УДК 512.542

О. В. ГОЛУБЕВА

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОДГРУПП ШМИДТА У КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В работе рассматриваются только конечные группы и используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в [1 – 6]. В частности, pd-группа — это группа, порядок которой делится на простое число p; группа Шмидта — ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны; p-замкнутая (p-нильпотентная) группа — это группа, у которой нормальна силовская p-подгруппа (силовское p-дополнение). Если $\mathfrak{R}$ — множество групп, то группу X назовем $\mathfrak{R}$-свободной, если в X нет подгрупп H и K таких, что $K \triangleleft H$ и H/K изоморфна подгруппе из $\mathfrak{R}$.

Теорема 1 [7, с. 34]. *Конечная группа тогда и только тогда 2-замкнута, когда все ее подгруппы Шмидта 2-замкнуты. В частности, если в группе нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта, то она 2-замкнута.*

В следующей теореме мы исследуем ситуацию, когда в конечной группе нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта, порядок которых взаимно прост с числом $p > 2$.

Лемма 1. *Пусть $A \triangleleft B$ и группа B/A содержит pd-подгруппу Шмидта $H/A = \overline{H}$, которая обладает одним из свойств:*

(1) $\overline{H}$ является p-замкнутой группой;

(2) $\overline{H}$ является p-нильпотентной группой;

(3) $\overline{H}$ является p-сверхразрешимой группой.

Тогда и группа B содержит вне A подгруппу Шмидта H_0 ($\subseteq H$), которая обладает тем же свойством (1), (2) или (3), что и $\overline{H}$, причем $\Pi(\overline{H}) = \Pi(H_0)$ и либо $\overline{H}_0 \cong \overline{H}$, либо $\overline{H}_0$ — примарная группа и $\langle \overline{H}_0^{\overline{H}} \rangle = \overline{H}$.

Доказательство. Среди подгрупп, порождающих вместе с A всю группу H, выберем наименьшую по включению L. По лемме 2 из [8] $A \bigcap L \subseteq \Phi(L)$. Тогда $\overline{H} = H/A = AL/A \cong L/L \bigcap A$. Из доказательства теоремы III.3.5 в [1] следует, что если $\overline{H}$ обладает свойством (1), то и L им обладает; если $\overline{H}$ обладает свойством (2), то и L им обладает. Из теоремы VI.8.6 в [1] следует, что если $\overline{H}$ является p-сверхразрешимой группой, то и L — p-сверхразрешимая группа. То, что $\Pi(\overline{H}) = \Pi(L)$, следует из теоремы III.3.8 в [1]. Так как $L/L \bigcap A$ — группа Шмидта, то L — ненильпотентная группа. Значит, она содержит минимальную ненильпотентную подгруппу H_0, которая наследует любое из свойств (1) — (3) группы L. Ясно, что $H_0 \not\subseteq L \bigcap A$, так как последняя — нильпотентная группа. Из $H_0 \subseteq L$ теперь следует, что $H_0 \not\subseteq A$.

Пусть $\overline{H}_0 = H_0A/A \cong H_0/H_0 \bigcap A$. Если H_0 — p-замкнутая группа, то из свойств групп Шмидта [9 – 11] следует, что либо $\overline{H}_0$ есть группа Шмидта, либо $\overline{H}_0$ есть циклическая q-группа, где $q \neq p$, $q \in \Pi(\overline{H})$. В первом случае, очевидно, $\overline{H}_0 \cong \overline{H}$, так как собственные подгруппы в $\overline{H}$ являются нильпотентными. Во втором случае S_p-подгруппа T из H_0 лежит в $L \bigcap A \subseteq \Phi(L)$ по построению H_0 в L. Поэтому $T \triangleleft H_0$ и H_0 является p-замкнутой группой. В частности, она не может быть p-нильпотентной группой. Если $\langle \overline{H}_0^{\overline{H}} \rangle = \overline{R} \subset \overline{H}$, то из $\overline{R} \triangleleft \overline{H} \cong L/L \bigcap A$ и $L \bigcap A \subseteq \Phi(L)$ следует ввиду теоремы III.3.5 в [1], что $\overline{R}$ и R — нильпотентные группы. Это невозможно ввиду $H_0 \subseteq R$. Если H_0 — p-нильпотентая группа, то $\overline{H}_0$ есть либо группа Шмидта, либо циклическая p-группа и аналогично доказывается, что $\langle \overline{H}_0^{\overline{H}} \rangle = \overline{H}$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть X — конечная группа и p — нечетный простой делитель порядка $|X|$ группы X, $p > 2$. Если $p = 3$, то пусть X является $\{L_2(7), L_3(3)\}$-свободной группой. Предположим, что в X нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта, порядки которых взаимно просты с p. Тогда X является разрешимой группой с 2-замкнутой холловой p'-подгруппой.*

