

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА
И ГИДРАТАЦИИ БЕТОННЫХ ИЗДЕЛИЙ В ТЕПЛОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ
И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ИХ РАСЧЁТА**

*канд. техн. наук, доц. А. М. НИЯКОВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, Беларусь)*

*д-р. техн. наук, проф. В. Н. РОМАНЮК
(Белорусский национальный технический университет, г. Минск)*

Аннотация. *Представлено развитие ранее разработанной авторами нестационарной математической модели для моделирования тепловой обработки бетонного изделия в теплотехнологической установке для ускоренной гидратации, позволяющее вычислять по мере протекания процесса обработки во времени интегральных составляющих теплового баланса системы «изделие – установка».*

Ключевые слова: *компьютерное моделирование, математическое моделирование, гидратация цемента, температурные поля, трёхмерное нестационарное уравнение теплопроводности, тепловой баланс, интегральные характеристики.*

Вопросам математического моделирования тепловой обработки (ТО) бетонных изделий в последнее время уделяется большое внимание исследователей в различных странах [1–4]. В развитие полученных результатов была поставлена задача, используя ранее полученную нами математическую модель [5–9], разработать математический аппарат, позволяющим производить расчёт составляющих теплового баланса на внешних границах бетонного изделия, подвергаемого ТО в теплотехнологической установке (ТТУ).

Для этого были, в частности, введены следующие интегральные энергетические характеристики процесса ТО, позволяющие производить его количественную оценку: подведённая извне (Q_{in}), рассеянная в окружающую среду (Q_{out}), выделившаяся при гидратации (Q_{hydr}). Ранжируя тепловые режимы по указанным характеристикам, можно оптимизировать в энергетическом отношении теплотехнологию изготовления бетонных изделий различной формы и структуры.

При выводе формул для математического моделирования энергетических характеристик процесса гидратации были использованы следующие положения:

1. Количество теплоты Q , переданное от греющей среды к поверхности площадью $\Delta x \cdot \Delta z$ за время Δt , пропорционально разности температур поверхности

T_b и среды T_{env} : $Q = \alpha \cdot \Delta x \cdot \Delta z \cdot \Delta t \cdot (T_b - T_{env})$, где коэффициент пропорциональности α является коэффициентом теплоотдачи.

2. Количество теплоты Q , которое распространяется по теплопроводящему объекту длиной Δz через поперечное сечение площадью $\Delta x \cdot \Delta y$ за время Δt , пропорционально разности температур на концах объекта $T(z) - T(z + \Delta z)$: $Q(\lambda / \Delta z) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t \cdot (T(z) - T(z + \Delta z))$, где коэффициент пропорциональности λ является теплопроводностью.

3. Если для пункта 2 предполагать, что половина объекта ($\Delta z / 2$) вдоль направления распространения теплоты состоит из материала с теплопроводностью λ_1 , а другая половина ($\Delta z / 2$) – из вещества с теплопроводностью λ_2 , то для итоговой теплопроводности λ будет верным соотношение: $1/\lambda = (1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)/2$.

Исходя из вышеизложенных представлений, интегральная теплота, поглощённая бетонным изделием извне, рассчитывалась в процессе моделирования на каждый момент времени t_N по формуле:

$$\begin{aligned}
 Q_{in}(t_N) = & \sum_{\tau=0..t_N} \left[\sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y+\Delta y,z) \in \Omega_3}} \alpha_{up} \Delta x \Delta z \Delta \tau (T(x,y+\Delta y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Big|_{T(x,y+\Delta y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} + \right. \\
 & + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y-\Delta y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y-\Delta y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Delta x \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta y}{2}} \Big|_{T(x,y-\Delta y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} + \\
 & + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x+\Delta x,y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x+\Delta x,y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Delta y \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta x}{2}} \Big|_{T(x+\Delta x,y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} + \\
 & + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x-\Delta x,y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x-\Delta x,y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Delta y \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta x}{2}} \Big|_{T(x-\Delta x,y,z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y,z+\Delta z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z+\Delta z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Delta x \Delta y \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta z}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z+\Delta z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} + \\
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y,z-\Delta z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z-\Delta z,\tau) - T(x,y,z,\tau)) \Delta x \Delta y \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta z}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z-\Delta z,\tau) - T(x,y,z,\tau) > 0} \Bigg], \text{ Дж, (1)}
\end{aligned}$$

где τ – время, принимающее дискретные значения от 0 до t_N (N – номер рассматриваемого такта моделирования, соответствующий моменту времени $t_N = N\Delta\tau$), с;

x, y, z – декартовы координаты (ось Y направлена вертикально), м;

$T(x, y, z, \tau)$ – температура бетона в точке, имеющей координаты (x, y, z) , в момент времени τ , °С;

$H(x, y, z, \tau)$ – коэффициент (степень) гидратации цемента;

$\lambda(H, T)$ – теплопроводность бетона, зависящая от степени его гидратации и температуры, Вт/(м·К);

λ_{st} – теплопроводность стальной арматуры, Вт/(м·К);

$\Delta\tau$ – шаг дискретизации по времени, с;

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги дискретизации по пространству, м;

α_{up} – коэффициент теплоотдачи от верхней грани бетонного к паровоздушной среде, Вт/(м²К).

