

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Министерство образования Республики Беларусь

Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, К.А. Волосов,
Н.К. Волосова, А.К. Волосова

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям
для студентов специальности

1-39 03 02 Программируемые мобильные системы;
1-40 02 01 Вычислительные машины, системы и сети

Москва
ПГУ, МИИТ
2024

УДК 519.6

Рецензенты:

М.И. Карлов, кандидат физико-математических наук, защитил диссертацию на Механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова;

**Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосов К.А., Волосова Н.К.
Волосова Н.К., Волосова А.К.**

Специальные математические методы и функции: учебное пособие // Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, К.А. Волосов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова, - 1 - ое изд., - Москва: ПГУ, МИИТ. 2024. – 133 С.

Материал учебного пособия соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта по математике. В книге содержатся основные главы теории математических методов и функций.

Для студентов университетов, педагогических вузов, студентов технических вузов, преподавателей, инженеров, программистов, использующих в практической деятельности специальные Математические методы и функции.

УДК 519.6

Полоцкий университет имени Евфросинии Полоцкой, Российский
Университет Транспорта, 2024.

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1. Линейные, евклидовы, нормированные, метрические пространства.	
Фурье-анализ.	
Лекция 1. Линейные, нормированные, евклидовы, метрические пространства. Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Грамма.	6
Нормы в некоторых нормированных пространствах.	10
Лекция 2. Несколько определений и теорем из теории функции комплексной переменной.	14
Лекция 3. Ряды Фурье. Лемма Римана.	17
Лекция 4. Интегралы Фурье. Лемма Жордана.	25
Лекция 5. Дискретное преобразование Фурье.	30
Лабораторная работа №1. Дискретное преобразование Фурье	32
Комплексное прямое и обратное преобразование Фурье. Формула Даламбера. Синус и косинус-Фурье преобразования.	36
Глава 2. Специальные математические функции и методы решения уравнений в частных производных.	
Лекция 6. Гамма-функция. Бета-функция (интегралы Эйлера). Свойства.	41
Лекция 7. Уравнение цилиндрических функций действительного аргумента. Функция Бесселя. Свойства.	44
Норма цилиндрических функций.	46
Колебания круглой мембраны.	47
Лекция 8. Классические ортогональные полиномы. Уравнение Пирсона.	52
Свойства классических ортогональных полиномов.	53
Формула Родрига. Полиномы Лежандра, Лаггера, Эрмита.	56
Глава 3. Некоторые методы решения задач математической физики и вариационные задачи.	
Лекция 9. Простейшие уравнения математической физики. Решение задач математической физики методом подбора частных решений.	57
Колебания прямоугольной мембраны.	59
Лекция 10. Простейшая классическая вариационная задача	62
Производная функционала. Лемма (Дюбуа-Реймона). Уравнение Эйлера-Лагранжа.	63
Уравнение Якоби, условие Якоби. Функция Вейерштрасса.	66
Задача о брахистохроне.	67
Задача Больца. Интегрант, терминант. Условия трансверсальности.	70
Глава 4. Преобразования специального вида	
Лекция 11. Прямое и обратное Z- преобразование. Свойства.	74
Восстановление числовой последовательности по ее Z-преобразованию.	77
Лекция 12. Прямое и обратное преобразование Лапласа. Преобразование Хэвисайда.	79
Свойства преобразования Лапласа.	80
Формула Меллина.	83
Решение дифференциальных и интегральных уравнений	84
Глава 5. Решение задач с уравнениями Лапласа и Пуассона в кольце и в сферическом слое методом Фурье.	
Лекция 13. Метод Фурье в задачах математической физики. Часть первая. Решение уравнения Лапласа в кольце.	85
Пример из механики. Задача об обтекании идеальной несжимаемой жидкостью бесконечного цилиндра	88

Лекция 14. Метод Фурье в задачах математической физики. Часть вторая. Решение уравнения Лапласа в шаровом слое.	92
Глава 6. Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма.	
Лекция 15. Прямые методы решения интегральных уравнений. Метод замены интеграла. Метод замены ядра.	96
Лекция 16. Проекционные методы решения интегральных уравнений.	99
1. Метод наименьших квадратов	99
2. Метод Петрова – Галеркина	101
3. Метод Бубнова – Галеркина	103
4. Метод коллокации	104
Приложение	
Лекция 17. Дифференциальные операторы математической физики в криволинейных ортогональных системах координат	106
Гладкие невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Декартова, полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат. Операторы градиента, дивергенции, оператора Лапласа в обобщенной ортогональной системе координат, в декартовой, цилиндрической и сферической системе координат.	110
Предметный указатель	111
Литература	113

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие представляет краткий конспект лекций по предмету Специальные математические методы и функции, который авторы вели в течение нескольких лет студентам-программистам в Полоцком государственном университете. Материал лекций разделен на 6 глав.

Первая часть посвящена Фурье-анализу. Каждая из лекций содержит доказательство по одной основной теореме о представлении периодической кусочно-непрерывной функции в ряд Фурье и непериодической кусочно-непрерывной функции и абсолютно интегрируемой в интеграл Фурье. В третьей лекции дан вывод формул для прямого и обратного дискретного преобразования Фурье. Написана программа для лабораторной работы по дискретному преобразованию Фурье. Приведены формулы для прямого и обратного преобразования комплексного преобразования Фурье. С помощью формул получена формула Даламбера для решения волнового уравнения на прямой. С помощью формул косинус и синус преобразования решена задача о распространении тепла на полупрямой с начальной температурой в виде дельта-функции и с нулевыми краевыми условиями Неймана для температуры.

Вторая глава рассматривает специальные математические функции, интегралы Эйлера гамма и бета-функции с доказательством их свойств. Рассматривается уравнение цилиндрических функций, его решение в виде функций Бесселя. Решена задача о колебаниях круглой мембраны. Лекция 8 посвящена общим свойствам классических ортогональных полиномов, дан вывод формулы Родрига, формулы собственных значений и коэффициентов уравнений Лежандра, Лаггера, Эрмита.

В третьей части рассматриваются некоторые методы решения задач математической физики и вариационные задачи. В девятой лекции доказана Лемма об инвариантности класса элементарных функций при действии на функции класса оператором Лапласа, оператором уравнения теплопроводности и оператором Даламбера, решено методом подбора частных значений большое число начально-краевых задач с уравнением теплопроводности и с волновым уравнением, а также краевых задач с уравнением Лапласа. Введены определения производной функционала, вариации функционала по Лагранжу, доказана Лемма Дюбуа-Реймона, доказаны основные теоремы для необходимых условий экстремума в задаче Больца и простейшей классической вариационной задаче. Дано обоснование знакопостоянства функции Вейерштрасса для получения достаточных условий экстремума в простейшей классической вариационной задаче. Решена задача о брахистохроне.

Глава 4 посвящена преобразованиям специального вида. Рассматривается прямое и обратное преобразование решетчатой функции. Получена общая формула для обратного преобразования решетчатой функции. Доказаны свойства Z-преобразования. Для прямого и обратного преобразований Лапласа доказан ряд свойств. Выведена формула Меллина для обратного преобразования Лапласа, а затем сведена к удобной практической формуле на основе теоремы о вычетах. Показаны примеры решения интегральных уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью преобразований Лапласа.

Пятая глава рассматривает метод Фурье на примере решения уравнений математической физики эллиптического типа - уравнения Пуассона в кольце и уравнения Лапласа в шаровом слое.

В настоящее время большое значение имеют численные методы решения задач, например решения интегральных уравнений. В 6 главе рассмотрены прямые методы решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода, методы замены интеграла и ядра в лекции 15. В 16 лекции описаны методы наименьших квадратов, методы Петрова-Галеркина, Бубнова-Галеркина, метод коллокации, то есть ортогональные методы решения интегральных уравнений. Почти во всех лекциях разобраны примеры и приведены задачи для самостоятельного решения.

Д.Ф. Пастухов, Ю.Ф. Пастухов, К.А. Волосов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова

Глава 1. Линейные, евклидовы, нормированные, метрические пространства. Фурье-анализ.

Лекция 1. Линейные, нормированные, евклидовы, метрические пространства. Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Грама.

Определение 1. Множество элементов X называется линейным над полем действительных R (комплексных C) чисел, если оно замкнуто относительно двух операций:

- 1) $\forall x, y \in X \exists z = x \oplus y \in X$ – сумма двух элементов x, y
- 2) $\forall x \in X, \forall \lambda \in R \exists y = \lambda \cdot x \in X$ – произведение числа λ на элемент x

Свойства линейного пространства[1]

1. $\forall x, y \in X : x \oplus y = y \oplus x$
2. $\forall x, y, z \in X : (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
3. Существует нуль-элемент, такой что
 $\forall x \in X : (x \oplus 0) = (0 \oplus x) = x$
4. Для каждого элемента $x \in X$ существует противоположный элемент $-x$ такой что
 $\forall x \in X, \exists -x \in X : x \oplus (-x) = 0$
5. $\lambda = 1, \forall x \in X : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
6. $\forall \lambda, \mu \in R, \forall x \in X : (\lambda \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
7. $\forall \lambda, \mu \in R, \forall x \in X : (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x \oplus \mu \cdot x$
8. $\forall \lambda \in R, \forall x, y \in X : \lambda \cdot (x \oplus y) = \lambda \cdot x \oplus \lambda \cdot y$

Примеры линейных пространств:

- а. Множество точек(векторов) из n -мерного координатного пространства над полем действительных точек.
- б. Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с арифметической операцией умножения на действительные числа.
- с. Множество прямоугольных матриц одинаковой фиксированной размерности с операцией умножения матрицы на действительные числа.

Определение 2. Множество из n точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$) линейного пространства называется линейно зависимым, если найдется нетривиальный набор действительных чисел – вектор $\left\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0 \right\}$ чисел такой, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \forall x \in [a, b])$$

Множество из n точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$) линейного пространства называется линейно независимым, если нетривиального набора чисел не найдется. То есть, если система точек $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$) линейно независима, то из условия

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \quad (\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \forall x \in [a, b]) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Свойство 1. Система точек (функций) линейного пространства, содержащего нуль-элемент $x = 0 \in X$ ($\varphi(x) \equiv 0 \in X$) линейно зависима.

Доказательство. Выберем нетривиальный набор чисел $\{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0\}$ для системы точек (функций), $\{x_1 = 0, x_2, \dots, x_n\}$, ($\{\varphi_1(x) \equiv 0 \forall x \in [a, b], \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$) получим

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 1 \cdot 0 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \neq 0$$

$$(\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \alpha_n \varphi_n(x) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot \varphi_2(x) + \dots + 0 \cdot \varphi_n(x) \equiv 0 \forall x \in [a, b]), \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \neq 0$$

По определению 2 система точек (функций) линейно зависима. Свойство 1 доказано.

Для сокращения записи далее доказательство приводим для системы линейно зависимых (независимых) векторов.

Свойство 2. Если система векторов содержит два равных вектора, то она линейно зависима.

Доказательство. Пусть для определенности $\{x_1 = x_2, \dots, x_n\}$, выберем числовой вектор $\{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0\}$, получим

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_n x_n = (1-1)x_1 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_n = 0 \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 2 \neq 0$$

По определению 2 система из n векторов $\{x_1 = x_2, \dots, x_n\}$ линейно зависима, что доказывает свойство 2.

Теорема 1. Система n векторов линейного пространства $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда один вектор системы выражается в виде линейной комбинации $n-1$ оставшихся векторов, например, $x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{n-1} x_{n-1}$

Доказательство. Необходимость.

Пусть система $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ линейно зависима. Тогда существует нетривиальное решение

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_n x_n = 0, \exists \alpha_k \neq 0 \Rightarrow x_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} x_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} x_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} x_n$$

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_k}, \dots, \beta_{k-1} = -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}, \beta_{k+1} = -\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}, \dots, \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_k}$$

То есть, вектор x_k линейно выражается через остальные векторы системы.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $x_k = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_{k-1} x_{k-1} + \beta_{k+1} x_{k+1} + \beta_n x_n \Rightarrow$

$$-\beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \dots - \beta_{k-1} x_{k-1} + 1 \cdot x_k - \beta_{k+1} x_{k+1} - \beta_n x_n = 0 \mid \sum_{i=0}^n \beta_i^2 \geq 1 \neq 0$$

По Определению 2 система векторов $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ линейно зависима. Теорема 2 доказана.

Определение 3[1]. Линейное пространство X называется евклидовым, если $\forall x, y \in X$ введена числовая функция $\langle x, y \rangle \in R$, удовлетворяющая 4 аксиомам:

1. $\forall x, y \in X \mid \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\forall x_1, x_2, y \in X \mid \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$
3. $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in R \mid \langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\forall x \in X \mid \langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Линейное пространство с функцией скалярного произведения его элементов называется евклидовым пространством. В конечномерном векторном пространстве l_2^n скалярное произведение 2 векторов определяется формулой $\forall x, y \in R^n \mid \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

В пространстве функций интегрируемых с квадратом L_2 скалярное произведение 2 функций определяется формулой

$$t \in [a, b] \forall x(t), y(t) \in L_2 \mid \langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

Теорема 2. Для того чтобы система функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in [a, b]\}$ была линейно зависимой необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_1, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_2, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{vmatrix} = 0 \quad (1.1)$$

Доказательство. Перепишем по определению 2 условие линейной зависимости системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in [a, b]\}$ найдем ненулевой вектор $\left\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0 \right\}$

такой что

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \forall x \in [a, b] \quad (1.2)$$

Умножим в уравнении (2) каждое слагаемое скалярно на функцию $\varphi_i(x), x \in [a, b]$

$$\alpha_1 \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle + \alpha_2 \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle = \langle 0, \varphi_i \rangle = 0, x \in [a, b], i = \overline{1, n}$$

Последняя система n алгебраических уравнений эквивалентна матричной записи

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_1, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_2, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Последнее однородное матричное уравнение из n алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение $\left\{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \neq 0 \right\}$ тогда и только тогда, если

$$\begin{vmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_1, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_2, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \varphi_{n-1}, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_{n-1}, \varphi_n \rangle \\ \langle \varphi_n, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_2 \rangle \dots & \langle \varphi_n, \varphi_{n-1} \rangle & \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \end{vmatrix} = 0$$

Теорема 2 доказана. Элементы матрицы скалярных произведений координатных функций $\langle \varphi_{n-1}, \varphi_2 \rangle$ называется матрицей Грама, а ее определитель называется определителем Грама.

Итак, система функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), x \in [a, b]\}$ линейно зависима тогда и только тогда, если определитель Грама равен нулю.

Пример 1. Показать, что функции $\{\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x, x \in [0, \pi]\}$ линейно независимы на отрезке $[0, \pi]$.

Решение. Доказательство проведем от противного, то есть пусть функции линейно независимы. Тогда равенство выполнено для всех точек отрезка $[0, \pi]$, в частности, $\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) = \alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x \equiv 0, x \in [0, \pi], \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ и для точек $x=0$ и $x=\pi/2$

$$x = 0 : \alpha_1 \sin 0 + \alpha_2 \cos 0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 = 0, x = \pi/2 : \alpha_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0$$

Полученное противоречие доказывает линейную независимость функций $\{\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x, x \in [0, \pi]\}$.

Пример 2. Показать, что система функций линейно зависима на отрезке $[0, \pi]$ $\{\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x, \varphi_3(x) = \sin x - 2 \cos x, x \in [0, \pi]\}$

Решение. Найдем элементы матрицы Грама. В силу аксиомы 1 скалярного произведения матрица Грама является симметричной $g_{i,j} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle = g_{j,i}$

$$g_{1,1} = \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin(2x)}{2} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$g_{1,2} = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx = -\frac{1}{4} (\cos(2x))_0^{\pi} = 0$$

$$g_{2,2} = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin(2x)}{2} \right)_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$g_{1,3} = \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle = \int_0^{\pi} \sin(x) (\sin x - 2 \cos x) dx = \int_0^{\pi} (\sin^2(x) - \sin(2x)) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$g_{2,3} = \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle = \int_0^{\pi} \cos(x) (\sin(x) - 2 \cos(x)) dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(2x)}{2} - 2 \cos^2(x) \right) dx = \pi$$

$$g_{3,3} = \langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle = \int_0^{\pi} (\sin(x) - 2 \cos(x))^2 dx = \int_0^{\pi} (\sin^2(x) + 4 \cos^2(x) - 4 \sin(x) \cos(x)) dx = \\ = \int_0^{\pi} (\sin^2(x) + 4 \cos^2(x) - 2 \sin(2x)) dx = \frac{5}{2} \pi.$$

Вычислим определитель Грама для системы функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), x \in [0, \pi]\}$

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{5\pi}{2} \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \begin{vmatrix} \frac{\pi}{2} & \pi \\ \pi & \frac{5\pi}{2} \end{vmatrix} - 0 + \frac{\pi}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \pi \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{5}{4} \pi^2 - \pi^2 \right) - \frac{\pi}{2} \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^3}{8} = 0$$

По Теореме 2 система функций $\{\varphi_1(x) = \sin x, \varphi_2(x) = \cos x, \varphi_3(x) = \sin x - 2 \cos x, x \in [0, \pi]\}$ линейно зависима.

Теорема 3. Если элемент x линейного пространства можно разложить по системе линейно независимых векторов (функций) $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in X$ этого пространства, то это разложение единственно.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует два различных разложения вектора x по системе линейно независимых базисных функций

$$x = \alpha_1^1 x_1 + \alpha_2^1 x_2 + \dots + \alpha_n^1 x_n, \quad x = \alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 + \dots + \alpha_n^2 x_n, \quad \alpha^1 \neq \alpha^2$$

Вычитая из левой части второго уравнения левую часть первого, аналогично из правой части правую часть получим

$$(\alpha_1^2 - \alpha_1^1) x_1 + (\alpha_2^2 - \alpha_2^1) x_2 + \dots + (\alpha_n^2 - \alpha_n^1) x_n = x - x = 0, \quad \alpha^1 \neq \alpha^2$$

По определению 2 последнее равенство в силу линейной независимости системы базисных функций возможно, если и только если

$$\alpha_1^2 - \alpha_1^1 = 0, \alpha_2^2 - \alpha_2^1, \dots, \alpha_n^2 - \alpha_n^1 = 0 \Leftrightarrow \alpha^1 = \alpha^2, \alpha^1 \neq \alpha^2$$

В последней строке получили противоречие, так как одновременно 2 вектора коэффициентов разложения равны и не равны друг другу $\alpha^1 = \alpha^2, \alpha^1 \neq \alpha^2$. Теорема 3 доказана.

Определение 4. Система линейно независимых функций называется ортогональной, если скалярное произведение любой пары различных функций равно нулю $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, j \neq i, i, j = \overline{1, n}$.

Разложим допустимую функцию линейного евклидова пространства по системе ортогональных линейно независимых базисных функций,

$$f(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x),$$

затем скалярно почленно умножим каждое слагаемое на базисную функцию φ_i , учитывая условие ортогональности $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0, j \neq i, i, j = \overline{1, n}$, получим равенство

$$\langle f(x), \varphi_i \rangle = \alpha_1 \langle \varphi_1, \varphi_i \rangle + \alpha_2 \langle \varphi_2, \varphi_i \rangle + \dots + \alpha_n \langle \varphi_n, \varphi_i \rangle \Leftrightarrow \langle f(x), \varphi_i \rangle = \alpha_i \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle \Leftrightarrow \alpha_i = \frac{\langle f(x), \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, i = \overline{1, n}$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x), \alpha_i = \frac{\langle f(x), \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, i = \overline{1, n} \quad (1.3)$$

Формула (1/3) называется формулой коэффициентов для разложения функции по линейно независимому ортогональному базису и используется в функциональном анализе и уравнениях математической физики.

Определение 5. Линейное пространство X произвольных элементов называется нормированным, если для любого элемента $x \in X$ определена неотрицательная функция $\|x\|$ - норма x такая, что:

- 1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \forall x \in X$ и любого действительного числа $\lambda \in R$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \forall x, y \in X$ (неравенство треугольника)

Замечание. Нормированным может быть только линейное пространство, так как в нём определены операции $\lambda x, x + y$, а также нулевой элемент линейного пространства.

Нормы в некоторых нормированных пространствах [3], [4].

1) Действительные числа $\|\lambda\| = |\lambda|$.

2) Векторы $x = \{x_1, \dots, x_n\} \in R^n$.

a) $\|x\|_C = \max_{i=1, n} |x_i|$ - равномерная норма (норма Чебышева)

b) $\|x\|_{l_1^n} = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|x\|_{l_2^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}, \|x\|_{l_p^n} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, p \geq 1$ - конечномерное векторное пространство l_p^n с нормой $\|x\|_{l_p^n}$.

Определение 6. Говорят, что две нормы $\|x\|_1, \|x\|_2$ эквивалентны, если существуют положительные числа $0 < C_1 < \infty, 0 < C_2 < \infty$ такие, что $C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$.

Утверждение 1. В конечномерных векторных пространствах l_p^n все нормы эквивалентны, причём верно неравенство:

$$\|x\|_{l_1^n} \leq \|x\|_{l_2^n} \leq \dots \leq \|x\|_{l_2^n} \leq \dots \leq \|x\|_C \leq \dots \leq \sqrt{n} \|x\|_{l_2^n} \leq n \|x\|_{l_1^n}$$

Для определённости, докажем два крайних неравенства

$$\|x\|_{l_1^n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max_{i=1,n} |x_i| = \frac{n}{n} \max_{i=1,n} |x_i| = \|x\|_C \leq n \|x\|_{l_1^n} = \frac{n}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| = \max_{i=1,n} |x_i| + \sum_{i=1, i \neq k}^n |x_i| = \|x\|_C + \sum_{i=1, i \neq k}^n |x_i|$$

$$\Rightarrow n \|x\|_{l_1^n} - \|x\|_C = \sum_{i=1, i \neq k}^n |x_i| \geq 0, |x_k| = \max_{i=1,n} |x_i|$$

2) Норма функций.

a) равномерно – непрерывная норма (норма Чебышева) $\|f\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$

b) пространство L_p интегрируемых функций на отрезке со степенью $p > 1$ и нормой

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, p > 1$$

Утверждение 2. Справедливо неравенство

$$\|f\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_2} \leq \dots \leq \|f\|_{L_p} \leq \dots \leq \|f\|_C$$

В частности, для функции

$$f(x) = x, a = 0, b = 1: \|f\|_{L_1} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} < \|f\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |x|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \left(\int_0^1 |x|^3 dx \right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^1 |x|^p dx \right)^{1/p} = \frac{1}{\sqrt[p]{p+1}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 1, \frac{1}{\sqrt[p]{p+1}} < 1, p \geq 1$$

Доказательство. Покажем справедливость, например, последнего неравенства:

$$\|f\|_{L_p}^p = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b |f(x)|^p dx \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \left(\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right)^p dx = \frac{\left(\max_{x \in [a,b]} |f(x)| \right)^p}{(b-a)} \int_a^b dx = \|f\|_C^p \Leftrightarrow \|f\|_{L_p} \leq \|f\|_C$$

3) Нормы матриц

$$1) \|A\|_C = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, 2) \|A\|_1 = \max_{j=1,n} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, 3) \|A\|_M = n \max_{i=1,n} |a_{i,j}|, 4) \|A\|_E = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

$$5) \|A\|_\mu = \sqrt{\max_{i=1,n} \mu_i}, A^H A x_i = \mu_i x_i, A^H - \text{матрица эрмитова сопряжённая к } A.$$

Первые две нормы не имеют специального названия, третья называется максимальной, четвёртая сферическая, пятая спектральная. Сравним матричные нормы на примере.

Пример 5. Найти все известные матричные нормы для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \|A\|_C = \max\{1+2, 3+4\} = 7,$$

$$\|A\|_1 = \max\{1+3, 2+4\} = 6, \|A\|_M = 2 \max\{1, 2, 3, 4\} = 8, \|A\|_E = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{30} \approx 5,477$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^H = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A^H A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 10-\mu & 14 \\ 14 & 20-\mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mu^2 - 30\mu + 4 = 0, \max_{i=1,2} |\mu_i| = \frac{30 + \sqrt{900-16}}{2} < 30, \sqrt{\max_{i=1,2} |\mu_i|} \approx 5.457.$$

В данном примере $\|A\|_2 < \|A\|_E < \|A\|_1 < \|A\|_C < \|A\|_M$, $\|A\|_2 \approx \|A\|_E$, поэтому хорошим приближением для спектральной нормы является сферическая с минимальными вычислительными затратами.

Определение 7. Норма матрицы $\|A\|$ называется согласованной с нормой вектора $\|x\|$, если верно:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|, \forall x \in X$$

Определение 8. Норма матрицы $\|A\|$ согласованная с векторной нормой $\|x\|$ называется подчиненной векторной норме $\|x\|$ обозначение $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, то есть если

$$\exists x \in R^n : \|A\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

$$\text{Например, } \|Ax\|_C = \max_{i=1,n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leq \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \max_{j=1,n} |x_j| = \|A\|_C \|x\|_C, \forall x \in R^n,$$

другими словами, матричная норма $\|A\|_C$ согласована с векторной нормой $\|x\|_C$.

$$\|A\|_C \geq \frac{\|Ax\|_C}{\|x\|_C}, \quad x_j = \text{sign}(a_{i_0,j}) = \pm 1, j = \overline{1,n}, \quad \text{где } i_0 : \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}|, \quad \text{поскольку}$$

$$\|x\|_C^* = \max_{i=1,n} |x_j| = \max_{i=1,n} |\text{sign}(a_{i_0,j})| = \max_{i=1,n} |\pm 1| = 1, \quad \|A\|_C \geq \frac{\|Ax\|_C^*}{\|x\|_C^*} \Leftrightarrow \|A\|_C \geq \|Ax\|_C^*$$

$$\|Ax\|_{i_0}^* = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \max_{i=1,n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| = \|A\|_C$$

$$\|Ax\|_C^* = \max_{i=1,n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| = \|Ax\|_{i_0}^* = \|A\|_C \quad \text{нужно совместить 2 неравенства}$$

$$\begin{cases} \|A\|_C \geq \|Ax\|_C^* \\ \|Ax\|_C^* \geq \|A\|_C \end{cases} \Leftrightarrow \|A\|_C = \|Ax\|_C^* = \frac{\|Ax\|_C^*}{\|x\|_C^*}. \quad \text{То есть показано, что матричная норма } \|A\|_C \text{ является}$$

подчиненной к векторной норме $\|x\|_C$.

Определение 9. Пространство X произвольных элементов называется метрическим, если для любых двух элементов $\forall x, y \in X$ определена неотрицательная функция $\rho(x, y)$:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника)

Определение 10. Пусть R метрическое пространство. Отображение A пространства R в себя называется сжимающим (или кратко сжатием), если существует число $\alpha < 1$, что для любых элементов $x, y \in R$ выполняется условие[2]:

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y)$$

Тогда n - кратное отображение A , примененное к элементам x, y - образы $A^n x, A^n y \in R$ находятся на расстоянии

$$\rho(A^n x, A^n y) \leq \alpha \rho(A^{n-1} x, A^{n-1} y) \leq \alpha^2 \rho(A^{n-2} x, A^{n-2} y) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(A^0 x, A^0 y) \equiv \alpha^n \rho(x, y) \quad (1.4)$$

При значениях $\alpha < 1$ отображение A будет непрерывным. Другими словами, для последовательности элементов $x_n \rightarrow x; x, x_n \in R: Ax_n \rightarrow Ax$. Действительно, из условия $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ следует условие $\rho(Ax_n, Ax) \leq \alpha \rho(x_n, x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$

Теорема 4. (принцип сжимающих отображений) А. Н. Колмогоров[2].

Всякое сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве R имеет одну и только одну неподвижную точку ($Ax = x$).

Доказательство. Пусть x_0 произвольная точка из R . Обозначим

$$x_1 = Ax_0, x_2 = Ax_1, \dots, x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0.$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ - фундаментальна. Считаем для определенности $m > n$:

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n) \rho(x_1, x_0) =$$

$$\alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}) \rho(x_1, x_0) \leq \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1} + \dots) \rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1 - \alpha}$$

Поскольку число $\frac{\rho(x_1, x_0)}{1 - \alpha}$ определяется сжимающим отображением A и начальной точкой

$$x_0, \text{ то оно фиксировано, но } \frac{\alpha^n \rho(x_1, x_0)}{1 - \alpha} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon = \frac{\alpha^N \rho(x_1, x_0)}{1 - \alpha} > 0 \exists N(\varepsilon) = 1 + \left\lceil \log_{\alpha} \left(\frac{\varepsilon(1 - \alpha)}{\rho(x_1, x_0)} \right) \right\rceil, \forall n, m > N(\varepsilon) : \rho(x_m, x_n) < \varepsilon (0 < \alpha < 1)$$

Что и означает по определению фундаментальность последовательности $\{x_n\}$, которая в полных метрических пространствах по определению сходится. Обозначим $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

В силу непрерывности оператора A оператор предельного перехода можно перенести от аргумента функции к самой функции

$$Ax = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x$$

Т.е. точка $x = Ax$ является неподвижной.

Докажем ее единственность от противного. Пусть $x = Ax$ и $y = Ay, x \neq y$:

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) < \rho(x, y) (\alpha < 1)$$

Но положительное число $\rho(x, y)$ не может быть меньше себя. Противоречие можно устранить $\Leftrightarrow \rho(x, y) = 0$ Действительно $0 \leq \alpha \cdot 0 = 0$, но тогда по первой аксиоме метрической функции $x = y$. Теорема 4 доказана.

Определение 11. Говорят, что метрическая функция $\rho_1(x, y)$ порождена метрикой $\rho(x, y)$, если из справедливости $\rho(x, y)$ - метрика следует, что $\rho_1(x, y)$ также метрика.

Пример 6. Показать, что метрика $\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$ порождена $\rho(x, y)$ метрикой.

Решение. Так как $\rho(x, y)$ - метрика, то справедливы 3 аксиомы метрического пространства

$$1) \rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$$

$$2) \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$3) \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X \text{ (неравенство треугольника)}$$

Получим, что

$$1) \text{ если } \rho(x, y) \geq 0 \Rightarrow \rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)) \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)) = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$2) \text{ если } \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X \Rightarrow \rho_1(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y)) = \ln(1 + \rho(y, x)) = \rho_1(y, x) \quad \forall x, y$$

3) Если $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X, \rho_1(x, z) \leq \rho_1(x, y) + \rho_1(y, z) \Leftrightarrow$
 $\ln(1 + \rho(x, z)) \leq \ln(1 + \rho(x, y)) + \ln(1 + \rho(y, z)) \Leftrightarrow 1 + \rho(x, z) \leq (1 + \rho(x, y))(1 + \rho(y, z)) \Leftrightarrow$
 $1 + \rho(x, z) \leq (1 + \rho(x, y))(1 + \rho(y, z)) = 1 + \rho(x, y) + \rho(y, z) + \rho(x, y)\rho(y, z) \Leftrightarrow$
 $\rho(x, y) + \rho(y, z) - \rho(x, z) \geq 0 \geq -\rho(x, y)\rho(y, z), -\rho(x, y)\rho(y, z) \leq 0$

Упражнения

- 1) Проверить, что система функций $\{\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2, x \in [0, 1]\}$ линейно независима на отрезке $[0, 1]$.
- 2) Проверить, что система функций $\{\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = 2x^2 - x, \varphi_3(x) = x^2, x \in [0, 1]\}$ линейно зависима на отрезке $[0, 1]$.
- 3) Показать, что метрическая функция $\rho_1(x, y)$ порождена метрикой $\rho(x, y)$.

$$\rho_1(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{(1 + \rho(x, y))}$$

Литература

- 1) Линейная алгебра. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Изд. 2-е. Главная редакция физико-математической литературы издательства Наука, М., 1978, 304 стр.
- 2) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. – 6-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. Физ. - мат. Лит., 1989. – 624 с. – ISBN 5-02-013993-9
- 3) Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 6-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний.
- 4) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

Лекция 2.

Несколько определений и теорем из теории функции комплексной переменной

Обозначим комплексное число z точку с координатами (x, y) на комплексной плоскости, действительные числа x, y – называются действительной и мнимой частью комплексного числа z соответственно. Определение функции комплексной переменной эквивалентно определению двух функций двух действительных аргументов $u(x, y), v(x, y)$.

$$z = x + iy, i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Соответственно функции $f(z), u(x, y), v(x, y)$ должны иметь одинаковый класс гладкости $f(z), u(x, y), v(x, y) \in C^n(D | z = x + iy \in D)$.

Дифференциалы функции и ее аргумента $f(z), z$ на комплексной плоскости имеют вид $df(z) = (u_x + iv_x)dx + (u_y + iv_y)dy, dz = dx + idy$

Определение 2.1. Говорят, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z (является аналитической в точке) если существует предел дроби, не зависящий от направления dz

$$f'(z) = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{df}{dz}$$

Выбирая два направления предела $dz = dx, dz = idy$ и приравнявая предельные значения, получим $f'(z) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{df}{dx} = u_x + iv_x = \lim_{dy \rightarrow 0} \frac{df}{idy} = -iu_y + v_y \Leftrightarrow u_x = v_y, v_x = -u_y$ (2.1)

Утверждение 1. Уравнения (2.1) являются необходимыми условиями дифференцируемости комплексной функции $f(z)$ и называются условиями Коши-Римана.

Рассмотрим криволинейный интеграл по гладкому замкнутому контуру C от аналитической функции $f(z)$ во всех точках области D , содержащий контур, затем сведем криволинейный интеграл к двойному по области D , используя формулу Грина.

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy$$

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u(x, y) + iv(x, y))(dx + idy) = \oint_C (u + iv)dx + (-v + iu)dy =$$

$$\iint_D ((u_y + iv_y) - (-v_x + iu_x)) dx dy = \iint_D ((u_y + v_x) + i(v_y - u_x)) dx dy \stackrel{(2.8)}{=} 0.$$

Доказано **Утверждение 2.** Интеграл по замкнутому гладкому контуру C от аналитической функции $f(z)$ в области $D \supset C$ равен нулю.

