



Учебная программа составлена на основе типовой учебной программы для высших учебных заведений по специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)». Регистрационный № ТД-G.594/тип. от 03.05.2016 и учебного плана по специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)». Регистрационный № 13-13/уч. ФИТ от 29.08.20213 г.

**СОСТАВИТЕЛЬ:**

Дмитрий Феликсович Пастухов, к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и компьютерной безопасности учреждения образования «Полоцкий государственный университет»

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой математики и компьютерной безопасности учреждения образования «Полоцкий государственный университет»  
(протокол № 5 от «01» 06 2021 г.).

Методической комиссией факультета компьютерных наук и электроники учреждения образования «Полоцкий государственный университет»  
(протокол № 7 от «16» 06 2021 г.).

Научно-методическим советом учреждения образования «Полоцкий государственный университет»  
(протокол № 5 от «01» 07 2021 г.).

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Круг вопросов, относящихся к математической физике, тесно связан с изучением различных физических процессов в гидродинамике, теории упругости, электродинамике, в оптике и др. Метод исследования является математическим по существу. Изучение каждого типа уравнений начинается с простейших задач, особое внимание уделяется математической постановке задач, строгому изложению решения простейших задач и физической интерпретации полученных результатов. Дисциплина «Уравнения математической физики», будучи связана с изучением физических проблем, имеет свои специфические черты. Так, например, начальная и конечная стадии процесса носят качественно различный характер и требуют различных математических методов. Практические навыки решения задач математической физики основываются на методе суперпозиций. Этот метод позволяет на базе частных (атомарных) линейно независимых решений получать решение линейной исходной задачи. При этом “запас” атомарных решений должен быть полным. Уравнения математической физики включают в себя и такие давно сложившиеся разделы математики, как математический анализ, линейная алгебра, аналитическая геометрия, теория функций комплексного переменного, интегральные уравнения, обыкновенные дифференциальные уравнения, теорию функционального анализа. А также ряд сравнительно новых разделов, которые интенсивно развиваются с середины прошлого века в связи с изобретением и внедрением во все сферы жизни цифровых технологий и развития математики. К таким разделам можно отнести комбинаторный анализ, дискретную математику, численные методы, дифференциальную геометрию и другие. Сегодня уравнения математической физики являются важным звеном университетского математического образования.

В соответствии с учебным планом специальности 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» «Уравнения математической физики» является дисциплиной государственного компонента.

Изучение этой дисциплины позволит сформировать у выпускников компетенции, обеспечивающие успешность применения в профессиональной деятельности знаний в математической физике, теории специальных функций, методов функций комплексного переменного, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных; умений и навыков использования методов математической физики в компьютерных технологиях.

**Цель учебной дисциплины «Уравнения математической физики»:** получение студентами навыков математического моделирования физических процессов с использованием уравнений с частными производными.

**Образовательная цель:** формирование составной части банка знаний, получаемых будущими специалистами в процессе учебы и необходимых им в дальнейшем для успешной работы.  
**Развивающая цель:** формирование у студентов основ математического мышления, изучение алгоритмов исследования разрешимости прикладных задач.

**Основная задача,** решаемая при изучении учебной дисциплины «Уравнения математической физики»: освоение методов решения и исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

В результате изучения дисциплины студент должен

- знать:** - классификацию и методы приведения к каноническому виду уравнений второго порядка с двумя и многими независимыми переменными;  
- методы решения и обоснования корректности задачи Коши для уравнения колебания струны и уравнения теплопроводности;

- постановку и методы решения смешанных задач для уравнений гиперболического и параболического типа;

- постановку и методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа;

**уметь:** - приводить к каноническому виду уравнения второго порядка;

- решать задачу Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности;

- решать смешанные задачи для уравнений колебания струны и теплопроводности;

- решать краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона,

**владеть:** - методами математического моделирования.

#### **Требования к академическим компетенциям специалиста**

Специалист должен:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть системным и сравнительным анализом.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

#### **Требования к социально-личностным компетенциям специалиста**

Специалист должен:

СЛК-6. Уметь работать в команде.

#### **Требования к профессиональным компетенциям специалиста**

Специалист должен быть способен:

ПК-1. Работать с научной, нормативно-справочной и специальной литературой с целью получения последних сведений о новых методах защиты информации, о стойкости существующих систем защиты информации.

