н. Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно полуопределенными матрицами системы / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 30-46. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-30-46. – EDN NKOPPN.
13. Макеев, Н. Н. К динамике твердого стержня в пространстве Лобачевского / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 54-62. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-54-62. – EDN YZBYEK.
14. Шеремет, Г. Г. Геометрическое пространство, получающееся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы, являющейся прямым произведением трех подгрупп параллельных переносов / Г. Г. Шеремет, З. И. Андреева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 1(56). – С. 14-21. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-1-14-21. – EDN PQLEGL.
15. Макеев, Н. Н. К проблеме редукции в динамике гиростата / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 1(56). – С. 22-28. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-1-22-28. – EDN TCBBXF.
16. Еленская, Е. Ю. Множества в пополнении нормированных пространств / Е. Ю. Еленская, Ю. Н. Еленский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 26-30. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-26-30. – EDN HTKOKL.

17. Михеев, Р. А. Компьютерное нахождение четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец / Р. А. Михеев, А. А. Петров // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 46-52. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-46-52. – EDN RNQCTS.
18. Кувшинова, Е. В. Инфляция вблизи максимума потенциала для космологической модели с вращением / Е. В. Кувшинова, О. В. Сандакова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 61-66. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-61-66. – EDN FNKVUQ.
19. Сандакова, О. В. Космологическая модель V типа по Бьянки / О. В. Сандакова, Е. В. Кувшинова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 67-72. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-67-72. – EDN CIRUDB.
20. Мансимов, К. Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества / К. Б. Мансимов, Ж. Б. Ахмедова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3(58). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. – EDN THSSNA.

21. Пермский международный форум "Наука и глобальные вызовы XXI века" / М. М. Бузмакова, Е. Ю. Никитина, А. В. Черников, Л. Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 4(59). – С. 5-8. – EDN WUMBNC.
22. Бузмакова, М. М. Экспериментальное исследование реокинетики эпоксидного связующего, модифицированного фуллеренами С60 / М. М. Бузмакова, В. Г. Гилев, С. В. Русаков // Вестник Пермского университета. Физика. – 2019. – № 2. – С. 35-40. – DOI 10.17072/1994-3598-2019-2-35-40. – EDN JMTDXL.
23. Вдовин, И. Е. Компьютерное моделирование случайной плотной упаковки несжимаемых окружностей на плоскости / И. Е. Вдовин, М. М. Бузмакова // Актуальные проблемы математики, механики и информатики : Сборник статей по материалам студенческой конференции, Пермь, 24 апреля – 20 2023 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2023. – С. 85-89. – EDN EHUOBR.
24. Романова, М. П. Модель структуры тонкой пленки эпоксидной смолы, модифицированной углеродными нанотрубками, с учетом наличия ван-дер-Ваальсова взаимодействия / М. П. Романова, М. М. Бузмакова // Актуальные проблемы математики, механики и информатики : сборник статей по материалам студенческой конференции, Пермь, 25 мая – 10 2021 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2021. – С. 52-56. – EDN BCPMRU.
25. Шеремет, Г. Г. Склеивание" трехмерного евклидова пространства с помощью циклической группы, порожденной осевой скользящей симметрией / Г. Г. Шеремет, З. И. Андреева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3(58). – С. 11-17. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-11-17. – EDN HPIPAL.
26. Иванов, В. Н. Уравнения движения в гамильтоновых переменных систем твердых тел с замкнутыми кинематическими цепями / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 4(59). – С. 18-28. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-4-18-28. – EDN CAQRJE.
27. Макеев, Н. Н. Квазиперманентное движение сложной механической системы / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 4(59). – С. 29-35. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-4-29-35. – EDN ZLRXZH.
28. Гуревич, Г. С. Математическое моделирование процессов в гравитационном поле макротел / Г. С. Гуревич // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 1(52). – С. 16-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-1-16-24. – EDN OWIKLE.
29. Макеев, Н. Н. Применение динамической модели Лоренца к моделированию движения твердого тела / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 1(52). – С. 32-36. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-1-32-36. – EDN LLJXEK.
30. Осипенко, М. А. Контактная задача об изгибе двух балок с внутренним шарниром / М. А. Осипенко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 1(52). – С. 37-42. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-1-37-42. – EDN EOARFL.