Рассмотрим аналитическую функцию $f(z)$ в области D , содержащую точку комплексной плоскости $z_0 \in D$, построим дробь $\frac{f(z)}{z - z_0}$, которая в точке z_0 не является аналитической, так как имеет в данной точке разрыв второго рода.

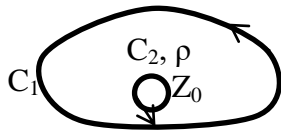


Рис.1. Произвольный гладкий контур C_1 обходится против часовой стрелки, внутренний контур C_2 окружность радиуса ρ с центром в точке z_0 обходится по часовой стрелке.

Как показано на рисунке 1 окружим точку z_0 окружностью C_2 небольшого радиуса ρ с центром в точке z_0 , которую обходим по часовой стрелке, внешний произвольный гладкий контур C_1 обходим против часовой стрелки. Кроме точки z_0 особых точек нет для новой дробной функции $\frac{f(z)}{z - z_0}$. Данная функция аналитическая в области между контурами C_1, C_2 , то есть для нее справедливо Утверждение 2.

$$\oint_{C_1 - C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0 \Leftrightarrow \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

На окружности C_2 $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $dz = \rho e^{i\varphi} i d\varphi$, $z - z_0 = \rho e^{i\varphi}$

$$\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \underset{\rho \rightarrow 0}{\approx} f(z_0) \oint_{C_2} \frac{dz}{z - z_0} = f(z_0) \int_0^{2\pi} \frac{\rho e^{i\varphi} i d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = 2\pi i f(z_0) = \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \Leftrightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (2.2)$$

Формула (2.2) называется интегралом Коши и выражает значение аналитической функции в точке $z=z_0$ области D , содержащем C_2 , через ее значения на контуре C_2 .

Во внутренних точках внутри контура $\underline{D}: z \in C_2, z_0 \in \underline{D} |z - z_0| \geq d > 0$ подынтегральная функция непрерывна в замкнутой области \underline{D} , производная подынтегральной функции (2.2) по параметру z_0 непрерывна во всех внутренних точках по двум аргументам, поэтому левую и правую часть (2.2) можно дифференцировать по параметру [2, стр.53] z_0 . Продифференцируем n раз левую и правую часть формулы (2.2) по параметру z_0

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz, f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz, \dots, f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, n=0,1,2, \dots \quad (2.3)$$

Продолжим формально формулу (2.3) на отрицательные целые числа

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_2} f(z)(z-z_0)^{n-1} dz, n=-1,-2, \dots, f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(z) dz, n=-1 \quad (2.4)$$

Представим функцию $f(z)$ в виде степенного ряда с центром в точке $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} a_i (z-z_0)^i = \dots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots \quad (2.5)$$

Ряд вида (2.5) называется рядом Лорана [2, стр. 108]. $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, сравнивая последнюю формулу с (2.4) получим формулы коэффициентов разложения аналитической функции в ряд Лорана

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, n=1,2, \dots \quad (2.6)$$

Определение 2.2. Говорят, что в точке $z = z_0$ функция $f(z)$ имеет полюс порядка m , если ее ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

Определение 2.3. Говорят, что в точке $z = z_0$ функция $f(z)$ имеет нуль порядка m , если ее ряд Лорана имеет вид

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

Определение 2.4. Вычетом функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ называется коэффициент a_{-1} в разложении в ряд Лорана (2.5) (обозначение $\text{Выч}[f(z), z = z_0]$).

$$\text{Учитывая (2.6) } a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} f(z) dz, \quad (2.7)$$

где замкнутый контур C содержит точку $z = z_0$ внутри себя получим формулу

$$a_{-1} 2\pi i = 2\pi i \text{Выч}[f(z), z_0] = \oint_{C_2} f(z) dz,$$

Повторяя рассуждения, приведенные к рисунку 1 для случая, когда функция $f(z)$ имеет несколько особых точек (полюсов первого порядка) внутри контура C , получим доказательство основной теоремы вычетов

Утверждение 3.

$$2\pi i \sum_{i=1}^n \text{Выч}[f(z), z_i] = \oint_C f(z) dz, i = \overline{1, n} \quad (2.8)$$

$z_i, i = \overline{1, n}$ - полюсы первого порядка функции $f(z)$ внутри контура C .

В частности, если функция $f(z)$ является аналитической внутри контура C (правая часть формулы (2.8) равна нулю), также отсутствуют вычеты в левой части и левая часть формулы (2.8) равна нулю.

Обозначим предельные значения для коэффициентов ряда (2.5), если существуют пределы (радиусы кольца сходимости ряда Лорана)

$$R_2 = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}}, R_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{-n}}$$

Теорема 2.2. Внутри кольца $R_1 < |z - z_0| < R_2$ ряд Лорана (2.5) сходится к функции $f(z)$, а внутри кольца $R_1 < R_1 \leq |z - z_0| \leq R_2 < R_2$ ряд Лорана сходится к функции $f(z)$ равномерно.

Доказательство. 1. При $n \rightarrow \infty$ функция $f(z)$ ограничена по модулю, если сходится абсолютно остаток ряда Лорана. При $|z - z_0| < R_2$ получим

$$|f(z)| \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} |a_i| |z - z_0|^i = \sum_{i=0}^{i=N} |a_i| |z - z_0|^i + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} |a_i| |z - z_0|^i \leq A + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} \left| \frac{(z - z_0)^i}{R_2^i} \right| = A + \frac{\left| \frac{(z - z_0)^{N+1}}{R_2^{N+1}} \right|}{1 - \frac{|z - z_0|}{R_2}}$$

Правая часть последнего неравенства ограничена, то есть ряд Лорана сходится абсолютно, если

$$\frac{|z - z_0|}{R_2} \leq \frac{R_2}{R_2} = q < 1 \Rightarrow |f(z)| \leq A + \frac{q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{то ряд Лорана сходится абсолютно и}$$

равномерно. Аналогично доказывается вторая часть Теоремы

2. При $n \rightarrow -\infty$ функция $f(z)$ ограничена по модулю, если сходится абсолютно остаток ряда Лорана. При $|z - z_0| > R_2$ получим

$$|f(z)| \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{|a_{-i}|}{|z - z_0|^i} = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{|a_{-i}|}{|z - z_0|^i} + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} \frac{|a_{-i}|}{|z - z_0|^i} \leq A + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} \frac{R_1^i}{|z - z_0|^i} = A + \frac{R_1^{N+1}}{1 - \frac{R_1}{|z - z_0|}}$$

Правая часть последнего неравенства ограничена, то есть ряд Лорана сходится абсолютно, если

$$|z - z_0| \geq \frac{R_1}{R_1} > R_1 \Leftrightarrow \frac{R_1}{|z - z_0|} \leq \frac{R_1}{R_1} = q < 1 \Rightarrow |f(z)| \leq A + \frac{q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{ряд Лорана сходится}$$

абсолютно и равномерно. **Теорема 2.2** доказана.

Литература

- 1) Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – Изд. 5-е. – М.Ж МЦНМО. 2007. –XVI + 664 с. Библ.: 55 назв. Илл.:65.
- 2) А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функции комплексной переменной. Серия “Курс высшей математики и математической физики”. – М.,1970 г., 304 с.

Лекция 3

Ряды Фурье.

В первой лекции рассматривалось линейное евклидово пространство с ортогональной системой координатных функций. В этом случае коэффициенты разложения по данной системе функций имеют наиболее простой вид (1.3).

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(x), \alpha_i = \frac{\langle f(x), \varphi_i \rangle}{\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle}, i = \overline{1, n}$$

Рассмотрим систему тригонометрических функций

$$\left\{ 1, \left\{ \begin{array}{l} \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \\ \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \end{array} \right. \right\}, x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.1)$$

В общем случае можно рассмотреть ортогональную систему функций на отрезке $[-1, 1]$

$$\left\{ 1, \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \cos 2 \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos n \frac{\pi x}{l}, \dots \\ \sin \frac{\pi x}{l}, \sin 2 \frac{\pi x}{l}, \dots, \sin n \frac{\pi x}{l}, \dots \end{array} \right. \right\}, x \in [-l, l]. \quad (3.2)$$

Покажем ортогональность двух различных функций системы (3.1).

$$\langle 1, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{n} \left((-1)^n - (-1)^n \right) = 0 \forall n \in N,$$

$$\langle 1, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0 \forall n \in N, \langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\langle \cos mx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+m)x + \sin(n-m)x dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle \cos nx, \sin nx \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(2nx) dx = -\frac{\cos(2nx)}{4n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \forall n \in N$$

$$\left\{ \langle \cos mx, \cos nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x + \cos(n-m)x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, m \neq n \right.$$

$$\left. \langle \cos mx, \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2mx)) dx = \pi + \frac{\sin(2mx)}{4m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, m \geq 1 \right.$$

$$\left\{ \langle \sin mx, \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x - \cos(n+m)x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, m \neq n \right.$$

$$\left. \langle \sin mx, \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2mx)) dx = \pi - \frac{\sin(2mx)}{4m} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi, m \geq 1 \right.$$

Разложим произвольную кусочно-непрерывную функцию в ряд по указанной системе координатных тригонометрических функций,

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^1 \varphi_j^1(x) + \alpha_j^2 \varphi_j^2(x)), \alpha_i^k = \frac{\langle f(x), \varphi_i^k \rangle}{\langle \varphi_i^k, \varphi_i^k \rangle}, i = \overline{1, \infty}, k = 1, 2 \quad (3.3)$$

Где в формуле (3.3) $\varphi_i^1(x) = \cos(ix)$, $\varphi_i^2(x) = \sin(ix)$, $i = 1, 2, \dots$

Получим коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора, учитывая полученные формулы скалярного произведения.

$$\alpha_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx}{2\pi} \Leftrightarrow \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$\alpha_i^1 = \frac{\langle f(x), \varphi_i^1 \rangle}{\langle \varphi_i^1, \varphi_i^1 \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(ix) dx}{\langle \cos(ix), \cos(ix) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(ix) dx, i \geq 1$$

$$\alpha_i^2 = \frac{\langle f(x), \varphi_i^2 \rangle}{\langle \varphi_i^2, \varphi_i^2 \rangle} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(ix) dx}{\langle \sin(ix), \sin(ix) \rangle} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(ix) dx, i \geq 1$$

Три последних формулы можно переписать как две формулы

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)), \quad (3.4)$$

$$A_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(jt) dt, j = 0, 1, 2, \dots \quad B_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(jt) dt, j = 1, 2, \dots$$

Перепишем формулы (3.4) для произвольного симметричного отрезка длиной $2l$ формально, меняя переменную x на $y = x\pi/l$, одновременно меняя подстановки для переменной прежние на отрезке $y \in [-\pi, \pi]$, а переменная x по-прежнему меняется на отрезке $x \in [-1, 1]$, то есть во всех формулах (3.4) нужно заменить переменную x на y , а после преобразований снова перейти к переменной x .

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cos\left(\frac{jx\pi}{l}\right) + B_j \sin\left(\frac{jx\pi}{l}\right) \right), \quad (3.5)$$

$$A_j = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{jt\pi}{l}\right) dt, j = 0, 1, 2, \dots \quad B_j = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin\left(\frac{jt\pi}{l}\right) dt, j = 1, 2, \dots$$

В случае четной функции $f(-x) = f(x)$ формулы (3.4), (3.5) имеют вид

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(jx), \quad A_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(jt) dt, j = 0, 1, 2, \dots \quad x, t \in [-\pi, \pi]. \quad (3.6)$$

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos\left(\frac{jx\pi}{l}\right), \quad A_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \cos\left(\frac{jt\pi}{l}\right) dt, j = 0, 1, 2, \dots \quad x, t \in [-l, l]. \quad (3.7)$$

В случае нечетной функции $f(-x) = -f(x)$ формулы (3.4), (3.5) имеют вид

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(jx), \quad B_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(jt) dt, j = 1, 2, \dots, x, t \in [-\pi, \pi]. \quad (3.8)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin\left(\frac{jx\pi}{l}\right), \quad B_j = \frac{2}{l} \int_0^l f(t) \sin\left(\frac{jt\pi}{l}\right) dt, j = 1, 2, \dots \quad x, t \in [-l, l]. \quad (3.9)$$

Из формул (3.4), (3.5) следует, что функция $f(x)$ является периодической либо на отрезке $[-\pi, \pi]$ либо на отрезке $[-l, l]$. Для определённости все преобразования формул далее проводим для отрезка $[-\pi, \pi]$.

Подставляя формулы для коэффициентов из формулы (3.4) в ряд Фурье, получим

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\cos(jt)\cos(jx) + \sin(jt)\sin(jx)) \right) f(t) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \cos(j(x-t)) \right) f(t) dt \right). \quad (3.10)$$

Обозначим конечную сумму ряда (3.10) $S_N = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(j(x-t)) \right) f(t) dt \right)$. (3.11)

Рассмотрим $A_N = \sum_{j=1}^N \cos(j(x-t)) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^N e^{ij(x-t)} = (i = \sqrt{-1}) = e^{i(x-t)} + e^{i2(x-t)} + \dots + e^{iN(x-t)} =$

$$= e^{i(x-t)} (1 + e^{i(x-t)} + \dots + e^{i(N-1)(x-t)} + e^{iN(x-t)} - e^{iN(x-t)}) \Leftrightarrow A_N = e^{i(x-t)} (1 + A_N - e^{iN(x-t)}) \Rightarrow$$

$$A_N = \frac{e^{i(x-t)} - e^{i(N+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} = \frac{(e^{i(x-t)} - e^{i(N+1)(x-t)}) (1 - e^{-i(x-t)})}{(1 - e^{i(x-t)}) (1 - e^{-i(x-t)})} = \frac{e^{i(x-t)} - 1 + e^{iN(x-t)} - e^{i(N+1)(x-t)}}{2(1 - \cos(x-t))}$$

$$\operatorname{Re} A_N = \frac{\cos(x-t) - 1 + \cos N(x-t) - \cos(N+1)(x-t)}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} = \frac{-2 \sin^2 \frac{x-t}{2} + 2 \sin((N+1/2)(x-t)) \sin \frac{x-t}{2}}{4 \sin^2 \frac{x-t}{2}} =$$

$$= \frac{\sin((N+1/2)(x-t)) - \sin \frac{x-t}{2}}{2 \sin \frac{x-t}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(j(x-t)) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((N+1/2)(x-t)) - \sin \frac{x-t}{2}}{2 \sin \frac{x-t}{2}} = \frac{\sin((N+1/2)(x-t))}{2 \sin \frac{x-t}{2}}.$$

Формулу (3.11) можно переписать в виде $S_N = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} f(t) dt \right)$. (3.12)

Введем переменную $u \Big|_{x+\pi}^{x-\pi} = x-t \Big|_{-\pi}^{\pi}$, $du = -dt$ и перепишем формулу (3.12) с переменной u

$$S_N = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{x+\pi}^{x-\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) d(-u) \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{x-\pi}^{x+\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du \right) \quad \text{в последнем интеграле подстановки интеграла}$$

уменьшились на x , поскольку подынтегральная функция $\frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u)$ периодична

с периодом 2π и дает одинаковое значение интеграла S_N на любом промежутке

интегрирования

равному

периоду.

$$S_N = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du + \int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du \right)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $v|_{-\pi}^0 = -u|_{\pi}^0$, $dv = -du$, получим

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)v)}{\sin\left(\frac{v}{2}\right)} f(x+v) dv + \int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} f(x-u) du \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u) + f(x-u)) du. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Докажем две вспомогательные Леммы.

Лемма 1 (Риман). Пусть функция $f(x)$, $x \in [a, b]$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то есть имеет конечное число разрывов первого рода, тогда

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(Ax) dx = 0, \quad \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(Ax) dx = 0. \quad (3.14)$$

Доказательство. Функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и может иметь счетное число разрывов первого рода, что не изменит значение определенного интеграла в (3.14). Покроем каждую точку $x_i \in [a, b]$, $i=1, 2, \dots$ разрыва прямоугольником ширины $\varepsilon/2^i$, $i=1, 2, \dots$ и высоты M , оценим интегральную меру в точках разрыва в первой формуле (3.14).

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b], \quad |\Delta \mu_i| = \Delta \left| \int_a^b f(x) \sin(Ax) dx \right| \leq \Delta \left| \int_a^b f(x) dx \right| = M \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \dots \right) = M\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Поэтому в дальнейшем можно положить, что функция в условии Леммы 1 непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ $N+1$ точками получим $\{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b \mid x_{i+1} - x_i \leq \Delta = (b-a)/N\}$.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) \sin(Ax) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \sin(Ax) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i) + f(x_i)) \sin(Ax) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i)) \sin(Ax) dx + \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(Ax) dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

По теореме Кантора-Гейне из курса математического анализа [1, стр.191] непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция равномерно непрерывна на отрезке и на любом его интервале. То есть, $\forall \varepsilon > 0 \exists \Delta(\varepsilon) \forall x \in [x_i, x_i + \Delta]: |x - x_i| < \Delta: |f(x) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Замечание. В определении равномерной непрерывности функция $\Delta(\varepsilon)$ зависит только от длины интервала Δ , но не зависит от координаты $x \in [x_i, x_i + \Delta]$.

Учитывая равномерную непрерывность подынтегральной функции и ее ограниченность, оценим значение интеграла (2.7) по модулю

$$|I| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |(f(x) - f(x_i)) \sin(Ax)| dx + \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_i)| \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(Ax) dx \right| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| dx + \sum_{i=0}^{N-1} M \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(Ax) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dx + \sum_{i=0}^{N-1} M \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(Ax) dx \right| = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx + M \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\cos(Ax_{i+1}) - \cos(Ax_i)}{A} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2N}{A}$$

Если во втором слагаемом последнего неравенства выбрать достаточно большое положительное число $A \geq 4N/\varepsilon$ то получим $I \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2N}{4N/\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Как видно из неравенства $A \geq 4N/\varepsilon \rightarrow +\infty$ в определении равномерной непрерывности можно выбрать любое положительное число $\varepsilon > 0$ (сколь угодно малое), устремляя ε к нулю, получим, $|I| < \varepsilon, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |I| \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0 \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} |I| = 0$. **Лемма 1** доказана. Аналогично рассматривается

утверждение $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(Ax) dx = 0$.

Лемма 2 (Жордана). Пусть $|f(z)| \leq \mu(R) \xrightarrow{R=|z| \rightarrow \infty} 0, \operatorname{Re} z > 0$ тогда криволинейный интеграл в верхней полуплоскости при положительных a равен нулю $I_{C_R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0, a > 0$. (3.16)

Доказательство. Докажем неравенство $\frac{2}{\pi} \varphi \leq \sin \varphi, \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Так как $\frac{2}{\pi} 0 = 0 = \sin 0, \varphi = 0, \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1 = \sin \frac{\pi}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}, (\sin \varphi)' = -\sin \varphi \leq 0 \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то

график функции $\sin \varphi$ является выпуклым вверх, в точках $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}$ (на краях отрезка совпадает с линейной функцией $\frac{2}{\pi} \varphi$), поскольку по определению выпуклой фигуры, ограниченной графиком функции $y(\varphi) = \sin \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, вертикальными прямыми $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}$ и осью абсцисс $y=0$, следовательно, весь отрезок графика $y = \frac{2}{\pi} \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ расположен внутри выпуклой фигуры [5], а точки графика $\sin \varphi$ расположены не ниже точек графика $\frac{2}{\pi} \varphi$, что

доказывает $\frac{2}{\pi} \varphi \leq \sin \varphi, \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Оценим модуль $|I_{C_R}| \leq \int_{C_R} |e^{ia\zeta}| |f(\zeta)| |d\zeta| = (\zeta = R \cdot e^{i\varphi} = R \cos \varphi + iR \sin \varphi, d\zeta = R \cdot e^{i\varphi} i d\varphi) \leq$

$$\leq \int_{C_R} |e^{ia(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)}| \mu(R) R d\varphi = \mu(R) R \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi = 2\mu(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq$$

$$\leq 2\mu(R) R \int_0^{\pi/2} e^{-aR \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi = -2\mu(R) R \frac{\pi}{2aR} \left(e^{-aR \frac{2\varphi}{\pi}} \right)_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \mu(R)}{a} (1 - e^{-aR}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Лемма Жордана доказана.

Теорема 2 (Фурье). Пусть периодическая функция $f(x), x \in [-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывна на отрезке $x \in [-\pi, \pi]$. И пусть в каждой точке отрезка $x \in [-\pi, \pi]$ существует правая и левая производная $f'_+(x), f'_-(x), x \in [-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ (3.4) сходится

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^N (A_j \cos(jx) + B_j \sin(jx)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \begin{cases} f(x), f(x-0) = f(x+0) = f(x) \\ (f(x-0) + f(x+0))/2, f(x-0) \neq f(x+0) \end{cases} \quad (3.17)$$

Доказательство Теоремы 2 равносильно предельному переходу для формулы (3.13)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u) + f(x-u)) du \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad (3.18)$$

Разложим четную функцию $f(x) \equiv 1, x \in [-\pi, \pi]$ в ряд Фурье, по формуле(3.13)

$$f(x) \equiv 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u) + f(x-u)) du = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (1+1) du = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} du.$$

Поскольку для $f(x) \equiv 1, x \in [-\pi, \pi]$ и любого натурального числа N верно

$$S_N = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(j(x-t)) \right) f(t) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^N \cos(j(x-t)) \right) dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^\pi \frac{dt}{2} \right) = 1$$

Утверждение **Теоремы 2** равносильно записи $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Обозначим разность левой и правой части формулы(3.18), с учетом последнего

$$\begin{aligned} \Delta_N &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u) + f(x-u)) du - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} (f(x+u) + f(x-u) - f(x-0) - f(x+0)) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((N+1/2)u)}{\frac{2}{u} \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \left(\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} \right) du \end{aligned} \quad (3.19)$$

По условию Теоремы 2 функция $f(x), x \in [-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывна, следовательно, интегрируема, по условию Теоремы также существует правая и левая производные $f'(x+0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u}, f'(x-0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u}$.

В подынтегральном выражении (3.19) у круглой скобки особенностей нет кроме точки $u=0$. Первая дробь в (3.19) в точке $u=0$ заменима функцией $\frac{\sin((N+1/2)u)}{\frac{2}{u} \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \sin((N+1/2)u)$.

Поэтому функция $\frac{1}{\frac{2}{u} \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \left(\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} \right)$ в (3.19) ограничена и

кусочно-непрерывна при всех значениях $u \in [0, \pi]$ и представима в виде $\sin((N+1/2)u) \frac{1}{\frac{2}{u} \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \left(\frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} + \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} \right) = \sin((N+1/2)u) F(u), |F(u)| \leq M$. Где

функция $F(u)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. По Лемме 1 имеем

$$\Delta_N = \int_{a=0}^{b=\pi} \sin(N+1/2)F(u)du \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{A=N+1/2 \rightarrow \infty} 0. \text{ Теорема 2 доказана.}$$

Замечание. В точках непрерывности x функции $f(x)$ ряд Фурье (3.4) сходится к числу $f(x)$. В точках разрыва первого рода ряд Фурье (3.4) сходится к числу $(f(x-0)+f(x+0))/2$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1 [3, №2942]. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|, x \in (-\pi, \pi)$.

Решение. Функция $f(x) = |x|, x \in (-\pi, \pi)$ четна, по формуле (3.6)

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(jx), A_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(jt) dt, j = 0, 1, 2, \dots \quad x, t \in [-\pi, \pi].$$

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{t^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi, A_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(jt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{j} (\sin(jt))' dt = \frac{2t \sin(jt)}{\pi j} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi j} \int_0^{\pi} \sin(jt) dt =$$

$$= \frac{2 \cos(jt)}{\pi j^2} \Big|_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2} (j \Big|_1^{\infty} = 2k \Big|_0^{\infty} + 1), f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(jx)}{(2k+1)^2}.$$

Ответ: $f(x) = |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos(jx)}{(2k+1)^2}.$

Пример 2. [3, №2938] Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, x \in (-\pi, \pi).$

Пользуясь разложением найти сумму ряда Лейбница $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решение. Функция примера 2 нечетная, поэтому используем формулы (3.8).

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(jx), B_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(jt) dt, j = 1, 2, \dots, x, t \in [-\pi, \pi]$$

$$B_j = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(jt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(jt) dt = -\frac{2}{\pi j} \cos(jt) \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi(2k+1)}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \text{sign}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(jx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)}. \text{ Рассмотрим значение полученного ряда}$$

Фурье в точке

$$x = \frac{\pi}{2}, \text{sign}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\pi/2)}{(2k+1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $f(x) = \text{sign}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(jx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)}, A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)} = \frac{\pi}{4}.$

Упражнения

Пример 3. [3, №2940] Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi)$.

Ответ: $2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}.$

Пример 4. [3, №2945] Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \cos(ax)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Ответ: $2 \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a \cos n\pi}{n^2 - a^2} \right]$.

Литература

- 1) Зорич В.А. Математический анализ. Часть 1. – Изд. 5-е. – М.Ж МЦНМО. 2007. –XVI + 664 с. Библ.: 55 назв. Илл.:65.
- 2) А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функции комплексной переменной. Серия “Курс высшей математики и математической физики”. – М.,1970 г., 304 с.
- 3) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов/ Б.П. Демидович; –Москва: АСТ,2010. – 558 с. – ISBN 978-5-17-010062-0.
- 4). Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие для вузов/ под редакцией Л.Д. Кудрявцева. Санкт – Петербург.1994. 496 с.
- 5) Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Московского Университета, 1989. – 204с.: ил.

Лекция 4. Интегралы Фурье.

Попробуем формально перейти от ряда Фурье, к интегралу Фурье используя формулы (3.5), если период $T = 2l$ функции $f(x)$ стремится к бесконечности

$$T = 2l \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty, \omega_l = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}, d\omega = -\frac{\pi dl}{l^2}$$

$$f(x) \stackrel{(3.5)}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(A_j \cos\left(\frac{jx\pi}{l}\right) + B_j \sin\left(\frac{jx\pi}{l}\right) \right) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(jx\omega) + B_j \sin(jx\omega))$$

$$\frac{jx\pi}{l} = \lambda x, \lambda = \frac{j\pi}{l} = j\omega, \omega = \frac{\pi}{l} = const \rightarrow 0, d\lambda = \omega dj = \omega, dj = 1 = \frac{d\lambda}{\omega}, d\lambda = \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (A_j \cos(jx\omega) + B_j \sin(jx\omega)) \xrightarrow{dj=1 \rightarrow \frac{d\lambda}{\omega}} \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos(\lambda x) + B(\lambda) \sin(\lambda x)) \frac{d\lambda}{\omega} =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{A(\lambda)}{\omega} \cos(\lambda x) + \frac{B(\lambda)}{\omega} \sin(\lambda x) \right) d\lambda = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda.$$

$$A_j \stackrel{(3.5)}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(t) \cos\left(\frac{jt\pi}{l}\right) d\frac{t\pi}{l} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(jt\omega) d(t\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) \omega dt$$

$$\frac{A(\lambda)}{\omega} = a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt, \frac{B(\lambda)}{\omega} = b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(t\lambda) dt$$

Таким образом, нами получены формулы предельного перехода для непериодической функции, кусочно-непрерывной на любом конечном отрезке

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda \tag{4.1}$$

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt, b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(t\lambda) dt \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна на любом конечном отрезке $x \in (\alpha, \beta)$ числовой прямой $x \in (-\infty, \infty)$ и является непериодической. Пусть также $f(x)$ абсолютно

интегрируема $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, в каждой точке прямой существуют правая и левая производные

$\exists f'(x-0), f'(x+0) \forall x \in (-\infty, \infty)$. Тогда интеграл Фурье (4.1), (4.2) сходится к полусумме правого и левого предельных значений функции в данной точке

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda. \quad (4.3)$$

где $a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt$, $b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(t\lambda) dt$, в частности, в точках непрерывности

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda$$

Доказательство. Подставим формулы для коэффициентов (4.2) в ряд Фурье (4.3),

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \int_0^{\infty} (a(\lambda) \cos(\lambda x) + b(\lambda) \sin(\lambda x)) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda(t-x)) f(t) dt \right) d\lambda \quad (4.4)$$

Верхний предел интегрирования по переменной λ сделаем конечным A и обозначим

$$\Delta(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda(t-x)) f(t) dt \right) d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}. \text{ Утверждение Теоремы 4.1 сводится}$$

к доказательству предельного перехода $\Delta(A) \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$. Внутренний интеграл

сходится равномерно по параметру λ , так как $\left| \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda(t-x)) f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < +\infty$ по

условию Теоремы, тогда повторный интеграл можно свести к двойному и поменять порядок интегрирования

$$\Delta(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda(t-x)) f(t) dt \right) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_0^A \cos(\lambda(t-x)) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin(A(t-x))}{(t-x)} dt =$$

Сделаем замену переменных $u|_{-\infty}^{\infty} = t|_{-\infty}^{\infty} - x$, $du = dt$ для первого интеграла в сумме

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin(Au)}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(u+x) \frac{\sin(Au)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(u+x) \frac{\sin(Au)}{u} du = \left(v|_{\infty}^0 = -u|_{-\infty}^0, dv = -du \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x-v) \frac{\sin(Av)}{v} dv + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x+u) \frac{\sin(Au)}{u} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(x-u) + f(x+u)) \frac{\sin(Au)}{u} du \quad (4.5) \end{aligned}$$

Докажем Лемму.

$$\text{Лемма 4.1. } \int_0^{\infty} \frac{\sin(Ax)}{x} dx = \left(\begin{array}{l} y|_0^{\infty} = Ax|_0^{\infty} \\ dy = Adx, A > 0 \end{array} \right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}. \quad (4.6)$$

Интеграл (4.6) носит название интегрального синуса и используется Лекции 4 (интеграл Фурье).

Рассмотрим комплексную функцию $g(x) = \frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x}$ действительного переменного

х. Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos x}{x} + i \frac{\sin x}{x} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = 0 + 2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

В последнем выражении было учтена четность $\frac{\cos x}{x}$ и нечетность $\frac{\sin x}{x}$ функций на числовой прямой $x \in (-\infty, +\infty)$. Продолжим аналитически функцию $g(x)$ на комплексную плоскость комплексного аргумента z функции $g(z)$.

Выберем замкнутый контур, состоящий из 4 частей, в верхней полуплоскости комплексной плоскости. Большую полуокружность C_R радиуса R проходим против часовой стрелки. Вторая и третья часть контура представляют полупрямые на отрицательной и положительной действительной полуоси. Четвертая часть контура – полуокружность постоянного радиуса ρ , проходимая по часовой стрелки и огибающая сверху начало координат комплексной плоскости точку $(0,0)$. Внутри указанной области подынтегральная

функция $g(z) = \frac{\cos z}{z} + i \frac{\sin z}{z} = \frac{e^{iz}}{z}$ является аналитической и по Утверждению 1 Лекции 2

получим
$$\oint_{C=C_R^++C_1+C_2+C_\rho^-} g(z)dz = 0 \Leftrightarrow \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz + 2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_\rho^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \Leftrightarrow$$

Учитывая Лемму Жордана с положительным параметром $a=1$

$$a=1, \mu(R=|z|) = \frac{1}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \int_{C_R^+} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad \text{Откуда}$$

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{C_\rho^-} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_\rho^+} \frac{e^{iz}}{z} dz \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2i} \int_{C_\rho^+} \frac{e^{iz}}{z} dz \xrightarrow{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{1}{2i} \int_{C_\rho^+} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i} \int_0^\pi \frac{\rho e^{i\varphi} i d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{\pi}{2},$$

Так как на полуокружности радиуса ρ ($z = \rho e^{i\varphi}, dz = \rho e^{i\varphi} i d\varphi$). Лемма 4.1 (4.6) доказана.

Учитывая формулу (4.6), запишем разность

$$\begin{aligned} \Delta(A) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (f(x-u) + f(x+u) - f(x-0) - f(x+0)) \frac{\sin(Au)}{u} du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^N (f(x-u) + f(x+u) - f(x-0) - f(x+0)) \frac{\sin(Au)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x-u) \frac{\sin(Au)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_N^\infty f(x+u) \frac{\sin(Au)}{u} du + \\ &- (f(x-0) + f(x+0)) \frac{1}{\pi} \int_N^\infty \frac{\sin(Au)}{u} du \end{aligned} \quad (4.7)$$

В первом интеграле функции $f(x-u), f(x+u)$ могут иметь разрывы первого рода на всей числовой прямой, в точке $u=0$ подынтегральный множитель не имеет особенности

$$F(u) = (f(x-u) + f(x+u) - f(x-0) - f(x+0)) \frac{1}{u} = \frac{f(x-u) - f(x-0)}{u} + \frac{f(x+u) - f(x+0)}{u} \xrightarrow{u \rightarrow 0} f'(x-0) + f'(x+0)$$

Функция $F(u)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[0, N]$ и ограничена, по Лемме Римана 3.1

$$\text{интеграл } \int_0^N F(u) \sin(Au) du \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

То есть существует достаточно большое число $A(N, \varepsilon), \frac{1}{\pi} \left| \int_0^N F(u) \sin(Au) du \right| < \frac{\varepsilon}{4}$, второй и

третий интегралы в (4.7) сходятся к нулю

$$\left| \int_N^\infty f(x-u) \frac{\sin(Au)}{u} du \right| \leq \left| \int_N^\infty \frac{|f(x-u)|}{|u|} du \right| \stackrel{N > 1}{\leq} \left| \int_N^\infty |f(x-u)| du \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ так как сходится интеграл по}$$

условию Теоремы 4.1. То есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) : \frac{1}{\pi} \left| \int_{N_1}^{\infty} f(x-u) \frac{\sin(Au)}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Аналогично,

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) : \frac{1}{\pi} \left| \int_{N_2}^{\infty} f(x+u) \frac{\sin(Au)}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Последнее интегральное слагаемое в (4.7)

стремится к нулю $\int_N^{\infty} \frac{\sin(Au)}{u} du \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, так как сходится интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\sin(Au)}{u} du = \frac{\pi}{2}$, то есть

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_3(\varepsilon) : \left| f(x-0) + f(x+0) \right| \frac{1}{\pi} \int_{N_3}^{\infty} \frac{\sin(Au)}{u} du < \frac{\varepsilon}{4}$. Выберем максимальное число N

$\bar{N}(\varepsilon) = \max \{N(\varepsilon), N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$, тогда

$\left| \Delta(A) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\substack{\bar{N}(\varepsilon) \rightarrow \infty \\ A(\varepsilon) \rightarrow \infty}} 0$. Тогда в силу произвольно малого

положительного ε имеем

$$\left| \Delta(A(\varepsilon)) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right| \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{A(\varepsilon) \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda(t-x)) f(t) dt \right) d\lambda = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

Теорема 4.1 доказана.