#### **Перечень дисциплин, в продолжение и на базе которых изучается дисциплина.**

Для изучения учебной дисциплины «Уравнения математической физики» по специальности

1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» необходимы знания, полученные при изучении базовых дисциплин: «Геометрия и алгебра», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ и интегральные уравнения».

**1.3. Перечень дисциплин, которые изучаются на базе дисциплины.** Знания полученные при изучении дисциплины «Уравнения математической физики» по специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» являются основой для дисциплин: «Исследование операций», «Модели данных и их системы», «Управление базами данных», а также при изучении ряда дисциплин специализации. Изучение учебной дисциплины позволяет дать студентам базу, необходимую для успешного усвоения материала перечисленных выше учебных дисциплин, а также получить знания, необходимые им в дальнейшем для успешной работы.

В соответствии с учебным планом по специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» на изучение учебной дисциплины отводится:

Форма получения высшего образования первой степени	дневная
Курс (курсы)	3
Семестр	5
Всего часов по дисциплине	148

Всего аудиторных часов по дисциплине	68
В том числе:	
Лекции, часов	34
Лабораторные занятия, часов	34
Форма текущей аттестации	зачет, экзамен
Трудоёмкость дисциплины, зач. ед	4

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС

### Раздел 1 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ. КЛАССИФИКАЦИЯ.

#### *Тема 1.1 Основные уравнения математической физики.*

Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение.

#### *Тема 1.2 Ортогональные системы координат.*

Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.

#### *Тема 1.3 Постановка, начальных, краевых условий.*

Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно поставленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий. Классификация уравнений в частных производных с 2 независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.

#### *Тема 1.4 Метод разделения переменных.*

Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций.

#### *Тема 1.5 Задача Штурма – Лиувилля.*

Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.

### Раздел 2 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

#### *Тема 2.1 Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения.*

Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения. Условие существования и единственности для неоднородного уравнения. Функция Грина. Спектральное уравнение на собственные значения. Простейшие задачи Штурма – Лиувилля для эллиптического уравнения

(отрезок, прямоугольник, параллелепипед). Интеграл Пуассона для краевой задачи в полуплоскости.

### *Тема 2.2 Специальные функции.*

Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля.

### *Тема 2.3 Сферические и шаровые функции.*

Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера.

### *Тема 2.4 Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа.*

Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике. Метод функций Грина для решения уравнения Лапласа.

## Раздел 3 УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

### *Тема 3.1 Постановка начально – краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны*

Постановка начально – краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа.

### *Тема 3.2 Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа.*

Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа.

Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа.

## Раздел 4 УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

### *Тема 4.1 Уравнения параболического типа.*

Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.

*Тема 4.2 Метод интегрального преобразования Фурье.*

Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.

*Тема 4.3 Задача об остывании бесконечного полупространства.*

Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.

*Тема 4.4 Тепловые волны.*

Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения.

## Раздел 5 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Тема 5.1 Понятие сетки, сеточных функций, сеточных операторов, норм сеточных функций и операторов.*

Понятие сетки, сеточных функций, сеточных операторов, норм сеточных функций и операторов. Понятие шаблона, явной и неявной схемы. Сходимости и порядок сходимости разностного дифференциального уравнения (численной схемы), порядок сходимости оператора граничных условий, порядка общей задачи. Уравнение переноса. Спектральная устойчивость численной схемы уравнения переноса. Согласование порядка сходимости численной схемы уравнения и порядка сходимости сеточной схемы граничных условий.

*Тема 5.2 Порядок сходимости явной схемы однородного уравнения теплопроводности.*

Порядок сходимости явной схемы однородного уравнения теплопроводности. Условие максимального порядка сходимости.

Признак спектральной устойчивости для уравнения гиперболического типа (два определения). Устойчивость схемы в равномерной метрике и устойчивость по начальным условиям для параболических уравнений. Порядки сходимости схем однородных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов, условия устойчивости. Обратные задачи математической физики.



# УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ КАРТЫ ДИСЦИПЛИНЫ

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

№ темы	Название раздела, темы, занятия; перечень изучаемых вопросов	Количество часов					Иное	Литература <sup>1</sup>	Формы контроля <sup>2</sup> знаний
		лекции	практические занятия	лабораторные занятия	УСРС				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
<b>Основные уравнения математической физики. Постановка задач. Классификация.</b>									
1	<i>Лекция 1.</i> Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение. <i>Лабораторное занятие 1.</i> Постановка задач математической физики, начальных, краевых условий.	2	-	2	-	КП <sup>3</sup>	1-3, 4, 6	ПДЗ, АР	
2	<i>Лекция 2.</i> Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат. <i>Лабораторное занятие 2.</i> Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.	2	-	2	-	КП	1, 3, 4, 6	АКР, УО, Т, АР	
3	<i>Лекция 3.</i> Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно поставленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий. Классификация уравнений в частных производных с 2 независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения. <i>Лабораторное занятие 3.</i> Классификация уравнений в частных производных 2 порядка, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.	2	-	2	-	КП	4, 6	Т	

<sup>1</sup> Нумерация литературных источников дана в соответствии с перечнем основной литературы в разделе 4. Информационно-методическая часть.

<sup>2</sup> Обозначения: ПДЗ – проверка домашнего задания, АКР – аудиторная контрольная работа, Т – тест, ПО – письменный опрос, УО – устный опрос, ПК – промежуточный контроль знаний группы в семестре.

<sup>3</sup> Обозначение КП означает наличие компьютерной презентации.

4	<i>Лекция 4.</i> Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций. <i>Лабораторное занятие 4.</i> Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина.	2	-	2	-	КП	4, 6	Т
5	<i>Лекция 5.</i> Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина. <i>Лабораторное занятие 5.</i> Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.	2	-	2	-	КП	6	ПК
<b>Специальные функции. Уравнения эллиптического типа.</b>								
6	<i>Лекция 6.</i> Задачи Дирихле и Неймана в круге, кольце и внешности круга. Интеграл Пуассона в действительной и комплексной формах. Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике. <i>Лабораторное занятие 6.</i> Задачи Дирихле и Неймана в круге, кольце и внешности круга. Интеграл Пуассона в действительной и комплексной формах. Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике.	2	-	2	-	КП	1, 5, 6	ПДЗ, Т
7	<i>Лекция 7.</i> Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля. <i>Лабораторное занятие 7.</i> Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.	2	-	2	-	КП	1, 5, 6	ПДЗ, Т
8	<i>Лекция 8.</i> Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера. <i>Лабораторное занятие 8.</i> Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в шаре.	2	-	2	-	КП	1, 5, 6	ПДЗ, Т
9	<i>Лекция 9.</i> Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике. Метод функций Грина для решения уравнения Лапласа.	2	-	2	-	КП	7, 2	ПДЗ, Т

	<i>Лабораторное занятие 9.</i> Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике. Метод функций Грина для решения уравнения Лапласа.							
10	<i>Лекция 10.</i> Постановка начально – краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа. <i>Лабораторное занятие 10.</i> Метод бегущих волн. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа.	2	-	2	-	КП	7, 2	ПДЗ, Т
11	<i>Лекция 11.</i> Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа. Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа. <i>Лабораторное занятие 11.</i> Метод подбора частных решений. Метод интегрального преобразования Фурье. Метод стоячих волн, колебания ограниченной струны. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.	2	-	2	-	КП	7, 2	ПДЗ, Т
<b>Уравнения параболического типа.</b>								
12	<i>Лекция 12</i> Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности. <i>Лабораторное занятие 12.</i> Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.	2	-	2	-		9, 3, 7	ПК
13	<i>Лекция 13.</i> Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня. <i>Лабораторное занятие 13.</i> Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.	2	-	2	-		10,1 1	АКР
14	<i>Лекция 14</i> Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра. <i>Лабораторное занятие 14.</i> Метод возмущений.	2	-	2	-		12, 13	ПДЗ, ПО, Т
15	<i>Лекция 15.</i> Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения. <i>Лабораторное занятие 15.</i> Метод Фурье (разделения переменных).	2	-	2	-		1, 3, 6, 8, 9	ПДЗ
<b>Численные методы математической физики.</b>								

