УДК 624.04: 539.3

О НАДЕЖНОСТИ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА СИЛ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛОВЫХ КРИТЕРИЕВ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Л.С. Турищев
Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой, Республика Беларусь
e-mail: l.turichev@psu.by

В основе расчета статически неопределимых стержневых конструкций классическими методами строительной механики лежат канонические уравнения, которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений. Важную роль при нахождении решения канонических уравнений играет понятие устойчивости решения. Устойчивость решения канонических уравнений принято связывать с обусловленностью матрицы коэффициентов систему линейных алгебраических уравнений. Существует ряд количественных оценок обусловленности матрицы коэффициентов систему линейных алгебраических уравнений, базирующихся на понятии числа обусловленности. В работе анализируется надежность оценки устойчивости решений канонических уравнений с помощью трех числовых критериев обусловленности матрицы систему линейных алгебраических уравнений, обычно применяемых при решении прикладных задач.

Ключевые слова: *статически неопределимые стержневые конструкции, канонические уравнения, система линейных алгебраических уравнений, обусловленность матрицы, числовые критерии обусловленности матрицы.*

ON THE RELIABILITY OF ASSESSING THE STABILITY OF SOLUTIONS TO CANONICAL EQUATIONS OF THE FORCES METHOD USING NUMERIC CRITERIA FOR THE CONDITIONALITY OF THE COEFFICIENT MATRIX

L. Turichev
Euphrosyne Polotskaya State University of Polotsk, Republic of Belarus
e-mail: l.turichev@psu.by

The calculation of statically indeterminate rod structures using classical methods of structural mechanics is based on canonical equations, which are a system of linear algebraic equations. An important role in finding solutions to canonical equations is played by the concept of solution stability. The stability of the solution of canonical equations is usually associated with the conditionality of the matrix of coefficients of a system of linear algebraic equations. There are a number of quantitative estimates of the conditionality of the matrix of coefficients of a system of linear algebraic equations, based on the concept of the condition number. The paper analyzes the reliability of assessing the stability of solutions to canonical equations using three numerical criteria for conditioning the matrix of a system of linear algebraic equations, usually used in solving applied problems.

Keywords: *statically indeterminate rod structures, canonical equations, system of linear algebraic equations, matrix conditioning, numerical criteria for matrix conditioning.*

Математической моделью статически неопределимых стержневых конструкций, рассчитываемых классическими методами строительной механики (метод сил, метод перемещений, смешанный метод), являются канонические уравнения, которые представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Важную роль при нахождении решения СЛАУ играет понятие устойчивости решения. Вопросы устойчивости решения СЛАУ рассматривались во многих работах различными авторами, например, [1–8]. Устойчивость решения СЛАУ принято связывать с обусловленностью матрицы ее коэффициентов. Существует ряд количественных оценок обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ, базирующиеся на понятии числа обусловленности. Однако, оценка устойчивости решения СЛАУ с помощью числа обусловленности матрицы позволяет получить осредненную оценку погрешности всех составляющих решения, но не позволяет получить оценку погрешности каждой составляющей решения.

Необходимость достоверной оценки устойчивости каждого элемента решения СЛАУ, связанных с расчетами стержневых конструкций, являются неизбежные отличия реальных параметров конструкций и их возможные дальнейшие изменения в ходе эксплуатации по сравнению с исходными параметрами, использованными при расчетах и проектировании стержневых конструкций. Как следствие этого, происходящие изменения параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) реальных конструкций от принятых при их проектировании. Поэтому вопросы надежности результатов расчета стержневых конструкций с учетом неустранимых погрешностей исходных параметров и связанные с ними вопросы устойчивости решений СЛАУ сохраняют свою актуальность до настоящего времени. Среди работ, посвященных этой проблематике, можно отметить [9–12].

В работе анализируется достоверность оценки устойчивости решений канонических уравнений с помощью следующих числовых критериев обусловленности СЛАУ, обычно применяемых при решении прикладных задач:

– критерий, основанный на понятии нормированного определителя [13];
– критерий, основанный на понятии нормы матрицы [14];
– критерий Ортеги [15].