Для нечетной функции получим интеграл Фурье из формул (4.1),(4.2)

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin(t\lambda) dt \quad (4.8)$$

Для четной функции получим интеграл Фурье из формул (4.1),(4.2)

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt \quad (4.9)$$

Рассмотрим примеры.

Пример 1 [2, №3888]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Решение. Поскольку данная функция является непрерывной, четной и непериодической на числовой прямой, то для ее разложения в ряд Фурье используем формулу (4.9).

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos(t\lambda) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos((\lambda+1)t) + \cos((\lambda-1)t)) dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((\lambda+1)t)}{(\lambda+1)} + \frac{\sin((\lambda-1)t)}{(\lambda-1)} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin\left((\lambda+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(\lambda+1)} + \frac{\sin\left((\lambda-1)\frac{\pi}{2}\right)}{(\lambda-1)} \right) = \end{aligned}$$

Ответ: $f(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)}{1-\lambda^2} \cos(\lambda x) d\lambda.$

Пример 2[2, №3882]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x), & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Решение. Поскольку данная функция является кусочно-непрерывной, нечетной и непериодической на числовой прямой, то для ее разложения в ряд Фурье используем формулу (4.8).

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(t) \sin(t\lambda) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^1 1 \cdot \sin(t\lambda) dt = \frac{2}{\pi} \frac{\cos(t\lambda)}{\lambda} \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos(\lambda))}{\lambda}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \cos \lambda)}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \lambda)}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos \lambda)}{\lambda} \sin(\lambda x) d\lambda.$

Пример 3[3, №17.1.4]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \quad a \neq 0$$

Решение. Поскольку данная функция является непрерывной, четной и непериодической на числовой прямой, то для ее разложения в ряд Фурье используем формулу (4.9).

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos(t\lambda) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t\lambda)}{t^2 + a^2} dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(t\lambda)}{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t\lambda)}{t^2 + a^2} dt \right) = \frac{1}{\pi\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t\lambda) + i \sin(t\lambda)}{t^2 + a^2} dt \right) = \frac{1}{\pi\lambda} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda}}{t^2 + a^2} dt \right) \text{ поскольку}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t\lambda)}{t^2 + a^2} dt = 0, \quad i = \sqrt{-1}. \text{ Продолжим действительную переменную } u \text{ на комплексную}$$

плоскость z $a(\lambda) = (y \rightarrow z \in C) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz \right)$ и рассмотрим интеграл по замкнутому

контур $C = C_R + C_{-\infty, \infty}$, где C_R верхняя полуокружность большого радиуса R , $C_{-\infty, \infty}$ - числовая

прямая. Можно применить Лемму Жордана, так как $\frac{1}{z^2 + a^2} \rightarrow 0, A = \lambda > 0$

По основной Теореме вычетов $\oint_{C_R} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz \rightarrow 0,$

$$\oint_{C = C_R + C_{-\infty, \infty}} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz = \oint_{C_{-\infty, \infty}} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Выч} \left[\frac{e^{iz\lambda}}{(z+ia)(z-ia)}, z = +ia, a > 0 \right] =$$

$$2\pi i \frac{e^{iia\lambda}}{(z+ia)} \Big|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{ia\lambda}}{(2ia)} = \frac{\pi}{a} e^{-a\lambda} \cdot a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz \right) = \frac{1}{a} e^{-a\lambda}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-a\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda, \quad a > 0. \quad \text{Если } a < 0, \quad \text{то}$$

$$\oint_{C_{-\infty, \infty}} \frac{e^{iz\lambda}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{Выч} \left[\frac{e^{iz\lambda}}{(z+ia)(z-ia)}, z = -ia, a < 0 \right] = 2\pi i \frac{e^{iz\lambda}}{(-ia-ia)} \Big|_{z=-ia} = 2\pi i \frac{e^{-ia\lambda}}{(-2ia)} = \frac{\pi}{-a} e^{a\lambda}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda = \frac{1}{-a} \int_0^{\infty} e^{a\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda, a < 0, \text{ объединяя оба ответа, получим}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{1}{|a|} \int_0^{\infty} e^{-|a|\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Упражнения:

Пример 4 [2, №3888]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\lambda\pi)}{1-\lambda^2} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Пример 5 [2, №3881]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Пример 6 [3, №17.7.3]. Представить интегралом Фурье следующую функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| < \pi, \\ 0, & |x| > \pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \pi \lambda}{\lambda^2 - 1} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Литература

- 1) Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Краткий курс теории экстремальных задач. – Изд. – во Московского Университета, 1989. – 204с.: ил.
- 2) Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов/ Б.П. Демидович. –Москва: АСТ, 2010. – 558 с. – ISBN 978-5-17-010062-0.
- 3). Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие для вузов/ под редакцией Л.Д. Кудрявцева. Санкт – Петербург. 1994. 496 с.

Лекция 5. Дискретное преобразование Фурье.

Рассмотрим периодическую функцию, зависящую от времени, период которой равен T . Предположим, что за период T получены N экспериментальные данные с равномерным временным шагом $x_n = T \frac{n}{N}, n = \overline{0, N-1}$. Обозначим частоты периодической функции, минимальное значение имеет основная частота $\nu_k = \frac{k}{T}, k = \overline{0, N-1}$. Круговые частоты отличаются от частот ν_k множителем 2π : $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$. Разложим периодическую функцию $x(t)$ в

ряд Фурье. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t}$, $i = \sqrt{-1}$. Тогда в дискретные моменты времени получим

$$x(t_n) = x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_k t_n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{T} T \frac{n}{N}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi k n}{N}}, X_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN}, e^{i \frac{2\pi k n}{N}} = e^{i \frac{2\pi(k+lN)n}{N}}$$

Таким образом, мы получили формулу, которая носит название обратного преобразования Фурье $x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi k n}{N}}$, $n = \overline{0, N-1}$, $X_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k+lN}$ (5.1)

Левую и правую части формулы (5.1) умножим скалярно на множитель $e^{-i \frac{2\pi m n}{N}}$, $m = \overline{0, N-1}$, получим

$$x_n e^{-i \frac{2\pi m n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi k n}{N}} e^{-i \frac{2\pi m n}{N}}, n = \overline{0, N-1}. \text{ Последнее выражение просуммируем по индексу } n, \text{ имеем}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi m n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi m(k-m)n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi m(k-m)n}{N}}, n, m = \overline{0, N-1} \quad (5.2)$$

Отдельно найдем сумму ряда $A = \sum_{n=0}^{N-1} e^{i \frac{2\pi m(k-m)n}{N}} = 1 + e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}} + e^{i \frac{4\pi(k-m)}{N}} + \dots + e^{i \frac{2\pi(N-1)(k-m)}{N}} =$

$$1 + e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}} \left(1 + e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}} + e^{i \frac{4\pi(k-m)}{N}} + \dots + e^{i \frac{2\pi(N-2)(k-m)}{N}} + e^{i \frac{2\pi(N-1)(k-m)}{N}} - e^{i \frac{2\pi(N-1)(k-m)}{N}} \right) =$$

$$= A = 1 + e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}} \left(A - e^{i \frac{2\pi(N-1)(k-m)}{N}} \right) \Leftrightarrow A = \frac{1 - e^{i \frac{2\pi N(k-m)}{N}}}{1 - e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}}} = \frac{1 - e^{i 2\pi(k-m)}}{1 - e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}}} = \begin{cases} \frac{1-1}{1 - e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}}} = 0, k \neq m \\ \frac{1 - (1 - i 2\pi(k-m))}{1 - (1 - i \frac{2\pi}{N}(k-m))} = N, k = m \end{cases}.$$

В итоге получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi m n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi m(k-m)n}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k \frac{1 - e^{i 2\pi(k-m)}}{1 - e^{i \frac{2\pi(k-m)}{N}}} = \sum_{k=0}^{N-1} X_k N \delta_{k,m} = N X_k, n, k = \overline{0, N-1}$$

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi(m=k)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi k n}{N}}, k = \overline{0, N-1} \quad (5.3)$$

Формула (5.3) носит название прямого дискретного преобразование Фурье. Однако можно встретить более удобные на практике группы формул дискретного преобразования Фурье.

$$\begin{cases} X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, k = \overline{0, N-1} \\ x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, n = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi(m=k)n}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, k = \overline{0, N-1} \\ x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, n = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Обратим внимание, что пары формул (5.1), (5.3), а также (5.4),(5.5) отличаются только множителями перед суммами, но композиция прямого и обратного преобразований дает один общий множитель $s \stackrel{(5.1)(5.3)}{=} 1 \cdot \frac{1}{N} \stackrel{(5.4)}{=} \frac{1}{N} \cdot 1 \stackrel{(5.5)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Лабораторная работа №1. Дискретное преобразование Фурье

Воспользуемся формулами (5.4) дискретного преобразования Фурье.

$$\begin{cases} X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}}, k = \overline{0, N-1} \\ x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}}, n = \overline{0, N-1}. \end{cases} \quad (5.4)$$

Формула (5.4) может использоваться как действительный временной набор данных, так и комплексный вектор $x_n, n = \overline{0, N-1}$. Если действительный вектор, то из формулы (5.4) получим

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - ix_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n + iB_n, i = \sqrt{-1}, k = \overline{0, N-1} \quad (5.6)$$

То есть спектральные коэффициенты прямого преобразования (спектр) получим исходя из формулы(5.6) $X_k = A_k + iB_k = \sum_{n=0}^{N-1} \left(x_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - ix_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) \Leftrightarrow$

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), B_k = -\sum_{n=0}^{N-1} x_n \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), k = \overline{0, N-1} \quad (5.7)$$

Используя формулы обратного дискретного преобразования Фурье (5.4), получим формулы для коэффициентов

$$\begin{aligned} x_n = c_n + id_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k + iB_k) e^{i \frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (A_k + iB_k) \left(\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - B_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right) + i \left(B_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + A_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right), n = \overline{0, N-1} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \left(A_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - B_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right), d_n = \sum_{k=0}^{N-1} \left(B_k \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + A_k \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right), n = \overline{0, N-1} \quad (5.8)$$

В итоге, коэффициенты прямого дискретного преобразования Фурье в программе запишем по формулам (5.7), а коэффициенты обратного дискретного преобразования Фурье программируем по формулам (5.8).

Опишем алгоритм работы программы на языке C++. Все функции и аргументы в программе имеют двойную точность.

Пример 1. Исходная функция $x_i = \sin(ih)$, $h = (b-a)/N$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $i = \overline{0, N-1}$, $N = 10$ является нечетной

```
//furie not chetnih function
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int const N=10;
int main()
{int i,n,k;
double data[N+1],a[N+1],b[N+1],c[N+1],d[N+1];
double h,pi,s,s1;
pi=2.0*asin(1.0);    h=(2.0*pi/double(N));
//////////direct conversion Furie
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    data[i]=sin(double(i)*h);
}
for(k=0;k<=N-1;k++)
{ s=0.0;s1=0.0;
for(n=0;n<=N-1;n++)
{
    s=s+data[n]*cos(h*double(k*n));s1=s1-data[n]*sin(h*double(k*n));
}
}
a[k]=s; b[k]=s1;
}
//////////inverse conversion Furie
for(n=0;n<=N-1;n++)
{ s=0.0;s1=0.0;
for(k=0;k<=N-1;k++)
{
    s=s+a[k]*cos(h*double(k*n))-b[k]* sin(h*double(k*n));
    s1=s1+a[k]*sin(h*double(k*n))+b[k]* cos(h*double(k*n)) ;
}
}
c[n]=s/double(N);//d[n]=s1/double(N);
}
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    printf("%.16lf %.16lf %.16lf\n",data[i],c[i]);
}
printf("*****\n");
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    printf("%.16lf %.16lf \n",a[i],b[i]);
}
```

}}

Таблица 5.1. Исходный массив функции $x_i = \sin(ih)$, $h = (b - a) / N$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $i = \overline{0, N - 1}$, $N = 10$ записан в первом столбце, во втором столбце таблицы значения коэффициента c_n , $n = \overline{0, N - 1}$, то есть после композиции прямого и обратного дискретных преобразований Фурье.

$x_i = \sin(ih)$	c_n (5.8)	d_n (5.8)
0.0000000000000000	-0.0000000000000009	0.0000000000000000
0.5877852522924731	0.5877852522924730	0.0000000000000000
0.9510565162951535	0.9510565162951536	0.0000000000000000
0.9510565162951536	0.9510565162951536	0.0000000000000000
0.5877852522924733	0.5877852522924736	0.0000000000000000
0.0000000000000001	0.0000000000000005	0.0000000000000000
-0.5877852522924730	-0.5877852522924731	0.0000000000000000
-0.9510565162951535	-0.9510565162951543	0.0000000000000000
-0.9510565162951536	-0.9510565162951536	0.0000000000000000
-0.5877852522924734	-0.5877852522924749	0.0000000000000000

Таблица 5.2. Спектр для нечетной функции $x_i = \sin(ih)$, прямое дискретных преобразование Фурье.

$A_k, k = \overline{0, N - 1}$	$B_k, k = \overline{0, N - 1}$
0.0000000000000000	0.0000000000000000
0.0000000000000001	-5.0000000000000009
0.0000000000000003	0.0000000000000001
0.0000000000000002	0.0000000000000000
0.0000000000000001	0.0000000000000001
0.0000000000000001	0.0000000000000002
0.0000000000000001	0.0000000000000003
-0.0000000000000017	0.0000000000000012
0.0000000000000002	0.0000000000000013
-0.0000000000000080	5.0000000000000018

Анализируя таблицы 5.1 и 5.2 видим, что для нечетной функции $x_i = \sin(ih)$ спектр является мнимым, действительная компонента спектра отсутствует, а после композиции преобразований коэффициент $c_i, i = \overline{0, N - 1}$ совпадает с исходным временным вектором функции x_i с двойной точностью, мнимая часть сигнала d_n равна нулю.

Пример 2. Исходная функция $x_i = \cos(ih)$, $h = (b - a) / N$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $i = \overline{0, N - 1}$, $N = 10$ является четной

```
//furie chetnih function
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int const N=10;
int main()
{ int i,n,k;
double data[N+1],a[N+1],b[N+1],c[N+1],d[N+1];
double h,pi,s,s1;
pi=2.0*asin(1.0);      h=(2.0*pi/double(N));
```

```

//direct conversion Furie
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    data[i]=cos(double(i)*h);
}
for(k=0;k<=N-1;k++)
{ s=0.0;s1=0.0;
for(n=0;n<=N-1;n++)
{
    s=s+data[n]*cos(h*double(k*n));s1=s1-data[n]*sin(h*double(k*n));
}
a[k]=s; b[k]=s1;
}
//inverse conversion Furie
for(n=0;n<=N-1;n++)
{ s=0.0;s1=0.0;
for(k=0;k<=N-1;k++)
{
    s=s+a[k]*cos(h*double(k*n))-b[k]* sin(h*double(k*n));
    s1=s1+a[k]*sin(h*double(k*n))+b[k]* cos(h*double(k*n)) ;
}
c[n]=s/double(N);//d[n]=s1/double(N);
}
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    printf("%.16lf %.16lf %.16lf\n",data[i],c[i]);
}
printf("*****\n");
for(i=0;i<=N-1;i++)
{
    printf("%.16lf %.16lf \n",a[i],b[i]);
}
}

```

Таблица 5.3. Исходный массив функции

$x_i = \cos(ih)$, $h = (b - a) / N$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $i = 0, N - 1$, $N = 10$ записан в первом столбце, во втором столбце таблицы значения коэффициента c_n , $n = 0, N - 1$, то есть после композиции прямого и обратного дискретных преобразований Фурье.

$x_i = \cos(ih)$	c_n (5.8)	d_n (5.8)
1.0000000000000000	1.0000000000000004	0.0000000000000000
0.8090169943749475	0.8090169943749471	0.0000000000000000
0.3090169943749475	0.3090169943749470	0.0000000000000000
-0.3090169943749473	-0.3090169943749472	0.0000000000000000
-0.8090169943749473	-0.8090169943749472	0.0000000000000000
-1.0000000000000000	-1.0000000000000000	0.0000000000000000
-0.8090169943749476	-0.8090169943749471	0.0000000000000000
-0.3090169943749476	-0.3090169943749453	0.0000000000000000
0.3090169943749472	0.3090169943749473	0.0000000000000000
0.8090169943749473	0.8090169943749468	0.0000000000000000

Таблица 5.2. Спектр для четной функции $x_i = \cos(ih)$, прямое дискретных преобразование Фурье.

$A_k, k = \overline{0, N-1}$	$B_k, k = \overline{0, N-1}$
-0.000000000000000006	0.000000000000000000
5.000000000000000000	0.000000000000000000
-0.000000000000000003	0.000000000000000000
-0.000000000000000003	-0.000000000000000006
-0.000000000000000002	-0.000000000000000004
-0.000000000000000001	-0.000000000000000006
0.000000000000000002	-0.000000000000000007
0.0000000000000000035	-0.000000000000000017
0.0000000000000000021	-0.000000000000000010
4.99999999999999982	0.000000000000000029

Анализируя таблицы 5.3 и 5.4 видим, что для четной функции $x_i = \cos(ih)$ спектр является действительным, мнимая компонента спектра отсутствует, а после композиции преобразований коэффициент $c_i, i = \overline{0, N-1}$ совпадает с исходным временным вектором функции x_i с двойной точностью, мнимая часть сигнала d_n равна нулю.

Кроме того частотный спектр простого сигнала, мнимый или действительный $A_k, B_k, k = \overline{0, N-1}$ выражен в небольшом числе ненулевых амплитуд (для основной частоты, остальные частоты кратны основной). Это дает хороший способ для сравнения различных сигналов по их частотному спектру.

Литература

- 1) Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. – 7 – е изд.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с. – (Классический университетский учебник).
- 2) Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
- 3) Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. – М.: 1989 – 450 с.

Комплексное прямое и обратное преобразование Фурье. Формула Даламбера. Синус и косинус-Фурье преобразования.

Обобщением интегрального преобразования Фурье является преобразование Фурье на комплексной плоскости. Имеет место комплексное интегральное преобразование Фурье, если $x \in (-\infty, \infty)$, функция $f(x)$ имеет конечное число разрывов первого рода на любом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на числовой прямой.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta(x-\eta)} f(\eta) d\eta \quad (5.9)$$

Формула (5.9) используется для вывода формулы Меллина (12.4) в Лекции 12. Формулу (5.9) можно рассматривать как композицию последовательных преобразований - прямого преобразования Фурье

$$\bar{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta x} f(x) dx \quad (5.10)$$

И обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{f}(\zeta) d\zeta \quad (5.11)$$

Рассмотрим Начальную задачу для волнового уравнения с частными производными второго порядка

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \varphi(x), -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = \psi(x), -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (5.12)$$

Запишем Фурье образы для всех слагаемых в уравнении (5.12) для переменной x .

$$\begin{aligned} \bar{u}(\zeta, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta x} u(x, t) dx, \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\zeta, t) e^{i\zeta x} d\zeta \\ u_{tt}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{u}_{tt}(\zeta, t) d\zeta, \quad u_{xx}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-\zeta^2 \bar{u}(\zeta, t)) e^{i\zeta x} d\zeta \Leftrightarrow \bar{u}_{xx}(\zeta, t) = -\zeta^2 \bar{u}(\zeta, t) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение в частных производных (5.12) после Фурье-преобразования свели обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\bar{u}_{tt}(\zeta, t) + \zeta^2 c^2 \bar{u}(\zeta, t) = 0$$

Получим Фурье-образы начальных условий в задаче (5.12).

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta$$

Получим задачу Коши для ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(\zeta, t) + \zeta^2 c^2 \bar{u}(\zeta, t) = 0, -\infty < \zeta < \infty, t > 0 \\ \bar{u}(\zeta, t) = \bar{\varphi}(\zeta) \\ u_t(x, 0) = \bar{\psi}(\zeta) \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\text{Решением задачи (5.13) является выражение } \bar{u}(\zeta, t) = \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) + \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t)}{c\zeta} \quad (5.14)$$

По формуле обратного преобразования Фурье получим решение задачи

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{u}(\zeta, t) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \left(\bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) + \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t)}{c\zeta} \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) d\zeta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t)}{c\zeta} d\zeta = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Вычислим каждый интеграл в сумме отдельно

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) d\zeta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \zeta x + i \sin \zeta x) \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) \cos \zeta x d\zeta + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \cos(c\zeta t) \sin \zeta x d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \left(\frac{\cos \zeta(x+ct) + \cos \zeta(x-ct)}{2} \right) d\zeta + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \left(\frac{\sin \zeta(x+ct) + \sin \zeta(x-ct)}{2} \right) d\zeta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \left(\frac{\cos \zeta(x+ct) + i \sin \zeta(x+ct)}{2} \right) d\zeta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \left(\frac{\cos \zeta(x-ct) + i \sin \zeta(x-ct)}{2} \right) d\zeta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(\zeta) \left(\frac{e^{i\zeta(x-ct)} + e^{i\zeta(x+ct)}}{2} \right) d\zeta = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2}.
\end{aligned}$$

Так

как

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \bar{f}(\zeta,t) d\zeta \quad \forall x,t.$$

Рассмотрим второй интеграл

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta x} \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t)}{c\zeta} d\zeta = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\cos \zeta x + i \sin \zeta x) \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t)}{\zeta} d\zeta = \\
&= \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t) \cos \zeta x}{\zeta} d\zeta + \frac{i}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}(\zeta) \sin(c\zeta t) \sin \zeta x}{\zeta} d\zeta = \\
&= \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}(\zeta) (\sin \zeta(x+ct) + \sin \zeta(ct-x))}{2\zeta} d\zeta + \frac{i}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\psi}(\zeta) \cos \zeta(x-ct) - \cos \zeta(x+ct)}{= \zeta} d\zeta = \\
&= \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) \frac{(\sin \zeta(x+ct) - \sin \zeta(x-ct))}{2\zeta} d\zeta - \frac{i}{c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) \frac{(\cos \zeta(x+ct) - \cos \zeta(x-ct))}{2\zeta} d\zeta = \\
&= \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(\zeta s) ds d\zeta + \frac{i}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) \int_{x-ct}^{x+ct} \sin(\zeta s) ds d\zeta = \frac{1}{2c\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) \int_{x-ct}^{x+ct} e^{i\zeta s} ds d\zeta = \\
&= \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(\zeta) e^{i\zeta s} d\zeta \right) ds = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.
\end{aligned}$$

Тогда сумма интегралов равна

$$u(x,t) = I_1 + I_2 = \frac{\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds \quad (5.15)$$

Формула (5.15) носит название формулы Даламбера и показывает, что на волновое состояние бесконечной струны в точке (x,t) оказывает влияние только внутренние точки треугольника с вершинами (x,t) , $(x-ct,0)$, $(x+ct,0)$.

Формула (5.15) для колебаний бесконечной струны с однородным волновым уравнением содержит две бегущие волны, правую $\varphi(x-ct)$ и левую $\varphi(x+ct)$ бегущие волны.

Задача о трансформации колебаний струны в правую бегущую волну.

Задача. Подобрать такие начальные условия скорости и отклонения точек струны, чтобы получить бегущую направо волну

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \frac{-\sin(x)}{c}, -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = \cos(x), t > 0, -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{-\sin(x-ct) - \sin(x+ct)}{2c} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(s) ds = \frac{-\sin(x-ct) - \sin(x+ct)}{2c} + \frac{-\sin(x-ct) + \sin(x+ct)}{2c} =$$

$$= \frac{-\sin(x-ct)}{c}. \text{ Получили волну бегущую вправо.}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{-\sin(x-ct)}{c}.$

Упражнения

Пример [1, стр. 165].

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = 0, -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = xe^{-x^2}, -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Ответ: $u(x,t) = \frac{e^{-(x^2+c^2t^2)}}{2c} \text{sh}(2ctx).$

Указание: $u(x,t) = \frac{e^{-(x-ct)^2} + e^{-(x+ct)^2}}{4c} = \frac{e^{-(x^2+c^2t^2)}}{2c} \left(\frac{e^{2ctx} - e^{-2ctx}}{2} \right) = \frac{e^{-(x^2+c^2t^2)}}{2c} \text{sh}(2ctx).$

Если $x \in (0, \infty)$ и функция $f(x)$ задана на полупрямой, то применяют прямое косинус-преобразование Фурье

$$\bar{f}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\zeta) f(x) dx \tag{5.16}$$

И обратное косинус-преобразование Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\zeta) \bar{f}(\zeta) d\zeta \tag{5.17}$$

Также с учетом других краевых условий в точке $x=0$ применяют прямое синус-преобразование Фурье

$$\bar{f}(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(x\zeta) f(x) dx \tag{5.18}$$

И обратное синус-преобразование Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \sin(x\zeta) \bar{f}(\zeta) d\zeta \tag{5.19}$$

Интеграл, используемый в примере (5.20) в обратном косинус-преобразовании [1] использует другой интеграл, который можно вычислить в виде отдельной Леммы.

Лемма (о значении несобственного интеграла от экспоненты с квадратичным полиномом в

показателе). Интеграл вида равен $\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \cos(\beta y) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}, \alpha > 0, \beta > 0$ (15.20)

Доказательство. $I = \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \cos(\beta y) dy = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2} e^{i\beta y} dy = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2 + i\beta y} dy =$

$$\text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 y^2 + i\beta y} dy = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(y^2 - \frac{2i\beta y}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^4} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} \right)} dy = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(y^2 - \frac{2i\beta y}{2\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^4} + \frac{\beta^2}{4\alpha^4} \right)} dy = \text{Re} \int_0^{\infty} e^{-\alpha^2 \left(y - \frac{i\beta y}{2\alpha^2} \right)^2} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} dy \stackrel{z=y-\frac{i\beta y}{2\alpha^2}}{=} =$$

$$e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2} dz} \stackrel{t=\alpha z}{=} \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 z^2} d(\alpha z)}}{\alpha} = \frac{e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \int_0^\infty e^{-t^2} dt}}{\alpha} = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}}{2\alpha}. \text{ Лемма доказана.}$$

Рассмотрим пример с косинус-преобразованием Фурье.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, t > 0, x > 0 \\ u(x, 0) = \delta(x - a) \\ u_x(0, t) = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

В условии примера (5.21) задана обобщенная функция Дирака, которая имеет следующие свойства

$$1) \int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1, x_1 < a < x_2 \\ 0, a < x_1, \text{ или } a > x_2 \end{cases}$$

$$2) \int_{x_1}^{x_2} f(x) \delta(x - a) dx = \begin{cases} f(a), x_1 < a < x_2 \\ 0, a < x_1, \text{ или } a > x_2 \end{cases}$$

Применим к уравнению теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ косинус-преобразование Фурье.

$$\bar{u}(\zeta, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) u(x, t) dx, \bar{u}_t(\zeta, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) u_t(x, t) dx,$$

Для обратного преобразования используем обратное косинус-преобразование Фурье

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) \bar{u}(\zeta, t) d\zeta \Rightarrow u_{xx}(x, t) = -\zeta^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) \bar{u}(\zeta, t) d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) (-\zeta^2 \bar{u}(\zeta, t)) d\zeta \Leftrightarrow$$

$$\bar{u}_{xx}(\zeta, t) = -\zeta^2 \bar{u}(\zeta, t). u_x(0, t) = -\zeta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sin(x\zeta) \bar{u}(\zeta, t) d\zeta \Big|_{x=0} = 0. \text{ Поэтому краевые условия}$$

$u_x(0, t) = 0$ в задаче (5.21) выполнены автоматически для косинус-преобразования Фурье. Начальные условия примут вид

$$\bar{u}(\zeta, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(x\zeta) \delta(x - a) dx = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(a\zeta), a > 0 \\ 0, a < 0 \end{cases}$$

Применяя косинус-преобразование Фурье к каждому слагаемому (5.21), получим обыкновенное дифференциальное уравнение в образах

$$\begin{cases} \bar{u}_t(\zeta, t) = -\zeta^2 \bar{u}(\zeta, t) \Leftrightarrow \bar{u}_t(\zeta, t) + \zeta^2 \bar{u}(\zeta, t) = 0 \\ \bar{u}(\zeta, 0) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(a\zeta), a > 0 \\ 0, a < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (5.22)$$

Запишем решение задачи (15.22)

$$\bar{u}(\zeta, t) = \bar{u}(\zeta, 0) e^{-t\zeta^2} \quad (5.23)$$

Применим обратное косинус-преобразование Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\zeta) \bar{u}(\zeta,t) d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x\zeta) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(a\zeta) e^{-t\zeta^2} d\zeta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x\zeta) \cos(a\zeta) e^{-t\zeta^2} d\zeta =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (\cos((x+a)\zeta) + \cos((x-a)\zeta)) e^{-t\zeta^2} d\zeta \stackrel{\substack{\text{Лемма} \\ \beta=x+a \\ \beta=x-a \\ \alpha=\sqrt{t}}}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x+a)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-a)^2}{4t}} \right) \quad (5.24)$$

Формулу (5.24) можно интерпретировать с помощью принципа зеркальных изображений как два неподвижных источника тепла в точке $x=a$, $x=-a$ (граничная точка тепло не пропускает $u_x(0,t)=0$, $u(x)$ – значение температуры в точке x). В результате на положительной полупрямой температуру определяют в момент времени t в точке x как бы два источника тепла реальный из точки $x=a$ и зеркальный из точки $x=-a$.

$$\text{Ответ: } u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x+a)^2}{4t}} + e^{-\frac{(x-a)^2}{4t}} \right) = \frac{e^{-\frac{(x^2+a^2)}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{xa}{2t}} + e^{\frac{xa}{2t}} \right) = \frac{e^{-\frac{(x^2+a^2)}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{ch} \left(\frac{xa}{2t} \right).$$

Литература.

1. Пикунин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикунин, С. И. Похожаев. – Москва : МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISBN 5-94057-148-4. – EDN QXHTLUC.

Глава 2. Специальные математические функции и методы решения уравнений в частных производных.

Лекция 6. Гамма-функция. Бета-функция (интегралы Эйлера). Свойства.

Определение 1. Гамма-функцией одного аргумента z называется определенный интеграл на полупрямой

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \operatorname{Re} z > 0 \quad (6.1)$$

$$\text{Например, } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} t^0 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Определение 2. Бета-функцией $B(\alpha, \beta)$ двух аргументов $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ на отрезке $x \in [0,1]$ называется интеграл $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \beta > 0.$ (6.2)

Свойства $\Gamma(x)$ и $B(\alpha, \beta)$ функций

1. Для натурального числа n получим

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} t^n e^{-t} dt = -t^n e^{-t} \Big|_0^{\infty} + n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n!\Gamma(1) = n!$$

2. Для отрицательного аргумента $x < 0$ интеграл для гамма-функции расходится.

$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{\varepsilon} t^{x-1} e^{-t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. Оценим первый интеграл в сумме по модулю,

поскольку функция $e^{-t} > 0$ по теореме об интегральном среднем существует точка $0 < \zeta < \varepsilon$

$$\int_0^{\varepsilon} t^{x-1} e^{-t} dt = \zeta^{x-1} \int_0^{\varepsilon} e^{-t} dt \geq \frac{e^{-\varepsilon} \varepsilon}{\zeta^{1-x}} \geq \frac{e^{-\varepsilon} \varepsilon}{\varepsilon^{1-x}} = \frac{e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^{-x}} = \frac{e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^{-|x|}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$$

$$\Gamma(0) = \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt = \int_0^{\varepsilon} t^{-1} e^{-t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-1} e^{-t} dt$$

Первое интегральное слагаемое в сумме по теореме об интегральном среднем равно

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon} t^{-1} e^{-t} dt &= e^{-\zeta} \left(\int_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} t^{-1} dt + \int_{\varepsilon/4}^{\varepsilon/2} t^{-1} dt + \int_{\varepsilon/8}^{\varepsilon/4} t^{-1} dt + \dots \right) \geq e^{-\varepsilon} \left(\ln t \Big|_{\varepsilon/2}^{\varepsilon} + \ln t \Big|_{\varepsilon/4}^{\varepsilon/2} + \ln t \Big|_{\varepsilon/8}^{\varepsilon/4} + \dots \right) = \\ &= e^{-\varepsilon} (\ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \dots) = e^{-\varepsilon} \ln 2 \cdot n \xrightarrow[\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}]{} \infty. \end{aligned}$$

$$3. \text{B}(\alpha, \beta) = \text{B}(\beta, \alpha). \quad (6.3)$$

Доказательство. Введем переменную $y|_1^0 = 1 - x|_0^1, dy = -dx, x = 1 - y$

$$\text{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \int_1^0 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} d(-y) = \int_0^1 y^{\beta-1} (1-y)^{\alpha-1} dy = \text{B}(\beta, \alpha).$$

Свойство 3 доказано.

$$4. \text{B}(\alpha, \beta) = \text{B}(\alpha, \beta + 1) + \text{B}(\alpha + 1, \beta). \quad (6.4)$$

Разностное уравнение для бета-функции.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \text{B}(\alpha, \beta + 1) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} (1-x) dx = \text{B}(\alpha, \beta) - \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \text{B}(\alpha, \beta) - \text{B}(\alpha + 1, \beta) = \text{B}(\alpha, \beta) - \text{B}(\beta, \alpha + 1). \end{aligned}$$

5. Свойство понижения и повышения аргумента бета-функции.

$$\text{B}(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \text{B}(\alpha, \beta). \quad (6.5)$$

Доказательство. Преобразуем интеграл $\text{B}(\alpha, \beta + 1)$ по частям

$$\begin{aligned} \text{B}(\alpha, \beta + 1) &= \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} dx = \int_0^1 \frac{(x^{\alpha})'}{\alpha} (1-x)^{\beta} dx = \frac{x^{\alpha}}{\alpha} (1-x)^{\beta} \Big|_0^1 + \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 x \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 (1+x-1) \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 (1+x-1) \cdot x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta} dx = \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \text{B}(\alpha, \beta) - \frac{\beta}{\alpha} \text{B}(\alpha, \beta + 1) \Leftrightarrow \text{B}(\alpha, \beta + 1) \left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \frac{\beta}{\alpha} \text{B}(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{B}(\alpha, \beta + 1) = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \text{B}(\alpha, \beta). \text{ Свойство 5 доказано.} \end{aligned}$$

В силу свойства 3 получим $\Leftrightarrow B(\alpha + 1, \beta) \stackrel{3}{=} B(\beta, \alpha + 1) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right) B(\alpha, \beta)$.

