

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой»



М. А. Грицкевич

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ:
РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ
СТЕРЖНЕЙ**

к выполнению расчетно-графической работы
для студентов специальностей
1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство»,
1-70 04 02 «Теплогасоснабжение, вентиляция
и охрана воздушного бассейна»,
1-70 04 03 «Водоснабжение, водоотведение
и охрана водных ресурсов»,
1-70 05 01 «Проектирование, сооружение
и эксплуатация газонефтепроводов и газонефтехранилищ»

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
2024

1 – дополнительный титульный экран – сведения об издании

УДК 539.3(075.8)

Одобрены и рекомендованы к изданию
методической комиссией инженерно-строительного факультета
в качестве методических указаний
(выписка из протокола № 3 от 26.10.2023)

Кафедра строительных конструкций

Рецензент:

канд. техн. наук, доц. каф. технологии и оборудования
машиностроительного производства В. А. ДРОНЧЕНКО

© Грицкевич М. А., 2024
© Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, 2024

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Сопротивление материалов: растяжение и сжатие стержней» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Редактор *Т. А. Дарьянова*

Подписано к использованию 06.03.2024.
Объем издания 2,10 Мб. Заказ 78.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
<http://www.psu.by>

Содержание

Введение.....	5
Общие требования.....	5
Задача 1	
Центральное растяжение и сжатие статически определимого прямого ступенчатого стержня	7
Задача 2	
Центральное растяжение и сжатие статически неопределимого прямого ступенчатого стержня	12
Задача 3	
Статически неопределимые стержневые системы.....	18

Введение

Методические указания являются руководством по выполнению, оформлению и подготовке к защите расчетно-графической работы «Расчет стержневых конструкций на растяжение и сжатие» по дисциплине «Сопротивление материалов».

В них содержатся условия задач со схемами стержневых систем и данные к ним, порядок расчета по каждой задаче, рекомендации по оформлению графического материала.

Общие требования

Выполняемые в процессе изучения курса расчетно-графические работы служат целям закрепления теоретических знаний и выработке умений самостоятельно решать задачи сопротивления материалов. Студенты должны научиться рассчитывать реальные строительные конструкции и оценивать их на прочность, жесткость и устойчивость.

Расчетно-графические работы должны выполняться в строгом соответствии с излагаемыми ниже требованиями.

Расчетно-пояснительная записка должна включать титульный лист, задание и решение задачи с приведением расчетов.

Выполненная работа оформляется на листах писчей бумаги формата А4 по типу пояснительной записки к курсовому проекту. Текст, формулы и вычисления аккуратно пишутся ручкой на одной стороне листа или набираются на компьютере.

Задача должна иметь полное текстовое условие, исходные данные, а также схемы: заданную (из сборника заданий) и расчетную (с заданными исходными данными). На расчетную схему наносятся все числовые значения площадей, длин, нагрузок. Каждую задачу следует начинать с новой страницы.

Решение задачи следует вести в числовом виде. При решении большинства задач по сопротивлению материалов достаточно вести вычисления с точностью до двух, максимум до четырех значащих цифр после запятой. Расчеты следует выполнять последовательно и аккуратно в соответствии с требованиями заданий. Пояснения к расчету должны быть краткими, четкими и понятными. Если расчетная величина определяется по готовой формуле, то недостаточно привести эту формулу и конечный результат, следует показать, как, в каких единицах проводится расчет. Результаты расчета для лучшей их обозримости, компактности размещения, облегчения анализа

и контроля следует по возможности сводить в таблицы. Окончательные значения определяемых величин необходимо подчеркнуть или обвести рамкой. При этом обязательно указывается размерность.

Графический материал расчетно-графической работы (схемы, эпюры и др.) выполняется черной ручкой или с помощью стандартных графических редакторов и вставляется в том месте текстовой части работы, где на него впервые делается ссылка.

Все схемы и графики вычерчиваются в определенном масштабе с указанием характерных размеров и величин, необходимых для последующего расчета. Расчетные схемы стержневых конструкций изображаются вместе со схемой внешних воздействий и схемой составляющих опорных реакций.

При построении эпюр следует располагать их на одном листе с расчетной схемой. В случае недостатка места и необходимости перенести часть эпюр на следующий лист расчетная схема должна быть повторена.

Расчетно-графическая работа сдается в папке-скоросшивателе (листы необходимо продыроколоть, а не вставлять в файлы) в сроки, установленные преподавателем.

Правильно выполненная работа студенту не возвращается, а хранится на кафедре.

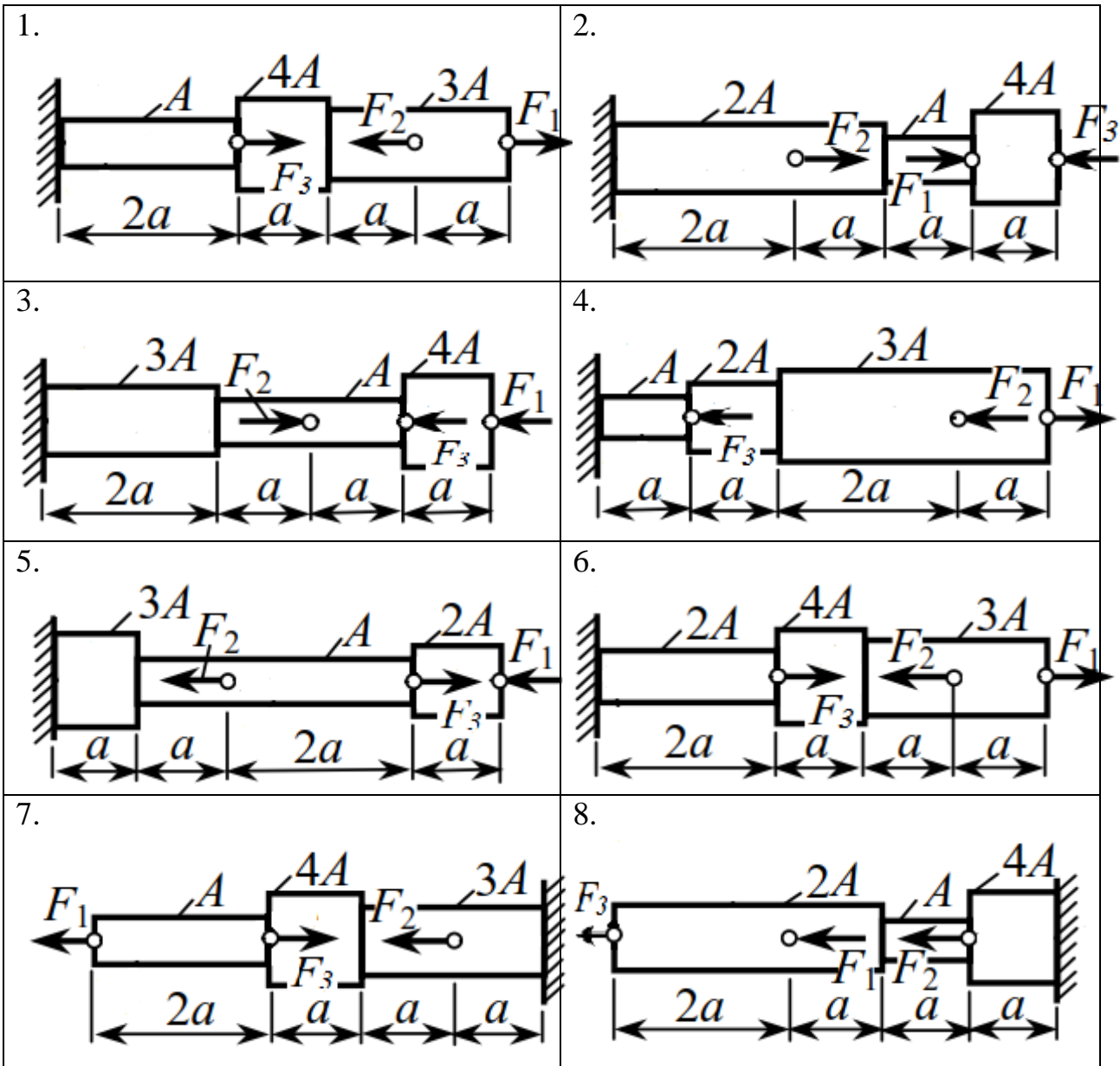
Исправления ошибок и выполнение сделанных указаний следует проводить, не переписывая задания. Пометки, сделанные преподавателем, стирать и зачеркивать не разрешается.