Данные критерии основаны на нахождении чисел обусловленности матрицы коэффициентов СЛАУ.

Число обусловленности, соответствующее критерию, основанному на понятии нормированного определителя, определяется по формуле

$$\nu = \frac{\left|\det a\right|}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}},$$

которое может принимать значения в интервале

$$0 \le \nu \le 1.$$

Считается, что если

$$0.1 \le \nu \le 1, \qquad (1)$$

то СЛАУ хорошо обусловлена, а её решение устойчиво. При несоблюдении критерия (1) решение считается неустойчивым.

Число обусловленности, соответствующее критерию, основанному на понятии нормы матрицы, определяется по формуле

$$\mu = \|a\| \cdot \|a^{-1}\|,$$

которое может принимать значения в интервале

$$1 \le \mu < \infty .$$

Считается, что если

$$1 \le \mu \le 10, \tag{2}$$

то СЛАУ хорошо обусловлена, а её решение устойчиво. При несоблюдении критерия (2) решение считается неустойчивым.

Число обусловленности, основанному на критерии Ортеги, определяется по формуле

$$\xi = \frac{|\det a|}{\prod_{i=1}^{n} |\bar{a}_i|}.$$

Считается, что если

$$1 \le \xi \le 10, \tag{3}$$

то СЛАУ хорошо обусловлена, а её решение устойчиво. При несоблюдении критерия (3) решение считается неустойчивым.

Выполним анализ достоверности оценок устойчивости решения канонических уравнений (1) с помощью критериев (1) – (3) на частных примерах расчета стержневых конструкций (рисунок 1), результаты которых приведены в [16; 17].

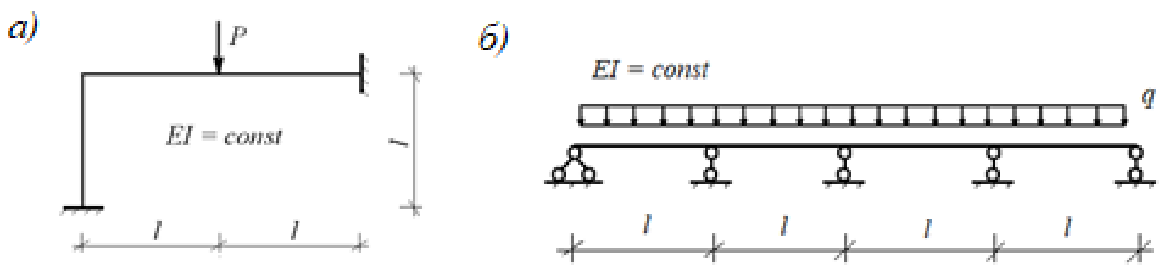

Рисунок 1. – Стержневые конструкции

При расчете рассматриваемых стержневых конструкций использовались различные варианты образования основной системы метода сил:

– варианты основной системы рамной конструкции

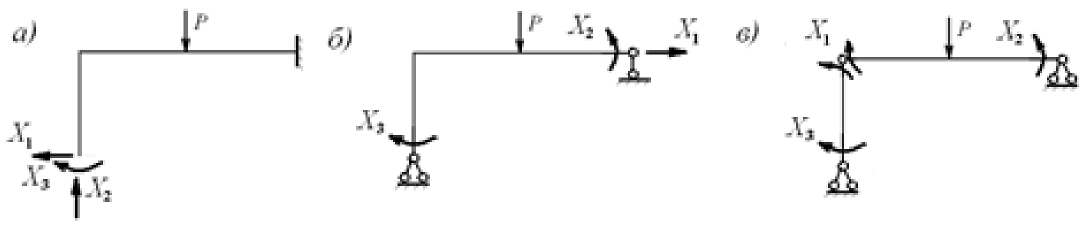

Рисунок 2. – Варианты основной системы рамной конструкции

– варианты основной системы неразрезной балки

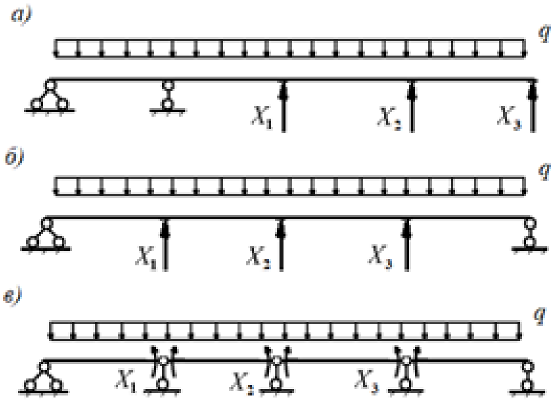

Рисунок 3. – Варианты основной системы неразрезной балки

Канонические уравнения метода сил во всех рассматриваемых случаях имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0\\
&\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0\\
&\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Исследуемыми параметрами НДС являются основные неизвестные канонических уравнений (4), представляющие собой окончательные внутренние усилия соответствующего вида в местах удаления лишних связей рассматриваемых стержневых конструкций.

В связи с наличием неустранимых погрешностей исходных параметров рассматриваемых стержневых конструкций коэффициенты и свободные члены канонических уравнений (4), должны вычисляться с некоторыми относительными погрешностями, модуль которых в первом приближении можно считать одинаковой величиной ε.

В работе [16] для рамы (рисунок 1, *а*) исследована зависимость устойчивости решения (4) от величины погрешности ε в интервале её изменения от 0 до 5% для трех вариантов основной системы метода сил:

– при расчете рамы с использованием первого варианта основной системы (рисунок 2, *а*) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. Первое и третье основные неизвестные в рассматриваемом интервале погрешности ε изменяют знаки, а максимальная погрешность вычисления второго неизвестного достигает значения 81.5%;

– при расчете рамы с использованием второго варианта основной системы (рисунок 2, б) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. В рассматриваемом интервале погрешности ε максимальные погрешности вычисления основных неизвестных достигают, соответственно, значений 144%, 27%, 342%;

– при расчете рамы с использованием третьего варианта основной системы (рисунок 2, *в*) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. В рассматриваемом интервале погрешности ε максимальные погрешности вычисления основных неизвестных достигают, соответственно, значений 15%, 13%, 27%.

В работе [17] для неразрезной балки (рисунок 1, *б*) исследована зависимость устойчивости решения (4) от величины погрешности ε в интервале её изменения от 0 до 5%, для трех вариантов основной системы метода сил:

– при расчете неразрезной балки с использованием первого варианта основной системы (рисунок 3, *а*) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. В рассматриваемом интервале погрешности ε максимальные погрешности вычисления основных неизвестных достигают, соответственно, значений 129%, 75%, 57%;

– при расчете неразрезной балки с использованием второго варианта основной системы (рисунок 3, *б*) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. В рассматриваемом интервале погрешности ε максимальные погрешности вычисления основных неизвестных достигают, соответственно, значений 52%, 65%, 20%;

– при расчете неразрезной балки с использованием третьего варианта основной системы (рисунок 3, *в*) решение канонических уравнений (4) является неустойчивым. Хотя в рассматриваемом интервале погрешности ε максимальные погрешности вычисления первого и третьего основных неизвестных достигают значения 3%, но максимальная погрешность второго основного неизвестного составляет 11%.

Результаты оценок устойчивости решений канонических уравнений (4), полученных при расчете рамы методом сил с использованием трех вариантов основной системы, с помощью критериев обусловленности СЛАУ приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вариант основной системы	Числовой критерий		
	ν	μ	ξ
1-ый вариант	$9.867\cdot10^{-3}$	100.119	101.351
2-ой вариант	0.562	9.596	14.466
3-ий вариант	0.236	8.471	1.779

На основании приведенных результатов можно сделать следующие выводы:

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для второго и третьего вариантов основной системы метода сил рамы, с помощью числа обусловленности, основанного на понятии нормированного определителя, является недостоверной. В соответствии с критерием (1) решение канонических уравнений (4) является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [16];

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для второго и третьего вариантов основной системы метода сил рамы, с помощью числа обусловленности, основанного на понятии нормы матрицы, является недостоверной. В соответствии с критерием (2) решение канонических уравнений является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [16];

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для третьего вариантов основной системы метода сил рамы, с помощью числа обусловленности, основанного на критерии Ортеги, является недостоверной. В соответствии с критерием (3) решение канонических уравнений является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [16].