6. Связь бета-функции и гамма-функции.

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (6.6)$$

Доказательство. Преобразуем бета-функцию, введя переменную

$$x = \frac{1}{1+y}, y|_0^\infty \leftrightarrow x|_1^0, dx = \frac{-dy}{(1+y)^2}, 1-x = \frac{y}{1+y}$$

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = -\int_\infty^0 \left(\frac{1}{1+y}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{\beta-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{\beta-1}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} dy \quad (6.7)$$

Введем переменную аффинного растяжения с параметром $t > 0, x = ty, dx = tdy, y|_0^\infty \leftrightarrow x|_0^\infty$ и преобразуем гамма-функцию

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty (ty)^{\alpha-1} e^{-ty} t dy = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-ty} t^\alpha dy \Rightarrow \frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha} = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-ty} dy, \frac{\Gamma(\beta)}{t^\beta} = \int_0^\infty y^{\beta-1} e^{-ty} dy \quad (6.8)$$

Заменим в формуле (6.8) параметры α, t на параметры $\alpha \rightarrow \alpha + \beta, t \rightarrow 1+t$, получим

$$\frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{(1+t)^{\alpha+\beta}} = \int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1} e^{-(t+1)y} dy. \text{ Умножим последнее выражение на } t^{\beta-1} \text{ и проинтегрируем}$$

по переменной t от нуля до бесконечности. Согласно (6.7) имеем

$$\int_0^\infty \frac{\Gamma(\alpha + \beta) t^{\beta-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt \stackrel{(4.7)}{=} \Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty dt t^{\beta-1} \int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1} e^{-(t+1)y} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1} t^{\beta-1} e^{-(t+1)y} dy dt =$$

$$\int_0^\infty e^{-y} y^\alpha dy \int_0^\infty (ty)^{\beta-1} e^{-ty} \frac{d(yt)}{y} \Big|_{x=yt} = \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy \int_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx = \Gamma(\beta) \int_0^\infty e^{-y} y^{\alpha-1} dy = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Gamma(\alpha + \beta) B(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Leftrightarrow B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

Свойство 6 доказано.

Пример 1. Найти интеграл $I = \int_0^\infty x^{1/4} (1+x)^{-2} dx$. Сравнивая данный интеграл с

формулой (6.7), видим, что

$$I = B\left(\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{5}{4}\right) \stackrel{(6.7)}{=} \int_0^\infty \frac{y^{\frac{5}{4}-1}}{(1+y)^2} dy = \int_0^\infty y^{\frac{1}{4}} (1+y)^{-2} dy \stackrel{(6.5)}{=} \left(\frac{1/4}{3/4+1/4}\right) B\left(\alpha = \frac{3}{4}, \beta = \frac{1}{4}\right) \stackrel{(6.6)}{=} \\ = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right).$$

Пример 2. Вычислить $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^\infty e^{-(\sqrt{x})^2} d\sqrt{x}$.

Введем переменную $t = \sqrt{x}$. Тогда $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$,

перемножая два последних интеграла в декартовой плоскости, $r^2 = x^2 + y^2$, $dxdy \rightarrow 2\pi r dr$, перейдем к полярным координатам

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2} 2\pi r dr = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} dr^2 = -\pi e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} = \pi \Rightarrow$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Упражнения.

Пример 3. Вычислить интеграл $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

$$\text{Ответ: } \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}.$$

Пример 4. Вычислить $I = \int_0^{\infty} x^{1/2} (1+x)^{-3} dx$

$$\text{Ответ: } I = \frac{\pi}{8}.$$

Литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: в 2-х ч. Часть 1: Учеб. Для вузов. – 7-е изд., - М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009 – 464 с.

Лекция 7. Уравнение цилиндрических функций действительного аргумента. Функция Бесселя. Свойства.

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x^2 \ddot{y} + x \dot{y} + (x^2 - n^2)y(x) = 0 \tag{7.1}$$

называется уравнением Бесселя, а его решения называются функциями Бесселя. Ввиду того, что уравнение (7.1) имеет особую точку $x=0$, то есть, в которой коэффициент x^2 у производной второго порядка обращается в нуль. Из-за этого любые два линейно - независимые решения уравнения (7.1) в особой точке обладают свойством:

Либо одно решение в особой точке имеет нуль порядка m , а второе решение полюс порядка m , либо первое решение равно константе, а второе имеет логарифмическую особенность. В любом случае одно из решений ограничено, а второе неограниченно в особой точке.

Решение уравнения (7.1) будем искать в виде обобщенного ряда Фробениуса

$$y(x) = x^{\sigma} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots), \sigma, a_k \in R, k = 1, 2, \dots \tag{7.2}$$

Где степень σ множителя x^{σ} может быть любым действительным числом. Подставим решение (7.2) в уравнение (7.1).

$$y(x) = a_0 x^{\sigma} + a_1 x^{\sigma+1} + a_2 x^{\sigma+2} + \dots + a_k x^{\sigma+k} + \dots$$

$$\dot{y}(x) = \sigma a_0 x^{\sigma-1} + (\sigma+1)a_1 x^{\sigma} + (\sigma+2)a_2 x^{\sigma+1} + \dots + (\sigma+k)a_k x^{\sigma+k-1} + \dots$$

$$\ddot{y}(x) = \sigma(\sigma-1)a_0 x^{\sigma-2} + (\sigma+1)\sigma a_1 x^{\sigma-1} + (\sigma+2)(\sigma+1)a_2 x^{\sigma} + \dots + (\sigma+k)(\sigma+k-1)a_k x^{\sigma+k-2} + \dots$$

Подставим функцию-решение, ее первую и вторую производные в уравнение Бесселя и сгруппируем слагаемые при одинаковой степенной функции, получим

$$\begin{aligned}
& x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma+k)(\sigma+k-1)a_k x^{\sigma+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma+k)a_k x^{\sigma+k-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\sigma+k} = 0 \Leftrightarrow \\
& x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} ((\sigma+k)(\sigma+k-1)a_k + (\sigma+k)a_k - n^2 a_k) x^k + x^\sigma \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} a_k = 0 \Leftrightarrow \\
& \sum_{k=0}^{\infty} ((\sigma+k)^2 - n^2) a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0 \Leftrightarrow x^0 : (\sigma^2 - n^2) a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 \neq 0 \Leftrightarrow \sigma^2 = n^2 \Rightarrow \sigma = \pm n
\end{aligned}$$

$$x^1 : ((\sigma+1)^2 - n^2) a_1 = 0 \Leftrightarrow n^2 \pm 2n + 1 - n^2 = 1 \pm 2n \neq 0 \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 = 0$$

Далее все коэффициенты одинаковой четности связаны попарно между собой, положим далее для определенности $\sigma = n$

$$x^k : ((\sigma+k)^2 - n^2) a_k + a_{k-2} = 0 \Leftrightarrow a_k = -\frac{a_{k-2}}{(n+k)^2 - n^2} = -\frac{a_{k-2}}{k(2n+k)}, k \geq 2 \quad (7.3)$$

Поскольку $a_1 = 0$, то $a_{2k+1} = 0, k = 0, 1, 2, \dots$

Если $k = 2j, j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
a_{2j} &= -\frac{a_{2j-2}}{2j(2n+2j)} = -\frac{a_{2j-2}}{4j(n+j)} = (-1)^2 \frac{a_{2j-4}}{4^2 j(n+j)(j-1)(n+j-1)} = \dots \\
&= (-1)^j \frac{a_0}{4^j j!(n+j) \dots (n+1)} = (-1)^j \frac{n! a_0}{4^j j!(n+j)!} = (-1)^j \frac{n! a_0}{2^{2j} \Gamma(j+1) \Gamma(n+j+1)}
\end{aligned}$$

Таким образом, обобщенный ряд Фробениуса имеет вид

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 x^\sigma + a_1 x^{\sigma+1} + a_2 x^{\sigma+2} + \dots + a_k x^{\sigma+k} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j} x^{2j+n} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{n! a_0}{2^{2j} \Gamma(j+1) \Gamma(n+j+1)} x^{2j+n} = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j n! 2^n a_0}{\Gamma(j+1) \Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(j+1) \Gamma(n+j+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}, \text{ если } a_0 = \frac{1}{2^n n!}
\end{aligned}$$

Определение 1. Назовем функцией Бесселя неотрицательного индекса $n \geq 0$ ряд

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, n \geq 0 \quad (7.4)$$

Из определения (7.4) следует, что ряд сходится для $n \geq 0$, так как аргумент гамма-функции должен быть положителен. Гамма – функция целого отрицательного аргумента $J_{-n}(x), n > 0$ можно формально получить из формулы (7.4).

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1) \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}, k-n+1 \geq 1 \Leftrightarrow k \geq n$$

Как известно, для решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка необходимо иметь два частных линейно независимых решения для построения общего решения однородного уравнения Бесселя (7.1). В случае если индекс функции Бесселя не является целым числом, то общее решение (7.1) можно представить в виде

$$y(x) = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$$

Если область решения задачи включает особую точку $x=0$, то ставят дополнительное условие ограниченности $|y(0)| < +\infty$, этого достаточно для выделения одного частного решения, удовлетворяющего условию $|y(0)| < +\infty$.

Отметим, что уравнение(7.1) является однородным относительно функции $y(x)$, а нормировочный коэффициент в (7.4) выбран из соображения удобства (решением(7.1) является также функции $C J_n(x), \forall C \in R^1$). Функция Бесселя порядка n является частным решением уравнения Бесселя. Второе частное решение линейно независимое от функции Бесселя имеет логарифмическую особенность для $J_0(x)$ либо полюс порядка n для $J_n(x)$ в точке $x=0$.

Норма цилиндрических функций.

Функция Бесселя ограничена внутри круга радиуса R (в нуле полярной системы координат). Поэтому $J_n(x)$ применяют во внутренних краевых задачах математической физики. Найдем норму цилиндрической функции, предварительно преобразуя неопределенный интеграл [1].

Обозначим интеграл

$$I = \int J_n^2(x) x dx = \frac{1}{2} \int J_n^2(x) dx^2 = \frac{1}{2} J_n^2(x) x^2 - \int x^2 J_n(x) \dot{J}_n(x) dx \quad (7.5)$$

Для формулы (7.5) используем уравнение Бесселя

$$x^2 \ddot{J}_n + x \dot{J}_n + (x^2 - n^2) J_n = 0 \Leftrightarrow x^2 J_n = n^2 J_n - x^2 \ddot{J}_n - x \dot{J}_n = n^2 J_n - x(x \dot{J}_n)' \quad (7.6)$$

Подставим (7.6) в (7.5)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} J_n^2(x) x^2 - \int x^2 J_n(x) \dot{J}_n(x) dx = \frac{1}{2} J_n^2(x) x^2 - \int (n^2 J_n - x(x \dot{J}_n)') \dot{J}_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{2} J_n^2(x) x^2 - \frac{1}{2} \int n^2 (J_n^2)' - (x \dot{J}_n)^2 dx = \frac{1}{2} J_n^2(x) x^2 - \frac{n^2 J_n^2(x)}{2} + \frac{(x \dot{J}_n)^2}{2} = \frac{x^2}{2} \left(\dot{J}_n^2(x) + J_n^2(x) \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Задача для собственной радиальной функции уравнения Лапласа $\Delta u + \lambda u = 0$ [1], [2] ставится следующим образом

$$\begin{cases} r^2 \ddot{R} + r \dot{R} + R(\lambda r^2 - n^2) = 0 \\ \alpha \frac{d}{dx} R_n^k(r) + \beta R_n^k(r) \Big|_{x=a} = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

Уравнение аналогичное уравнению (7.8) появляется в задаче о колебаниях круглой мембраны. Собственная радиальная функция связана с функцией Бесселя, μ_n^k - k -ый корень функции Бесселя $J_n(\mu_n^k) = 0$, a – радиус круглой мембраны.

$$R_n^k(r) = J_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right), R(a) = 0 \Leftrightarrow J_n(\mu_n^k) = 0, \mu_n^k = \sqrt{\lambda_n^k} a, \lambda_n^k = \frac{(\mu_n^k)^2}{a^2}, x = \frac{\mu_n^k}{a} r.$$

Тогда с учетом формулы (7.7) $x = \mu_n^k \Leftrightarrow r = a$ получим

$$\begin{aligned} \|J_n(x)\|^2 &= \int_0^a r J_n^2(\sqrt{\lambda} r) dr = \left(x = \frac{\mu_n^k}{a} r, \sqrt{\lambda_n^k} = \frac{\mu_n^k}{a} \right) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\sqrt{\lambda_n^k} a} x J_n^2(x) dx = \frac{1}{\lambda} \frac{x^2}{2} \left(\dot{J}_n^2(x) + J_n^2(x) \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) \right) \Big|_0^{\sqrt{\lambda_n^k} a} = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\dot{J}_n^2(\mu_n^k) + J_n^2(\mu_n^k) \left(1 - \frac{n^2}{(\mu_n^k)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

В случае однородной первой краевой задачи в (7.8) $\alpha=0, \beta=1 \Leftrightarrow R_n^k(a) = 0 \Leftrightarrow J_n(\mu_n^k) = 0$ из формулы (7.9) получим

$$\|J_n(x)\|_1^2 = \frac{a^2}{2} J_n^2(\mu_n^k) \quad (7.10)$$

В случае однородной второй краевой задачи в (7.8) $\alpha=1, \beta=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dr} R_n(r=a) = \frac{\mu_n^k}{a} j_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right)_{r=a} = 0 \Leftrightarrow \mu_n^k j_n(\mu_n^k) = 0 \text{ из формулы (7.9) получим}$$

$$\|J_n(x)\|_2^2 = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{n^2}{(\mu_n^k)^2}\right) J_n^2(\mu_n^k) \quad (7.11)$$

Среди всех свойств функции Бесселя $J_n(x)$ следует выделить два очень важных свойства – формулы повышения и понижения индекса путем вычисления производной.

$$1. \frac{d}{dx} \left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right) = - \frac{J_{n+1}(x)}{x^n}$$

Доказательство. Для доказательства формулы **1** почленно дифференцируя члены ряда в определении (7.4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{2k+n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{2k+n-1}} = \\ &= (\Gamma(0) = \infty) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k-1}}{2^{2k+n-1}} = \left(s \Big|_0^{\infty} = k \Big|_1^{\infty} - 1 \right) = \frac{1}{x^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^n}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+1+n+1)} \frac{x^{2(s+1)-1}}{2^{2k+n-1}} = \\ &= \frac{1}{x^n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1}}{\Gamma(s+1)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2s+1+n}}{2^{2s+n+1}} = (s=k) = - \frac{1}{x^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(n+1))} \frac{x^{2s+(1+n)}}{2^{2s+(n+1)}} = - \frac{J_{n+1}}{x^n}. \end{aligned}$$

$$2. \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) = x^n J_{n-1}(x)$$

Доказательство. Для доказательства формулы **2** почленно дифференцируем члены ряда в определении (7.4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^n J_n(x)) &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^n}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k+2n}}{2^{2k+n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+1)} \frac{x^{2k+2n-1}}{2^{2k+n}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n)} \frac{x^{2k+2n-1}}{2^{2k+n-1}} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+(n-1))} \frac{x^{2k+(n-1)}}{2^{2k+(n-1)}} = x^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1+(n-1))} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(n-1)} = \\ &= x^n J_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Формулы **1,2** доказаны.

Колебания круглой мембраны.

Пример №20[2,стр.167].

Решить смешанную задачу для волнового уравнения в неограниченном цилиндре $(-\infty < z < \infty)$.

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right), 0 < r < a, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq r \leq a \\ u(r=a) = 0, t \geq 0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Очевидно, нужно использовать полярную систему координат, лапласиан в полярной системе координат получен нами в конце учебного пособия, в приложении (формула 11 Лекция 14). Найдем общее решение однородного уравнения [2].

$$u_{tt} = \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (7.13)$$

Ищем решение (7.13) методом разделения переменных $u(r, \varphi, t) = T(t)V(r, \varphi)$, вид которого учтем в (7.13)

$$\ddot{T}(t)V(r, \varphi) = \frac{T(t)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{T(t)}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}, \text{ последнее уравнение разделим на произведение}$$

$$\begin{aligned} & T(t)V(r, \varphi) \\ \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{1}{V(r, \varphi)} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right) &= -\lambda = const \end{aligned} \quad (7.14)$$

Поясним уравнение (7.14). Левая часть зависит от времени, а правая часть только от переменных (r, φ) , это возможно тогда и только тогда, когда обе части (7.14) равны одной и той же константе. Из (7.14) получим 2 уравнения

$$\begin{cases} \ddot{T}(t) + \lambda T(t) = 0, T(t) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} t + C_2 \sin \sqrt{\lambda} t \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V(r, \varphi) = 0 \end{cases} \quad (7.15)$$

Первое уравнение (7.15) имеет частные линейно независимые решения

$$T(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda} t) \\ \sin(\sqrt{\lambda} t) \end{cases} \quad (7.16)$$

Решая второе уравнение системы (7.15) методом разделения переменных $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, подставляя его в (7.15), получим

$$\frac{\Phi}{r} (r\dot{R})' + \frac{R}{r^2} \ddot{\Phi} + \lambda R(r)\Phi(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \frac{r(r\dot{R})'}{R} + \lambda r^2 = -\frac{\ddot{\Phi}}{\Phi} = k = const \quad (7.17)$$

В уравнении (7.17) переменные r, φ разделились, что возможно, если $k = const$.

То есть, получим еще 2 уравнения

$$\begin{cases} \ddot{\Phi} + k\Phi = 0 \\ r(r\dot{R})' + R(\lambda r^2 - k) = 0 \Leftrightarrow r^2 \ddot{R} + r\dot{R} + R(\lambda r^2 - k) = 0 \end{cases} \quad (7.18)$$

Первое уравнение (7.17) дополним уравнением периодичности функции Φ относительно поворота на угол 2π

$$\begin{cases} \ddot{\Phi} + k\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \quad (7.19)$$

Решаем(7.19)

$$\Phi(\varphi) = A \sin \sqrt{k} \varphi + B \cos \sqrt{k} \varphi = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\sqrt{k} \varphi - \varphi_0), \cos \varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\cos(\sqrt{k}(\varphi + 2\pi) - \varphi_0) = \cos(\sqrt{k} \varphi - \varphi_0) \Leftrightarrow \cos(\sqrt{k}(\varphi + 2\pi) - \varphi_0) - \cos(\sqrt{k} \varphi - \varphi_0) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin(\sqrt{k} \varphi - \varphi_0 + \pi) \sin(\sqrt{k} \pi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{k} \pi = \pi n \Leftrightarrow k_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots \text{ А собственные функции задачи (7.19) такие}$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \sin \sqrt{k} \varphi = \sin n \varphi \\ \cos \sqrt{k} \varphi = \cos n \varphi \end{cases}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.20)$$

Решаем второе уравнение системы (7.18) с однородным краевым условием

$$\begin{cases} r^2 \ddot{R}_n + r \dot{R}_n + R_n(\lambda r^2 - n^2) = 0 \\ R_n(a) = 0 \\ R_n(0) < +\infty \end{cases} \quad (7.20.1)$$

В последнем уравнении сделаем замену переменных $x = \sqrt{\lambda} r$ и преобразуем последнее уравнение.

$$(\sqrt{\lambda} r)^2 \frac{d^2 R_n}{(d\sqrt{\lambda} r)^2} + \sqrt{\lambda} r \frac{dR_n}{d\sqrt{\lambda} r} + R_n(x^2 - n^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ddot{R}_n(x) + x \dot{R}_n + R_n(x^2 - n^2) = 0 \quad (7.21)$$

Но уравнение (7.21) – уравнение Бесселя порядка n , а его частные решения внутри круга, ограниченные во всех точках круга есть функции $J_n(x) = J_n(\sqrt{\lambda} r) = R_n(r)$.

Обозначим корни функции Бесселя порядка n

$$\mu_n^k : J_n(\mu_n^k) = 0, k = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.22)$$

Так как краевые условия в задаче (7.20.1) однородные $u(r = a, \varphi, t) = 0 \Leftrightarrow R(a)\Phi(\varphi)T(t) = 0 \Leftrightarrow R(a) \Leftrightarrow R_n(\sqrt{\lambda} a) = J_n(\mu_n^k) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

$$R_n(\sqrt{\lambda} a) = J_n(\mu_n^k) \lambda_n^k = \frac{(\mu_n^k)^2}{a^2}, R_n(r) = J_n(\sqrt{\lambda} r) = J_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right)$$

Тогда временные собственные функции (7.16) имеют вид

$$T_\lambda(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{\lambda} t = \cos\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) \\ \sin \sqrt{\lambda} t = \sin\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) \end{cases}$$

Запишем общее решение однородного волнового уравнения (7.13)

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left((A_n \cos n \varphi + B_n \sin n \varphi) \cos\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) + (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi) \sin\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) \right) J_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right) \quad (7.23)$$

Очевидно, что из формулы (7.23) следует, что $u(a, \varphi, t) = 0$.

Найдем частное решение (7.12) в виде

$$u_q(r, \varphi, t) = u_q(r) = C J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \quad (7.24)$$

Подставим (7.24) в (7.12) $\frac{\mu_1}{a} r = x$

$$u_{\text{ит}} = \Delta u_q + J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} C J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \right) + J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 C J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) + \frac{C}{r} \frac{\mu_1}{a} j_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) + J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) = 0 \Leftrightarrow C \left[r^2 \left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 j_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) + r \frac{\mu_1}{a} j_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \right] + r^2 J_0(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$C(x^2 \ddot{J}_0(x) + x \dot{J}_0(x)) + r^2 J_0(x) = 0, \text{ но}$$

$$x^2 \ddot{J}_0(x) + x \dot{J}_0(x) + x^2 J_0(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \ddot{J}_0(x) + x \dot{J}_0(x) = -x^2 J_0(x) \Rightarrow$$

$$\frac{r^2}{C} = x^2 \Leftrightarrow \frac{r^2}{x^2} = C = \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2.$$

$$\text{Тогда } u_q(r) = C J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) = \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \quad (7.25)$$

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего однородного и частного решений неоднородного уравнений

$$u_{он}(r, \varphi, t) = u_{оо}(r, \varphi, t) + u_q(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left((A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \sin\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \cos\left(\frac{\mu_n^k}{a} t\right) \right) J_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right) + \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \quad n=0, k=1$$

$$= \left(A_0 \cos\left(\frac{\mu_0^1}{a} t\right) + C_0 \sin\left(\frac{\mu_0^1}{a} t\right) \right) J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) + \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) \quad (7.26)$$

Упрощение бесконечного ряда слагаемых в формуле (7.26) до трех слагаемых возможно благодаря теореме о единственности ряда по системе линейно-независимых координатных функций. Сравнивая правую и левую части уравнения (7.12) исходной задачи имеем всего 3 слагаемых в (7.26). Краевые условия в (7.26) выполнены, выполним начальные условия $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq r \leq a \Leftrightarrow$

$$u(r, \varphi, t=0) = A_0 J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) + \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) = 0 \Leftrightarrow A_0 = -\left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2, u_t(r, \varphi, t=0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(-A_0 \frac{\mu_0^1}{a} \sin\left(\frac{\mu_0^1}{a} t\right) + \frac{\mu_0^1}{a} C_0 \cos\left(\frac{\mu_0^1}{a} t\right) \right) \Big|_{t=0} J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) = 0 \Leftrightarrow C_0 = 0$$

Запишем ответ задачи

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi, t) = \left(\frac{a}{\mu_0^1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_0^1}{a} r\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\mu_0^1}{a} t\right)\right) = \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 J_0\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \left(1 - \cos\left(\frac{\mu_1}{a} t\right)\right) \quad (7.27)$$

Пример №26[2, стр.169].

Решить смешанную задачу о колебаниях круглой мембраны.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0 \\ u(a, \varphi, t) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_5}{a} r\right) \cos(3\varphi), & 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (7.28)$$

Волновое уравнение в задаче (7.28) однородное. Поэтому общее решение задачи (7.28) задается формулой (7.23) предварительно нужно обобщить ее на скорость $c \neq 1$

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left((A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cos\left(\frac{c\mu_n^k}{a} t\right) + (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \sin\left(\frac{c\mu_n^k}{a} t\right) \right) J_n\left(\frac{\mu_n^k}{a} r\right) \quad (7.29)$$

Начальные условия задачи содержат слагаемые с параметрами $n=3, k=5$. Тогда получим

$$u(r, \varphi, t) = \left[(A_3 \cos 3\varphi + B_3 \sin 3\varphi) \cos\left(\frac{c\mu_3^5}{a} t\right) + (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) \sin\left(\frac{c\mu_3^5}{a} t\right) \right] J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) \quad (7.30)$$

Очевидно, что краевые условия в формуле (7.30) $u(a, \varphi, t) = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0$ выполняются автоматически. Выполним также начальные условия.

$$u|_{t=0} = 0 \Leftrightarrow (A_3 \cos 3\varphi + B_3 \sin 3\varphi) J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) = 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi], 0 < r < a \Leftrightarrow A_3 = B_3 = 0$$

$$u_t|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) \cos(3\varphi), 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \Leftrightarrow (C_3 \cos 3\varphi + D_3 \sin 3\varphi) \frac{c\mu_3^5}{a} J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) = J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) \cos(3\varphi) \Leftrightarrow$$

$$D_3 = 0, C_3 \frac{c\mu_3^5}{a} = 1 \Leftrightarrow C_3 = \frac{a}{c\mu_3^5}.$$

Запишем итоговый результат

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi, t) = \frac{a}{c\mu_3^5} \cos 3\varphi J_3\left(\frac{\mu_3^5}{a} r\right) \sin\left(\frac{c\mu_3^5}{a} t\right) = \frac{a}{c\mu_5} \cos 3\varphi J_3\left(\frac{\mu_5}{a} r\right) \sin\left(\frac{c\mu_5}{a} t\right)$$

Упражнения

Пример 3. Решить смешанную задачу о колебаниях круглой мембраны.

$$\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u, 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi, t > 0 \\ u(a, \varphi, t) = 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0 \\ u|_{t=0} = J_1\left(\frac{\mu_1}{a} r\right) \sin(\varphi), u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (7.31)$$

$$\text{Ответ: } u(r, \varphi, t) = \sin \varphi \cos\left(\frac{2\mu_1^1}{a} t\right) J_1\left(\frac{\mu_1^1}{a} r\right).$$

Указание: представить решение (7.28) согласно формуле (7.29) в виде

$$u(r, \varphi, t) = \left[(A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi) \cos\left(\frac{c\mu_1^1}{a} t\right) + (C_1 \cos \varphi + D_1 \sin \varphi) \sin\left(\frac{2\mu_1^1}{a} t\right) \right] J_1\left(\frac{\mu_1^1}{a} r\right)$$

Литература

- 1) *Свешников, А. Г.* Лекции по математической физике: учеб. Пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Физика», «Прикладная математика», «Информатика» и специальностям «Физика», «Прикладная математика», «Информатика» / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов; А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – 2-е изд., испр. И доп.. – Москва: Изд-во Моск. Ун-та, 2004. – (Классический университетский учебник/ Моск. Гос. Ун-т им. М. В. Ломоносова). – ISBN 5-211-04899-7.
- 2) *Пикулин, В. П.* Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISBN 5-94057-148-4. – EDN QXTLUC.

Лекция 8. Классические ортогональные полиномы

Определение 1. Говорят, что на отрезке $[a, b]$ задан ортогональный полином $p_n(x)$ с неотрицательной весовой функцией $\rho(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$ если многочлен $p_n(x)$ ортогонален всем многочленам меньшего индекса $p_k(x), k < n$, то есть

$$\langle p_n, p_k \rangle = \int_a^b \rho(x) p_n(x) p_k(x) dx = 0 \forall 0 \leq k < n \quad (8.1)$$

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, p_k(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x + b_0, a_n \neq 0, b_k \neq 0$$

Замечание 1. Из однородности формулы (8.1) следует, что ортогональный многочлен можно писать с единичным старшим коэффициентом поскольку

$$\langle p_n, p_k \rangle = \int_a^b \rho(x) p_n(x) p_k(x) dx = a_n b_k \int_a^b \rho(x) \left(x^n + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} \right) \left(x^k + \dots + \frac{b_1}{b_k} x + \frac{b_0}{b_k} \right) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\overline{p_n(x)} = x^n + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = x^n + \dots + \overline{a_1} x + \overline{a_0}, \overline{p_k(x)} = x^k + \dots + \frac{b_1}{b_k} x + \frac{b_0}{b_k} = x^k + \dots + \overline{b_1} x + \overline{b_0}.$$

Из определения 1 также следует, что ортогональный многочлен ортогонален всем алгебраическим многочленам меньшей степени $y_m(x), m < n$. Действительно, разложим многочлен $y_m(x)$ по системе ортогональных многочленов (такое разложение единственно).

$$y_m(x) = \sum_{i=0}^m \alpha_i p_i(x). \quad \text{Умножим скалярно два многочлена } p_n(x) \text{ и } y_m(x)$$

$$\langle p_n, y_m \rangle = \int_a^b \rho(x) p_n(x) y_m(x) dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \int_a^b \rho(x) p_n(x) p_i(x) dx = \sum_{i=0}^m \alpha_i \cdot \langle p_n, p_i \rangle = \sum_{i=0}^{i \leq m < n} \alpha_i \cdot 0 = 0.$$

Определение 2. Ортогональные полиномы $p_n(x), \langle p_n, p_m \rangle = 0, m \neq n$ на отрезке $[a, b]$ произвольной степени с неотрицательной весовой функцией $\rho(x) \geq 0$ называют классическими ортогональными многочленами (КОП) если весовая функция $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению Пирсона

$$\frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} = \tau(x)\rho(x) \quad (8.2)$$

$$\text{Где: } \sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a > -\infty, b < \infty, \\ (x-a), & a > -\infty, b = \infty, \\ (b-x), & a = -\infty, b < \infty, \\ 1, & a = -\infty, b = \infty. \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\tau(x) = Ax + B \quad (8.4)$$

Где: коэффициенты A, B в формуле (8.4) определяют из условия нормировки (8.5)

$$\rho(x)\sigma(x)x^m \Big|_{x=a}^{x=b} = 0, m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.5)$$

Уравнение (8.2) удовлетворяет интегральное решение для функции $\rho(x)$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right) \quad (8.6)$$

Действительно, дифференцируя обе части (8.6), получим

$$\frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} = \frac{d}{dx} \exp\left(\int_a^x \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right) = \exp\left(\int_a^x \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx\right) \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \rho(x)\sigma(x) = \tau(x)\rho(x), \quad \text{что}$$

эквивалентно уравнению (8.2).

Свойства классических ортогональных полиномов

1) Утверждение 1. У классического ортогонального полинома $p_n(x)$ n действительных корней расположенных на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Выбирая в формуле (8.1) КОП нуль-порядка получим

$$\langle p_n, p_0 \rangle = \int_a^b \rho(x) p_n(x) dx = 0, k = 0, p_0(x) \equiv 1$$

Так как $\rho(x) \geq 0$, а интеграл $\langle p_n, p_0 \rangle = 0$, следовательно, полином $p_n(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$ и содержит как минимум один действительный корень. Пусть на отрезке $[a, b]$ расположены $k < n$ действительных корней, остальные $n - k$ корней либо действительны, но находятся вне отрезка $[a, b]$, либо являются мнимыми. Представим многочлен $p_n(x)$ в виде произведения $p_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) q_{n-k}(x)$. Тогда полином $q_{n-k}(x) \in \mathbb{R}$ не меняет знака на отрезке, поскольку не меняет знака множитель $(x - x_i), x_i \notin [a, b]$. Тогда по замечанию 1 $p_n(x)$ ортогонален многочлену $(k < n)$ меньшей степени.

$$q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \cdot \langle p_n, q_k \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x) p_n(x) q_k(x) dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b \rho(x) q_{n-k}(x) (q_k(x))^2 dx = 0.$$

Получили противоречие, так как подынтегральная функция $\rho(x) q_{n-k}(x) (q_k(x))^2$ знакопостоянна (может обращаться в нуль в конечном числе точек) и непрерывна на отрезке $[a, b]$, поэтому $\int_a^b \rho(x) q_{n-k}(x) (q_k(x))^2 dx \neq 0$. Так как у многочлена $p_n(x)$ ровно n корней, вообще говоря, комплексных, то в силу полученного противоречия все корни действительны, и расположены на отрезке $[a, b]$. Утверждение 1 доказано.