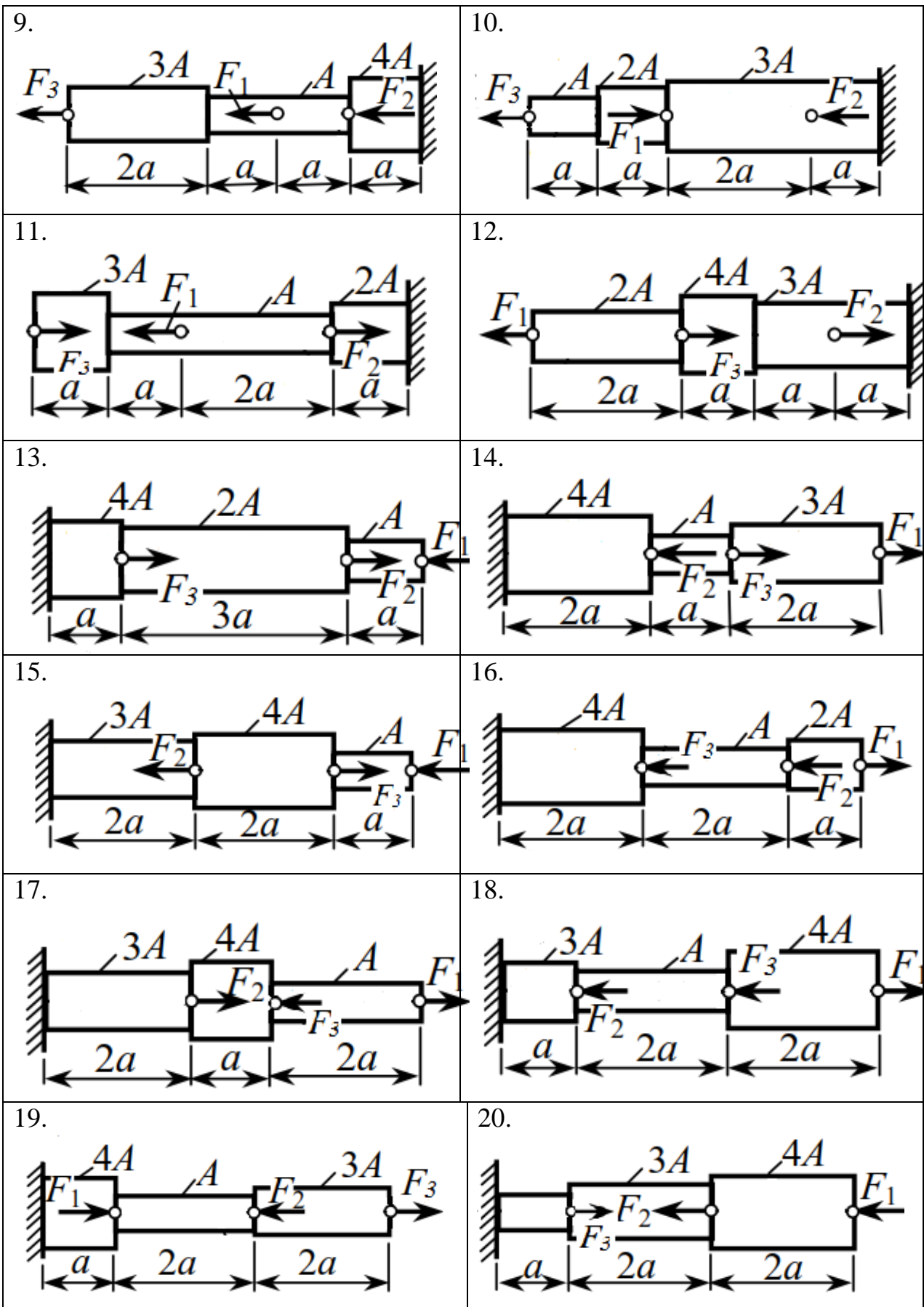
Задача 1
Центральное растяжение и сжатие
статически определимого прямого ступенчатого стержня

Исходные данные к работе

Ступенчатый стержень находится под действием продольных расчетных сил F , приложенных на соответствующих участках стержня. Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

Схемы к работе





Числовые данные к работе

Номер задания	Длина участка, м	Площадь поперечного сечения, см ²	Нагрузки, кН		
			F_1	F_2	F_3
1	1,0	30	100	280	140
2	1,5	22	50	210	170
3	1,8	25	80	260	70
4	2,5	28	250	180	90
5	2,1	20	90	120	270
6	2,5	8	70	100	150
7	1,2	12	110	150	180
8	0,9	26	130	270	120
9	2,3	23	160	170	300
10	0,6	29	190	140	260
11	2,7	31	230	250	50
12	1,8	17	250	190	80
13	1,6	19	140	230	250
14	2,2	9	170	130	80
15	2,9	15	270	160	90
16	1,3	13	150	110	70
17	3,0	27	300	70	110
18	1,1	18	120	90	160
19	1,4	10	90	80	130
20	1,7	24	180	250	230

Пример 1

Ступенчатый стержень находится под действием продольных расчетных сил F , приложенных на соответствующих участках стержня. Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

1. Используя метод сечений, определим величину продольных сил в поперечных сечениях бруса по участкам.

III участок (рисунок 1, б):

$$\sum y = 0; N_3 - 30 = 0; N_3 = 30 \text{ кН.}$$

II участок (рисунок 1, в):

$$\sum y = 0; N_2 + 40 - 30 = 0; N_2 = -10 \text{ кН.}$$

I участок (рисунок 1, г):

$$\sum y = 0; N_1 + 100 + 40 - 30 = 0; N_1 = -110 \text{ кН.}$$

Как видно из приведенных рисунков, для определения продольных сил использовали систему сил от свободного конца бруса. В этом случае

не надо определять величину опорной реакции в жесткой заделке. Предварительно на схемах задавались положительным направлением продольных сил, т.е. считали их растягивающими.