31. Осипенко, М. А. Контактная задача об изгибе двух балок с внутренним шарниром / М. А. Осипенко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 1(52). – С. 37-42. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-1-37-42. – EDN EOARFL.
32. Иванов, Г. Г. Аппарат производных чисел и возможности применения / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 3(54). – С. 5-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-3-5-18. – EDN XUJYBD.
33. Лутманов, С. В. Оптимальное управление реактивным снарядом по критерию "минимум силы" / С. В. Лутманов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 3(54). – С. 42-51. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-3-42-51. – EDN KAKZZP.
34. Аптуков, В. Н. Имитационное моделирование процесса роста поврежденности в зернистом минеральном агрегате / В. Н. Аптуков, Л. В. Ландик, Р. К. Вершинин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 5-13. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-5-13. – EDN RJZXRI.
35. Лутманов, С. В. Вывод тяжелой материальной точки на базовую траекторию при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления / С. В. Лутманов, О. А. Хотько // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 19-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-19-24. – EDN ETZDNU.
36. Макеев, Н. Н. К теории гамильтоновых систем со связями / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 25-31. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-25-31. – EDN BEFDEM.
37. Полосков, И. Е. Расчет характеристик ускоренного движения автомобиля по дороге со случайным микропрофилем / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 32-38. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-32-38. – EDN ADSMIF.
38. Полосков, И. Е. Численно-аналитическая схема расчета моментных характеристик вектора состояния стохастической дифференциально-разностной системы / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 3(50). – С. 56-65. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-3-56-65. – EDN VNYRBN.
39. Полосков, И. Е. Численно-аналитическая схема расчета моментных характеристик вектора состояния стохастической дифференциально-разностной системы / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 3(50). – С. 56-65. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-3-56-65. – EDN VNYRBN.
40. Косарева, А. А. Лексикографический метод расположения членов многочлена и его применение для решения задач по теме "симметрические многочлены” / А. А. Косарева, О. В. Бобылева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 4(51). – С. 11-13. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-4-11-13. – EDN SSEIAW.
41. Лутманов, С. В. Игровые задачи о встрече движений в среде с сопротивлением, линейно зависящим от вектора скорости / С. В. Лутманов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 4(51). – С. 34-42. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-4-34-42. – EDN AXRXAV.
42. Ощепкова, Н. В. Исследование математической модели воспитания группы роботов / Н. В. Ощепкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 1(44). – С. 39-43. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-1-39-43. – EDN VSJBPW.
43. Полосков, И. Е. Анализ случайных колебаний в модельном линейном стохастическом гиперболическом уравнении с кратными постоянными запаздываниями / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 1(44). – С. 48-57. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-1-48-57. – EDN COQNPI.
44. Митин, В. Ю. Фрактальный анализ данных рельефа местности на основе метода минимального покрытия / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-5-10. – EDN SYLLPH.
45. Панов, В. Ф. Вектор поляризации электромагнитного излучения во Вселенной типа Гёделя / В. Ф. Панов, В. Н. Павелкин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 24-26. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-24-26. – EDN SNMDNH.