2) Утверждение 2. Производная классического ортогонального полинома $p_n'(x)$ является также классическим ортогональным полиномом с весовой функцией $\rho_1(x) = \rho(x)\sigma(x)$, то есть $\langle p_n', p_k' \rangle = 0, \forall k : 0 \leq k < n - 1 \Rightarrow k \leq n - 2, \rho_1(x) = \rho(x)\sigma(x)$

Доказательство. Преобразуем интеграл по частям $\langle p_n', x^k \rangle = \int_a^b \rho(x)\sigma(x) p_n' x^k dx =$

$$= \rho(x)\sigma(x) \left(p_n' x^k \right) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} (\rho(x)\sigma(x) x^k) p_n(x) dx \stackrel{(8.5)}{=} - \int_a^b x^k \frac{d}{dx} (\rho(x)\sigma(x)) p_n(x) dx - \int_a^b k \rho(x)\sigma(x) x^{k-1} p_n(x) dx =$$

$$\stackrel{(8.2)}{=} - \int_a^b \rho(x) \left(x^k \tau(x) \right) p_n(x) dx - k \int_a^b \rho(x) \left(\sigma(x) x^{k-1} \right) p_n(x) dx \stackrel{\text{Замечание 1}}{=} -0 - k \cdot 0 = 0.$$

Поскольку $p_m'(x) = \sum_{k=0}^{n-2} b_k x^k$, $\langle p_m', p_n' \rangle = \sum_{k=0}^{n-2} b_k \langle p_n', x^k \rangle = \sum_{k \leq n-2} b_k \cdot 0 = 0$. Необходимо

проверить согласно Определению 2, что весовая функция удовлетворяет уравнению Пирсона. Действительно,

$$\frac{d}{dx}(\rho_1(x)\sigma(x)) = \rho_1'(x)\sigma(x) + \rho_1(x)\sigma'(x) \stackrel{(8.2)}{=} \rho(x)\tau(x)\sigma(x) + \rho(x)\tau(x)\sigma'(x) = \rho(x)\sigma(x) \left(\tau(x) + \sigma'(x) \right) =$$

Условие нормировки выполнено

$$\rho_1(x)\sigma(x)x^m \Big|_{x=a}^{x=b} = \rho(x)\sigma(x) \left(\sigma(x)x^m \right) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0, m = 0, 1, 2, \dots, \text{ так как } \rho(x)\sigma(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Утверждение 2 доказано.

Замечание 2. По индукции можно показать, что производные k -го порядка классических ортогональных полиномов ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весовой функцией $\rho_k(x) = \rho(x)\sigma^k(x)$, $\rho_0(x) = \rho(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, для которой справедливо уравнение Пирсона

$$\frac{d(\rho_k(x)\sigma(x))}{dx} = \overline{\tau(x)\rho_k(x)}, \langle p_n^{(k)}, p_m^{(k)} \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)\sigma^k(x)p_n^{(k)}(x)p_m^{(k)}(x)dx = 0, m < n \quad (8.7)$$

С условием нормировки $\rho_k(x)\sigma(x)x^m \Big|_{x=a}^{x=b} = 0, m = 0, 1, 2, \dots$

3) Получим обыкновенное дифференциальное уравнение для КОП $p_n(x)$.

Рассмотрим

$$\langle p_n', x^{m-1} \rangle = \int_a^b \rho(x)\sigma(x)p_n' x^{m-1} dx \stackrel{y_{m \leq 2}}{=} 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)\sigma(x)p_n' \frac{(x^m)'}{m} dx = 0 = \frac{1}{m} \rho(x)\sigma(x) \left(p_n' x^m \right) \Big|_a^b -$$

$$- \frac{1}{m} \int_a^b \frac{d(\rho(x)\sigma(x)p_n')}{dx} x^m dx \stackrel{(8.5)}{=} - \frac{1}{m} \int_a^b \frac{d(\rho(x)\sigma(x)p_n')}{dx} x^m dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \frac{d(\rho(x)\sigma(x)p_n')}{dx} x^m dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b \left(p_n'' \rho(x)\sigma(x) + p_n' \frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} \right) x^m dx \stackrel{(8.2)}{=} \int_a^b \left(p_n'' \rho(x)\sigma(x) + p_n' \tau(x)\rho(x) \right) x^m dx = 0, m < n \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b \rho(x) \left(p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x) \right) x^m dx = 0, m < n \quad (8.8)$$

Обозначим многочлен степени n $Q_n(x) = p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x)$ и разложим его по системе ортогональных многочленов степени не выше n .

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) = p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x). \quad (8.9)$$

Подставим последнее разложение в формулу (8.8)

$$0 = \int_a^b \rho(x) \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) x^m dx = \sum_{i=0}^n b_i \int_a^b \rho(x) p_i(x) x^m dx.$$

Поскольку $p_m(x) = \sum_{j=0}^m \gamma_j x^j$, то проверим, что

$$\int_a^b \rho(x) Q_n(x) p_m(x) dx = 0, m < n \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x) \left(\sum_{i=0}^n b_i p_i(x) \right) p_m(x) dx = \sum_{i=0}^n b_i \int_a^b \rho(x) p_i(x) p_m(x) dx =$$

$$b_m \int_a^b \rho(x)(p_m(x))^2 dx = 0, \int_a^b \rho(x)(p_m(x))^2 dx > 0 \Rightarrow b_m, m < n$$

Тогда в левой части формулы (8.9) останется одно слагаемое

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n b_i p_i(x) = b_n p_n(x) = p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x), \text{ обозначая } b_n = -\lambda_n, \text{ получим уравнение (8.10)}$$

$$b_n p_n(x) = p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x) + \lambda_n p_n(x) = 0 \quad (8.10)$$

Отметим, что решение уравнения (8.10) однородно относительно $p_n(x)$ и определено с точностью до постоянного множителя.

Уравнение (8.10) называется обыкновенным дифференциальным уравнением для КОП.

Умножим (8.10) на функцию $\rho(x)$ и приведем его к консервативному виду

$$p_n'' \sigma(x) \rho(x) + p_n' \tau(x) \rho(x) + \lambda_n p_n(x) \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (p_n' (\sigma(x) \rho(x))) + \lambda_n p_n(x) \rho(x) = 0 \quad (8.2)$$

$$= p_n'' \sigma(x) \rho(x) + p_n' \tau(x) \rho(x) + \lambda_n p_n(x) \rho(x) = 0.$$

Совместно с ограниченностью решения имеем постановку задачи Штурма-Лиувилля для КОП

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (p_n' (\sigma(x) \rho(x))) + \lambda_n p_n(x) \rho(x) = 0 \\ |p_n(a)| < +\infty, |p_n(b)| < +\infty \end{cases} \quad (8.11)$$

Запишем в явном виде функции

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\sigma(x) = (x-a)(b-x) = -x^2 + x(a+b) - ab = \sigma(0) + x\sigma'(0) + \frac{x^2}{2} \sigma'', \tau(x) = Ax + B = \tau(0) + x\tau'$$

$$\text{Так как, } p_n'' \sigma(x) + p_n' \tau(x) + \lambda_n p_n(x) = 0, p_n'(x) = na_n x^{n-1} + \dots, p_n''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + \dots$$

Подставляя $p_n(x), p_n'(x), p_n''(x)$ в уравнение (8.10), приравнявая коэффициенты при старшей степени x^n , получим формулу для собственных чисел КОП

$$n(n-1)a_n \frac{\sigma''}{2} + na_n \tau' + a_n \lambda_n = 0, a_n \neq 0 \Rightarrow \lambda_n = -n(n-1) \frac{\sigma''}{2} - n\tau' \quad (8.12)$$

Формулу (8.11) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} (p_n' (\sigma(x) \rho(x))) + \lambda_n p_n(x) \rho(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx} (p_n' \rho_1(x)) + \lambda_n p_n(x) \rho_0(x) = 0 \quad (8.13)$$

Обобщим формулу (8.13) для производной КОП порядка (k)

$$\frac{d}{dx} (p_n' \rho_1(x)) + \lambda_n p_n(x) \rho_0(x) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (p_n^{(k)} \rho_k(x)) + \lambda_{n,k-1} p_n^{(k-1)} \rho_{k-1}(x) = 0, \quad (8.14)$$

$$\rho_k(x) = \rho(x) \sigma^k(x), \lambda_{n,0} = \lambda_n, k = 1, 2, \dots$$

Наконец, из формулы (8.14) можно получить явный вид КОП $p_n(x)$, пользуясь этой формулой рекуррентно, с учетом $p_n^{(n)} = n!$

$$\frac{d}{dx} (p_n^{(n)} \rho_n(x)) + \lambda_{n,n-1} p_n^{(n-1)} \rho_{n-1}(x) = 0, \frac{d}{dx} (p_n^{(n-1)} \rho_{n-1}(x)) + \lambda_{n,n-2} p_n^{(n-2)} \rho_{n-2}(x) = 0, \dots$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(p_n^{(2)} \rho_2(x) \right) + \lambda_{n,1} p_n'(x) \rho_1(x) &= 0, \frac{d}{dx} \left(p_n^{(1)} \rho_1(x) \right) + \lambda_{n,0} p_n(x) \rho_0(x) = 0 \Rightarrow \\ p_n(x) &= \frac{-1}{\lambda_{n,0} \rho_0(x)} \frac{d}{dx} \left(p_n^{(1)} \rho_1(x) \right), p_n'(x) = \frac{-1}{\lambda_{n,1} \rho_1(x)} \frac{d}{dx} \left(p_n^{(2)} \rho_2(x) \right) \Rightarrow \\ p_n(x) &= \frac{(-1)^2}{\lambda_{n,0} \lambda_{n,1} \rho_0(x)} \frac{d^2}{dx^2} \left(p_n^{(2)} \rho_2(x) \right), \dots, p_n(x) = \frac{(-1)^n}{\lambda_{n,0} \lambda_{n,1} \dots \lambda_{n,n-1} \rho_0(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(p_n^{(n)} \rho_n(x) \right) \Leftrightarrow \\ p_n(x) &= \frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{n,i} \rho(x)} \frac{n! d^n}{dx^n} \left(\rho_n(x) \right) = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{n,i} \rho(x)} \frac{n! d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \sigma^n(x) \right) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \sigma^n(x) \right), \quad (8.15) \end{aligned}$$

$$C_n = \frac{(-1)^n n!}{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{n,i}}.$$

Формула (8.15) носит имя математика Родрига.

4) Норма классического ортогонального полинома.

Представим $p_n(x)$ в виде $p_n(x) = a_n x^n + q_{n-1}(x)$. Где $q_{n-1}(x)$ многочлен степени $n-1$.

$$\begin{aligned} \|p_n\|^2 &= \int_a^b \rho(x) p_n^2(x) dx = \int_a^b \rho(x) p_n(x) (a_n x^n + q_{n-1}(x)) dx = a_n \int_a^b \rho(x) p_n(x) x^n dx + \int_a^b \rho(x) p_n(x) q_{n-1}(x) dx \stackrel{\text{Зам.1}}{=} \\ &= a_n \int_a^b \rho(x) p_n(x) x^n dx \stackrel{(8.15)}{=} a_n C_n \int_a^b \rho(x) \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \sigma^n(x) \right) x^n dx = a_n C_n \int_a^b \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \sigma^n(x) \right) x^n dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл преобразуем по частям n раз, учитывая условия подстановок (8.5), в итоге получим

$$\|p_n\|^2 = (-1)^n n! a_n C_n \int_a^b \rho(x) \sigma^n(x) dx \stackrel{(8.15)}{=} \frac{(n!)^2}{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_{n,i}} \int_a^b \rho(x) \sigma^n(x) dx \quad (8.16)$$

5) Примеры классических ортогональных полиномов

1. Многочлены Лежандра (обозначение $P_n(x)$). Весовая функция $\rho(x) \equiv 1$. Область определения $\Omega = [-1, 1] \Rightarrow a = -1, b = 1$.

По формуле (8.3) получим $\sigma(x) = (x-a)(b-x) = (x+1)(1-x) = 1-x^2$.

Используем уравнение Пирсона для функции $\tau(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} = \sigma'(x) = -2x$.

По формуле (8.12) найдем собственные значения для дифференциального уравнения (8.10)

$$\lambda_n = -n(n-1) \frac{\sigma''}{2} - n\tau' = -n(n-1) \frac{-2}{2} - n(-2) = n^2 + n = n(n+1)$$

$$P_n'' \sigma(x) + P_n' \tau(x) + \lambda_n P_n(x) = (1-x^2) P_n'' - 2x P_n' + n(n+1) P_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.17)$$

Для полинома Лежандра выбирают постоянную $C_n = \frac{(-1)^n}{n! 2^n}$, а формула Родрига имеет вид

$$P_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\rho(x) \sigma^n(x) \right) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^n \right) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right) \quad (8.18)$$

2. Полиномы Лаггера (обозначение $L_n(x)$). Весовая функция $\rho(x) \equiv e^{-x}$ позволяет получить конечный интеграл для любого многочлена на области определения $\Omega = [0, \infty] \Rightarrow a = 0, b = \infty$.

По формуле (8.3) получим $\sigma(x) = x - a = x$.

Используем уравнение Пирсона для функции

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} = e^x \frac{d(e^{-x}x)}{dx} = e^x e^{-x} (-x+1) = 1-x.$$

По формуле (8.12) найдем собственные значения для дифференциального уравнения (8.10)

$$\lambda_n = -n(n-1) \frac{\sigma''}{2} - n\tau' = -n(n-1) \frac{0}{2} - n(-1) = n$$

$$L_n'' \sigma(x) + L_n' \tau(x) + \lambda_n L_n(x) = x L_n'' + (1-x) L_n' \tau(x) + n L_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.19)$$

Для полинома Лаггера выбирают постоянную $C_n = \frac{1}{n!}$, а формула Родрига имеет вид

$$L_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x)\sigma^n(x)) = \frac{1}{n! e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (8.20)$$

3. Полиномы Эрмита (обозначение $H_n(x)$). Весовая функция $\rho(x) \equiv e^{-x^2}$ позволяет получить конечный интеграл для любого многочлена на области определения $\Omega = [-\infty, \infty] \Rightarrow a = -\infty, b = \infty$.

По формуле (8.3) получим $\sigma(x) \equiv 1$.

Используем уравнение Пирсона для функции

$$\tau(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d(\rho(x)\sigma(x))}{dx} = e^{x^2} \frac{d(e^{-x^2})}{dx} = e^{x^2} e^{-x^2} (-2x) = -2x.$$

По формуле (8.12) найдем собственные значения для дифференциального уравнения (8.10)

$$\lambda_n = -n(n-1) \frac{\sigma''}{2} - n\tau' = -n(n-1) \frac{0}{2} - n(-2) = 2n$$

$$H_n'' \sigma(x) + H_n' \tau(x) + \lambda_n H_n(x) = H_n'' - 2x H_n' + 2n H_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Для полинома Эрмита выбирают постоянную $C_n = (-1)^n$, а формула Родрига имеет вид

$$H_n(x) = \frac{C_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} (\rho(x)\sigma^n(x)) = \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (8.22)$$

Литература

1. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике : учеб. Пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям «Физика», «Прикладная математика», «Информатика» и специальностям «Физика», «Прикладная математика», «Информатика» / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов; А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – 2-е изд., испр. И доп. – Москва: Изд-во Моск. Ун-та, 2004. – (Классический университетский учебник/ Моск. Гос. Ун-т им. М.В. Ломоносова). – ISBN 5-211-04899-7.

Глава 3. Некоторые методы решения задач математической физики и классическая вариационные задачи.

Лекция 9. Простейшие уравнения математической физики. Решение задач математической физики методом подбора частных решений.

Рассмотрим уравнения в частных производных второго порядка эллиптического, параболического и гиперболического типов. $x = (x, y, z, t) \in R^4$ - вектор переменных $u(x, y, z, t) \in R^1$ неизвестная функция x, y, z - пространственные переменные. T - время.

1) $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$ ($\Delta u = 0$) - уравнение эллиптического типа –уравнение Пуассона (Лапласа), где $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа (лапласиан).

2) $u_t = a^2 \Delta u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ - уравнение теплопроводности - уравнение параболического типа, a^2 - коэффициент температуропроводности.

3) $u_{tt} - \frac{1}{c^2} \Delta u = 0 \Leftrightarrow u_{tt} - \frac{1}{c^2} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0$ - волновое уравнение, уравнение параболического типа, где $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ - оператор Даламбера (ламбертиан), c - фазовая скорость.

Определение 1. Функции вида

$$u(x, y, z, t) = \left\{ \begin{array}{l} \sin(mx) \\ \cos(mx) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} sh(ky) \\ ch(ky) \end{array} \right\} \cdot e^{az} \cdot P_n(t) \in K \quad (9.1)$$

назовем классом элементарных функций, $P_n(t)$ - многочлен степени n , зависит от времени t .

Где $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ - функции гиперболического синуса и гиперболического косинуса. $sh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x)$, $ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x)$, $ch(0) = 1$, $sh(0) = 0$.

Функции $sh(x), ch(x)$ - частные решения уравнения

$$u''(x) - u(x) = 0: sh(x)'' - sh(x) = 0, ch(x)'' - ch(x) = 0$$

Лемма. Класс элементарных функций отображается в себя при действии оператором Лапласа, оператором уравнения теплопроводности, оператором Даламбера.

Доказательство проведем, например, для волнового уравнения. Имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \sin(mx) sh(ky) e^{az} P_n(t) = \\ = \sin(mx) sh(ky) e^{az} \left(\ddot{P}_n(t) - \frac{1}{c^2} (-m^2 + k^2 + a^2) P_n(t) \right), k^2 + a^2 - m^2 \neq 0$$

Если $k^2 + a^2 - m^2 \neq 0$ $\ddot{P}_n(t) - \frac{1}{c^2} (-m^2 + k^2 + a^2) P_n(t) = \tilde{P}_n(t)$, то многочлен переменной t

$\tilde{P}_n(t)$ имеет ту же степень n что и исходный $P_n(t)$. То есть, класс элементарных функций переводится в себя действием оператора. Аналогично, оператор теплопроводности отображает класс элементарных функции в себя.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right) \sin(mx) sh(ky) e^{az} P_n(t) = \\ \sin(mx) sh(ky) e^{bz} \left(\dot{P}_n(t) - a^2 (-m^2 + k^2 + b^2) P_n(t) \right), k^2 + b^2 - m^2 \neq 0$$

Поскольку оператор Лапласа не содержит временной переменной, то для него условие $k^2 + b^2 - m^2 \neq 0$ несущественно и, он переводит также элементарные функции в элементарные. **Лемма доказана.**

Замечание. В ходе доказательства заметим, что если неизвестная функция зависит от координат и времени и представима в виде функций-множителей с разделёнными переменными, то координатная функция-множитель часть сохраняется, изменяется только временной полином-функция.

Значения функции $u(x, y, z, 0), \forall (x, y, z) \in \bar{D} = D \cup \Gamma$ называются начальными, где D, Γ - открытая область и ее граница. Значения $u(x, y, z, t)|_{(x, y, z) \in \Gamma}$ носят название граничных условий. Согласно лемме, если начальные, граничные условия и неоднородная правая часть уравнений Пуассона, теплопроводности, волнового уравнения элементарные функции, то соответствующие им решения суть элементарные функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. №15[1,стр.83].

Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике нулевыми краевыми условиями

$$\begin{cases} \Delta u = e^y \sin x, 0 < x, y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \quad (9.2)$$

$$\text{Решение ищем в виде } u(x, y) = \sin x \cdot f(y) \quad (9.3)$$

Решение в виде формулы (9.3) удачно тем, что оно выполняет краевые условия на двух отрезках в (9.2) $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$. Подставим(9.3) в (9.2)

$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \sin x(-f(y) + \ddot{f}(y)) = e^y \sin x \Leftrightarrow \ddot{f}(y) - f(y) = e^y \\ u|_{y=0} = \sin x f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0; u|_{y=\pi} = \sin x f(\pi) = 0 \Leftrightarrow f(\pi) = 0 \end{cases}$$

Получили краевую задачу на функцию $f(y)$

$$\begin{cases} \ddot{f}(y) - f(y) = e^y \\ f(0) = 0; f(\pi) = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

Общее решение однородного ОДУ для (9.4) имеет вид $f_{oo}(y) = C_1 \operatorname{sh} y + C_2 \operatorname{ch} y$.

Частное решение(4)ищем в виде $f_4(y) = C_3 y e^y, f_4(y)' = C_3(e^y + y e^y), f_4(y)'' = C_3(2e^y + y e^y)$

$$\ddot{f}_4(y) - f_4(y) = e^y \Leftrightarrow C_3(2e^y + y e^y) - C_3 y e^y = e^y \Leftrightarrow C_3 = \frac{1}{2}$$

Получим $f_{он}(y) = f_{oo}(y) + f_4(y) = C_1 \operatorname{sh} y + C_2 \operatorname{ch} y + \frac{y e^y}{2}$.

С учетом краевых условий(4) получим общее решение неоднородного уравнения(9.4)

$$f_{он}(0) = 0 = C_2 + 0 = C_2 \Leftrightarrow C_2 = 0$$

$$f_{он}(\pi) = C_1 \operatorname{sh} \pi + \frac{\pi e^\pi}{2} \Leftrightarrow C_1 = -\frac{\pi e^\pi}{2 \operatorname{sh} \pi}, f_{он}(y) = -\frac{\pi e^\pi}{2 \operatorname{sh} \pi} \operatorname{sh} y + \frac{y e^y}{2} = \frac{y e^y \operatorname{sh} \pi - \pi e^\pi \operatorname{sh} y}{2 \operatorname{sh} \pi}. \quad (9.5)$$

Наконец, подставим (5) в формулу(3) и получим ответ

$$\text{Ответ: } u(x, y) = \sin x \cdot f(y) = \sin x \left(\frac{y e^y \operatorname{sh} \pi - \pi e^\pi \operatorname{sh} y}{2 \operatorname{sh} \pi} \right).$$

Пример 2. №17[1,стр.167]. *Колебания прямоугольной мембраны.*

Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях мембраны.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \sin t \sin x \sin y, 0 < x, y < \pi, t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \quad (9.6)$$

Неоднородная правая часть в волновом уравнении(9.6) представляет элементарную функцию, а решение задачи согласно лемме также элементарная функция. Граничные

условия непрерывны, не имеют точек разрыва, поэтому решение может содержать конечное число слагаемых. Согласно лемме изменяется только временная часть. Решение задачи ищем в виде

$$u(x, y, t) = f(t) \sin x \sin y \quad (9.7)$$

Функция $f(t)$ неизвестна. Решение вида (9.7) хорошо тем, что оно удовлетворяет краевым условиям $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi$. Подставим (9.7) в первое и третье уравнение системы (9.6)

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) \sin x \sin y = -2 \sin x \sin y f(t) + \sin t \sin x \sin y, \Leftrightarrow \ddot{f}(t) + 2f(t) = \sin t \\ u(x, y, 0) = 0 \Leftrightarrow \sin x \sin y f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \\ u_t(x, y, 0) = 0, \Leftrightarrow \sin x \sin y \dot{f}(0) = 0 \Leftrightarrow \dot{f}(0) = 0 \end{cases}$$

Решаем задачу Коши (8)

$$\begin{cases} \ddot{f}(t) + 2f(t) = \sin t \\ f(0) = 0 \\ \dot{f}(0) = 0 \end{cases}$$

(9.8)

Общее решение однородного уравнения $\ddot{f}(t) + 2f(t) = 0$ имеет вид

$$f_{oo}(t) = C_1 \sin \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t$$

Частное решение (9.8) ищем в виде

$$f_u(t) = C_3 \sin t, \ddot{f}_u(t) + 2f_u(t) = -C_3 \sin t + 2C_3 \sin t = \sin t \Leftrightarrow C_3 = 1, f_u(t) = \sin t$$

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

$$f_{on}(t) = C_1 \sin \sqrt{2}t + C_2 \cos \sqrt{2}t + \sin t. \text{ Используем начальные условия задачи (9.8).}$$

$$f_{on}(0) = C_2 = 0, \dot{f}_{on}(t) = \sqrt{2}C_1 \cos \sqrt{2}t + \cos t \Big|_{t=0} = 1 + \sqrt{2}C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_{on}(t) = -\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \sin t$$

Подставив решение задачи Коши (9.8) в функцию (9.7), запишем результат (9.9)

$$\text{Ответ: } u(x, y, t) = f(t) \sin x \sin y = \left(-\frac{\sin \sqrt{2}t}{\sqrt{2}} + \sin t \right) \sin x \sin y \quad (9.9)$$

Определение 2. Краевые условия задачи $u(P)|_{P \in \Gamma} = f(P)$, в которых на границе области заданы значения функции, называют первого рода или условиями Дирихле. Если на границе области заданы значения производной функции по нормали $\frac{\partial u(P)}{\partial n} \Big|_{P \in \Gamma} = f(P)$, то краевая задача называется краевой второго рода или задачей Неймана.

Пример 3. №13 [1, стр. 218].

Найти распределение температуры в тонкой прямоугольной пластинке размера $[0, \pi] \times [0, \pi]$, если ее начальная температура равна $u(x, y, 0) = 5 \cos x \cos(3y)$, а на границе тепловой поток равен нулю.

Запишем постановку задачи, учитывая, что тепловой поток определяется формулой

$$j = -k \nabla u, j|_{P \in \Gamma} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P \in \Gamma} = 0, a^2 - \text{коэффициент температуропроводности.}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), 0 < x, y < \pi, t > 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \\ u(x, y, 0) = 5 \cos x \cos(3y), 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \quad (9.10)$$

Используя Лемму о сохранении координатного множителя при действии уравнения теплопроводности на элементарные функции, выберем решение задачи(9.10) в виде

$$u(x, y, t) = f(t) \cos x \cos(3y) \quad (9.11)$$

Функция (9.11) выполняет краевые условия исходной задачи(9.10).

$$u_x|_{x=0} = -f(t) \sin x \cos(3y)|_{x=0} = 0, u_y|_{y=0} = -3f(t) \cos x \sin(3y)|_{y=0} = 0$$

Подставим предполагаемое решение(9.11) в первое и третье уравнения системы(9.10)

$$\begin{cases} u_t = \dot{f}(t) \cos x \cos(3y) = a^2(u_{xx} + u_{yy}) \Leftrightarrow -10a^2 f(t) \cos x \cos(3y) \\ u(x, y, 0) = 5 \cos x \cos(3y) \Leftrightarrow f(0) \cos x \cos(3y) = 5 \cos x \cos(3y) \forall x, y \in [0, \pi] \Leftrightarrow f(0) = 5 \end{cases}$$

Получим задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{f}(t) = -10a^2 f(t) \\ f(0) = 5 \end{cases} \quad (9.12)$$

Общее решение(12) есть $f(t) = Ce^{-10a^2 t}$, $f(0) = 5 = C \Leftrightarrow C = 5$, $f(t) = 5e^{-10a^2 t}$

Найденную функцию для задачи Коши(12) подставим в(11), запишем ответ

$$\text{Ответ: } u(x, y, t) = f(t) \cos x \cos(3y) = 5e^{-10a^2 t} \cos x \cos(3y)$$

Упражнения.

Пример 4 №12[1,стр.217].

Найти распределение температуры в тонкой прямоугольной пластинке размера $[0, \pi] \times [0, \pi]$, если ее начальная температура равна $u(x, y, 0) = 3 \sin x \sin(5y)$, а ее граница поддерживается при нулевой температуре. Кратко условие задачи можно написать в виде, a^2 - коэффициент теплопроводности.

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), 0 < x, y < \pi, t > 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \\ u(x, y, 0) = 3 \sin x \sin(5y), 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } u(x, y, t) = 3e^{-26a^2 t} \sin x \sin(5y)$$

Пример 5. Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях мембраны.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \cos(3x) \cos(4y), 0 < x, y < \pi, t > 0 \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \\ u(x, y, 0) = 0, u_t(x, y, 0) = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } u(x, y, t) = \left(\frac{t}{25} - \frac{1}{125} \sin(5t) \right) \cos(3x) \cos(4y)$$

Пример 6. Решить краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона на прямоугольнике нулевыми краевыми условиями

$$\begin{cases} \Delta u = y \sin(2x), 0 < x, y < \pi \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x, y \leq \pi \end{cases} \quad (9.13)$$

$$\text{Ответ: } u(x, y) = \sin(2x) \left(\frac{\pi \operatorname{sh}(2y) - y \operatorname{sh}(2\pi)}{4 \operatorname{sh}(2\pi)} \right).$$

Литература

1. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – Москва : МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISBN 5-94057-148-4. – EDN QXTLUC.
2. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: в каждом параграфе – основные методы, необходимые для решения задач, подробные решения типовых задач: более 1400 задач с ответами: [учебное пособие] / А. Ф. Филиппов; А. Ф. Филиппов. – Изд. 3-е. – Москва: URSS, 2009. – ISBN 978-5-397-00658-3.

Лекция 10.

Простейшая классическая вариационная задача

Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, $t \in [t_0, t_1]$, t – независимая переменная. Рассмотрим задачу на экстремум (минимум, максимум)

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \text{extr} \quad (10.1)$$

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1 \quad (10.2)$$

Функционал $J : C^1[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ отображает пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке в числовую прямую. В (10.1) введено обозначение $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$. $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ – функция 3-х переменных или интегрант. Условия (10.2) называются краевыми.

Задача (10.1), (10.2) называется простейшей классической вариационной задачей [1]. Все дифференцируемые функции и удовлетворяющие краевым условиям $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ называются допустимыми в задаче (10.1).

Определение 1. Говорят, что допустимая функция $\hat{x}(t)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче (10.1), (10.2) если

$$\exists \delta > 0, \forall x(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\|_1 < \delta \Leftrightarrow (\|x(t) - \hat{x}(t)\|_C < \delta, \|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\|_C < \delta) : J(x(t)) \geq J(\hat{x}(t)) \Leftrightarrow$$

$\hat{x}(t) \in \text{loc min}$

Определение 2. Говорят, что допустимая функция $\hat{x}(t)$ доставляет слабый локальный максимум в задаче (10.1), (10.2), если

$$\exists \delta > 0, \forall x(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\|_1 < \delta \Leftrightarrow (\|x(t) - \hat{x}(t)\|_C < \delta, \|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\|_C < \delta) : J(x(t)) \leq J(\hat{x}(t)) \Leftrightarrow$$

$\hat{x}(t) \in \text{loc max}$. Где для функции $x(t)$ используется обозначение нормы Чебышева $\|x(t)\|_C \equiv \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$.

Определение 3. Говорят, что функционал $J(x(t))$ имеет производную в точке $\hat{x}(t)$ по направлению функции $h(t)$, если для действительного числа λ существует предел отношения

$$\delta J(\hat{x}(t), h(t)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{x}(t) + \lambda h(t)) - J(\hat{x}(t))}{\lambda}, \hat{x}(t), h(t) \in C^1[t_0, t_1], \lambda \in \mathbb{R} \quad (10.3)$$

Если производная функционала $J(x(\cdot))$ в точке $\hat{x}(t)$ не зависит от направления $h(t)$, то говорят, что существует вариация $\delta J(\hat{x}, h)$ функционала $J(x(t))$ в точке \hat{x} .

Теорема 1(необходимые условия экстремума в задаче (10.1),(10.2)). Пусть допустимая функция $\hat{x}(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче(10.1),(10.2) и пусть функции $L(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1]$, $L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1]$, $L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1]$,
 $\exists \delta > 0 : (t, x(t), \dot{x}(t)) \in \{D_\delta \mid t \in [t_0, t_1] \|x(t) - \hat{x}(t)\|_1 < \delta\}$ тогда

$L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C^1[t_0, t_1] \Leftrightarrow \frac{d}{dx} L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) \in C[t_0, t_1]$ в области D_δ и выполнены необходимые условия локального экстремума

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) = 0 \quad (10.4)$$

Доказательство Теоремы разобьем на три части.

1. Найдем вариацию по Лагранжу от функционала $J(x(\cdot))$ в задаче(10.1),(10.2). По определению 3 имеем, раскладывая в ряд Тейлора второй и третий аргумент функционала по параметру λ

$$\begin{aligned} \delta J(\hat{x}(t), h(t)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{x}(t) + \lambda h(t)) - J(\hat{x}(t))}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \hat{\dot{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)) - L(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))}{\lambda} dt = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{L(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) + L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\lambda h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\lambda \dot{h}(t) + o(\lambda) - L(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))}{\lambda} dt = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\dot{h}(t) + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\dot{h}(t) \right) dt \quad (10.5) \end{aligned}$$

С другой стороны функционал $J(x(t))$ можно рассматривать как числовую функцию действительного переменного $\lambda : \varphi(\lambda) = J(x(t)) = J(\hat{x}(t) + \lambda h(t))$, $\varphi(\lambda = 0) = \varphi(0) = J(\hat{x}(t))$. По условию Теоремы функционал $J(x(t))$ имеет в точке $\hat{x}(t)$ локальный экстремум, что тоже самое функция $\varphi(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = 0$ локальный экстремум. Необходимым условием локального экстремума функции одной действительной переменной в точке $\lambda = 0$ является условие $\varphi'(\lambda = 0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J(\hat{x}(t) + \lambda h(t)) - J(\hat{x}(t))}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$ (10.5)

$$\delta J(\hat{x}(t), h(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\dot{h}(t) \right) dt = 0 \quad (10.6)$$

Таким образом, необходимым условием слабого локального экстремума функционала $J(x(t))$ в точке $\hat{x}(t)$ является равенство нулю его вариации по Лагранжу $\delta J(\hat{x}(t), h(t)) = 0$.

2. Лемма (Дюбуа-Реймона). Пусть $\forall h(t) \in C_0^1[t_0, t_1] \mid h(t) \in C^1[t_0, t_1], h(t_0) = h(t_1) = 0$, $a_0(t), a_1(t) \in C[t_0, t_1]$

$$\int_{t_0}^{t_1} (a_0(t)h(t) + a_1(t)\dot{h}(t)) dt = 0 \quad (10.7)$$

$$\text{Тогда } a_1(t) \in C^1[t_0, t_1], \frac{da_1(t)}{dt} = a_0(t) \quad (10.8)$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $p(t) \in C^1[t_0, t_1]$ с помощи задачи Коши (10.9)

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = a_0(t) \\ \int_{t_0}^{t_1} p(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} a_1(t)dt \end{cases} \quad (10.9)$$

Решение задачи Коши (10.9) единственно, так как функции $a_0(t), a_1(t)$ непрерывны.