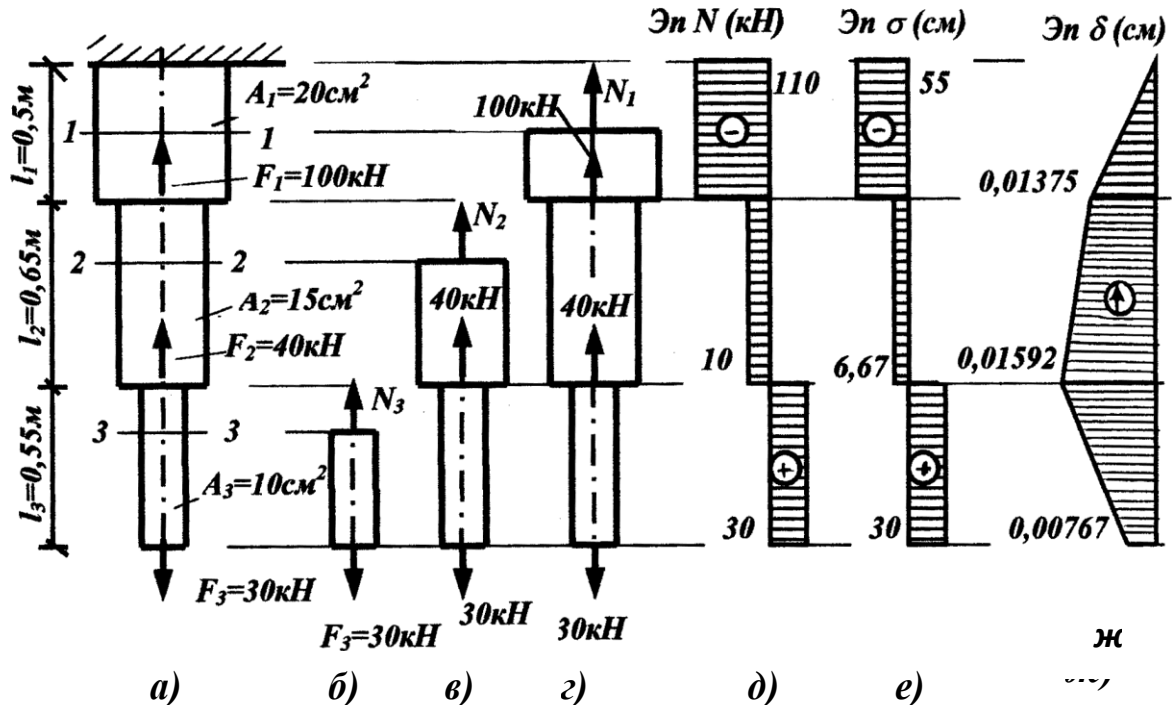


Рисунок 1

2. На основании выполненных расчетов строим эпюру продольных сил (см. рисунок 1, д).

3. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по участкам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{110}{20} = -5,5 \text{ кН/см}^2 = -55 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{10}{15} = -0,667 \text{ кН/см}^2 = -6,67 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{30}{10} = 3 \text{ кН/см}^2 = 30 \text{ МПа.}$$

4. На основании выполненных расчетов строим эпюру нормальных напряжений – эпюру σ (см. рисунок 1, е).

5. Определим величину абсолютных деформаций участков бруса:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{110 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 20} = -0,01375 \text{ см.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{10 \cdot 65}{2 \cdot 10^4 \cdot 15} = -0,00217 \text{ см.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{30 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 10} = 0,00825 \text{ см.}$$

6. Определим абсолютное укорочение всего бруса:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00825 = -0,00767 \text{ см.}$$

7. Определим перемещения границ участков относительно верхней жесткой заделки:

$$\delta_A = 0 \quad \delta_{I-I} = \Delta l_1 = -0,01375 \text{ см (вверх);}$$

$$\delta_{II-II} = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,01375 - 0,00217 = -0,01592 \text{ см (вверх);}$$

$$\delta_{III-III} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0,01375 - 0,00217 + 0,00825 = -0,00767 \text{ см.}$$

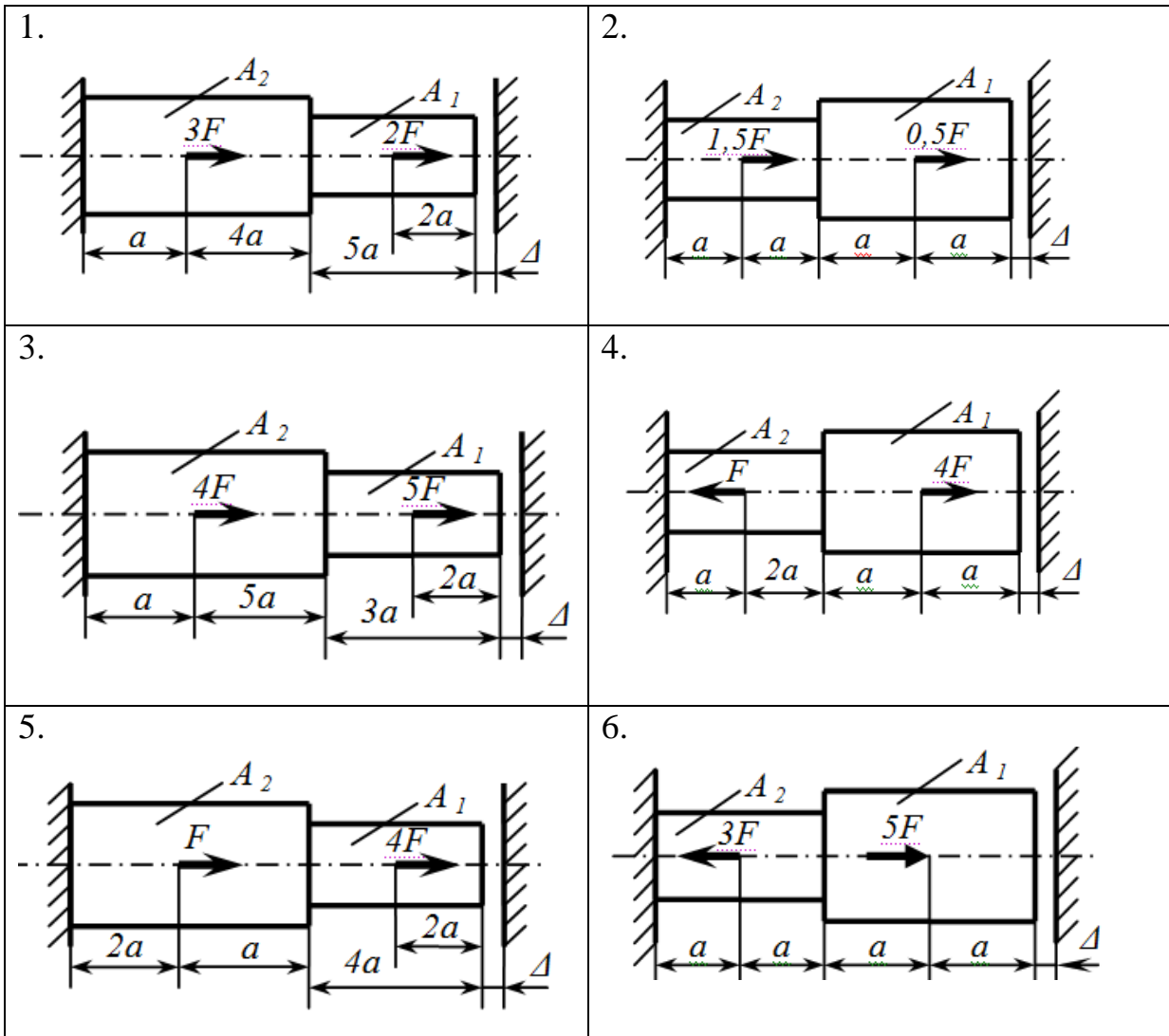
На основании выполненных расчетов строим эпюру перемещений сечений относительно верхней жесткой заделки (см. рисунок 1, ж).