Доказательство. Пусть M — произвольная собственная подгруппа из X. Если p не делит $|M|$, то из условия теоремы и теоремы 1 следует, что M является 2-замкнутой группой, и, в частности, разрешимой (по известному результату Фейта — Томпсона).

Если p делит $|M|$, то M удовлетворяет условиям теоремы и предположение индукции дает нам, что M — разрешимая группа.

Таким образом, все собственные подгруппы из X являются разрешимыми.

Предположим, что $1 \neq K \triangleleft X$ и $K \subset X$. Из леммы 1 следует, что группа $X/K = \overline{X}$ не может иметь 2-нильпотентных $2d$-подгрупп Шмидта порядка взаимно простого с p. Применение индукции дает нам, что $\overline{X}$ — разрешимая группа. Из разрешимости K тогда следует и разрешимость группы X. Тогда в X имеется холлова p'-подгруппа H (см., например, теорему 1.8.1 в [6]), которая по теореме 1 2-замкнута.

Поэтому впредь можно считать, что X — простая неабелева группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Из описания таких групп Дж. Томпсоном ([1], замечание II.7.5) следует, что X изоморфна одной из следующих групп: $L_2(2^r)$, r — простое число; $L_2(3^r)$, r — нечетное простое число; $L_2(r)$, r — простое число, большее трех и такое, что $r^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$; $Sz(2^r)$, r — нечетное простое число; $L_3(3)$.

Пусть сначала $X \cong L_2(q^n)$, q — простое нечетное число. Тогда ([1], теорема II.8.1) $|X| = (1/2) \cdot q^n \cdot (q^n - 1)(q^n + 1)$. Ясно, что $(q^n - 1, q^n + 1) = 2$. Поэтому $((q^n - 1)/2, (q^n + 1)/2) = 1$.

Если $p = q$, то либо $(q^n - 1)/2$, либо $(q^n + 1)/2$ имеет простой нечетный делитель t. (Если $(q^n - 1)(q^n + 1)$ есть степень числа 2, то X оказалась бы разрешимой группой порядка $q^n 2^\alpha$). Но тогда из теоремы II.8.27(3) из [1] следует, что в X имеется 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта порядка $2t$ и, очевидно, $(p, 2t) = 1$. Противоречие с условием показывает нам, что $p \neq q$.

Пусть p делит $(q^n - 1)/2$. Если число $(q^n - 1)/2$ или число $(q^n + 1)/2$ имеют нечетный простой делитель $t \neq p$, то опять по теореме II.8.27(3) из [1] в X имеется подгруппа Шмидта порядка $2t$ и, очевидно, $(p, 2t) = 1$. Опять имеем противоречие с условием теоремы. Поэтому пусть $(q^n - 1)/2 = p^\alpha$, $(q^n + 1)/2 = 2^{\beta - 1}$. Тогда $q^n - 1 = 2 \cdot p^\alpha$, $q^n + 1 = 2^\beta$. Но тогда $|X| = (1/2) \cdot q^n \cdot (q^n + 1)(q^n - 1) = q^n \cdot 2^\beta \cdot p^\alpha = 2^\beta p^\alpha q^n$. Из $(q^n + 1) - (q^n - 1) = 2^\beta - 2 \cdot p^\alpha = 2$ следует, что $2^{\beta - 1} = p^\alpha + 1$, и тогда из [12] следует, что $\alpha = 1$. Точно так же из $q^n + 1 = 2^\beta$ и [12] следует, что $n = 1$. Поэтому $|X| = 2^\beta \cdot p \cdot q$ и $p < q$ (так как p делит $q - 1$). Простые группы такого порядка описаны [5, с. 20]. В частности, $p = 3$, $q \in \{5, 7, 13, 17\}$. Но $q = 2^\beta - 1$, $3 = p = 2^{\beta - 1} - 1$. Поэтому $\beta - 1 = 2$, $\beta = 3$, $q = 7$, т. е. $X \cong L_2(7)$, что исключено в условии теоремы. Таким образом, этот случай исключается из рассмотрения.