Преобразуем

интеграл(10.7)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_1} (a_0(t)h(t) + a_1(t)\dot{h}(t))dt \stackrel{(10.9)}{=} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{p}(t)h(t) + a_1(t)\dot{h}(t))dt = p(t)h(t)|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (-p(t) + a_1(t))\dot{h}(t)dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (-p(t) + a_1(t))\dot{h}(t)dt = 0 \end{aligned} \quad (10.10)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию-направление $\tilde{h}(t)$, которую также определим из задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = a_1(t) - p(t) \\ \tilde{h}(t_0) = 0 \end{cases} \quad (10.11)$$

Решение задачи Коши единственно, так как по условию Леммы $a_1(t)$ непрерывна, а $p(t)$ непрерывно дифференцируема и также непрерывна. Имеем, что

$$\tilde{h}(t_1) - \tilde{h}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))dt \stackrel{(10.10)}{=} 0 \Rightarrow \tilde{h}(t_1) = \tilde{h}(t_0) = 0 \Rightarrow \tilde{h}(t) \in C^1[t_0, t_1]. \quad \text{Поэтому}$$

функция $\tilde{h}(t)$ из класса функций, рассматриваемого в Лемме. Поэтому из(10.10) получим

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} (-p(t) + a_1(t))\dot{h}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (-p(t) + a_1(t))\tilde{h}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} (a_1(t) - p(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow (a_1(t) - p(t))^2 \equiv 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1(t) = p(t) \Leftrightarrow \dot{a}_1(t) = \dot{p}(t) \stackrel{(10.9)}{=} a_0(t), \dot{a}_1(t) = a_0(t) \forall t \in [t_0, t_1]. \quad \text{Лемма и формула (10.8)}$$

доказаны. Также получено, что $a_1(t) \in C^1[t_0, t_1]$

3. Завершим доказательство Теоремы. Так как

$$x(t_0) = \hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0) = \hat{x}(t_0) = x_0 \Leftrightarrow h(t_0) = 0,$$

$$x(t_1) = \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1) = \hat{x}(t_1) = x_1 \Leftrightarrow h(t_1) = 0 \Rightarrow h(t) \in C^1[t_0, t_1]$$

$$\delta J(\hat{x}(t), h(t)) = \int_{t_0}^{t_1} (L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t))\dot{h}(t))dt \stackrel{(10.6), (10.8)}{=} 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0(t) \equiv L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)), a_1(t) \equiv L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)), \dot{a}_1(t) \stackrel{(10.8)}{=} a_0(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) = L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)).$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Уравнение (10.4) Эйлера-Лагранжа является обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка, его решение множество – функций с 2-мя произвольными константами интегрирования. Окончательно $\hat{x}(t)$ определяется с учетом двух краевых условий (10.2) $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$.

Уравнение Эйлера-Лагранжа(21) является локальным необходимым условием экстремума, кроме локального условия слабого экстремума существует также интегральное необходимое условие слабого экстремума – условие Якоби. Данное требование заключается в возможности включить экстремальную функцию $\hat{x}(t)$ в центральное поле экстремалей[1].

Пусть множество функций, каждая из которых является решением задачи (10.1), (10.2) проходит через точку-центр $t_0, x(t_0) = x_0$. Поскольку любое решение(10.1), (10.2) однозначно выделяется двумя условиями, одно из которых уже использовано, то поле экстремалей имеет один свободный параметр – например, наклон касательной в точке - центр. Итак, все функции центрального поля можно записать как однопараметрическое семейство функций $\hat{x}(t, C) = \hat{x}(t, \hat{x}(t_0))$; $\hat{x}(t_0, C) = x_0$.

Тогда в центре поля экстремалей для 2 близких решений имеем

$$\hat{x}(t_0, C) = \hat{x}(t_0, C + dC) = x_0 \Leftrightarrow \frac{\partial \hat{x}(t_0, C)}{\partial C} = 0, \text{ обозначим переменную } \frac{\partial \hat{x}(t, C)}{\partial C} = u(t, C)$$

Найдем огибающую семейства экстремалей, в каждой точке которой также выполняется уравнение $\frac{\partial \hat{x}(t, C)}{\partial C} = 0$. Для этого продифференцируем уравнение(10.4) по переменной C, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial C} \left\{ \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}}(t, x(t, C), \dot{x}(t, C))) - L_x(t, x(t, C), \dot{x}(t, C)) \right\} = 0 \Leftrightarrow \\ & \frac{d}{dt} (L_{x\dot{x}}u + L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}) - (L_{xx}u + L_{x\dot{x}}\dot{u}) = 0 \Leftrightarrow L_{x\dot{x}}\dot{u} + u \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} + \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}) - L_{xx}u - L_{x\dot{x}}\dot{u} = \\ & = u \left(\frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} - L_{xx} \right) + \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}) = \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}) - u \left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (10.12)$$

Уравнение(10.12) называется уравнением Якоби и (10.12) линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $u(t)$. Дополним уравнение (10.12) условием в центре поля экстремалей

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (L_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u}) - u \left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) = 0 \\ u(t_0) = \frac{\partial x(t_0)}{\partial C} = 0, t \in [t_0, t_1] \end{cases} \quad (10.13)$$

Определение 4. Говорят, что точка $\tau > t_0$ называется сопряженной к точке t_0 , если $u(\tau) = 0$.

По построению решение уравнения (10.13), содержит огибающую семейства экстремалей, в каждой точке которой нарушается единственность решения уравнения Эйлера - Лагранжа. В связи, с чем формулируется условие Якоби

Определение 5. Говорят, что условие Якоби выполнено, если сопряженная точка τ к точке t_0 не принадлежит рассматриваемому отрезку, $\tau \notin [t_0, t_1] \Leftrightarrow \tau > t_1$, в которой $u(\tau) = 0$.

В работе[1] доказана Лемма, согласно которой выполнение условия Якоби (Определение 5) является необходимым интегральным условием экстремума.

Итак, решение уравнения Эйлера-Лагранжа(10.4) можно включить в центральное поле экстремалей, если соответствующее ему решение уравнения Якоби(10.13) не содержит сопряженных точек на отрезке $t \in [t_0, t_1]$.

Достаточные условия экстремума в простейшей классической вариационной задаче (10.1),(10.2)

Определения 1,2 для слабого локального экстремума можно переписать в виде разности функционала

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \delta > 0, \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1]: \|x - \hat{x}\|_1 < \delta : J(x(t)) - J(\hat{x}(t)) \geq 0 \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc min} \\ \exists \delta > 0, \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1]: \|x - \hat{x}\|_1 < \delta : J(x(t)) - J(\hat{x}(t)) \leq 0 \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc max} \\ \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1]: J(x(t)) - J(\hat{x}(t)) \geq 0 \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs min} \\ \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1]: J(x(t)) - J(\hat{x}(t)) \leq 0 \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs max} \end{array} \right. , \quad (10.14)$$

Определение (10.14) различает локальный и абсолютный слабые экстремумы.

Рассмотрим произвольные две точки на плоскости А, В которые соединяет одна из экстремалей поля, тогда как показано в работе[2] приращение функционала на произвольной кривой относительно экстремали, соединяющих точки А, В равно

$$J(x(t)) - J(\hat{x}(t)) = \int_{A=(t_0, x(t_0))}^{B=(t_1, x(t_1))} E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) dt, \quad p(t) \equiv \hat{x}(t) \quad (10.15)$$

Где: $p(t)$ -функция наклона поля экстремалей (определена во всех точках поля),

$$E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) - (\dot{x} - p)L_p(t, x(t), p) \quad (10.16)$$

Функция $E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t))$ называется функцией Вейерштрасса. Из определения (10.14), формулы (10.15) следует, что если

$$\left\{ \begin{array}{l} E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) \geq 0, \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1], \forall t \in [t_0, t_1], p(t) \equiv \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs min} \\ E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) \leq 0, \forall x(t) \in C^1[t_0, t_1], \forall t \in [t_0, t_1], p(t) \equiv \hat{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs max} \end{array} \right. \quad (10.17)$$

Условие(10.17) является достаточным для абсолютного экстремума найденной экстремали. Кроме знакопостоянства функции Вейерштрасса существует еще более простое достаточное условие экстремума – усиленное условие Лежандра $L_{\dot{x}\dot{x}} > 0, \forall t \in [t_0, t_1]$.

Действительно, разложим лагранжиан по третьему аргументу в окрестности функции $p(t)$, используя формулу для ряда Тейлора с остаточным членом в виде Лагранжа:

$$L(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(t, x(t), p(t)) + (\dot{x}(t) - p(t))L_p(t, x(t), p) + \frac{(\dot{x}(t) - p(t))^2}{2} L_{pp}(t, x(t), q(t)), \quad (10.18)$$

$$p(t) < q(t) < \dot{x}(t), \forall t \in [t_0, t_1]$$

Преобразуя (10.18), в окрестности экстремали получим

$$E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L(t, x(t), \dot{x}(t)) - (\dot{x} - p)L_p(t, x(t), p) = \frac{(\dot{x}(t) - p(t))^2}{2} L_{pp}(t, x(t), q(t)) \quad (10.19)$$

$$\text{Определение 5. Условие } L_{pp}(t, \hat{x}(t), p(t)) > 0, \forall t \in [t_0, t_1], L_{pp}(t, \hat{x}(t), p(t)) \in C[t_0, t_1] \quad (10.20)$$

называется усиленным условием Лежандра.

Из непрерывности функции $L_{pp}(t, \hat{x}(t), p(t))$ следует, что в малой окрестности экстремали $\hat{x}(t)$ сохраняется также знак $L_{pp}(t, \hat{x}(t), q(t)) > 0, \forall t \in [t_0, t_1]$, а также знак функции Вейерштрасса. Тогда усиленное условие Лежандра позволяет найти достаточные условия (10.21) для абсолютного или локального экстремумов в простейшей классической вариационной задаче(10.1),(10.2)

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{pp}(t, x(t), q(t)) > 0, \forall t \in [t_0, t_1], \forall x(t), q(t) \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs min} \\ L_{pp}(t, x(t), q(t)) < 0, \forall t \in [t_0, t_1], \forall x(t), q(t) \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{abs max} \\ \exists \delta > 0, \|q(t) - p(t)\|_C < \delta, L_{pp}(t, \hat{x}(t), q(t)) > 0, \forall t \in [t_0, t_1], \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc min} \\ \exists \delta > 0, \|q(t) - p(t)\|_C < \delta, L_{pp}(t, \hat{x}(t), q(t)) < 0, \forall t \in [t_0, t_1], \Rightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc max} \end{array} \right. \quad (10.21)$$

Наконец, в вариационном исчислении различают слабый и сильный экстремумы. Сильный экстремум отличается от слабого экстремума пространством используемых

функций. Для сильного экстремума рассматривают $x(t) \in KC^1[t_0, t_1]$ (класс кусочно дифференцируемых функций), а для слабого $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ (класс непрерывно дифференцируемых функций).

Рассмотрим пример простейшей классической задачи - задачу о брахистохроне.

Пример 1. Задача о брахистохроне.

Рассмотрим задачу о минимальном времени соскальзывания малого тела по гладкому желобу, соединяющему две точки А и В на плоскости. То есть, нужно найти функцию профиля желоба с минимальным временем соскальзывания тела по нему. Для простоты точку А совместим с началом координатной системы (0,0). На Рис. 3 указаны параметры задачи. Обозначим массу тела m.

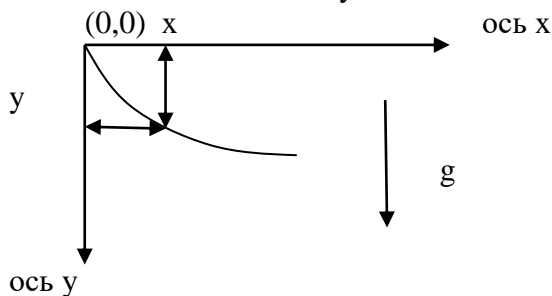


Рис. 10. 1. Скольжение небольшого тела по гладкому желобу.

Из закона сохранения энергии в точке с координатами (x,y) рисунка 10.1 получим, что потенциальная энергия $U(y) = mgy$, равна кинетической энергии $E(v) = \frac{mv^2}{2}$, где v - скорость тела. $mgy = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow v = \sqrt{2gy}$.

Длина дифференциала дуги желоба, по которому скользит тело $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$. Тело пройдет данный элемент дуги за время

$dt = \frac{dl}{v} = \frac{dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}$. Пусть конечная точка желоба задана координатами (x_1, y_1) . Тогда

полное время движения равно

$$T = \int_0^{x_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}} dx \rightarrow \min \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{\sqrt{y}} dx \rightarrow \min$$

Так как ускорение свободного падения положительная константа g . Перейдем к привычным обозначениям функциям из учебника Галева - Тихомирова, для чего используем замены $x \rightarrow t, y(x) \rightarrow x(t), dy/dx \rightarrow dx/dt = \dot{x}, x_1 \rightarrow t_1, dx \rightarrow dt$. Получим простейшую классическую вариационную задачу. Такая постановка совпадает с постановкой [1, стр.179] (Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. Краткий курс теории экстремальных задач).

$$\int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{\sqrt{x}} dt \rightarrow \min, x(0) = 0, x(t_1) = x_1 \tag{10.22}$$

Лемма[4]. Пусть лагранжиан $L(t, x(t), \dot{x}(t)) = L(x(t), \dot{x}(t))$ явно не зависит от времени. Тогда существует инвариант (закон сохранения энергии) $\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) = const$.

Доказательство. Продифференцируем выражение $\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) = \text{const}$ по времени

$$\frac{d(\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)))}{dt} = \ddot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) + \dot{x} \frac{dL_{\dot{x}}}{dt} - L_x \dot{x} - L_{\dot{x}} \ddot{x} = \dot{x} \left(\frac{dL_{\dot{x}}}{dt} - L_x \right) \equiv \dot{x} \cdot 0 \equiv 0.$$

В силу полученного тождества справедливость леммы установлена.

Решение задачи. Используя доказанную Лемму, поскольку лагранжиан задачи $L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}$, $L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{x}}$, $\dot{x}L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - L(x(t), \dot{x}(t)) =$

$$\frac{\dot{x}^2}{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} = C \Leftrightarrow \frac{\dot{x}^2 - (1+\dot{x}^2)}{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{x}} = C \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{C_1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \Leftrightarrow x(t) = \frac{C_1^2}{1+\dot{x}^2},$$

Введем

параметр

$$u : \dot{x} = \text{ctg}(u) \Rightarrow x(t(u)) = x(u) = \frac{C_1^2}{1+\dot{x}^2} = \frac{C_1^2}{1+\text{ctg}^2 u} = \sin^2 u \cdot C_1^2 = \frac{1-\cos 2u}{2} C_1^2$$

Из первой формулы получим

$$\dot{x} = \text{ctg}(u) \Leftrightarrow dx/dt = \text{ctg}(u), dt = \text{tgu} \cdot dx, dx = C_1^2 \sin 2u du, dt = \text{tgu} C_1^2 \sin 2u du = 2 \sin^2 u \cdot C_1^2 du = (1-\cos 2u) C_1^2 du,$$

интегрируя выражение в дифференциалах, получим

$$\begin{cases} t(u) = C_1^2 \left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) + C_2 = C_1^2 \left(\frac{2u - \sin 2u}{2} \right) + C_2 \\ x(u) = \frac{1-\cos 2u}{2} C_1^2 \end{cases}$$

Используем начальное условие $x(0) = 0$ для определения постоянной C_2

$$\begin{cases} t(0) = C_2 \\ x(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 = 0$$

Запишем уравнение найденной экстремали

$$\begin{cases} \hat{t}(u) = C_1^2 \left(u - \frac{\sin 2u}{2} \right) \\ \hat{x}(u) = C_1^2 \left(\frac{1-\cos 2u}{2} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{t}(z) = C_1^2 \left(\frac{z - \sin z}{2} \right) \\ \hat{x}(z) = C_1^2 \left(\frac{1-\cos z}{2} \right) \end{cases}, z \geq 0$$

Из последней системы уравнений видно, что экстремаль $\hat{x}(u(t)) = \hat{x}(t)$ задана в параметрическом виде.

Достаточными условиями экстремума для функции $\hat{x}(t)$ в задаче (10.1), (10.2) является знакопостоянство функции Вейерштрасса, введено обозначение $p(t) \equiv \dot{\hat{x}}(t)$

$$E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = L(t, x(t), \dot{x}(t)) - L(t, x(t), p(t)) - (\dot{x} - p)L_p(t, x(t), p),$$

$$L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}}, L(x(t), p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$$

$$E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)) = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}} - (\dot{x} - p) \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2} - (1+p^2) - \dot{x}p + p^2}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2}-\dot{x}p-1}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$$

Докажем, что $E(t, x(t), \dot{x}(t), p(t))$ неотрицательна. Действительно, знаменатель дроби положителен, так как из постановки задачи $x \geq 0$. Допустим числитель(36) тоже неотрицателен, тогда и вся дробь(36) неотрицательна. То есть

$$\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2}-\dot{x}p-1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2} \geq 1+\dot{x}p$$

Если правая часть отрицательна, то последнее неравенство очевидно, так как левая часть всегда положительна. Пусть теперь правая часть положительна, но произведение $\dot{x}p < 0$. В этом случае левая часть не меньше 1, а правая часть не больше 1 и неравенство в этом случае тоже доказано. Для положительных частей неравенства возведем их в квадрат

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2} \geq 1+\dot{x}p > 0 &\Leftrightarrow (1+\dot{x}^2)(1+p^2) = 1+\dot{x}^2+p^2+\dot{x}^2p^2 \geq (1+\dot{x}p)^2 = 1+\dot{x}^2p^2+2\dot{x}p \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{x}^2+p^2 \geq 2\dot{x}p &\Leftrightarrow \dot{x}^2+p^2-2\dot{x}p = (\dot{x}-p)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}\sqrt{1+p^2}-\dot{x}p-1}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} \geq 0 \end{aligned}$$

Поскольку последнее неравенство очевидно и выполнено для всех функций \dot{x}, p , то полученная экстремаль доставляет абсолютный минимум для функционала в задаче брахистохроны

$$\begin{cases} \hat{t}(z) = C_1^2 \left(\frac{z - \sin z}{2} \right) \\ \hat{x}(z) = C_1^2 \left(\frac{1 - \cos z}{2} \right) \end{cases}, z \geq 0 \in \text{abs min.} \quad (10.23)$$

Пример 2(Гильберта[1, №135]). Исследовать функционал на экстремум

$$J(x(t)) = \int_0^1 (t^2 \dot{x}^2 + 12x^2) dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, x(1) = 1$$

Решение. 1) Запишем интегрант и его частные производные $L(t, x, \dot{x}) = t^2 \dot{x}^2 + 12x^2, L_x(t, x, \dot{x}) = 24x, L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 2t^2 \dot{x}$

2) Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа (10.4) $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \hat{\dot{x}}(t)) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{d}{dt} (2t^2 \dot{x}) - 24x = 0 \Leftrightarrow 2t^2 \ddot{x} + 4t\dot{x} - 24x = 0 \Leftrightarrow t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} - 12x = 0$$

Последнее уравнение является однородным относительно слагаемых вида $t^k x^{(k)}$, его решение ищем в степенном виде $x(t) = Ct^k, \dot{x} = kCt^{k-1}, \ddot{x} = k(k-1)Ct^{k-2}$, подставим решение, его первую и вторую производную в уравнение Эйлера-Лагранжа

$$t^2 \ddot{x} + 2t\dot{x} - 12x = 0 = Ct^k (k(k-1) + 2k - 12) = 0 \Leftrightarrow k(k-1) + 2k - 12 = k^2 + k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$k_1 = 3, k_2 = -4$. Таким образом, общее решение уравнения Эйлера-Лагранжа имеет вид

$x(t) = C_1 t^{k_1} + C_2 t^{k_2} = C_1 t^3 + C_2 t^{-4}$. Используем краевые условия для выделения единственного решения $x(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = C_1 0^3 + C_2 0^{-4} \Rightarrow C_2 = 0, x(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = C_1 1^3 \Rightarrow C_1 = 1$.

Имеем $\hat{x}(t) = t^3$.

Воспользуемся достаточными условиями экстремума для определения типа экстремума.

Запишем функцию Вейерштрасса $E(t, x, \dot{x}, p) = L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, p) - (\dot{x} - p)L_p(t, x, p)$.

Поскольку $L(t, x, \dot{x}) = t^2 \dot{x}^2 + 12x^2$, $L(t, x, p) = t^2 \dot{x}^2 + 12p^2$, $L_p(t, x, p) = 24p$, имеем

$$\begin{aligned} E(t, x, \dot{x}, p) &= L(t, x, \dot{x}) - L(t, x, p) - (\dot{x} - p)L_p(t, x, p) = t^2 \dot{x}^2 + 12x^2 - (t^2 \dot{x}^2 + 12p^2) - (\dot{x} - p)24p = \\ &= t^2 \dot{x}^2 + 12x^2 - (t^2 \dot{x}^2 + 12p^2) - (\dot{x} - p)24p = 12(\dot{x}^2 - p^2) - 24(\dot{x} - p)p = 12((\dot{x} - p)(\dot{x} + p) - 2p(\dot{x} - p)) = \\ &= 12(\dot{x} - p)(\dot{x} - p) = 12(\dot{x} - p)^2 \geq 0 \forall x(t) \forall \dot{x}(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = t^3 \in \text{abs min}. \end{aligned}$$

$$S_{\min} = J(\hat{x}(t) = t^3) = \int_0^1 (t^2 \hat{x}^2 + 12\hat{x}^2) dt = \int_0^1 (t^2 9t^4 + 12t^6) dt = 21 \int_0^1 t^6 dt = \frac{21}{7} = 3.$$

Для определения максимального значения функционала рассмотрим последовательность допустимых функций $x_n(t) = t^n$, $x_n(0) = 0$, $x_n(1) = 1$

$$\begin{aligned} J(x_n(t)) &= \int_0^1 (t^2 \dot{x}_n^2 + 12x_n^2) dt = \int_0^1 (t^2 n^2 t^{2(n-1)} + 12t^{2n}) dt = (n^2 + 12) \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{(n^2 + 12)}{2n + 1} t^{2n+1} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{(n^2 + 12)}{2n + 1} \approx \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty. \end{aligned}$$

Ответ: $\hat{x}(t) = t^3 \in \text{abs min}$, $S_{\min} = 3$, $S_{\max} = +\infty$.

Задача Больца

Пусть функция непрерывно дифференцируема на отрезке $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, $t \in [t_0, t_1]$, t -независимая переменная. Рассмотрим задачу на экстремум (минимум, максимум)

$$B(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + l(x(t_0), x(t_1)) \rightarrow \text{extr} \quad (10.24)$$

Функционал $B: C^1[t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ отображает пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке в числовую прямую. В (10.24) введено обозначение $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$. $L(t, x(t), \dot{x}(t))$ - функция 3-х переменных или интегрант. $l(x(t_0), x(t_1))$ - функция 2-х переменных или терминант.

Задача(10.24) называется задачей Больца[1]. Все дифференцируемые функции $x(t) \in C^1[t_0, t_1]$ называются допустимыми в задаче(10.24).

Определение 1. Говорят, что допустимая функция $\hat{x}(t)$ доставляет слабый локальный минимум в задаче(10.24) если

$$\exists \delta > 0, \forall x(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\|_1 < \delta \Leftrightarrow (\|x(t) - \hat{x}(t)\|_C < \delta, \|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\|_C < \delta) : B(x(t)) \geq B(\hat{x}(t)) \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc min}$$

Определение 2. Говорят, что допустимая функция $\hat{x}(t)$ доставляет слабый локальный максимум в задаче(10.24), если

$$\exists \delta > 0, \forall x(t) : \|x(t) - \hat{x}(t)\|_1 < \delta \Leftrightarrow (\|x(t) - \hat{x}(t)\|_C < \delta, \|\dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)\|_C < \delta) : B(x(t)) \leq B(\hat{x}(t)) \Leftrightarrow \hat{x}(t) \in \text{loc max}.$$

Где для функции $x(t)$ используется обозначение нормы Чебышева $\|x(t)\|_C \equiv \max_{t \in [t_0, t_1]} |x(t)|$.

Теорема 2(необходимые условия экстремума в задаче (10.24)). Пусть допустимая функция $\hat{x}(t) \in C^1[t_0, t_1]$ доставляет слабый локальный экстремум в задаче(10.24) и пусть функции

$L(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1], L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1], L_{\dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C[t_0, t_1], l_{x(t_0)}, l_{x(t_1)} \in C\{|x(t_0) - \hat{x}(t_0)| < \delta, |x(t_1) - \hat{x}(t_1)| < \delta\}$
 $\exists \delta > 0 : (t, x(t), \dot{x}(t)) \in \{D_\delta \mid t \in [t_0, t_1] \parallel x(t) - \hat{x}(t) \parallel_1 < \delta, \}$ тогда

$L_x(t, x(t), \dot{x}(t)) \in C^1[t_0, t_1] \Leftrightarrow \frac{d}{dx} L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \in C[t_0, t_1]$ в области D_δ и выполнены

необходимые условия локального экстремума

$$1. \frac{d}{dt} L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0 \quad \text{условия стационарности по } x \quad (10.25)$$

$$2. L_x(t_k) = (-1)^k l_{x(t_k)}, k = 0, 1 \quad \text{условия трансверсальности} \quad (10.26)$$

Доказательство Теоремы разобьем на две части.

1. Найдем вариацию по Лагранжу от функционала $B(x(\cdot))$ в задаче (10.24). По определению 3 имеем, раскладывая в ряд Тейлора второй и третий аргумент функционала по параметру λ

$$\begin{aligned} \delta B(\hat{x}(t), h(t)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{B(\hat{x}(t) + \lambda h(t)) - B(\hat{x}(t))}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{L(t, \hat{x}(t) + \lambda h(t), \dot{\hat{x}}(t) + \lambda \dot{h}(t)) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))}{\lambda} dt + \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{l(\hat{x}(t_0) + \lambda h(t_0), \hat{x}(t_1) + \lambda h(t_1)) - l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \lambda h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \lambda \dot{h}(t) + o(\lambda) - L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))}{\lambda} dt + \\ &+ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) + l_{x(t_0)} \lambda h(t_0) + l_{x(t_1)} \lambda h(t_1) + o(\lambda) - l(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \dot{h}(t) + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) dt + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left(l_{x(t_0)} h(t_0) + l_{x(t_1)} h(t_1) + \frac{o(\lambda)}{\lambda} \right) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \dot{h}(t) \right) dt + l_{x(t_0)} h(t_0) + l_{x(t_1)} h(t_1) \end{aligned} \quad (10.27)$$

Функционал $B(x(t))$ можно рассматривать как числовую функцию действительного переменного $\lambda : \varphi(\lambda) = B(x(t)) = B(\hat{x}(t) + \lambda h(t))$, $\varphi(\lambda = 0) = \varphi(0) = B(\hat{x}(t))$. По условию Теоремы функционал $B(x(t))$ имеет в точке $\hat{x}(t)$ локальный экстремум, что тоже самое функция $\varphi(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = 0$ локальный экстремум. Необходимым условием локального экстремума функции одной действительной переменной в точке $\lambda = 0$ является условие $\varphi'(\lambda = 0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(0)}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{B(\hat{x}(t) + \lambda h(t)) - B(\hat{x}(t))}{\lambda} = 0 \Leftrightarrow$ (10.27)

$$\delta B(\hat{x}(t), h(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \dot{h}(t) \right) dt + l_{x(t_0)} h(t_0) + l_{x(t_1)} h(t_1) = 0 \quad (10.28)$$

Таким образом, необходимым условием слабого локального экстремума функционала $B(x(t))$ в точке $\hat{x}(t)$ является равенство нулю его вариации по Лагранжу $\delta B(\hat{x}(t), h(t)) = 0$.

2. Завершим доказательство Теоремы. Так как

$$\delta B(\hat{x}(t), h(t)) \stackrel{(10.28)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) h(t) + L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \dot{h}(t) \right) dt + l_{x(t_0)} h(t_0) + l_{x(t_1)} h(t_1) = 0$$

Последняя вариация функционала равна нулю при любых функциях $h(t) \in C^1[t_0, t_1]$

А) В частности, (10.28) верно для класса функций $\tilde{h}(t) \in C_0^1[t_0, t_1] \mid \tilde{h}(t) \in C^1[t_0, t_1], \tilde{h}(t_0) = \tilde{h}(t_1) = 0$

$$0 = \delta B(\hat{x}(t), \tilde{h}(t)) \stackrel{(10.28)}{=} \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \tilde{h}(t) + L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \dot{\tilde{h}}(t) \right) dt + l_{x(t_0)} \tilde{h}(t_0) + l_{x(t_1)} \tilde{h}(t_1) =$$

$$L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \tilde{h}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \right) \tilde{h}(t) dt + l_{x(t_0)} \tilde{h}(t_0) + l_{x(t_1)} \tilde{h}(t_1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \right) \tilde{h}(t) dt = 0$$

Последнее равенство справедливо для всего класса функций $\tilde{h}(t) \in C_0^1[t_0, t_1]$. Применяя Лемму Дюбуа-Реймона, обозначив

$$a_0(t) \equiv L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), a_1(t) \equiv L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)), a_1(t) \stackrel{(10.8)}{=} a_0(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)).$$

Условие 1 Теорема 2 – уравнение Эйлера-Лагранжа получено.

В) (10.28) верно для функции вида $\bar{h}(t) = t - t_0, \bar{h}(t_0) = 0, \bar{h}(t_1) > 0$.

Поскольку уравнение Эйлера-Лагранжа $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$ не зависит от вида

функции $\tilde{h}(t) \in C_0^1[t_0, t_1]$, то оно справедливо и для функции $\bar{h}(t) = t - t_0$, имеем

$$L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \bar{h}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \right) \bar{h}(t) dt + l_{x(t_0)} \bar{h}(t_0) + l_{x(t_1)} \bar{h}(t_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(L_{\dot{x}}(t_1) + l_{x(t_1)}) \bar{h}(t_1) = 0 \Leftrightarrow L_{\dot{x}}(t_1) = -l_{x(t_1)}$$

С) Выбирая функцию $\bar{\bar{h}}(t) = t_1 - t, \bar{\bar{h}}(t_0) > 0, \bar{\bar{h}}(t_1) = 0$

$$L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \bar{\bar{h}}(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) \right) \bar{\bar{h}}(t) dt + l_{x(t_0)} \bar{\bar{h}}(t_0) + l_{x(t_1)} \bar{\bar{h}}(t_1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-L_{\dot{x}}(t_0) + l_{x(t_0)} \bar{\bar{h}}(t_0) = 0 \Leftrightarrow L_{\dot{x}}(t_0) = l_{x(t_0)}$$

Условие трансверсальности получено, и Теорема 2 доказана.

Замечание. Уравнение Эйлера-Лагранжа (10.25) является обыкновенным дифференциальным уравнением 2-го порядка, его решение множество – функций с 2-мя произвольными константами интегрирования. Окончательно $\hat{x}(t)$ определяется с учетом условия трансверсальности (10.26).

Пример 3. Решить задачу Больца.

$$B(x(t)) = \int_1^e 2\dot{x}(t\dot{x} + x) dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \rightarrow \text{extr} \quad (10.29)$$

1) Запишем интегрант и его частные производные, терминант и его частные производные

$$L(t, x, \dot{x}) = 2\dot{x}(t\dot{x} + x) = 2t\dot{x}^2 + 2\dot{x}x, L_x = 2\dot{x}, L_{\dot{x}} = 4t\dot{x} + 2x$$

$$l(x(1), x(e)) = 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e), l_{x(1)} = 6x(1), l_{x(e)} = -2x(e) - 4$$

2) Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа и уравнение трансверсальности

$$\frac{d}{dt} L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (4t\dot{x} + 2x) - 2\dot{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (4t\dot{x}) = 0 \Leftrightarrow t\dot{x} = C_1 = \text{const},$$

$$t\dot{x} = C_1, \dot{x} = \frac{C_1}{t}, x(t) = C_1 \ln(t) + C_2, 4\dot{x} + 4t\ddot{x} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} + t\ddot{x} = 0$$

$$L_{\dot{x}(t_k)} = (-1)^k l_{x(t_k)}, k = 0, 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 \cdot \dot{x}(1) + 2x(1) = l_{x(1)} = 6x(1) \Leftrightarrow \dot{x}(1) = x(1)$$

$$4e\dot{x}(e) + 2x(e) = -l_{x(e)} = -(-2x(e) - 4) \Leftrightarrow \dot{x}(e) = \frac{1}{e}.$$

Из условий трансверсальности следует, что $\dot{h}(1) = h(1), \dot{h}(e) = 0$

3) Используем условия трансверсальности $x(t) = C_1 \ln(t) + C_2, \dot{x}(e) = \frac{C_1}{t} = \frac{C_1}{e} = \frac{1}{e}, C_1 = 1$

$$\dot{x}(1) = x(1) \Leftrightarrow \dot{x}(1) = \frac{C_1}{1} = x(1) = C_1 \ln(1) + C_2 \Leftrightarrow C_1 = C_2 = 1 \Rightarrow \hat{x}(t) = \ln(t) + 1, \dot{\hat{x}}(t) = \frac{1}{t}$$

4) Найдем приращение функционала и выясним тип экстремума. Обозначим $x(t) = \hat{x}(t) + h(t)$.