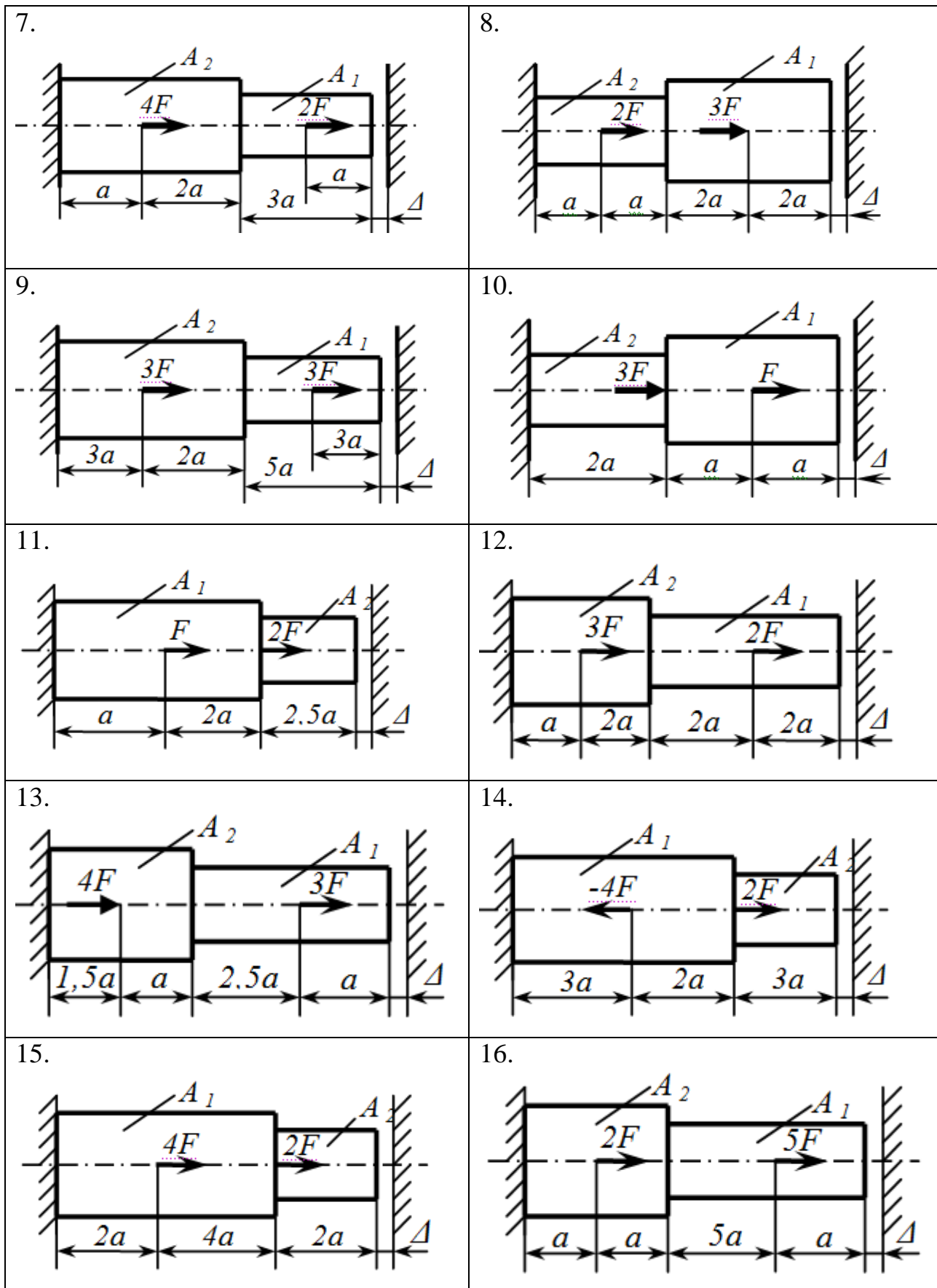
Задача 2
Центральное растяжение и сжатие
статически неопределимого прямого ступенчатого стержня

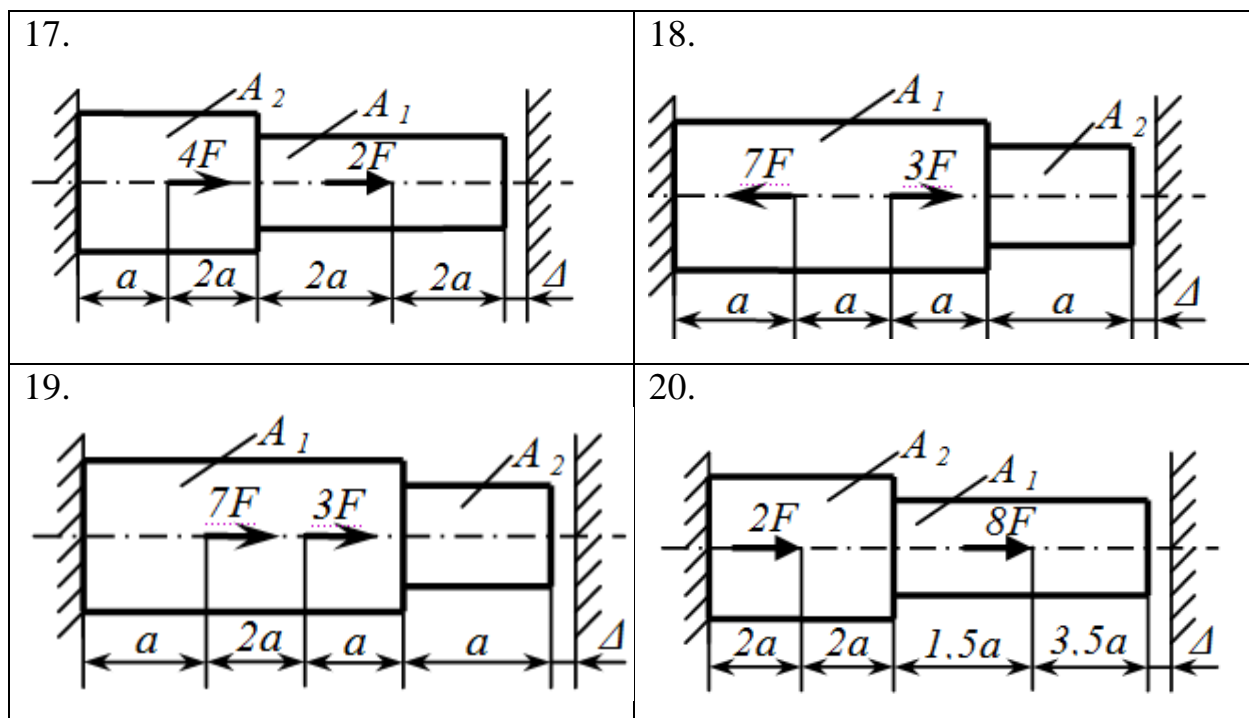
Исходные данные к работе

Ступенчатый стержень нагружен продольными расчетными силами F_i . Материал стержня – сталь с модулем продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Зазор $\Delta = 0,1$ мм. Внешние силы приложены к участкам на концах элементов стержня. Требуется: 1) определить опорные реакции; 2) пострить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

Схемы к работе







Числовые данные к работе

Номер задания	Длина участка, м	Площадь поперечного сечения, см ²		Нагрузка, кН
		A ₁	A ₂	
1	2,5	10	6	200
2	1,45	12	7	250
3	3,4	9	5	320
4	4,6	8	4,5	350
5	2,55	11	5	400
6	1,7	7	5	220
7	3,75	12,5	5	270
8	4,65	8,5	4,5	320
9	1,35	9,5	5,5	370
10	2,8	11,5	7	210
11	3,8	10,5	6,5	260
12	4,5	10	7,5	310
13	1,6	22	6,5	360
14	2,75	9	4,5	230
15	3,45	8	4,5	330
16	4,35	11	5,5	280
17	1,3	11	3,5	380
18	2,4	7	6	290
19	3,65	12,5	7	390
20	4,7	8,5	5	190

Пример 2

Определить внутренние усилия, напряжения и деформации участков и всего бруса (рисунок 2, а) и построить эпюры N , σ , δ .