16	<p><i>Лекция 16.</i> Понятие сетки, сеточных функций, сеточных операторов, норм сеточных функций и операторов. Понятие шаблона, явной и неявной схемы. Сходимости и порядок сходимости разностного дифференциального уравнения (численной схемы), порядок сходимости оператора граничных условий, порядка общей задачи. Уравнение переноса. Спектральная устойчивость численной схемы уравнения переноса. Согласование порядка сходимости численной схемы уравнения и порядка сходимости сеточной схемы граничных условий. <i>Лабораторное занятие 16.</i> Согласование порядков сходимости разностных дифференциального и граничного операторов для явной схемы однородного уравнения теплопроводности.</p>	2	-	2	-		14	АКР
17	<p><i>Лекция 17.</i> Порядок сходимости явной схемы однородного уравнения теплопроводности. Условие максимального порядка сходимости. Признак спектральной устойчивости для уравнения гиперболического типа (два определения). Устойчивость схемы в равномерной метрике и устойчивость по начальным условиям для параболических уравнений. Порядки сходимости схем однородных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов, условия устойчивости. Обратные задачи математической физики. <i>Лабораторное занятие 17.</i> Решение разностных уравнений гиперболического и параболического типов методом прогонки.</p>	2	-	2	-		3	АКР

# ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная:

1. Шушкевич Г.Ч. компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14 : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 2 / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. - Минск : Изд-во Гревцова, 2012.
2. Алтунин К. К. методы математической физики учебное пособие / К. К. Алтунин ; К.К. Алтунин. - 3-е изд. - Москва : Директ-Медиа, 2014.
3. Павленко А. уравнения математической физики учебное пособие / А., О. Пихтилькова ; А. Павленко, О. Пихтилькова;: ОГУ, 2013.
4. Сборник задач по уравнениям математической физики учебное пособие / В. С. Владимиров, В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Т.В. Михайлова, М.И. Шабунин. - 4-е изд., перераб. и доп. - Москва : Физматлит, 2016.

### Дополнительная

1. Минюк С.А. высшая математика для инженеров : учеб. пособие для вузов: в 2 т. Т. 2 / С. А. Минюк, Н. С. Березкина, А. В. Метельский ; под общ. ред. Н.А. Микулика. - Мн. : Элайда, 2004.
2. Свешников, А.Г. лекции по математической физике : учеб. пособие / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов ; Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Наука; Моск. ун-т, 2004.
3. Кузнецов, Л.А. сборник заданий по высшей математике : типовые расчеты : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. - 7-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2005.
4. Чудесенко, В.Ф. сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты : учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2005.

*Олеся Пухлова Е. В.*

## Перечень вопросов для проведения зачета

(условия задач являются секретной информацией и доводится в день зачета)

1. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа.
2. Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи.
3. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.
4. Метод интегрального преобразования Фурье.
5. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.
6. Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.
7. Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии.
8. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение.
9. Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат.
10. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.
11. Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно поставленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий.
12. Классификация уравнений в частных производных с 2 независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.
13. Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи.
14. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.
15. Метод интегрального преобразования Фурье.
16. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.
17. Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.
18. Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения.
19. Понятие сетки, сеточных функций, сеточных операторов, норм сеточных функций и операторов. Понятие шаблона, явной и неявной схемы. Сходимости и порядок сходимости разностного дифференциального уравнения (численной схемы), порядок сходимости оператора граничных условий, порядка общей задачи.
20. Порядок сходимости явной схемы однородного уравнения теплопроводности. Условие максимального порядка сходимости.
21. Признак спектральной устойчивости для уравнения гиперболического типа (два определения). Устойчивость схемы в равномерной метрике и устойчивость по начальным условиям для параболических уравнений. Порядки сходимости схем однородных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов, условия устойчивости. Обратные задачи математической физики.

22. Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.
23. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций.
24. Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.
25. Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения. Условие существования и единственности для неоднородного уравнения. Функция Грина.
26. Спектральное уравнение на собственные значения. Простейшие задачи Штурма – Лиувилля для эллиптического уравнения (отрезок, прямоугольник, параллелепипед). Интеграл Пуассона для краевой задачи в полуплоскости.
27. Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента.
28. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля.
29. Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций.
30. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера.
31. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа.
32. Постановка начально – краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера.
33. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа.
34. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа.
35. Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.

## Перечень вопросов для проведения экзамена

(условия задач являются секретной информацией и доводится в день экзамена)

1. Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии.
2. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение.
3. Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат.
4. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.
5. Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно поставленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий.
6. Классификация уравнений в частных производных с 2 независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.
7. Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля.
8. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций.
9. Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.
10. Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения. Условие существования и единственности для неоднородного уравнения. Функция Грина.
11. Спектральное уравнение на собственные значения. Простейшие задачи Штурма – Лиувилля для эллиптического уравнения (отрезок, прямоугольник, параллелепипед). Интеграл Пуассона для краевой задачи в полуплоскости.
12. Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента.
13. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля.
14. Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций.
15. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера.
16. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа.
17. Постановка начально – краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера.



18. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа.
19. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа.
20. Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.
21. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа.
22. Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи.
23. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.
24. Метод интегрального преобразования Фурье.
25. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.
26. Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.
27. Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения.
28. Понятие сетки, сеточных функций, сеточных операторов, норм сеточных функций и операторов. Понятие шаблона, явной и неявной схемы. Сходимости и порядок сходимости разностного дифференциального уравнения (численной схемы), порядок сходимости оператора граничных условий, порядка общей задачи.
29. Порядок сходимости явной схемы однородного уравнения теплопроводности. Условие максимального порядка сходимости.
30. Признак спектральной устойчивости для уравнения гиперболического типа (два определения). Устойчивость схемы в равномерной метрике и устойчивость по начальным условиям для параболических уравнений. Порядки сходимости схем однородных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов, условия устойчивости. Обратные задачи математической физики.

## КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

Контроль качества усвоения знаний проводится в соответствии с Положением о рейтинговой системе оценки знаний и компетенций студентов (приказ ректора УО ПГУ № 294 от 06.06.2014 (в редакции, утверждённой приказом № 605 от 17.11.2014) в форме промежуточного контроля и текущей аттестации.

Для оценивания самостоятельной и аудиторной работы студентов в рамках дисциплины используется накопительная система контроля успеваемости, которая предполагает суммирование балльных оценок, выставляемых в электронный журнал за все виды работ в течение прохождения курса для определения среднеарифметических показателей успеваемости.

Мероприятия промежуточного контроля проводятся в течение семестра и включают в себя следующие формы контроля:

- устная форма (блиц-опрос на лекциях);
- письменная форма (тесты, контрольные работы);
- устно-письменная форма (защита лабораторных работ).

Лабораторные работы предполагают выполнение и защиту. При выполнении лабораторных работ выдаётся индивидуальное задание. Защита работ проводится индивидуально и оценивается в соответствии установленными правилами.

Промежуточная (аттестационная) диагностика компетенции студентов осуществляется на основании индивидуального рейтинга студента на момент аттестации. Для положительной аттестации (промежуточного контроля успеваемости) необходимо согласно календарному плану выполнить все лабораторные работы и индивидуальные задания, а также иметь положительную оценку по промежуточному контролю освоения теоретической части курса.

Результат промежуточного контроля за семестр оценивается отметкой в баллах по десятибалльной шкале и выводится, исходя из отметок, выставленных в ходе проведения мероприятий промежуточного контроля в течение семестра по следующей формуле:

$$П = (ПК_1 + ПК_2 + \dots + ПК_n) / n,$$

где  $ПК_1, \dots, ПК_n$  – отметки, выставленные в ходе проведения мероприятий промежуточного контроля,

$n$  – количество мероприятий промежуточного контроля.

Результат промежуточного контроля рассчитывается как округлённое среднее значение. Результат может быть увеличен в соответствии с п.п. 6.8 и 6.9 Положения.

Текущая аттестация проводится в форме зачёта и экзамена.

**Зачёт** проводится согласно Положению.

Заключение о зачёте формируется на основе накопительного принципа по формуле:

$$З = k \cdot П,$$

где  $k$  – весовой коэффициент промежуточного контроля;

$П$  – результат промежуточного контроля за семестр.

Весовой коэффициент  $k$  принимается равным 1.

Если полученная отметка  $З < 4$  баллов, то проводится устный зачёт отдельно по представленным в программе вопросам.