Поскольку $\int_1^e 2\dot{x}x dt = \int_1^e (x^2)' dt = x^2|_1^e$ и $\int_1^e 2t \left((\hat{x} + \dot{h})^2 - \hat{x}^2 \right) dt = \int_1^e 2t (2\hat{x}\dot{h} + \dot{h}^2) dt$, то приращение функционала равно

$$\begin{aligned} \Delta B &= B(x(t)) - B(\hat{x}(t)) = B(\hat{x}(t) + h(t)) - B(\hat{x}(t)) = \int_1^e 2t (2\hat{x}\dot{h} + \dot{h}^2) dt + \left((\hat{x} + h)^2 - \hat{x}^2 \right) \Big|_1^e + \\ &+ 3(\hat{x}(1) + h(1))^2 - 3(\hat{x}(1))^2 - (\hat{x}(e) + h(e))^2 + (\hat{x}(e))^2 - 4(\hat{x}(e) + h(e)) + 4(\hat{x}(e)) \geq \\ &\int_1^e 4t\hat{x}\dot{h} dt + \left(2\hat{x}h + h^2 \right) \Big|_1^e + 6\hat{x}(1)h(1) + 3h^2(1) - 2\hat{x}(e)h(e) - h^2(e) - 4h(e) = \int_1^e 4\dot{h} dt + 4h(e) - 2h(1) + \\ &+ h^2(e) - h^2(1) + 6h(1) + 3h^2(1) - 4h(e) - h^2(e) - 4h(e) = 4(h(e) - h(1)) + 4h(e) - 2h(1) + \\ &+ h^2(e) - h^2(1) + 6h(1) + 3h^2(1) - 4h(e) - h^2(e) - 4h(e) = 3h^2(1) \geq 0 \forall h(t) \Rightarrow \hat{x}(t) = \ln(t) + 1 \in \text{abs min}. \end{aligned}$$

Пример 4. Решить задачу Больца.

$$B(x(t)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2) dt - 2x(1) \text{sh}(1) \rightarrow \text{extr} \quad (10.30)$$

1) Запишем интегрант и его частные производные, терминант и его частные производные

$$L(t, x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2, L_x = 2x, L_{\dot{x}} = 2\dot{x}, l(x(0), x(1)) = -2x(1) \text{sh}(1), l_{x(0)} = 0, l_{x(1)} = -2\text{sh}(1).$$

2) Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) - L_x(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{d2\dot{x}}{dt} - 2x = 0, \ddot{x} - x = 0, x(t) = A \text{cht} + B \text{sht}.$$

3) Запишем условия трансверсальности

$$L_{\dot{x}(t_k)} = (-1)^k l_{x(t_k)}, k = 0, 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \dot{x}(0) = l_{x(0)} = 0 \Leftrightarrow \dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow 2\dot{x}(1) = -l_{x(1)} = 2 \text{sh}(1), \dot{x}(1) = \text{sh}(1)$$

$$\dot{x}(t) = A(\text{cht})' + B(\text{sht})' = A \text{sht} + B \text{cht}, \dot{x}(0) = A \text{sh}0 + B \text{ch}0 = B = 0, \dot{x}(1) = \text{sh}1 = A \text{sh}1 \Leftrightarrow A = 1 \Rightarrow \hat{x}(t) = \text{cht}$$

Найдем тип экстремума на экстремальной функции. Учитывая условия трансверсальности, получим для функции $h(t): \dot{h}(0) = 0, \dot{h}(1) = 0$.

Запишем приращение функционала.

$$\Delta B = B(x(t)) - B(\hat{x}(t)) = B(\hat{x}(t) + h(t)) - B(\hat{x}(t)) = \int_0^1 \left((\hat{x} + \dot{h})^2 - \hat{x}^2 + (\hat{x} + h)^2 - \hat{x}^2 \right) dt -$$

$$\begin{aligned}
& -2(\hat{x}(1) + h(1))\text{sh}(1) + 2\hat{x}(1)\text{sh}(1) = \int_0^1 (2\hat{x}\dot{h} + \dot{h}^2 + 2\hat{x}h + h^2) dt - 2\hat{x}(1)\text{sh}(1) \geq \int_0^1 (2\hat{x}\dot{h} + 2\hat{x}h) dt - 2h(1)\text{sh}(1) = \\
& = 2\hat{x}h \Big|_0^1 + \int_0^1 (-2\hat{x} + 2\hat{x}) h dt - 2h(1)\text{sh}(1) = 2\hat{x}h \Big|_0^1 - 2h(1)\text{sh}(1) = 2\text{sh}(1)h(1) - 2h(1)\text{sh}(1) = 0 \Leftrightarrow \Delta B \geq 0.
\end{aligned}$$

Ответ: $\hat{x}(t) = \text{ch } t \in \text{abs min}$.

Упражнения

Пример 5 [1, №145]. Исследовать функционал на экстремум.

$$J(x(t)) = \int_0^1 e^x \dot{x}^2 dt \rightarrow \text{extr}, x(0) = 0, x(1) = \ln 4$$

Ответ: $\hat{x}(t) = 2 \ln(t+1) \in \text{abs min}, S_{\max} = +\infty$

Пример 6 [1, №147]. Исследовать функционал на экстремум. Указание: свести исходную задачу к задаче Больца

$$J(x(t)) = \int_0^1 (\dot{x}^2 - 2\dot{x}x + 2x^2) dt \rightarrow \text{extr}, x(1) = 1$$

Ответ: $\hat{x}(t) = (\sqrt{2} \text{ch}(\sqrt{2}t) + \text{sh}(\sqrt{2}t)) / (\sqrt{2} \text{ch}(\sqrt{2}) + \text{sh}(\sqrt{2})) \in \text{abs min}, S_{\max} = +\infty$.

Литература:

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учебное пособие/ В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – Москва: Физматлит, 2011. – 403 с. – ISSN 978-59221-0992-5. – EDN SUQB XV.
2. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М: ФИЗМАТЛИТ, 1969. 424 с.

Глава 4. Преобразования специального вида

Лекция 11. Прямое и обратное Z- преобразование.

Рассмотрим числовую последовательность $a_n = f(t_n), n = 0, 1, 2, 3, \dots$ для некоторой функции $f(t)$ в дискретные моменты времени $t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, \tau$ - шаг времени. Последовательность $a_n = f(t_n)$ называется решетчатой функцией, если $f(t_{-n}) = a_{-n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$

Определение 1. Говорят, что Z-преобразование решетчатой функции a_n задается рядом комплексной переменной Z (с учетом свойства $a_{-n} = 0, n = 1, 2, 3, \dots$).

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (11.1)$$

При этом решетчатая функция a_n называется оригиналом для прямого преобразования $F(z)$. Иногда принято обозначение $a_n \leftrightarrow F(z)$.

Обозначим предельные значения для коэффициентов ряда (11.1), если существуют пределы (радиусы кольца сходимости ряда Лорана)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \left(\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) : a_n < R^n \right)$$

Теорема 11.1. Вне круга $|z-z_0|>R$ ряд Лорана (11.1) сходится к функции $F(z)$, а вне круга $|z-z_0|\geq \underline{R}>R$ ряд Лорана сходится к функции $F(z)$ равномерно.

Доказательство. 1. При $n \rightarrow \infty$ функция $F(z)$ ограничена по модулю, если сходится абсолютно остаток ряда Лорана. При $|z-z_0|>R$ получим

$$|F(z)| \leq \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{|a_i|}{|(z-z_0)|^i} = \sum_{i=0}^{i=N} \frac{|a_i|}{|(z-z_0)|^i} + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} \frac{|a_i|}{|(z-z_0)|^i} \leq A + \sum_{i=N+1}^{i=\infty} \left| \frac{R}{(z-z_0)} \right|^i = A + \frac{\left(\frac{R}{|z-z_0|} \right)^{N+1}}{1 - \frac{R}{|z-z_0|}}$$

Правая часть последнего неравенства ограничена, так как $|z-z_0|>R$, то есть ряд Лорана сходится абсолютно, Если

$$\frac{R}{|z-z_0|} \leq \frac{R}{\underline{R}} = q < 1 \Rightarrow |F(z)| \leq A + \frac{q^{N+1}}{1-q}$$

то ряд Лорана вне круга радиуса $|z-z_0| \geq \underline{R} > R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ сходится абсолютно и равномерно. **Теорема 11.1** доказана.

Свойства Z-преобразования:

1. Линейность. Если $a_n^1 \leftrightarrow F^1(z), a_n^2 \leftrightarrow F^2(z)$, то $\alpha a_n^1 + \beta a_n^2 \leftrightarrow \alpha F^1(z) + \beta F^2(z)$.

Доказательство. По определению

$$F^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^1}{z^n}, F^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{z^n}, \alpha F^1(z) + \beta F^2(z) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^1}{z^n} + \beta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha a_n^1 + \beta a_n^2}{z^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha a_n^1 + \beta a_n^2 \leftrightarrow \alpha F^1(z) + \beta F^2(z) \forall \alpha, \beta \in R. \text{ Свойство 1 доказано.}$$

2. Свойство запаздывания аргумента. Если $a_n \leftrightarrow F(z)$, то $a_{n-k} \leftrightarrow \frac{F(z)}{z^k}$.

Доказательство.

Обозначим

$$a_{n-k} \leftrightarrow \bar{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-k}}{z^n} = \frac{a_{-k}}{1} + \frac{a_{1-k}}{z} + \frac{a_{2-k}}{z^2} + \dots + \frac{a_{k-k}}{z^k} + \frac{a_{k+1-k}}{z^{k+1}} + \dots + \frac{a_{n-k}}{z^n} + \dots = \frac{a_0}{z^k} + \frac{a_1}{z^{k+1}} + \dots + \frac{a_{n-k}}{z^{k+n-k}} + \dots =$$

$$= \frac{1}{z^k} \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_{n-k}}{z^{n-k}} + \dots \right) = \frac{1}{z^k} F(z) = \frac{F(z)}{z^k} \Leftrightarrow a_{n-k} \leftrightarrow \bar{F}(z) = \frac{F(z)}{z^k}.$$

Свойство 2 доказано.

3. Свойство опережения аргумента. Если $a_n \leftrightarrow F(z)$, то

$$a_{n+k} \leftrightarrow z^k \left(F(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) \right).$$

$$\text{Доказательство. } a_{n+k} \leftrightarrow \bar{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+k}}{z^n} = a_k + \frac{a_{k+1}}{z} + \frac{a_{k+2}}{z^2} + \dots \Rightarrow \frac{\bar{F}(z)}{z^k} = \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \dots$$

$$\frac{\bar{F}(z)}{z^k} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) + \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}} + \frac{a_{k+2}}{z^{k+2}} + \dots =$$

$$F(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) = \frac{\bar{F}(z)}{z^k} \Leftrightarrow \bar{F}(z) = z^k \left(F(z) - \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z^{k-1}} \right) \right). \text{ Свойство}$$

3 доказано.

4. Свойство подобия. Если $a_n \leftrightarrow F(z)$, то $\frac{a_n}{\lambda^n} \leftrightarrow F(\lambda z)$.

Доказательство. Обозначим $a_n' = \frac{a_n}{\lambda^n} \leftrightarrow \bar{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n'}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(\lambda z)^n} \stackrel{z'=\lambda z}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(z')^n} \leftrightarrow F(z') = F(\lambda z)$

Свойство 4 доказано.

5. Свойство производной Z- преобразования. Если $a_n \leftrightarrow F(z)$, то $na_n \leftrightarrow -zF'(z)$.

Доказательство. Продифференцируем функцию $F(z)$ по переменной z , а затем умножим на $(-z)$, имеем

$$-zF'(z) = -z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_n}{z^n} \right)' \right) = -z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-na_n}{z^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na_n}{z^n} \stackrel{a_n' = na_n}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n'}{z^n} = \bar{F}(z) \leftrightarrow a_n' = na_n \leftrightarrow$$

$\bar{F}(z) = -zF'(z) \leftrightarrow a_n' = na_n$. Свойство 5 доказано.

6. Z- преобразование свертки двух решетчатых функций a_n, b_n . Если $a_n \leftrightarrow F_1(z), b_n \leftrightarrow F_2(z)$, то $a_n \circ b_n \leftrightarrow F_1(z) \cdot F_2(z)$.

Определение. Сверткой двух решетчатых функций a_n, b_n

Называется сумма $a_n \circ b_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$

Доказательство. Перемножим суммы двух Z-преобразований $F_1(z), F_2(z)$

$$F_1(z) \cdot F_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{z^m} = \sum_{m+n=l=0}^{\infty} \frac{1}{z^l} \sum_{n=0}^l a_n b_{l-n} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l \circ b_l}{z^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{c_l}{z^l} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \bar{F}(z) \leftrightarrow c_n = a_n \circ b_n \leftrightarrow$$

$F_1(z) \cdot F_2(z) \leftrightarrow c_n = a_n \circ b_n$. Свойство 6 доказано.

Рассмотрим несколько примеров Z-преобразования.

$$1) a_n = \lambda^n, a_n \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{z^n} = 1 + \frac{\lambda}{z} + \left(\frac{\lambda}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{z}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{z}} = \frac{z}{z - \lambda}.$$

$$2) a_n \equiv 1, a_n \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{z}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

$$3) a_n = (-1)^n, a_n \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = 1 - \frac{1}{z} + \left(-\frac{1}{z}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{z}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{z + 1}.$$

$$4) a_n = e^{i\beta n}, i = \sqrt{-1}, a_n \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\beta n}}{z^n} = 1 + \frac{e^{i\beta}}{z} + \left(\frac{e^{i\beta}}{z}\right)^2 + \dots + \left(\frac{e^{i\beta}}{z}\right)^n + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{e^{i\beta}}{z}\right)} = \frac{z}{z - e^{i\beta}}.$$

5). В силу линейности Z-преобразования $a_n = \cos(\beta n), b_n = \sin(\beta n), a_n \leftrightarrow F_1(z), b_n \leftrightarrow F_2(z)$

$$a_n + ib_n \leftrightarrow F(z) = F_1(z) + iF_2(z), i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow \cos(\beta n) + i \sin(\beta n) = e^{i\beta n} \stackrel{4)}{\leftrightarrow} F(z) = \frac{z}{z - e^{i\beta}} =$$

$$= \frac{z(z - e^{-i\beta})}{(z - e^{i\beta})(z - e^{-i\beta})} = \frac{z^2 - z(\cos \beta - i \sin \beta)}{z^2 - z(e^{i\beta} + e^{-i\beta}) + 1} = \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} + i \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} = F_1(z) + iF_2(z) \Leftrightarrow$$

$$F_1(z) = \frac{z(z - \cos \beta)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \leftrightarrow a_n = \cos(\beta n), F_2(z) = \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \leftrightarrow b_n = \sin(\beta n).$$

6) $a_n = n$. Воспользуемся свойством $na_n \leftrightarrow -zF'(z)$. Если $a_n \equiv 1 \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{z-1} \Rightarrow$

$$na_n \leftrightarrow -zF'(z) = -z \left(\frac{z}{z-1} \right)' = -z \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

7) $a_n = n^2$. Воспользуемся свойством $na_n \leftrightarrow -zF'(z)$. Если $a_n \equiv n \leftrightarrow F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow na_n \leftrightarrow -zF'(z) = -z \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right)' = -z \frac{(z-1)^2 - z2(z-1)}{(z-1)^4} = -z \frac{((z-1)-2z)}{(z-1)^3} = \frac{z(1+z)}{(z-1)^3}.$$

Восстановление числовой последовательности по ее Z-преобразованию

Теорема 11.2. Если z_1, z_2, \dots, z_N - особые точки функции $F(z)$ в области сходимости ряда $|z - z_0| < R_2$, то

$$a_n = \sum_{k=1}^N \text{Выч} [F(z)z^{n-1}, z_k] \quad (11.2)$$

Доказательство. Умножим выражение для $F(z)$ на z^{n-1} , получим

$$z^{n-1}F(z) = z^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} + \frac{a_n}{z} + \frac{a_{n+1}}{z^2} + \dots, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

Из последней формулы следует, что коэффициент a_n - является полюсом первого порядка по определению для функции $z^{n-1}F(z)$ в точке $z=0$. Так как $a_n = b_{-1}$ в ряду Лорана $z^{n-1}F(z)$. Очевидно, что особые точки функции $F(z)$ совпадают с особыми точками функции $z^{n-1}F(z)$. Из Лекции 2 по формуле (2.13) имеем $a_n = b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} dz \stackrel{m=-1}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_C z^{n-1}F(z) dz$

Где произвольный замкнутый контур C охватывает точку $z=0$ и обходится против часовой стрелки. Однако по Теореме 11.1 все точки контура C должны находиться вне круга $|z| > R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ для сходимости ряда Лорана функции $F(z)$, в частности в качестве контура C можно использовать окружность радиуса R .

Согласно определению 2.4 вычет функции $f(z)$ равен коэффициенту b_{-1} разложения функции в ряд Лорана, называемый вычетом этой функции в точке $z=0$. $\text{Выч}[f(z), z=0] = b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$

С другой стороны, интеграл в правой части последней формулы по замкнутому контуру C связан со всеми вычетами функции $f(z)$ внутри контура C , используя основную теорему вычетов и формулу (2.14) получим $2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z), z_k] = \oint_C f(z) dz, \quad k = \overline{1, N}$.

В итоге получим формулу

$$a_n = b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \text{Выч}[f(z), z_k] = \sum_{k=1}^N \text{Выч}[F(z)z^{n-1}, z_k] \quad (11.3).$$

Теорема 11.2 доказана. Причем в контур C входят все особые точки функции $z^{n-1}F(z)$ внутри круга сходимости радиуса, а также особые точки на окружности радиуса $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Получим формулу для вычисления числовой последовательности a_n , если в контуре S интеграла (11.3) содержатся полюсы произвольного порядка k . Разложим в ряд Лорана функцию $f(z) = F(z)z^{n-1}$ в окрестности особой точки z_k - полюса порядка k . Имеем

$$f(z) = \frac{b_{-k}}{(z-z_k)^k} + \dots + \frac{b_{-1}}{(z-z_k)} + b_0 + b_1(z-z_k) + \dots + b_n(z-z_k)^n + \dots$$

Из последней формулы получим произведение

$$f(z)(z-z_k)^k = b_{-k} + b_{-k+1}(z-z_k) + \dots + b_{-1}(z-z_k)^{k-1} + b_0(z-z_k)^k + b_1(z-z_k)^{k+1} + \dots + a_n(z-z_k)^{n+k} + \dots$$

В которой коэффициентом для полюса первого порядка является b_{-1} .

Дифференцируя функцию $f(z)(z-z_k)^k$ в последней формуле слева и справа $k-1$ раз по переменной z , вычисляя полученную производную в точке $z=z_k$

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z)(z-z_k)^k \right)_{z=z_k} = \left((k-1)!b_{-1} + b_0k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2(z-z_k) + \dots \right)_{z=z_k} = (k-1)!b_{-1} \Leftrightarrow$$

$$b_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z)(z-z_k)^k \right)_{z=z_k} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(F(z)z^n(z-z_k)^k \right)_{z=z_k} = \text{Выч}[F(z)z^{n-1}, z_k] \quad (11.4)$$

Заметим, что все особые точки произведения $F(z)z^{n-1}$ являются особыми точками функции $F(z)$. Если особая точка z_k функции $F(z)$ единственная, то формулой для обратного Z -преобразования можно ограничиться:

$$a_n = b_{-1} = \text{Выч}[F(z)z^{n-1}, z_k] = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(F(z)z^{n-1}(z-z_k)^k \right)_{z=z_k}$$

Для нескольких особых точек функции $F(z)$ внутри замкнутого контура S , совпадающего с окружностью радиуса сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ для ряда функции $F(z)$ необходимо воспользоваться Теоремой 11.2 и формулой (11.3).

$$a_n = b_{-1} = \sum_{k=1}^N \text{Выч}[F(z)z^{n-1}, z_k] = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(F(z)z^{n-1}(z-z_k)^k \right)_{z=z_k} \quad (11.5)$$

Все особые точки $z = z_k, k = \overline{1, N}$ функции $F(z)$ в формуле (11.5) расположены в круге радиуса $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Формула (11.5) является формулой общего вида для обратного Z -преобразования, то есть восстановления числовой последовательности a_n .

Рассмотрим примеры.

Пример 8. Найти числовую последовательность a_n по ее Z -преобразованию $F(z) = \frac{z(1+z)}{(z-1)^3}$.

Решение. Точка $z=1$ является полюсом третьего порядка $k=3$ функции $F(z)$. По формуле (11.5) получим

$$a_n = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(F(z)z^{n-1}(z-z_k)^k \right)_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{z(1+z)}{(z-1)^3} z^{n-1}(z-1)^3 \right)_{z=1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^n(1+z) \right)_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \left(z^n + z^{n+1} \right)_{z=1} = \frac{1}{2} (n(n-1) + (n+1)n) = \frac{2}{2} n^2 = n^2.$$

Сравнивая ответ к примеру 8 видим, что он совпадает с условием примера 7, то есть получен верный ответ из примера 8

поскольку композиция прямого и обратного Z- преобразования должны вернуть исходную числовую последовательность $a_n = n^2$.

Упражнения.

Пример 9. Для заданного Z-преобразования $F(z) = \frac{z}{(z-1)^2} - 5\frac{z}{z-1}$ найти обратное Z- преобразование. Ответ: $a_n = n - 5$.

Пример 10. Найти Z-преобразование для числовой последовательности $a_n = n^3$.

Ответ: $F(z) = -z \frac{(1+2z)}{(z-1)^3} + 3z^2 \frac{(1+z)}{(z-1)^4}$.

Литература:

1. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функции комплексной переменной. Серия “Курс высшей математики и математической физики”. – М.,1970 г., 304 с.
2. Специальные математические методы и функции: метод. Пособие для студ. Спец. 1-45 01 01 ” Многоканальные системы телекоммуникаций“, 1-45 01 02 ” Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения“, 1-53 01 07 ” Информационные технологии и управление в технических системах“ заоч. формы обуч./ В.В. Цегельник[и др.]. – Минск: БГУИР, 2011. – 76 с.

Лекция 12. Прямое и обратное преобразование Лапласа. Преобразование Хэвисайда

Рассмотрим вещественную функцию $f(t)$ вещественного аргумента t , обладающую следующими свойствами

$$\begin{cases} f(t) = 0 \forall t < 0 \\ \exists C > 0, \exists a > 0 : |f(t)| \leq Ce^{at} \end{cases} \quad (12.1)$$

Где в формуле (12.1) положительная постоянная a называется показателем роста функции $f(t)$.

Определение 12.1. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется интеграл

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in C \quad (12.2)$$

Для комплексной функции $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, $f_1(t), f_2(t)$ - действительные функции действительного переменного t . Для преобразования Лапласа принято обозначение $f(t) \leftrightarrow F(p)$.

Теорема 12.1. Если $a_1 = \operatorname{Re} p > a > 0 \Leftrightarrow a - a_1 < 0$, то несобственный интеграл (12.2) сходится абсолютно. В полуплоскости $a_1 = \operatorname{Re} p \geq \bar{a} > a > 0 \Leftrightarrow a_1 - \bar{a} < 0$ интеграл (12.2) сходится равномерно по переменной p .

Доказательство. Пусть $\operatorname{Re} p > a$, $f(t)$ - действительная функция действительного аргумента t . Оценим абсолютное значение интеграла (12.2).

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-pt}| |f(t)| dt \stackrel{(12.1)}{\leq} C \int_0^{\infty} e^{-(\operatorname{Re} p)t} e^{at} dt = C \int_0^{\infty} e^{(a - (\operatorname{Re} p))t} dt = C \int_0^{\infty} e^{(a - a_1)t} dt = C \frac{e^{(a - a_1)t}}{a - a_1} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{C}{a_1 - a} < +\infty. \end{aligned}$$

Последняя дробь, однако, зависит от переменной p : $a_1 = \operatorname{Re} p$.

Аналогично, в случае $a_1 = \operatorname{Re} p \geq \bar{a} > a > 0 \Leftrightarrow a_1 - \bar{a} < 0$.

$|F(p)| \leq \frac{C}{a_1 - a} \leq \frac{C}{a_1 - \bar{a}} < \infty$. Последняя дробь не зависит от переменной p , то есть интеграл

(12.2) сходится равномерно по переменной p .

Определение 12.2. Преобразование Хевисайда от функции $f(t)$ называется интегральное преобразование вида

$$\tilde{F}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in C \quad (12.3)$$

Поскольку преобразования Лапласа и Хевисайда (используется в технических приложениях) отличаются множителем p в первой степени, то в дальнейшем изучим только свойства интегрального преобразования Лапласа. Приведём несколько примеров изображений для конкретных функций.

Пример 1. Преобразование Лапласа для функции Хевисайда

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

Пример 2. Преобразование Лапласа для показательной функции

$$f(t) = e^{\alpha t} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$$

Пример 3. Преобразование Лапласа для степенной функции

$$f(t) = t^n \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{p^{n+1}} (pt)^n d(pt) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-y}}{p^{n+1}} y^n dy = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}, \quad n > -1, \operatorname{Re} p > 0$$

Пример 4. Преобразование Лапласа для гармонических функций

$$f_2(t) = \sin \omega t \leftrightarrow F_2(p), \quad f_1(t) = \cos \omega t \leftrightarrow F_1(p) \Rightarrow f_1(t) + if_2(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t = e^{i\omega t} \leftrightarrow F(p) = F_1(p) + iF_2(p)$$

$$f(t) = e^{i\omega t} \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-i\omega)t} dt = \frac{-1}{p-i\omega} e^{-(p-i\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-i\omega}, \quad \operatorname{Re} p > 0$$

$$F(p) = \frac{1}{p-i\omega} = \frac{p+i\omega}{(p-i\omega)(p+i\omega)} = \frac{p+i\omega}{p^2 + \omega^2} \Leftrightarrow f_1(t) = \cos \omega t \leftrightarrow F_1(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$f_2(t) = \sin \omega t \leftrightarrow F_2(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Свойства преобразования Лапласа

1. Линейность изображения. Если $F_i(p) \leftrightarrow f_i(t), i = \overline{1, n}$, то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad \operatorname{Re} p > \max_{i=1, n} a_i$$

Доказательство.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t) \right) dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^{\infty} e^{-pt} f_i(t) dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i F_i(p) = F(p), \quad \operatorname{Re} p > \max_{i=1, n} a_i$$

2. Свойство растяжения аргумента. Если $F(p) \leftrightarrow f(t)$, то $\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \leftrightarrow f(\alpha t)$.

Доказательство.

$$f(\alpha t) \leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} t} \frac{f(\alpha t)}{\alpha} d\alpha t = \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} y} \frac{f(y)}{\alpha} dy = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} y} f(y) dy = \frac{F\left(\frac{p}{\alpha}\right)}{\alpha},$$

$\alpha > 0, \operatorname{Re} p > a$. Свойство 2 доказано.

3. Теорема запаздывания. Если $F(p) \leftrightarrow f(t) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ f(t - \tau) \end{cases}$, $\operatorname{Re} p > a$, то $f_{\tau}(t) \leftrightarrow F_{\tau}(p) = e^{-p\tau} F(p)$.

Доказательство.

$$f(t) = \begin{cases} 0, t < \tau \\ f(t - \tau) \end{cases} \leftrightarrow F_{\tau}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt \stackrel{y|_0^{\infty} = t|_{\tau}^{\infty}, dy = dt}{=} \int_0^{\infty} e^{-p(y+\tau)} f(y) dy =$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-py} f(y) dy = e^{-p\tau} F(p), \operatorname{Re} p > a. \text{ Свойство 3 доказано.}$$

4. Изображение производной. Если $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то $f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0)$, $\operatorname{Re} p > a$.

Доказательство.

$$f'(t) \leftrightarrow \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p), \operatorname{Re} p > a$$

Свойство 4 доказано.

5. Обобщение свойства 4. Если $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n \left(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right), \operatorname{Re} p > a.$$

Доказательство. Очевидно, что производные любого порядка имеют показатель роста такой же, как и функции

$$f(t), |f(t)| \leq Ce^{at} \Rightarrow |f'(t)| \leq aCe^{at} = C_1 e^{at}, |f''(t)| \leq a^2 Ce^{at} = C_2 e^{at}, \dots, |f^{(n)}(t)| \leq a^n Ce^{at} = C_n e^{at}, \dots$$

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n)}(t) dt = f^{(n-1)}(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-1)}(t) dt = -f^{(n-1)}(0) + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-1)}(t) dt =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) + p \left(f^{(n-2)}(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-2)}(t) dt \right) = -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) + p^2 \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-2)}(t) dt = \dots$$

$$= -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1} f^{(n-n)}(0) + p^n \int_0^{\infty} e^{-pt} f^{(n-n)}(t) dt =$$

$$= -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1} f(0) + p^n \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \dots - p^{n-1} f(0) + p^n F(p) =$$

$$= p^n \left(F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right), \operatorname{Re} p > a. \text{ Свойство 5 доказано.}$$

6. Изображение интеграла. Если $F(p) \leftrightarrow f(t)$, $\operatorname{Re} p > a$, то

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \bar{F}(p) = \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > a > 0.$$

Доказательство.

$$\bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} dt \stackrel{s=t-\tau}{=} \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p(s+\tau)} ds =$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-ps} ds = \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau e^{-p\tau} \left(\frac{-e^{-ps}}{p} \right)_{s=0}^{s=\infty} = \int_0^{\infty} \frac{f(\tau) e^{-p\tau} d\tau}{p} = \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > a$$

Свойство 6 доказано.

7. Изображение свертки.

Определение. Сверткой двух функций $f_1(t), f_2(t)$ называется интеграл

$$\psi(t) = f_1 \circ f_2 \equiv \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau.$$

Если $F_1(p) \leftrightarrow f_1(t), F_2(p) \leftrightarrow f_2(t), \operatorname{Re} p > a = \max\{a_1, a_2\}$, то $f_1 \circ f_2 \leftrightarrow \bar{F}(p) = F_1(p)F_2(p), \operatorname{Re} p > a > 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \psi(t) = f_1 \circ f_2 &\equiv \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \leftrightarrow \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \psi(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt = \\ &= \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_2(y) e^{-p(y+\tau)} dy = \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f_2(y) e^{-py} dy = F_1(p)F_2(p) \end{aligned}$$

$\operatorname{Re} p > a = \max\{a_1, a_2\}$. Свойство 7 доказано.

8. Дифференцирование изображения. Если $F(p) \leftrightarrow f(t), \operatorname{Re} p \geq \bar{a} > a$, то $-tf(t) \leftrightarrow F'(p)$.

Доказательство. $F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$. Если $\operatorname{Re} p \geq \bar{a} > a$, то интеграл $F(p)$ сходится равномерно по переменной p и его обе части можно дифференцировать по параметру p . Имеем

$$F'(p) = \bar{F}'(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{d}{dp} e^{-pt} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} (-tf(t)) dt \leftrightarrow -tf(t).$$

Свойство 8 доказано. Обобщая получим $(-1)^n t^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(p)$.

9. Интегрирование изображения. Если $F(p) \leftrightarrow f(t), \operatorname{Re} p > a$, то $\int_p^{\infty} F(q) dq \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}, \operatorname{Re} p > a$.

Доказательство.

$$\bar{F}(p) = \int_p^{\infty} F(q) dq = \int_p^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-qt} f(t) dt \right) dq = \int_0^{\infty} f(t) dt \int_p^{\infty} e^{-qt} dq = \int_0^{\infty} f(t) dt \frac{e^{-qt}}{-t} \Big|_{q=p}^{q=\infty} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{t} f(t) dt =$$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{f(t)}{t} dt \leftrightarrow \frac{f(t)}{t}, \operatorname{Re} p > a. \text{ Свойство 9 доказано.}$$

10. Смещение аргумента у изображения. Если $F(p) \leftrightarrow f(t), \operatorname{Re} p > a$, то $F(p+q) \leftrightarrow e^{-qt} f(t), \operatorname{Re} p > a$

$$\text{Доказательство. } e^{-qt} f(t) \leftrightarrow \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) e^{-qt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p+q)t} f(t) dt \leftrightarrow F(p+q).$$

Свойство 10 доказано.

Восстановление оригинала – обратное преобразование Лапласа. Формула Меллина.

Для комплексной переменной p справедлива следующая

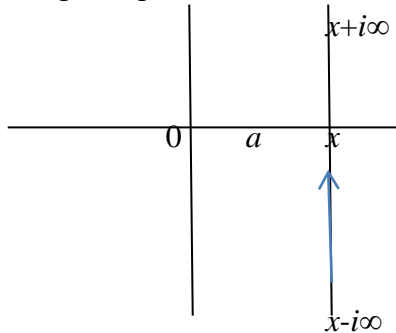
Теорема 12.2. Пусть известно, что заданная функция $F(p)$ в области, $\operatorname{Re} p > a$ является изображением кусочно-гладкой функции $f(t)$ действительной переменной t со степенью роста a , тогда верно

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (12.4)$$

Формула (12.4) называется формулой Меллина.

Доказательство.

Рассмотрим контур, проходимый против часовой стрелки и вдоль вертикальной прямой с фиксированной действительной координатой $x = \operatorname{Re} p > a > 0$.



Можно считать контур окружностью бесконечно большого радиуса.

Разложим произвольную функцию $\varphi(t)$ в композицию прямого и обратного преобразований Фурье

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta(t-\eta)} f(\eta) d\eta$$

Если выбрать в качестве функции $\varphi(t) = e^{-xt} f(t)$, применяя композицию прямого и обратного преобразования Фурье $t \rightarrow \eta$, $p = x + i\zeta$, $dp = id\zeta$, $p|_{x-i\infty}^{x+i\infty} = x + i\zeta|_{-\infty}^{\infty}$, получим

$$\varphi(t) = e^{-xt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\eta} e^{i\zeta(t-\eta)} f(\eta) d\eta \stackrel{f(\eta) \equiv 0, \eta < 0}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta t} d\zeta \int_0^{\infty} e^{-\eta(x+i\zeta)} f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\zeta t} d\zeta F(p)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} e^{i\zeta t} d\zeta F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{t(x+i\zeta)} dp F(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tp} F(p) dp$$

Теорема 12.2 доказана.

Сравнивая прямое и обратное преобразование Лапласа, замечаем, что формально они отличаются подынтегральными значениями $e^{-pt} f(t) dt$ в (12.2) и $e^{tp} F(p) dp$ в (12.4) и симметричной заменой переменных $t \rightarrow p$, $f(t) \rightarrow F(p)$, $e^{-tp} \rightarrow e^{tp}$, а движение переменных t, p происходит по двум взаимно перпендикулярным прямым $t \in (-\infty, \infty) = L_1 \rightarrow p \in (x - i\infty, x + i\infty) = L_2$, $L_1 \perp L_2$, $L_1 \cap L_2 = (x, 0)$, $x > a$.