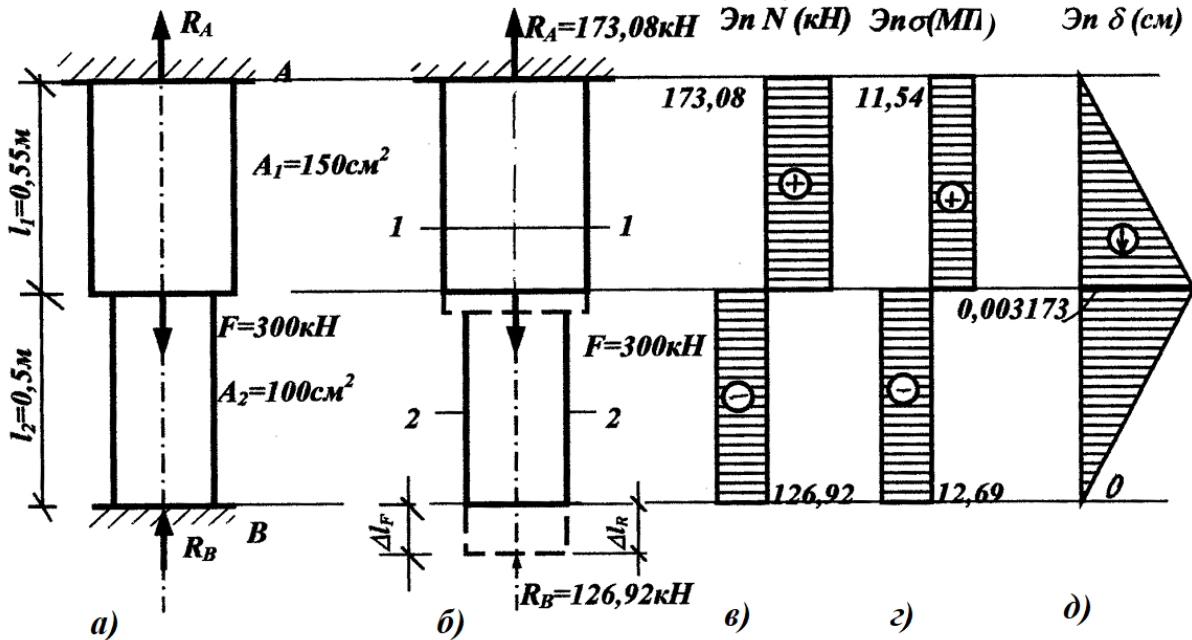


Рисунок 2

1. Определим степень статической неопределенности бруса. Всего неизвестных два (R_A и R_B), а для системы сил, действующих по одной прямой, можно составить одно независимое уравнение статики:

$$\sum y = 0. R_A + R_B - F = 0. \quad (1)$$

Следовательно, система один раз статически неопределима.

2. Образует основную систему отбрасыванием нижней жесткой заделки В. Действие ее заменено реакцией R_B (рисунок 2, б).

Сопоставляем дополнительное уравнение совместности деформаций из условия, что перемещение нижнего сечения В в основной системе должно быть равно нулю:

$$\delta_B = 0. \Delta l_F + \Delta l_{R_B} = 0, \quad (2)$$

где Δl_F – абсолютное удлинение бруса в основной системе от реакции R_B , равное

$$\Delta l_F = \frac{Fl_1}{EA_1} = \frac{300 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,0055 \text{ см};$$

Δl_{R_B} – абсолютное укорочение бруса в основной системе от реакции R_B , равное

$$\Delta l_{R_B} = -\frac{R_B \cdot l_1}{EA_1} - \frac{R_B \cdot l_2}{EA_2} = -\frac{R_B}{E} \left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right) = -\frac{R_B}{2 \cdot 10^4} \left(\frac{55}{150} + \frac{50}{100} \right) =$$

$$= -0,4333 \cdot 10^{-4} R_B.$$

Решаем уравнение совместности деформаций

$$0,0055 - 0,4333 \cdot 10^{-4} R_B = 0; \quad R_B = 126,92 \text{ кН.}$$

Из уравнения статики (1) можно определить величину R_A :

$$R_A = F - R_B = 300 - 126,92 = 173,08 \text{ кН.}$$

1. Используя метод сечений, определим величину продольных сил по участкам бруса:

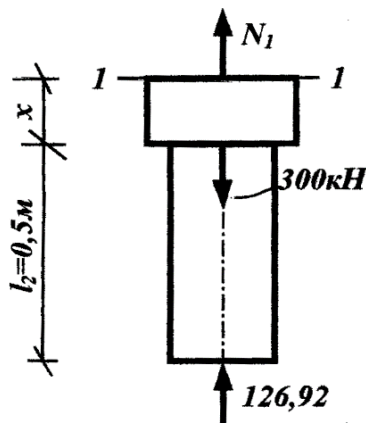
I участок:

$$0 \leq x \leq 0,55 \text{ м.}$$

$$\sum y = 0.$$

$$N_1 - 300 + 126,92 = 0;$$

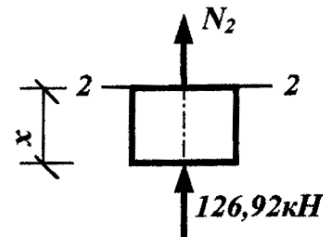
$$N_1 = 173,08 \text{ кН.}$$



II участок:

$$0 \leq x \leq 0,5 \text{ м.}$$

$$N_2 = -126,92 \text{ кН.}$$



2. На основании выполненных расчетов строим эпюру продольных сил (см. рисунок 2, в).

3. Определим величину нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по участкам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{173,08}{150} = 1,154 \text{ кН/см}^2 = 11,54 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{126,92}{100} = -1,269 \text{ кН/см}^2 = -12,69 \text{ МПа.}$$

4. На основании выполненных расчетов строим эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса по его длине (см. рисунок 2, г).

5. Определим абсолютные деформации участков бруса:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{173,08 \cdot 55}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = 0,003173 \text{ см};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = -\frac{126,92 \cdot 50}{2 \cdot 10^4 \cdot 150} = -0,003173 \text{ см}.$$

6. Определим перемещения границ участков относительно верхней жесткой заделки:

$$\delta_A = 0, \quad \delta_{I-I} = \Delta l_1 = 0,003173 \text{ см};$$

$$\delta_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,003173 - 0,003173 = 0.$$

7. На основании выполненных расчетов строим эпюру перемещений (см. рисунок 2, δ).