Пусть теперь p делит $(q^n + 1)/2$. Если числа $(q^n - 1)/2$ и $(q^n + 1)/2$ имеют нечетный простой делитель $t \neq p$, то по теореме II.8.27(3) [1] в X имеется подгруппа Шмидта порядка $2t$, $(2t, p) = 1$, что невозможно по условию. Поэтому пусть $(q^n - 1)/2 = 2^{\alpha - 1}$, $(q^n + 1)/2 = p^\beta$. Тогда $q^n - 1 = 2^\alpha$, $q^n + 1 = 2p^\beta$, $(q^n + 1) - (q^n - 1) = 2p^\beta - 2^\alpha = 2$. Откуда $p^\beta = 2^{\alpha - 1} + 1$. Из $p^\beta = 2^{\alpha - 1} + 1$, $q^n = 2^\alpha + 1$ и [12] следует, что $\beta = 1$, $n = 1$, p и q — простые числа Ферма, или, что $\alpha = 3$, $n = 2$, $q = 3$, т. е. $p^\beta = 5$, $q^n = 3^2$, или, что $\alpha - 1 = 3$, $\beta = 2$, $p = 3$, $q^n = 17$. В любом из этих трех случаев имеем, что $|X| = (1/2) q^n (q^n - 1)(q^n + 1) = (1/2) q^n 2^\alpha \cdot 2 \cdot p^\beta = 2^\alpha \cdot p \cdot q$ или $|X| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, или $|X| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$. В последних двух случаях $p = 5$ и $X \cong L_2(9)$, $X \cong L_2(17)$ и $p = 3$. Но в $L_2(9)$ есть подгруппа Шмидта порядка 6 и (5,6)=1, а в $L_2(17)$ есть подгруппа Шмидта порядка $2 \cdot 17$ и $(3, 2 \cdot 17) = 1$ [13]. Если же $|X| = 2^\alpha \cdot p \cdot q$, где p и q — простые числа Ферма, где $p < q$, то опять используем описание простых групп, порядок которых делится на 3 различных простых числа (см., например, [5, с. 20]). Таким образом, $p = 3$, $q \in \{5, 7, 13, 17\}$. Но тогда $3 = p^\beta = 2^{\alpha - 1} + 1$ влечет $\alpha - 1 = 1$, $\alpha = 2$, $q = 2^2 + 1 = 5$, $X \cong L_2(5)$. В группе X тогда имеется подгруппа Шмидта порядка $2 \cdot 5$ и $(3, 10) = 1$. Имеем противоречие с условием теоремы.

Пусть теперь $X \cong L_2(2^r)$, где r — простое число. Тогда $|X| = 2^r(2^r-1)(2^r+1)$. Если (2^r-1), то существует простой нечетный делитель t числа (2^r+1), а если p делит $(2^r$ существует простой нечетный делитель t числа (2^r-1). В любом случае из теоремы I в [1] следует, что в X есть 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта порядка $2t$, $(2t,$ Противоречие с условием исключает из рассмотрения и этот случай.