46. Полосков, И. Е. Схема вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных линейных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 36-45. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-36-45. – EDN MFJAWM.
47. Фиговский, О. Л. Строительные артиллерийские орудия: технические решения и результаты эксплуатации / О. Л. Фиговский, О. Г. Пенский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 55-59. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-55-59. – EDN YWOQIK.
48. Аптуков, В. Н. Особенности моделирования и оптимизации баллистических свойств многослойных преград при высокоскоростном ударе / В. Н. Аптуков, А. В. Дубинский, А. Р. Хасанов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 32-37. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-32-37. – EDN MPTLTY.
49. Иванов, В. Н. Матричные уравнения движения систем твердых тел в гамильтоновых переменных. Системы со структурой дерева / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 38-46. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-38-46. – EDN LSMFFH.
50. Иванов, В. Н. Матричные уравнения движения систем твердых тел в гамильтоновых переменных. Системы со структурой дерева / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 38-46. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-38-46. – EDN LSMFFH.
51. Стрелкова, Н. А. Минимизация линейной комбинации времени и энергетических затрат в задаче оптимального управления вращениями динамически симметричного твердого тела / Н. А. Стрелкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 81-85. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-81-85. – EDN SQGSIV.
52. Шифрование данных на базе эллиптических кривых : Учебное пособие / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва : Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 52 с. – EDN RPATBZ.
53. Сборник статей по гидродинамике / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – 2-е издание. – Москва: Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, 2023. – 231 с. – EDN UDVEDI.
54. Алгебраические методы шифрования: Учебное пособие / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – четвёртое издание. – Москва: Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 52 с. – EDN QZKSJC.
55. Несколько теорем о числах Кармайкла / Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, К. А. Волосов [и др.]. – Москва : Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 33 с. – EDN ONPGFT.
56. Пастухов, Ю. Ф. Уровни восстановления данных для плотности распределения Чамперноу с ненулевым параметром лямбда / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Гражданская авиация: история и современность: сборник статей V международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 30–31 марта 2023 года / Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации. – Санкт-Петербург: Б. и., 2023. – С. 109-112. – EDN EKKCFF.
57. Пастухов, Ю. Ф. Уровни квантования для плотности распределения Чамперноу с параметром лямбда, не равным 0 / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов // Гражданская авиация: история и современность: сборник статей V международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 30–31 марта 2023 года / Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации. – Санкт-Петербург: Б. и., 2023. – С. 112-116. – EDN MJXBLX.
58. Решение и структура решений неоднородных алгебраических уравнений первой степени в кольце вычетов ZM / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, С. В. Чернов // Новые технологии в учебном процессе и производстве: Материалы XXI Международной научно-технической конференции, посвящённой 35-летию полета орбитального корабля-ракетоплана многоразовой транспортной космической системы "Буран", Рязань, 12–14 апреля 2023 года / Под редакцией А.Н.

Паршина. – Рязань: Рязанский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2023. – С. 705-706. – EDN WBGDJL.

59. Свойства нетривиальных решений (аннуляторов) алгебраических уравнений первой степени в кольце вычетов ZM по модулю m / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, А. К. Волосова // Новые технологии в учебном процессе и производстве: Материалы XXI Международной научно-технической конференции, посвящённой 35-летию полета орбитального корабля-ракетоплана многоразовой транспортной космической системы "Буран", Рязань, 12–14 апреля 2023 года / Под редакцией А.Н. Паршина. – Рязань: Рязанский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2023. – С. 707-708. – EDN WPMPTI.
60. Поиск наилучшего приближения для функции плотности логарифмического распределения / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов, Н. К. Волосова // Новые технологии в учебном процессе и производстве: Материалы XXI Международной научно-технической конференции, посвящённой 35-летию полета орбитального корабля-ракетоплана многоразовой транспортной космической системы "Буран", Рязань, 12–14 апреля 2023 года / Под редакцией А.Н. Паршина. – Рязань: Рязанский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2023. – С. 710-712. – EDN YMOUQT.
61. Метод точного восстановления данных для обратной функции плотности логарифмического распределения / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов, Н. К. Волосова // Новые технологии в учебном процессе и производстве: Материалы XXI Международной научно-технической конференции, посвящённой 35-летию полета орбитального корабля-ракетоплана многоразовой транспортной космической системы "Буран", Рязань, 12–14 апреля 2023 года / Под редакцией А.Н. Паршина. – Рязань: Рязанский институт (филиал) федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2023. – С. 712-714. – EDN QZWXGV.
62. Квазилинейность в расслоенных пространствах скоростей конечного порядка - теорема о локальном представлении слоевых координат в виде функциональной квазилинейной комбинации преобразованных координат / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2023. – № 95-6. – С. 124-127. – DOI 10.18411/trnio-03-2023-308. – EDN QBTLBX.
63. Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики: Учебное пособие для практических занятий по курсу Уравнения математической физики / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 10 с. – EDN QQYOOA.
64. Алгебраические методы шифрования: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность / Д. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, Ю. Ф. Пастухов [и др.]. – 3-е издание. – Москва: Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», 2022. – 37 с. – EDN SNZVRK.
65. Вакуленко, С. П. Способы передачи QR-кода в компьютерной стеганографии / С. П. Вакуленко, Н. К. Волосова, Д. Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 5(78). – С. 14-25. – EDN YNQNQT.
66. О двух численных алгоритмах для решения конечномерной задачи Лагранжа на экстремум с ограничениями типа равенств: Учебное пособие для практических занятий по предметам Методы оптимизации и Математическое программирование / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – 1-е издание. – Москва: Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», 2022. – 33 с. – EDN ZHJIPU.
67. Моделирование систем. Лекции. Лабораторный практикум / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова [и др.]. – 3-е дополненное. – Новополоцк: Учреждение образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»", 2022. – 142 с. – EDN PYJINB.
68. Сборник статей по гидродинамике: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: ПГУ, 2022. – 219 с. – EDN UAADIO.