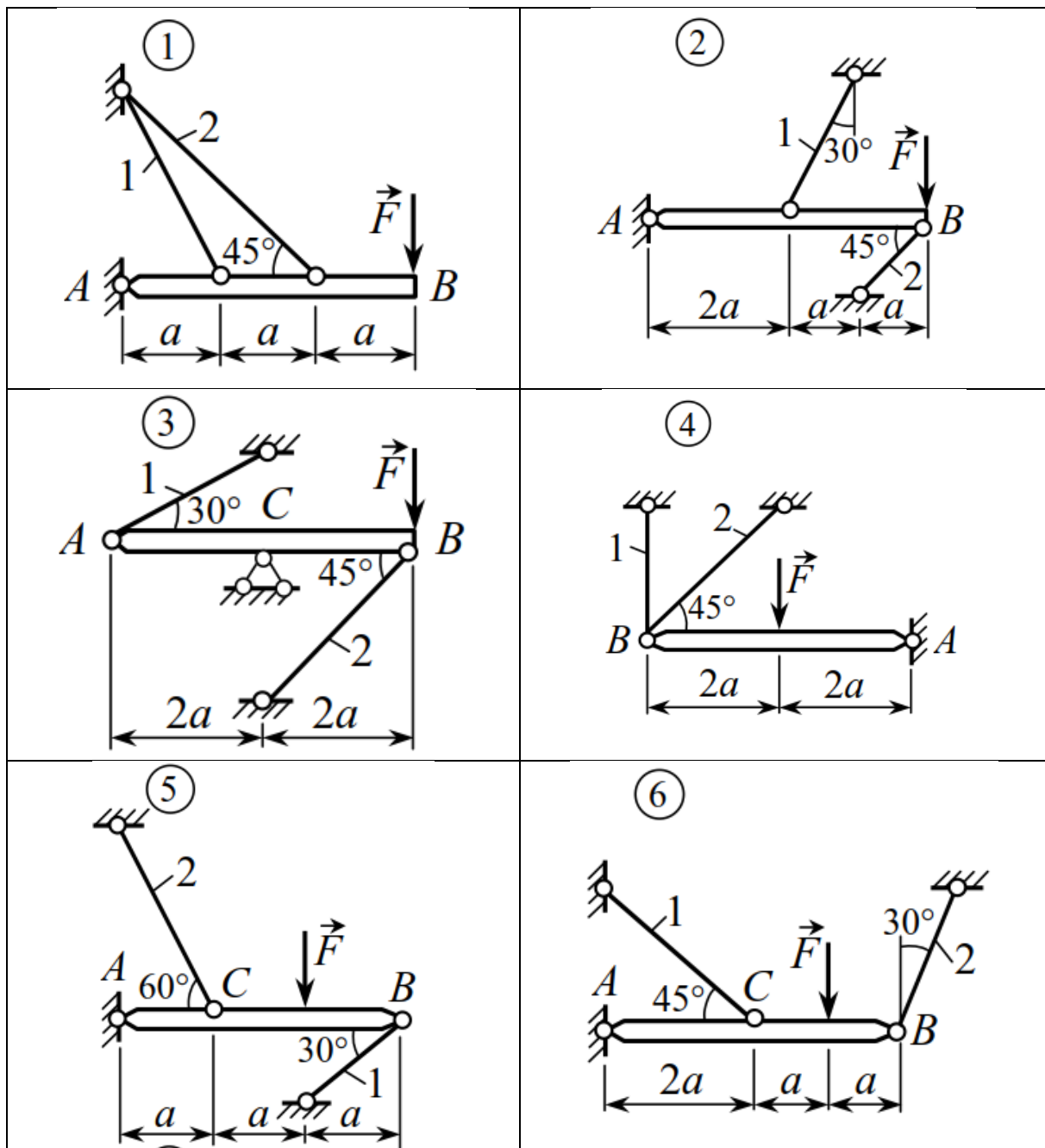
Задача 3

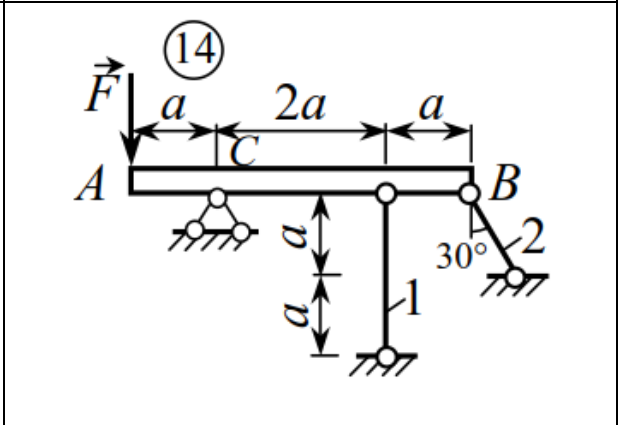
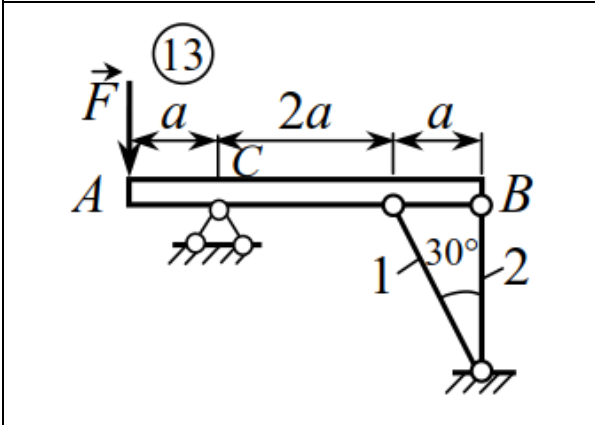
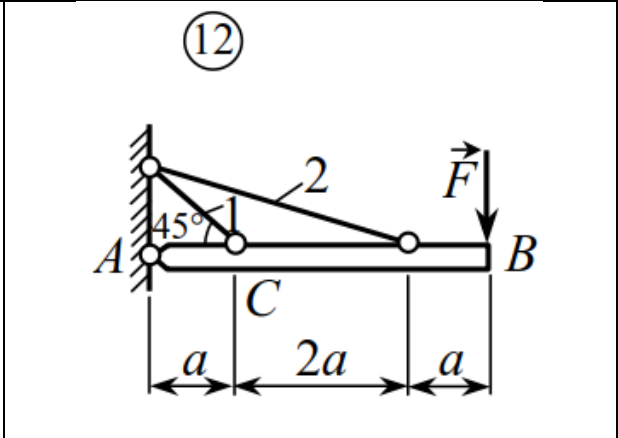
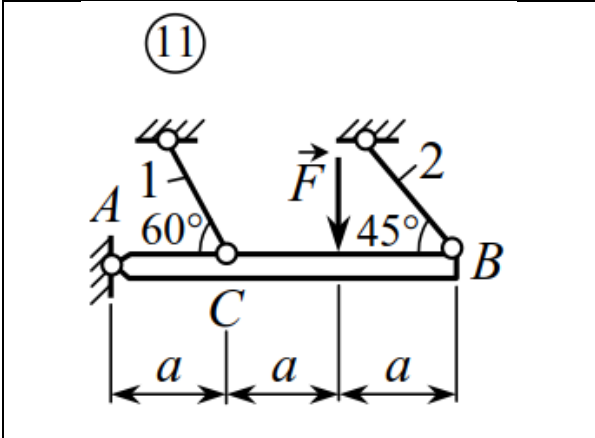
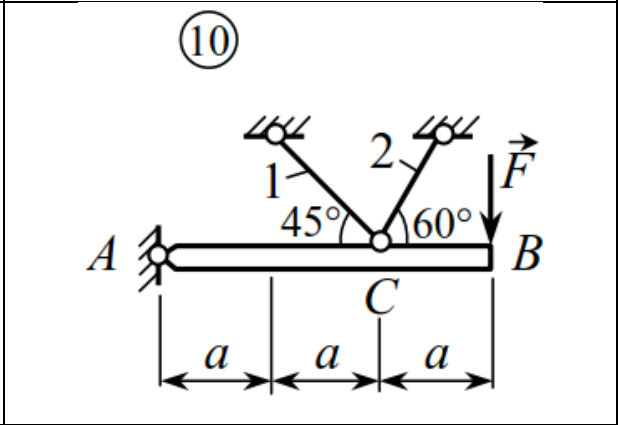
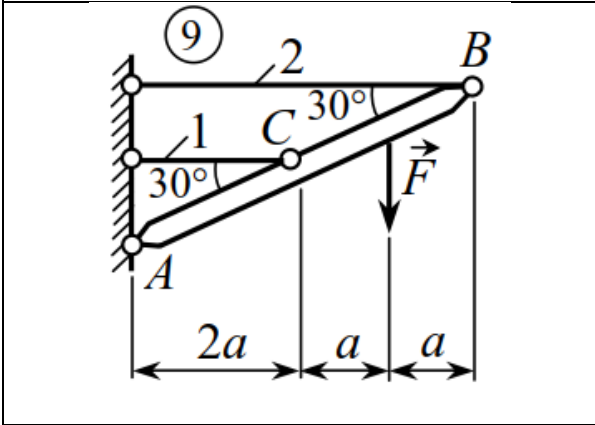
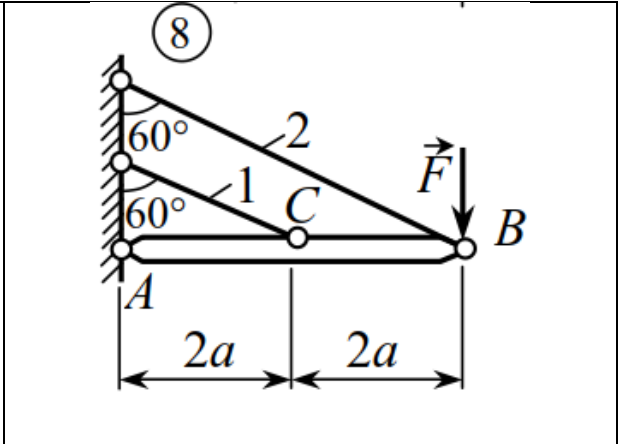
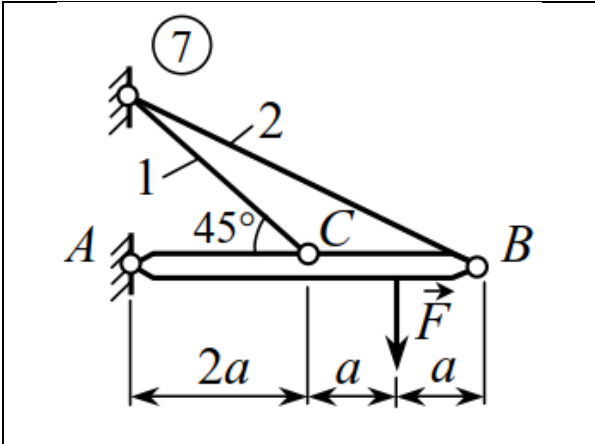
Статически неопределимые стержневые системы