Если $X \cong Sz(2^r)$, то из теоремы XI.3.3 в [2] следует, что $|X| = 2^{2r}(2^r-1)(2^{2r}+$ теоремы XI.3.10 в [2] следует, что в X имеются холловские подгруппы F, H, A_1, A_2 п соответственно 2^{2r}, 2^r-1, $2^r - 2\cdot 2^{(r-1)/2}+1$ и $2^r+2\cdot 2^{(r-1)/2}+1$, нормализаторы к имеют вид соответственно $F\lambda H$, $H\lambda Z_2$, $A_1\lambda Z_4$, $A_2\lambda Z_4$ и являются группами Фробениуса того, $(2^{2r}+1, 2^r-1) = 1$. Поэтому, если p — нечетный простой делитель числа $2^{2r}+$ подгруппе $H\lambda Z_2$ найдется p-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта порядка $2z$ и $(2z,$ Если же p — нечетный простой делитель числа 2^r-1, то в подгруппах $A_1\lambda Z_4$ и $A_2\lambda Z_4$ н 2-нильпотентная $2d$-подгруппа Шмидта порядка $2z$ с $(2z,p)=1$. Поэтому $X \not\cong Sz(2^r)$.

Если $X \cong L_3(3)$, то по [13] $|X| = 2^4\cdot 3^3\cdot 13$ и в X имеются максимальные под четырех типов: $E_9\lambda Z_2S^4$ (2 класса), $Z_{13}\lambda Z_3$, S^4. Если $p=13$, то в X найдется 2-нильпот $2d$-подгруппа Шмидта порядка 6 (это S^3 в S^4). Если же $p=3$, то в X нет $\{2,13\}$-по Поэтому для $p=3$ группа $L_3(3)$ не должна быть секцией группы X, что указано в у теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть X — конечная группа с S_p-подгруппой P, $p>3$. Если все под Шмидта из X являются $\{p,q\}$-группами, q — фиксированное число, то группа X яв разрешимой, а ее $\{p,q\}'$-холлова подгруппа является нормальной подгруппой в X, леж $F(X)$.*

Доказательство. Из условия следует, что в X нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп та, порядки которых взаимно просты с p. Из теоремы 2 тогда следует, что X — разре группа. Пусть H — холлова q'-подгруппа из X, L — холлова p'-подгруппа из X. Тог не имеют подгрупп Шмидта и являются нильпотентными группами. Из $X = HL$ следу $H\bigcap L \lhd X$, $H\bigcap L \subseteq F(X)$. Следствие доказано.

Из теоремы 2 сразу вытекает также

Следствие 2. *Пусть X — конечная группа с S_p-подгруппой P, $p>3$. Если нильпотентные $2d$-подгруппы Шмидта из X являются $\{2,p\}$-группами, то группа ляется разрешимой с 2-замкнутым p-дополнением.*

Следствие 3. *Пусть X — конечная группа и p — простой делитель числа $|X|$. $p>2$ и при $p=3$ X является $\{L_2(7), L_3(3)\}$-свободной группой. Если p'-подгруппы являются 2-замкнутыми, то X — разрешимая группа с 2-замкнутым p-дополнением.*

Доказательство. Из условия следует, что в X нет 2-нильпотентных $2d$-подгрупп I та порядка взаимно простого с p. Теперь утверждения следуют из теоремы 2. Следствие зано.

Summary

The following proposition is proved. Let X be a finite group and p be an odd prime divisor of order of gr If $p=3$ then let X be $\{L_2(7), L_3(3)\}$-free group. Suppose that X has no 2-nilpotent Schmidt's $2d$-subgroups orders is prime to p. Then X is a solvable group with a 2-closed Hall p'-subgroup.

Литература

1. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin, 1967.
2. Huppert B., Blackburn N. Finite groups. III. Berlin, 1982.
3. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. // Math. surveys and Monographs. 1994. Vol. 40, No 1. 165.
4. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. // Math. surveys and Monographs. 1994. Vol. 40, No 2. 218.
5. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М., 1985.
6. Чунихин С. А. Подгруппы конечных групп. Мн., 1964.
7. Беркович Я. Г. // Конечные группы. Мн., 1966. С. 29 – 39.

8. Беркович Я. Г., Пальчик Э. М. // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, №4. С. 741 – 753.
9. Шмидт О. Ю. // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366 – 372.
10. Гольфанд Ю. А. // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, №8. С. 1313 – 1315.
11. Redei L. // Publ. Math. 1956. No 4. P. 303 – 324.
12. Zsigmondy K. // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, No 2. P. 265 – 284.
13. Conway I., Curtis R., Norton S. et all. Atlas of finite groups. Oxford, 1985.

Полоцкий государственный университет

Поступила в редакцию
18.10.99