Результаты оценок устойчивости решений канонических уравнений (4), полученных при расчете неразрезной балки методом сил с использованием трех вариантов основной системы, с помощью критериев обусловленности СЛАУ приведены в таблице 2.

Таблица 2

Вариант основной системы	Числовой критерий		
	ν	μ	ξ
1-ый вариант	$8.246 \cdot 10^{-4}$	365.772	1213
2-ой вариант	0.033	41.016	30.244
3-ий вариант	0.776	3.58	1.289

На основании приведенных результатов можно сделать следующие выводы:

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для второго и третьего вариантов основной системы метода сил неразрезной балки, с помощью числа обусловленности, основанного на понятии нормированного определителя, является недостоверной. В соответствии с критерием (1) решение канонических уравнений (4) является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [17];

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для второго и третьего вариантов основной системы метода сил неразрезной балки, с помощью числа обусловленности, основанного на понятии нормы матрицы, является недостоверной. В соответствии с критерием (2) решение канонических уравнений является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [17];

– оценка устойчивости, найденных значений основных неизвестных для второго и третьего вариантов основной системы метода сил неразрезной балки, с помощью числа обусловленности, основанного на критерии Ортеги, является недостоверной. В соответствии с критерием (3) решение канонических уравнений является устойчивым, что противоречит результатам, полученным в работе [17].

Таким образом, на основании приведенных результатов расчета методом сил двух видов стержневых конструкций можно сделать вывод, что оценка устойчивости решений канонических уравнений с помощью числовых критериев обусловленности СЛАУ, обычно применяемых при решении прикладных задач, может оказаться недостоверной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963. – 734 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969. – 168 с.

4. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. Т.1. – Минск: Вышэйшая шк., 1972. – 584 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1978. – 302 с.
6. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1980. – 177 с.
7. Жидков Е.Н. Вычислительная математика. – М.: Изд. «Академия», 2013. – 208 с.
8. Рыжиков Ю.И. Вычислительные методы. – СПб: БХВ-Петербург, 2013. – 400 с.
9. Петров Ю.П. Как получать надежные решения систем уравнений. – СПб: БХВ-Петербург, 2012. – 176 с.
10. Петров Ю.П., Петров И.А. Введение в теорию инженерных расчетов, учитывающих вариации параметров исследуемых объектов. – СПб: БХВ-Петербург, 2014. – 272 с.
11. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Критерий обусловленности систем алгебраических уравнений // ДАН, 2010, Т. 434, № 4, С.464–467.
12. Калиткин Н.Н., Юхно Л.Ф., Кузьмина Л.В. Количественный критерий обусловленности систем линейных алгебраических уравнений. Математическое моделирование, 2011, Т. 23, № 2, С. 3-26.
13. Филин А.П. Матрицы в статике стержневых систем. – Л.: Стройиздат, 1966. – 438 с.
14. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
15. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – М.: Мир, 1991. – 241 с.
16. Шагибалова А.О. Влияние погрешностей исходных параметров на достоверность параметров напряженно-деформированного состояния статически неопределимых рамных конструкций / А.О. Шагибалова // Электронный сборник трудов молодых специалистов Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой – 2023. – № 49: «Прикладные науки. Строительство». – С. 91-95.
17. Шагибалова А.О. Влияние погрешностей исходных параметров на достоверность параметров напряженно-деформированного состояния неразрезных балок / А.О. Шагибалова // Электронный сборник трудов молодых специалистов Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой – 2023. – № 49: «Прикладные науки. Строительство». – С. 96-100.