69. Пастухов, Ю. Ф. Вычисление наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для функции плотности t-распределения / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов // Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве : Сборник тезисов докладов II Международного форума, Санкт-Петербург, 09 ноября 2022 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2022. – С. 28-32. – EDN HHLYRI.
70. Пастухов, Ю. Ф. Нахождение наилучшего приближения в метрике квадратичного отклонения ступенчатыми функциями для обратной функции плотности t-распределения / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов // Математические методы и модели в высокотехнологичном производстве: Сборник тезисов докладов II Международного форума, Санкт-Петербург, 09 ноября 2022 года. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2022. – С. 33-35. – EDN IKBPEU.
71. Некоторые конечные методы решения уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий / Н. К. Волосова, А. К. Волосова, К. А. Волосов [и др.]. – Москва: Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», 2022. – 33 с. – EDN PWLFIQ.
72. Решение интегральных уравнений Фредгольма с невырожденными ядрами последовательными приближениями квадратурой с десятым порядком погрешности / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 85-2. – С. 21-25. – DOI 10.18411/trnio-05-2022-55. – EDN CKXBNI.
73. Матрица Гессе по старшим производным локальной записи гладкой функции в расслоении скоростей - тензор второго ранга типа (0,2) / Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, К. А. Волосов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 85-2. – С. 28-32. – DOI 10.18411/trnio-05-2022-57. – EDN PLVSFG.
74. Сравнение методов прогонки столбцов и строк неизвестной матрицы для решения уравнения Пуассона в переменных функция тока-вихрь в гидродинамической задаче для закрытой прямоугольной каверны / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 87-2. – С. 48-56. – DOI 10.18411/trnio-07-2022-48. – EDN AOYFJY.
75. Матричное решение интегральных уравнений фредгольма квадратурой с двенадцатым порядком погрешности / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 89-1. – С. 105-112. – DOI 10.18411/trnio-09-2022-31. – EDN LBUIKP.
76. Тензор Пуассона в расслоении струй гладких функций / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, М. И. Карлов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 89-1. – С. 116-127. – DOI 10.18411/trnio-09-2022-33. – EDN GCKVKH.
77. Дифференциальные уравнения связи - преобразование слоевых координат в присоединенных расслоенных пространствах скоростей конечного порядка / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 91-7. – С. 151-154. – DOI 10.18411/trnio-11-2022-372. – EDN DIABFM.
78. Численные методы. Лекции. Численный практикум / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова [и др.]. – 3-е издание, дополненное. – Новополоцк. Москва: Учреждение образования «Полоцкий государственный университет», 2021. – 237 с. – EDN CLJJLX.
79. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в "закрытой“ кювете / Н. К. Волосова, М. А. Басараб, А. К. Волосова [и др.] // Некоторые Актуальные проблемы современной математики и математического образования: Материалы 74-й научной КОНФЕРЕНЦИИ» ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2021», Санкт-Петербург, 05–10 апреля 2021 года / Российская Академия Образования; Академия информатизации образования; Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Кафедра математического анализа, Кафедра компьютерной инженерии и программотехники. – Санкт-Петербург: ООО "Издательство ВВМ", 2021. – С. 208-213. – EDN HREUQK.
80. Пастухов, Д. Ф. Построение нестационарных моделей в оболочке ANSYS Fluent: учебное пособие / Д. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, Ю. Ф. Пастухов. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2018. – 45 с. – EDN SBWQRY.

Волосова Наталья Константиновна (Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана – Национальный исследовательский университет);

Волосов Константин Александрович, Волосова Александра Константиновна (Российский Университет Транспорта);

Пастухов Дмитрий Феликсович, Пастухов Юрий Феликсович (Полоцкий университет имени Евфросинии Полоцкой)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ НА ПРОСТЕЙШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДЕЛОВ И ВЫЧИТАНИЙ

Москва

2024