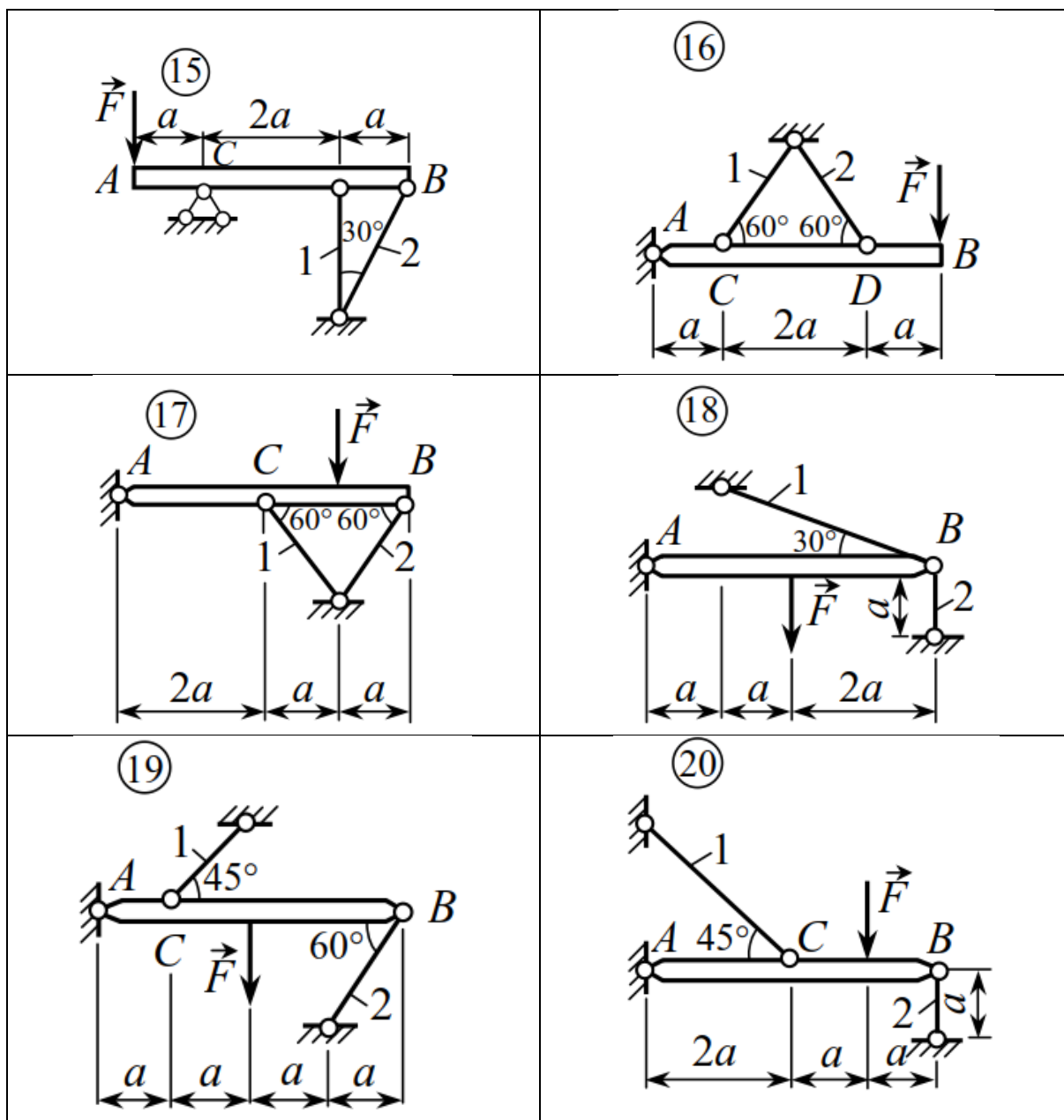
Исходные данные к работе

На систему, состоящую из элемента большой жесткости и двух стальных стержней, действует расчетная нагрузка. Определить напряжения в стержнях при заданных значениях нагрузки и площадях сечений стержня.