**Экзамен** проводится согласно Положению.

Итоговая экзаменационная отметка (ИЭ) учитывает отметку по результатам промежуточного контроля ( $П$ ) и экзаменационную отметку ( $Э$ ). Весовой коэффициент  $k$  принимается равным 0,5. Информация о весовом коэффициенте доводится до студентов на первом занятии в семестре.

$$\text{ИЭ} = k \cdot \text{П} + (1 - k) \cdot \text{Э},$$

где – ИЭ – итоговая отметка ; k – весовой коэффициент промежуточного контроля;  
П – результат промежуточного контроля за семестр, оценивается одной отметкой по десятибалльной шкале, которая выводится из отметок, полученных в семестре; Э– отметка по десятибалльной шкале, полученная студентом за ответы на вопросы по билету на экзамене.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

- Лабораторная работа 1* Постановка задач математической физики, начальных, краевых условий.
- Лабораторная работа 2* Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.
- Лабораторная работа 3* Классификация уравнений в частных производных 2 порядка, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.
- Лабораторная работа 4* Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина.
- Лабораторная работа 5* Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.
- Лабораторная работа 6* Задачи Дирихле и Неймана в круге, кольце и внешности круга. Интеграл Пуассона в действительной и комплексной формах. Краевые задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике.
- Лабораторная работа 7* Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре.
- Лабораторная работа 8* Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля.
- Лабораторная работа 9* Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике. Метод функций Грина для решения уравнения Лапласа.
- Лабораторная работа 10* Метод бегущих волн. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгоффа.
- Лабораторная работа 11* Метод подбора частных решений. Метод интегрального преобразования Фурье. Метод стоячих волн, колебания ограниченной струны. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.
- Лабораторная работа 12* Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.
- Лабораторная работа 13* Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.
- Лабораторная работа 14* Метод возмущений.
- Лабораторная работа 15* Метод Фурье (разделения переменных).
- Лабораторная работа 16* Согласование порядков сходимости разностных дифференциального и граничного операторов для явной схемы однородного уравнения теплопроводности.
- Лабораторная работа 17* Решение разностных уравнений гиперболического и параболического типов методом прогонки.

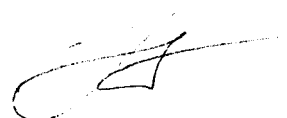
**Организация самостоятельной работы студентов  
дневной формы получения образования**

	Вид самостоятельной работы	Тематическое содержание и используемые источники	Количество часов
1	2	3	4
1	Подготовка к устным и письменным опросам на лекции	Тема 1.1 Литература: [1,3,7]	1
2		Тема 1.2 Литература: [3,5,6,7]	1
3		Тема 1.3 Литература: [3,5,6,7]	1
4		Тема 1.4 Литература: [3,5,6,7]	1
5		Тема 1.5 Литература: [2,3,4,5,6]	1
6		Тема 2.1 Литература: [2,3,4,5,6]	1
7		Тема 2.2 Литература: [2,3,4,5,6]	1
8		Тема 2.3 Литература: [2,3,4,5,6]	1
9		Тема 2.4 Литература: [2,3,4,5,6]	1
10		Тема 3.1 Литература: [2,3,4,5,6]	1
11		Тема 3.2 Литература: [2,3,4,5,6]	1
12		Тема 4.1 Литература: [2,3,4,5,6]	1
13		Тема 4.2 Литература: [2,3,4,5,6]	1
14		Тема 4.3 Литература: [2,3,5,6]	1
15		Тема 4.4 Литература: [2,3,5,6]	1
16		Тема 5.1 Литература: [2,3,5,6]	1
17		Тема 5.2 Литература: [2,3,5,6]	1
18	Подготовка к защите отчетов по лабораторным работам	Лабораторная работа № 1 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
19		Лабораторная работа № 2 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
20		Лабораторная работа № 3 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
21		Лабораторная работа № 4 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
22		Лабораторная работа № 5 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
23		Лабораторная работа № 6 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
24		Лабораторная работа № 7 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	1
25		Лабораторная работа № 8. [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
26		Лабораторная работа № 9 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
27		Лабораторная работа № 10 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
28		Лабораторная работа № 11 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
29		Лабораторная работа № 12 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
30		Лабораторная работа № 13 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
31		Лабораторная работа № 14 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
32		Лабораторная работа № 15 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
33		Лабораторная работа № 16 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
34		Лабораторная работа № 17 [МУ <sub>ЛР</sub> ]	2
	Систематизация полученных знаний при подготовке к экзамену		36
	<b>Итого:</b>		<b>80</b>

**ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ  
С ДРУГИМИ УЧЕБНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

Название дисциплины, по которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу
«Исследование операций»	Кафедра математики и компьютерной безопасности	<i>предложения нет</i>	
«Модели данных и системы управления базами данных»	Кафедра математики и компьютерной безопасности	<i>предложения нет</i>	

Заведующий кафедрой математики и компьютерной безопасности, к.ф.-м.н., доцент



А.А.Козлов