Интегральная теплота, рассеянная бетонным изделием во внешнюю среду через его граничную поверхность на каждый момент времени t_N рассчитывалась по формуле:

$$\begin{aligned}
Q_{out}(t_N) = \sum_{\tau=0..t_N} & \left[\sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y+\Delta y,z) \in \Omega_3}} \alpha_{up} \Delta x \Delta z \Delta \tau (T(x,y,z,\tau) - T(x,y+\Delta y,z,\tau)) \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x,y+\Delta y,z,\tau) > 0} + \right. \\
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y-\Delta y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z,\tau) - T(x,y-\Delta y,z,\tau)) \Delta x \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta y}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x,y-\Delta y,z,\tau) > 0} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x+\Delta x,y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z,\tau) - T(x+\Delta x,y,z,\tau)) \Delta y \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta x}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x+\Delta x,y,z,\tau) > 0} + \\
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x-\Delta x,y,z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z,\tau) - T(x-\Delta x,y,z,\tau)) \Delta y \Delta z \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta x}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x-\Delta x,y,z,\tau) > 0} + \\
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y,z+\Delta z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z,\tau) - T(x,y,z+\Delta z,\tau)) \Delta x \Delta y \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta z}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x,y,z+\Delta z,\tau) > 0} + \\
& + \sum_{\substack{(x,y,z) \in \Omega_1 \\ (x,y,z-\Delta z) \in \Omega_2}} \frac{(T(x,y,z,\tau) - T(x,y,z-\Delta z,\tau)) \Delta x \Delta y \Delta \tau}{\left(\frac{1}{\lambda_{st}} + \frac{1}{\lambda(H(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))} \right) \frac{\Delta z}{2}} \Bigg|_{T(x,y,z,\tau) - T(x,y,z-\Delta z,\tau) > 0} \Bigg] , \text{ Дж}, \quad (2)
\end{aligned}$$

Интегральная теплота, выделившаяся при гидратации цемента во всем объёме изделия (внутри ограничивающей изделие поверхности) на момент времени t_N :

$$Q_{hydr}(t_N) = \sum_{\tau=0..t_N} \sum_{(x,y,z) \in \Omega_1} \rho_c \cdot P_q(Q(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau)) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta \tau, \text{ Дж}, \quad (3)$$

где $P_q(Q(x,y,z,\tau), T(x,y,z,\tau))$ – удельная мощность тепловыделения при гидратации цемента (Вт/кг);

ρ_c – удельный расход цемента в бетоне, кг/м³.

Выводы:

1. Предложены интегральные энергетические характеристики для моделирования процессов нагрева и гидратации бетонного изделия при ТО в ТТУ в составе: подведённой (Q_{in}), рассеянной (Q_{out}) и выделившейся при гидратации (Q_{hydr}) тепловых энергий.

2. Разработан численный метод для их определения, учитывающий нестационарность процессов нагрева и гидратации при проведении ТО и достигнутые в их ходе величины коэффициента гидратации и температуры в каждой точке внутреннего пространства бетонного изделия в любой момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ge, Zh. Predicting temperature and strength development of the field concrete: Retrospective Theses and Dissertations [Electronic resource] / Zhi Ge // Iowa State University. – 2005. – Mode of access: <https://dr.lib.iastate.edu/server/api/core/bitstreams/af7717dc-7a82-4c6e-ac85-98b7c6416176/content>. – Date of access: 14.02.2024.
2. Kuriakose, B. Modelling of heat of hydration for thick concrete constructions – a note / B. Kuriakose, B.N. Rao, G.R. Dodagoudar, V. Venkatachalapathy // Journal of Structural Engineering. – 2015. – Vol. 42, No. 4, October – November. – P. 348–357.
3. Фролов, С.В. Математическое моделирование процесса тепловлажностной обработки бетонных и железобетонных изделий / С.В. Фролов, А.В. Лагутин // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75. – № 3.
4. Чичко, А.Н. Компьютерные системы моделирования физических процессов / А.Н. Чичко // Вестник БНТУ. – 2003. – № 2. – С. 42–48.
5. Нияковский, А. М. Разработка математической модели процесса твердения бетона на основе трехмерного уравнения теплопроводности / А. М. Нияковский // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. – 2018. – № 16. – С. 72–79.
6. Нияковский, А. М. Алгоритм и численная схема моделирования нестационарных процессов тепловой обработки бетонных изделий / А. М. Нияковский, Ю. В. Яцкевич, А. Н. Чичко // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. – 2019. – № 4. – С. 50–61.
7. Нестационарная модель процесса гидратации железобетонного изделия, находящегося в программно-нагреваемой среде / А. М. Нияковский, В. Н. Романюк, А. Н. Чичко, Ю. В. Яцкевич // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2019. – Т. 63. – № 4. – С. 496–505. – DOI: 10.29235/1561-8323-2019-63-4-496-505.
8. Численный анализ характеристик процесса тепловой обработки многослойных композитных изделий в теплотехнологических установках / В. Н. Романюк, А. М. Нияковский, А. Н. Чичко [и др.] // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2022. – Т. 65. – № 1. – С. 52–66. – DOI: 10.21122/1029-7448-2022-65-1-52-66.
9. Нияковский, А. М. Численное моделирование эволюции энергетических характеристик процесса тепловой обработки композитного бетонного изделия / А. М. Нияковский [и др.] // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2019. – № 3 (723). – С. 86–100.