Схемы к работе







Числовые данные к работе

Номер задания	Нагрузка, кН	Длина участков элемента и стержней, м			Площадь сечения, см ²	
		<i>a</i>	<i>l</i> ₁	<i>l</i> ₂	<i>A</i> ₁	<i>A</i> ₂
<i>l</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>
1	50	5,4	1,0	1,2	6	12
2	30	4,8	1,4	1,0	8	10
3	12	4,6	1,0	1,4	6	8
4	10	4,4	1,2	1,4	6	6
5	25	4,8	1,4	1,6	10	8
6	20	4,6	1,2	1,4	6	10
7	50	5,2	1,4	1,0	8	12

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7
8	12	4,8	1,6	1,2	6	6
9	10	4,8	1,0	1,2	8	8
10	40	4,6	1,2	1,0	12	8
11	25	5,0	1,4	1,2	6	7
12	50	4,8	1,2	1,0	8	12
13	16	4,6	1,4	1,2	6	12
14	45	5,2	1,6	1,0	8	10
15	14	4,0	1,2	1,4	6	8
16	80	5,2	1,4	1,0	8	12
17	8	4,0	1,6	1,0	6	10
18	40	5,0	1,0	1,2	10	6
19	60	5,2	1,6	1,0	6	10
20	8	5,0	1,2	1,4	8	6

Пример 3

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно-неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров. Требуется:

1) найти усилия и напряжения в двух стержнях, выразив их через силу F ; найти допускаемую нагрузку $F_{дон}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях допускаемому напряжению $[\sigma] = 160$ МПа;

2) найти предельную грузоподъемность Q_m^k и допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, если предел текучести $\sigma_m = 240$ МПа и запас прочности $k = 1,5$;

3) сравнить величины $Q_{дон}$, полученные при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Дано: $A = 15 \text{ см}^2$, $a = 2,7 \text{ м}$; $b = 2,5 \text{ м}$; $c = 1,7 \text{ м}$.

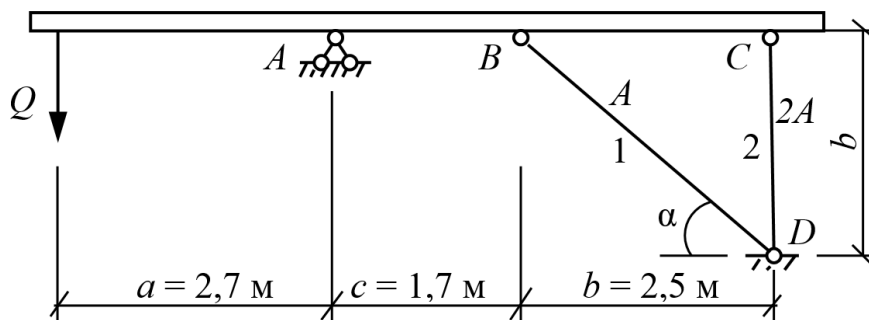


Рисунок 3

1. Определим недостающие геометрические параметры, необходимые для дальнейшего расчета:

$$\alpha = 45^\circ; \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = 0,707;$$

$$l_1 = b / \sin 45^\circ = \frac{2,5}{\sin 45^\circ} \text{ м}; l_2 = b = 2,5 \text{ м}.$$

2. Изобразим план и определим степень статической неопределимости. План сил согласовываем с характером деформации системы.

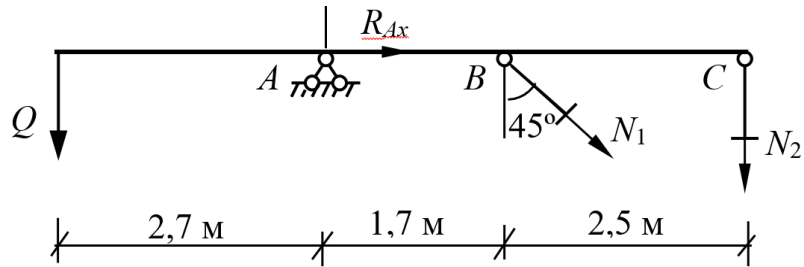


Рисунок 4

Всего неизвестных 4 (R_{Ax} , R_{Ay} , N_1 , N_2), а уравнений статики для данной произвольной плоской системы сил можно составить только 3. Следовательно, данная система $4 - 3 = 1$ раз статически неопределима.

3. Составим необходимое уравнение равновесия (статики). Для дальнейшего расчета нам необходимо определить значения усилий в стержнях N_1 и N_2 , поэтому составим такое уравнение статики, в которое войдут только эти неизвестные:

$$\sum M_A = 0. -2,7Q + 1,7N_1 \cos 45 + 4,2N_2 = 0.$$

$$1,2019N_1 + 4,2N_2 = 2,7Q. \quad (1)$$

4. Изобразим диаграмму перемещений (рисунок 5) и составим дополнительное уравнение совместности деформаций.

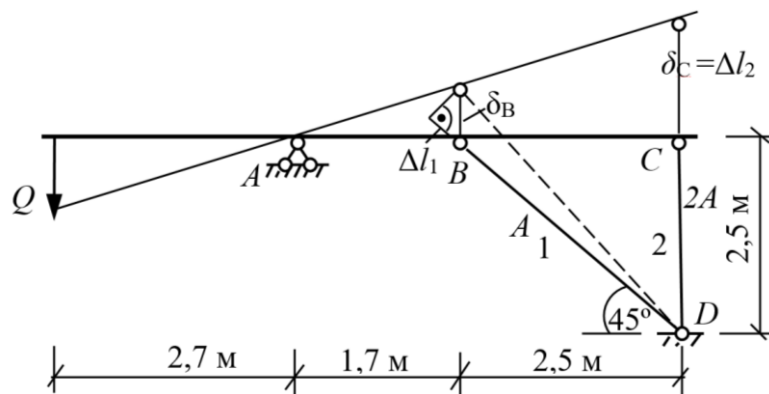


Рисунок 5

Из подобия треугольников

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{4,2}{1,7}.$$

Заменим перемещения узлов абсолютными деформациями стержней:

$$\delta_C = \Delta l_2, \quad \delta_B = \frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ},$$

$$\frac{\Delta l_2 \cdot \sin 45^\circ}{\Delta l_1} = \frac{4,2}{1,7} \quad (\text{уравнение совместности деформаций}).$$

Выразим абсолютные деформации стержней по закону Гука:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot 2,5}{2EA}; \quad \Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot 2,5}{EA \sin 45^\circ};$$

$$\frac{2,5N_2 \cdot \sin^2 45^\circ \cdot EA}{2EA \cdot 2,5N_1} = \frac{4,2}{1,7}; \quad N_2 = \frac{4,2 \cdot 4N_1}{1,7} = 9,8824N_1.$$

$$N_2 = 9,9924N_1. \quad (2)$$

5. Решаем совместно уравнения (1) и (2):

$$1,2019N_1 + 4,2 \cdot 9,8824N_1 = 2,7F,$$

$$N_1 = 0,0632F,$$

$$N_2 = 0,6248F.$$

6. Определим напряжения в стержнях (1) и (2):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,0632F}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,6248F}{2A} = \frac{0,3124F}{A};$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\max} = \frac{0,3124F}{A}.$$

7. Определим величину допускаемой нагрузки из условия прочности по допускаемым напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{0,3124F}{A} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа} = 16 \text{ кН/см}^2.$$

$$F_{\text{дон}} = \frac{A[\sigma]}{0,3124} = \frac{15 \cdot 16}{0,3124} = 768,24 \text{ кН}.$$

$$F_{\text{дон}} = 768,24 \text{ кН}.$$