Используя теорему вычетов для функции $F(z)$ в ее особых точках z_k , $k = \overline{1, m}$, формулу Меллина можно свести к виду

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{pt} F(p) dp = \frac{2\pi i}{2\pi i} \sum_{k=1}^m \operatorname{Выч} [e^{pt} F(p), z_k] = \sum_{k=1}^m \operatorname{Выч} [e^{pt} F(p), z_k], \operatorname{Re} z_k < x \quad (12.5)$$

Упражнения

Пример 6. Решить интегральное уравнение с переменным верхним пределом (Википедия).

$$\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds$$

Решение. Применим к каждому слагаемому уравнения прямое преобразование Лапласа.

$$\varphi(x) \leftrightarrow F(p), g_1(x) \stackrel{\text{пример4}}{=} \sin x \leftrightarrow F_{g_1}(p) = \frac{1}{p^2+1}, g_2(x) \stackrel{\text{пример4}}{=} \cos x \leftrightarrow F_{g_2}(p) = \frac{p}{p^2+1}$$

Используем изображение свертки (свойство) $\psi(t) = g_1 \circ g_2 \equiv \int_0^t g_1(\tau)g_2(t-\tau)d\tau \leftrightarrow F_{g_1}(p)F_{g_2}(p)$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+1} + 2F_{g_1}(p)F_{g_2}(p) = \frac{1}{p^2+1} + 2\frac{pF(p)}{p^2+1} \Leftrightarrow F(p)\frac{(p-1)^2}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1} \Leftrightarrow$$

$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}$, в которой точка $p=1$ - полюс второго порядка ($l=2$). Применяя формулу (12.5), имеем

$$f(x) = \text{Выгч}\left[e^{zx}F(z), z=1\right] = \frac{1}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{dz^{l-1}} \left(e^{zx}F(z)(z-z_l)^l \right)_{z=z_l} = \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zx}}{(z-1)^2} (z-1)^2 \right)_{z=1} = xe^x.$$

Пример 7. Решить интегральное уравнение с переменным верхним пределом.

$$\varphi(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds$$

$$f(x) = e^{ax} \leftrightarrow F(p) \stackrel{\text{пример2}}{=} \frac{1}{p-1} + F_{g_1}(p)F_{g_2}(p) \stackrel{\text{пример5}}{=} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p^2+1} F(p) \Leftrightarrow$$

$$F(p) \left(1 - \frac{1}{p^2+1} \right) = \frac{1}{p-1} \Leftrightarrow \frac{F(p)p^2}{p^2+1} = \frac{1}{p-1} \Leftrightarrow F(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)p^2}$$

Применяя формулу(12.5) в полюсах $p_1=1, p_2=0$ кратности 1 и 2 соответственно имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^m \text{Выгч}\left[e^{zx}F(z), z_k\right] = \text{Выгч}\left[e^{zx}F(z), z=0, l=2\right] \text{Выгч}\left[e^{zx}F(z), z=1, l=1\right] = \\ &= \left(e^{zx} \frac{z^2+1}{(z-1)} \right)_{z=0} + e^{zx} \frac{z^2+1}{z^2} \Big|_{z=1} = xe^{zx} \frac{(z^2+1)}{(z-1)} \Big|_{z=0} + e^{zx} \frac{2z(z-1) - (z^2+1)}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} + e^{zx} \frac{z^2+1}{z^2} \Big|_{z=1} = \\ &= -x-1+2e^x. \end{aligned}$$

Пример 8. Решить ОДУ второго порядка с начальными условиями

$$y''(x) + y(x) = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

К каждому слагаемому уравнения применим преобразование Лапласа, с учетом свойства 5

$$y^{(2)}(x) \leftrightarrow p^2 \left(F(p) - \frac{y(0)}{p} - \frac{y'(0)}{p^2} \right) = p^2 F(p) - py(0) - y'(0)$$

$$p^2 F(p) - py(0) - y'(0) + F(p) = 0 \Leftrightarrow F(p)(p^2+1) - 1 = 0 \Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{p^2+1} \stackrel{\text{пример4}}{\Leftrightarrow} y(x) = \sin x.$$

Ответ: $y(x) = \sin(x)$.

Пример 9. Решить ОДУ второго порядка с начальными условиями

$$y''(x) - 4y(x) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

$$p^2 F(p) - py(0) - y'(0) - 4F(p) = 0 \Leftrightarrow F(p)(p^2-4) - p = 0 \Leftrightarrow F(p) = \frac{p}{p^2-4} = \frac{p}{(p-2)(p+2)}.$$

Ответ: $y(x) = \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2}$.

Литература:

1. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. Теория функции комплексной переменной. Серия “Курс высшей математики и математической физики”. – М., 1970 г., 304 с.

Глава 5. Решение задач с уравнениями Лапласа и Пуассона в кольце и в сферическом слое методом Фурье.

Лекция 13. Метод Фурье в задачах математической физики. Часть первая.

Метод Фурье уже был нами рассмотрен при решении задачи о колебаниях круглой мембраны в Лекции 7. Теперь рассмотрим две очень простых, но важных на практике задачи решение уравнения Лапласа в круговой области (в кольце) и в сферической области (сферическом слое). В обоих примерах используем метод разделения переменных - метод Фурье.

1. Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа функции двух переменных $u(r, \varphi)$ в кольце

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, \varphi) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, R_1 < r < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (13.1)$$

Очевидно, что не каждая функция представима в виде функции с разделенными переменными в одно слагаемое. Например, функция $u(x, y) = \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ ураскладывается в сумму 2 слагаемых, каждое из слагаемых - функция с разделенными переменными. Однако представить $u(x, y) = \cos(x + y)$ в виде одного слагаемого с двумя множителями с разделенными переменными невозможно. Поскольку

$$u(x, y) = \cos(x + y) = f_1(x)f_2(y), x + y = \frac{\pi}{2}, x = y = \frac{\pi}{4}, 0 = f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)f_2\left(\frac{\pi}{4}\right), f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \text{ либо } f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{Но} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f_1\left(\frac{\pi}{4}\right)f_2(0) \Rightarrow f_1\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0, \quad \text{аналогично,}$$

$$\cos\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = f_1(0)f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow f_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0. \quad \text{Полученное противоречие доказывает, что}$$

$$u(x, y) = \cos(x + y) \neq f_1(x)f_2(y) \forall x, y \in (-\infty, \infty).$$

В бесконечный ряд (конечный ряд) где слагаемые с разделенными переменными можно разложить очень большой класс функций, достаточно, например, если функция разлагается в ряд Фурье по одной из переменных и периодическая на интервале $y \in (-l, l)$.

$$u(x, y) = \frac{a_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cos\left(\frac{\pi}{l} ny\right) + a_n(x) \sin\left(\frac{\pi}{l} ny\right), a_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{\pi}{l} nt\right) u(x, t) dt, b_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin\left(\frac{\pi}{l} nt\right) u(x, t) dt$$

Предположим, что функция представима в виде произведения множителей-функций, каждый из множителей зависит от своей переменной, про такую функцию говорят как о функции с разделенными переменными. Итак, решение $u(r, \varphi)$ задачи (13.1) по предположению имеет вид одного, нескольких слагаемых вида $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ или

бесконечного ряда. Подставляя его в первое уравнение системы получим уравнение, получим

$$\frac{\Phi}{r}(rR') + \frac{R\Phi''}{r^2} = 0. \text{ Разделим последнее уравнение на произведение } R(r)\Phi(\varphi), \text{ получим}$$

$$\frac{1}{rR}(rR') + \frac{\Phi''}{r^2\Phi} = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{R}(rR') + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{r}{R}(rR') = -\lambda$$

(13.2)

В уравнении(13.2) правая часть зависит только от радиуса r , а его левая часть только от полярного угла φ . Если мы положим $r = const$, то правая часть (13.2) равна постоянной, а левая часть изменяется вместе с изменением φ . Полученное противоречие показывает, что равенство (13.2) при независимом изменении двух переменных возможно тогда и только тогда, когда каждая из частей (13.2) равна одной и той же постоянной λ .

В итоге получаем два уравнения

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \quad (A) \qquad \qquad \qquad r(rR') - \lambda R = 0 \quad (B)$$

Для уравнения А на угловую функцию наложено условие периодичности. Решаем его.

$$\Phi(\varphi) = A \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\varphi), \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \Leftrightarrow$$

Используем для преобразования тригонометрические формулы

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos m - \cos n = 2 \sin \frac{m+n}{2} \sin \frac{n-m}{2}, \sin m - \sin n = 2 \cos \frac{m+n}{2} \sin \frac{m-n}{2}$$

$$A \cos(\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)) + B \sin(\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)) = A \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) \Leftrightarrow$$

$$A(\cos(\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)) - \cos(\sqrt{\lambda}\varphi)) + B(\sin(\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)) - \sin(\sqrt{\lambda}\varphi)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-2A \sin \sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) \sin \sqrt{\lambda}\pi + 2B \cos \sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) \sin \sqrt{\lambda}\pi = 2 \sin \sqrt{\lambda}\pi (B \cos \sqrt{\lambda}(\varphi + \pi) - A \sin \sqrt{\lambda}(\varphi + \pi)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0 \forall \varphi, A, B \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi = \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \Leftrightarrow \lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Собственные угловые функции суть $\lambda_n = n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{cases}$ (13.3)

Решаем уравнение В для радиальной части $r(rR') - \lambda R = 0 \Leftrightarrow r(rR') - n^2 R = 0 \Leftrightarrow$

$$r^2 R'' + (rR') - n^2 R = 0$$
 (13.4)

Уравнение(13.4) однородно относительно слагаемых вида $r^k R^{(k)}(r)$, поэтому его решение ищем на классе степенных функций

$$R(r) = Cr^k, r^2 R'' + (rR') - n^2 R = 0 \Leftrightarrow Cr^k(k(k-1) + k - n^2) = 0 \Leftrightarrow k^2 = n^2, k = \pm n$$

Тогда используя два линейно независимых решения, построим общее решение

$$R(r) = C_1 r^{-n} + C_2 r^n = \frac{C_1}{r^n} + C_2 r^n, \text{ а собственные радиальные функции } \lambda_n = n^2 \Leftrightarrow \begin{cases} r^n \\ r^{-n} \end{cases}.$$

Если $n=0$, то уравнение(13.4) примет вид $r(rR') = 0 \Leftrightarrow rR' = \bar{C}_1, R' = \frac{\bar{C}_1}{r}, R(r) = \bar{C}_1 \ln r + \bar{C}_2$

Таким образом, общее решение задачи (13.1) представимо рядом

$$u(r, \varphi) = \bar{C}_1 \ln r + \bar{C}_2 + \sum_{n=1}^{\infty} [r^{-n}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + r^n(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)]$$
 (13.5)

Краевые условия задачи (13.1) имеют вид

$$u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_1^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + R_1^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right] + \overline{C}_1 \ln R_1 + \overline{C}_2$$

$$u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[R_2^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + R_2^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right] + \overline{C}_1 \ln R_2 + \overline{C}_2$$

Умножая обе части равенств на $\cos n\varphi$ и интегрируя по периоду $\varphi \in [0, 2\pi]$, получим

$$\int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi (R_1^{-n} A_n + R_1^n C_n) = \pi (R_1^{-n} A_n + R_1^n C_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R_1^{-n} A_n + R_1^n C_n.$$

Аналогично,

$$\int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi (R_1^{-n} B_n + R_1^n D_n) = \pi (R_1^{-n} B_n + R_1^n D_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R_1^{-n} B_n + R_1^n D_n,$$

$$\int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\varphi d\varphi (R_2^{-n} A_n + R_2^n C_n) = \pi (R_2^{-n} A_n + R_2^n C_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R_2^{-n} A_n + R_2^n C_n,$$

$$\int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\varphi d\varphi (R_2^{-n} B_n + R_2^n D_n) = \pi (R_2^{-n} B_n + R_2^n D_n) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R_2^{-n} B_n + R_2^n D_n.$$

Отметим, что для фиксированного натурального n все четыре последние условия линейные относительно A_n, B_n, C_n, D_n позволяют найти 4 коэффициента для каждого n отдельно.

В круге $r < R_2 = R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ условия на коэффициенты C_n, D_n перейдут в формулы (решение задачи (13.1)) ограничено во всех точках круга

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R^n C_n, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R^n D_n.$$

Вне круга $r > R_1 = R, 0 \leq \varphi < 2\pi$ получим условия на коэффициенты A_n, B_n

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R^{-n} A_n, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R^{-n} B_n.$$

Пример 1 [1]. Решить уравнение Лапласа в кольце

$$\begin{cases} \Delta u = 0, 1 < r < 2, 0 \leq \varphi < 2\pi \\ u(1, \varphi) = 0 = f_1(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ u(2, \varphi) = \cos \varphi = f_2(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Используем формулы коэффициентов для решения задачи в общем виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R_1^{-n} A_n + R_1^n C_n, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R_1^{-n} B_n + R_1^n D_n,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos n\varphi d\varphi = R_2^{-n} A_n + R_2^n C_n, \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin n\varphi d\varphi = R_2^{-n} B_n + R_2^n D_n.$$

Из данных интегралов следует, что ненулевые значения возможны только при $n=1$

$$R_1^{-1} A_1 + R_1 C_1 = 0 \Leftrightarrow A_1 + C_1 = 0, R_1^{-1} B_1 + R_1 D_1 = 0 \Leftrightarrow B_1 + D_1 = 0$$

$$R_2^{-1} A_1 + R_2 C_1 = 1 \Leftrightarrow \frac{A_1}{2} + 2C_1 = 1, R_2^{-1} B_1 + R_2 D_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{B_1}{2} + 2D_1 = 0$$

Условия распадаются на две независимые системы уравнений
$$\begin{cases} A_1 + C_1 = 0 \\ \frac{A_1}{2} + 2C_1 = 1 \end{cases}, \begin{cases} B_1 + D_1 = 0 \\ \frac{B_1}{2} + 2D_1 = 0 \end{cases}$$

Из второй системы получим $B_1 = D_1 = 0$, а из первой $C_1 = -A_1, -\frac{3A_1}{2} = 1, A_1 = -\frac{2}{3}, C_1 = \frac{2}{3}$

Решение примера 1, используя формулу (13.5), запишем в виде

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[r^{-n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + r^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right]$$

Ответ: $u(r, \varphi) = \left(\frac{A_1}{r} + rC_1 \right) \cos \varphi = \frac{2}{3} \left(r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi.$

Пример 2. Решить уравнение Лапласа вне круга

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r > 2, 0 \leq \varphi < 2\pi \\ u(2, \varphi) = 1 + \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Сравнивая краевое условие с решением уравнения Лапласа вне круга (13.5) для $r > R$,

$$u(r, \varphi) = \overline{C_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} \cos n\varphi + \frac{B_n}{r^n} \sin n\varphi \right), C_n = 0, D_n = 0, \overline{C_2} = 0, n = 1, 2, \dots$$

Используя теорему единственности разложения решения по базисным функциям, получим

$$u(r, \varphi) = \overline{C_2} + \frac{B_2}{r^2} \sin 2\varphi, u(2, \varphi) = \overline{C_2} + \frac{B_2}{4} \sin 2\varphi = f(\varphi) = 1 + \sin 2\varphi \Leftrightarrow \overline{C_2} = 1, B_2 = 4$$

Ответ: $u(r, \varphi) = 1 + \frac{4}{r^2} \sin 2\varphi.$

Упражнения

Пример 3. Решить уравнение Лапласа в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, r < 2, 0 \leq \varphi < 2\pi \\ u(2, \varphi) = \cos^2 \varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

Указание: использовать формулу (13.5) с ограниченным решением уравнения Лапласа в круге

$$u(r, \varphi) = \overline{C_2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi)$$

Ответ:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{8} \cos 2\varphi.$$

Пример из механики

Задача об обтекании идеальной несжимаемой жидкостью бесконечного цилиндра

Как известно, течение жидкости описывается уравнением неразрывности. Уравнение неразрывности – следствие закона сохранения массы в произвольном случае, т.е. во всех случаях движение жидкости с переменной плотностью во времени.

Не теряя общности, в большом объеме жидкости выделим объем с гладкой поверхностью. Изменение массы жидкости внутри выделенного объема равно:

$$\iiint_V \Delta \rho(\bar{x}) dV, \text{ где } \rho(\bar{x}) \text{ плотность жидкости в точке } \bar{x}, dV - \text{ элемент объема.}$$

Масса жидкости внутри воображаемого объёма уменьшается за счёт оттока массы через гладкую границу объёма за малый промежуток времени Δt :

$$\Delta t \iint_S \bar{v} \rho(\bar{x}) \bar{n} ds. \text{ В последнем интеграле используем теорему Остроградского – Гаусса}$$

$$\Delta t \iint_S \bar{v} \rho(\bar{x}) \bar{n} ds = \Delta t \iiint_V \operatorname{div}(\bar{v} \rho(\bar{x})) dv$$

Приравняем указанные изменения масс с разными знаками в пределе $\Delta t \rightarrow 0$

$$\iiint_V \Delta \rho(\bar{x}) dv = -\Delta t \iiint_V \operatorname{div}(\bar{v} \rho(\bar{x})) dv \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \iiint_V \left[\frac{\partial \rho(\bar{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho(\bar{x})) \right] dv = 0$$

В последнем интеграле перейдём к бесконечно малому объёму $V \rightarrow 0$, получим по теореме об интегральном среднем:

$$\frac{\partial \rho(\bar{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho(\bar{x})) = 0 \quad (1)$$

для любой рассматриваемой точки объёма жидкости \bar{x} .

Уравнение (1) называется уравнением неразрывности. Частная временная производная и полная производная по времени входят в следующее уравнение

$$\frac{d\rho(x, y, z)}{dt} = \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial z} v_z \quad (2)$$

(v_x, v_y, v_z) - компоненты вектора скорости. Преобразуем формулу (1), используя (2)

$$\frac{\partial \rho(\bar{x})}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{v} \rho(\bar{x})) = \frac{\partial \rho(\bar{x})}{\partial t} + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho(x, y, z)}{\partial z} v_z + \rho(\bar{x}) \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\rho(\bar{x})}{dt} + \rho(\bar{x}) \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \quad (3)$$

Формулу (3) как и формулу (1) также называют уравнением неразрывности.

Для несжимаемой жидкости, по определению жидкости с неизменной во времени плотностью получим упрощённое уравнение неразрывности:

$$\frac{d\rho(\bar{x})}{dt} = 0 \Leftrightarrow \rho(\bar{x}) \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Уравнение неразрывности (4), записанное в декартовой системе координат определяет траектории движения частиц несжимаемой жидкости.

Допустим следующий шаг идеализации свойств жидкости, предположим, что она идеальная, т.е. движется без трения, такое движение жидкости называют потенциальным.

И только для потенциальной жидкости можно представить её скорость как градиент некоторой потенциальной функции $\bar{v} = \operatorname{grad}(u)$.

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u = 0 \quad (5)$$

Уравнение (5) называется уравнением Лапласа и относится по классификации к эллиптическим уравнениям второго порядка в частных производных.

Очевидно, что для решения в задаче обтекания длинного цилиндра идеальной жидкостью нужно использовать аксиальную симметрию, т. е. искать решение уравнения Лапласа (5) в полярной системе координат, вид оператора получен в приложении

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (6)$$

Граничными условиями будут: 1) условие непротекания на образующей боковой поверхности цилиндра радиуса R . Скорость жидкости запишем через градиент потенциала в полярной системе координат

$$\vec{v} = \nabla u = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \Big|_{r=R} \quad (7)$$

Другими словами, вектор скорости жидкой частицы в каждой точке образующей цилиндра перпендикулярен к вектору нормали $\vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, где φ - угол между радиусом вектором полярной системы координат с началом координатной системы, лежащей на оси цилиндра, и осью Ox . Тогда $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow v_{r=R} = \frac{\partial u}{\partial R} = 0$ (8)

На бесконечности жидкие частицы направлены горизонтально $\vec{v} = (v_x, 0) = (v_\infty, 0)$ (9)

Интегрируя уравнение (7) $\frac{\partial u}{\partial x} = v_\infty$ для частиц, движущихся по горизонтальной оси x (ось x проходит через ось цилиндра), получим $u(x, 0) = v_\infty x + C$. Из прямоугольного треугольника на рисунке 1 имеем $u = v_\infty r \cos \varphi + C$. Постоянную C удобно выбрать таким образом

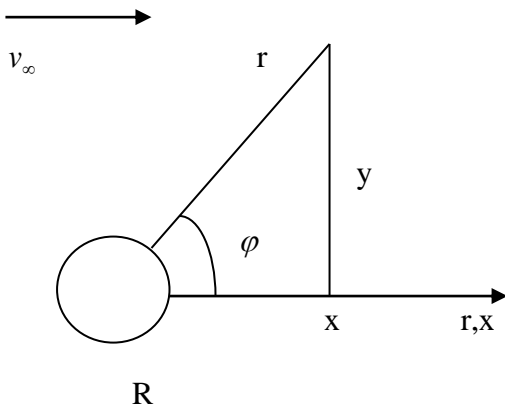


Рис.1. Задача об обтекании бесконечного цилиндра идеальной жидкостью.

чтобы на оси цилиндра потенциал скорости обращался в нуль $u|_{r=0} = v_\infty r \cos \varphi + C = 0 \Leftrightarrow C = 0, u(r, \varphi) = v_\infty r \cos \varphi$ - второе граничное условие

В результате мы можем сформулировать задачу на языке математической физики

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \\ u(r \rightarrow \infty, \varphi) = v_\infty r \cos \varphi \\ 0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (10)$$

Рассмотрим решения первого уравнения системы (10). Ищем решение методом разделения переменных $u(r, \varphi) = R(r)F(\varphi)$. Решение уравнения Лапласа нами уже найдено в Лекции 13, то есть потенциал скорости согласно (13.5) имеет вид

$$u(r, \varphi) = C_1 + C_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (C_{1n} r^n + C_{2n} r^{-n}) \cos(n\varphi) + (C_{3n} r^n + C_{4n} r^{-n}) \sin(n\varphi) \right\} \quad (11)$$

Общее решение уравнения 1 системы уравнений (10). Кроме того необходимо, чтобы решение (11) удовлетворяло граничным условиям 2,3 системы (10). Сравнив общее решение (10) с третьим уравнением системы (10) видим, что при $r \rightarrow \infty$:

$$u(r \rightarrow \infty, \varphi) = v_{\infty} r \cos \varphi = C_1 + C_0 \ln(r) + \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} r^n) \cos(n\varphi) + (C_{3n} r^n) \sin(n\varphi) \Rightarrow$$

$$n = 1, C_1 = C_0 = 0, C_{3n} = C_{4n} = 0, n = 1, 2, \dots, C_{1n}, C_{2n} = 0, n = 2, 3, \dots, C_{11} = v_{\infty}$$

В силу линейной независимости систем функций $\begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}, \begin{cases} r^n \\ r^{-n} \end{cases} n = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{Тогда в решении (11) возможны только функции вида } u(r, \varphi) = \left(C_{11} r + \frac{C_{21}}{r} \right) \cos(\varphi) \quad (12)$$

Из третьего уравнения системы (10) получим

$$u(r \rightarrow \infty, \varphi) = v_{\infty} r \cos \varphi = C_{11} r \cos \varphi \Leftrightarrow C_{11} = v_{\infty}$$

Из уравнения (9) на поверхности цилиндра $r = R$, дифференцируя (12) по переменным r, φ , получим:

$$\frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} = \left(C_{11} - \frac{C_{21}}{r^2} \right) \cos(\varphi), \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial \varphi} = - \left(C_{11} r + \frac{C_{21}}{r} \right) \sin(\varphi)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \Leftrightarrow \left(C_{11} - \frac{C_{21}}{R^2} \right) \cos(\varphi) = 0, \forall \varphi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow C_{21} = C_{11} R^2 = v_{\infty} R^2,$$

Окончательно потенциал скорости в задаче математической физики (10) равен

$$u(r, \varphi) = v_{\infty} \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos(\varphi) \quad (13)$$

Компоненты скорости жидких частиц

$$\vec{v} = (v_r, v_{\varphi}) = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) = v_{\infty} \left(\left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\varphi), - \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\varphi) \right) \quad (14)$$

Или более подробно

$$\begin{cases} v_r = v_{\infty} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos(\varphi) \\ v_{\varphi} = -v_{\infty} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin(\varphi) \end{cases} \quad 0 \leq r, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (15)$$

На поверхности цилиндра $r = R$ формула (15) преобразуется в формулу

$$\begin{cases} v_r|_{r=R} = 0 \\ v_{\varphi}|_{r=R} = -2v_{\infty} \sin(\varphi) \end{cases} \quad r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (16)$$

Из формулы (16) видно, что при условии $\varphi = \pi/2, v_{\varphi} = -2v_{\infty}, \varphi = -\pi/2, v_{\varphi} = 2v_{\infty}$. Знак минус в первом случае означает, что угол φ отсчитывают против часовой стрелки и касательный единичный вектор к образующей цилиндра направлен противоположно v_{∞} .

Именно в этих двух указанных точках модуль скорости жидких частиц больше значения скорости жидкости на бесконечности в 2 раза.

Лекция 14. Метод Фурье в задачах математической физики. Часть вторая.

2. Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа функции трех переменных $u(r, \theta, \varphi)$ в сферическом слое

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, R_1 < r < R_2, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi \\ u(R_1, \vartheta, \varphi) = f_1(\vartheta, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \\ u(R_2, \vartheta, \varphi) = f_2(\vartheta, \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{array} \right. \quad (14.1)$$

Оператор Лапласа в сферической системе координат получен в Лекции 17 формула (17.12).

В Лекции 8 мы рассмотрели систему полиномов Лежандра $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$.

Найдем в явном виде несколько многочленов

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0 (x^2 - 1)^0}{dx^0} = 1, P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d(x^2 - 1)}{dx} = x, P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2 (x^2 - 1)^2}{dx^2} = \frac{1}{8} (x^4 - 2x^2 + 1)'' = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Для решения задачи (14.1) понадобится присоединенная система многочленов Лежандра, с парой целых индексов

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m} (x^2 - 1)^n}{dx^{n+m}}, x = \cos \vartheta, \vartheta \in (0, \pi), \quad (14.2)$$

Решаем задачу (14.1) методом разделения переменных $u(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$. Подставим данное решение в уравнение (14.1)

$$\frac{Y(\vartheta, \varphi) (r^2 R')'}{r^2} + \frac{R}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{R}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(r^2 R')'}{R} + \frac{1}{Y \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{Y \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{Y \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{Y \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = -\frac{(r^2 R')'}{R} = -\lambda$$

В последнем уравнении переменные разделились, что возможно тогда и только тогда, когда левая и правая части уравнения равны одной и той же константе λ . Решаем уравнение для радиальной части $(r^2 R')' - \lambda R = 0 \Leftrightarrow r^2 R'' + 2rR' - \lambda R = 0$ (14.3)

В последнем уравнении каждое слагаемое однородно относительно $r^k R^{(k)}$, поэтому решение для радиальной функции в ОДУ второго порядка ищем в степенном виде $R(r) = Cr^n$.

$$Cr^n(n(n-1) + 2n - \lambda) = 0 \Leftrightarrow n^2 + n - \lambda = 0, \lambda_n = n^2 + n = n(n+1)$$

Запишем уравнение для угловой части $\frac{1}{Y \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{Y \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda = 0$.

Разделяя переменные в функции $Y(\vartheta, \varphi) = T(\vartheta)\Phi(\varphi)$ и подставляя в последнее уравнение

$$\frac{1}{T \sin \vartheta} \left(\sin \vartheta T' \right)' + \frac{\Phi''}{\Phi \sin^2 \vartheta} + \lambda = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \vartheta}{T} \left(\sin \vartheta T' \right)' + \lambda \sin^2 \vartheta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = m^2 = k_m$$

Решая последнее уравнение с дополнительными условиями периодичности

$$\begin{cases} \Phi'' + k_m \Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \quad (14.4)$$

Но последняя задача уже решена (14.4) с известными собственными функциями для полярного угла φ : $k_m = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{cases}$

Решаем уравнение для полярного угла ϑ

$$\frac{\sin \vartheta}{T} \left(\sin \vartheta T' \right)' + n(n+1) \sin^2 \vartheta - m^2 = 0 \quad (14.5)$$

Введем переменную $x = \cos \theta$, $\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$, $dx = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-x^2} d\theta$, $d\vartheta = \frac{dx}{-\sin \theta}$

$$\frac{dT}{d\vartheta} = \frac{dT}{dx} \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{dT}{dx}, \frac{d^2 T}{d\vartheta^2} = \frac{d}{d\vartheta} \left(-\sin \vartheta \frac{dT}{dx} \right) = -\cos \vartheta \frac{dT}{dx} + \sin^2 \vartheta \frac{d^2 T}{dx^2}$$

$$\sin^2 \vartheta T''(\vartheta) + \sin \vartheta \cos \vartheta T'(\vartheta) + (\lambda \sin^2 \vartheta - m^2) T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 \vartheta \left(-\cos \vartheta \frac{dT}{dx} + \sin^2 \vartheta \frac{d^2 T}{dx^2} \right) + \sin \vartheta \cos \vartheta \left(-\sin \vartheta \frac{dT}{dx} \right) + (\lambda \sin^2 \vartheta - m^2) T = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin^4 \vartheta \frac{d^2 T}{dx^2} - 2 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \frac{dT}{dx} + (\lambda \sin^2 \vartheta - m^2) T = 0$$

$$(1-x^2)^2 \frac{d^2 T}{dx^2} - 2(1-x^2)x \frac{dT}{dx} + (\lambda(1-x^2) - m^2) T = 0 \Leftrightarrow$$

$$(1-x^2) \frac{d^2 T}{dx^2} - 2x \frac{dT}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) T = 0, T(-1) \leftrightarrow \cos(\theta = \pi), T(1) \leftrightarrow \cos(\theta = 0)$$

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - 2x \frac{dT_n}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right) T_n = 0 \\ [T(-1)] < +\infty, [T(1)] < +\infty \end{cases} \quad (14.6)$$

Уравнение (14.6) называется уравнением для присоединенных многочленов Лежандра, его частными решениями являются присоединенные функции Лежандра [1]

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}} d^{n+m}(x^2-1)^n}{2^n n! dx^{n+m}}, x = \cos \vartheta, \vartheta \in (0, \pi).$$

Возвращаясь к уравнению для радиальной части при фиксированном n для постоянного индекса $T_n(x)$, используя степенные функции $R_{k,n}(r) = Cr^k$

$$Cr^k(k(k-1) + 2k - \lambda_n) = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - n(n+1) = 0, k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n(n+1)}}{2} = \frac{-1 \pm (2n+1)}{2} = -n-1, n$$

Поэтому элементарные решения для уравнения на радиальную функцию суть

$$\lambda_n = n(n+1) \leftrightarrow \begin{cases} r^{-n-1} \\ r^n \end{cases}$$

Объединяя все элементарные решения по индексу n и по индексу m в двойной ряд получим

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(x) \left\{ (A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi) r^{-n-1} + r^n (C_{n,m} \cos m\varphi + D_{n,m} \sin m\varphi) \right\} \quad (14.7)$$

Пример 4. Найти распределение температуры внутри однородного изотропного шара, если на его поверхности поддерживается температура $A \cos^2 \vartheta$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi \\ u(R, \vartheta, \varphi) = A \cos^2 \vartheta = Ax^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

В данном примере температура поверхности не зависит от полярного угла φ , то есть $m=0$. В силу четности краевых условий относительно переменной x в решение могут войти многочлены индекса $n=0, n=2$.

В формуле (14.7) сохраним слагаемые с $m=0, n=0, n=2$

$$\begin{aligned} u(r, \vartheta, \varphi) = u(r, \vartheta) &= P_0(x) \left(\frac{A_{0,0}}{r} + C_{0,0} \right) + P_2(x) \left(\frac{A_{2,0}}{r^3} + C_{2,0} r^2 \right) = \left(\frac{A_{0,0}}{r} + C_{0,0} \right) + \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) \left(\frac{A_{2,0}}{r^3} + C_{2,0} r^2 \right) = \\ &= (A_{0,0} = 0, A_{2,0} = 0) = C_{0,0} + C_{2,0} r^2 \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right), \quad u(R, \vartheta, \varphi) = Ax^2 = C_{0,0} + C_{2,0} R^2 \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$Ax^2 = C_{0,0} + C_{2,0} R^2 \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) \Leftrightarrow A = \frac{3}{2} C_{2,0} R^2 \Leftrightarrow C_{2,0} = \frac{2A}{3R^2}, C_{0,0} - \frac{C_{2,0} R^2}{2} = 0 \Leftrightarrow C_{0,0} = \frac{A}{3} \Rightarrow$$

$$\text{Ответ: } u(r, \vartheta) = \frac{A}{3} + \frac{2Ar^2}{3R^2} \left(\frac{3x^2 - 1}{2} \right) = \frac{A}{3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \right).$$

Упражнение

Пример 4[1, №12]. Найти распределение температуры внутри однородного изотропного шара, если на его поверхности поддерживается температура $A \sin^2 \vartheta$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi \\ u(R, \vartheta, \varphi) = A \sin^2 \vartheta = A(1 - x^2), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } u(r, \vartheta) = \frac{2A}{3} - \frac{Ar^2}{R^2} \left(\frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{3} \right).$$

Пример 5[1, №17]. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = z$ в единичном шаре при нулевом граничном условии.

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = z = r \cos \vartheta = rx, r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi \\ u(R=1, \vartheta, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

В данном примере правая часть уравнения не зависит от полярного угла ϑ , то есть и решение будем искать в этом виде $u(r, \vartheta, \varphi) = u(r, \vartheta) = R(r) \cos \vartheta$ с учетом правой части

$$\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \vartheta} \right) = r^3 \cos \vartheta \Leftrightarrow \cos \vartheta (r^2 R')' + \frac{R}{\sin \vartheta} \frac{\partial (-\sin^2 \vartheta)}{\partial \vartheta} = r^3 \cos \vartheta \Leftrightarrow$$

$$\cos \vartheta (r^2 R')' + \frac{-2R \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = r^3 \cos \vartheta \Leftrightarrow (r^2 R')' - 2R = r^3 \Leftrightarrow r^2 R'' + 2rR' - 2R = r^3$$

Общее решение однородного уравнения $r^2 R'' + 2rR' - 2R = 0$ ищем в виде $R(r) = Cr^k$

$$k(k-1) + 2k - 2 = 0 \Leftrightarrow k^2 + k - 2 = 0, k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -2, 1$$

$R_{oo}(r) = C_1 r^{-2} + C_2 r$. Частное решение ищем в виде

$$R_q(r) = Cr^3, Cr^3(6+6-2) = r^3 \Leftrightarrow C = \frac{1}{10}, R(r) = R_{oo}(r) + R_q(r) = C_1 r^{-2} + C_2 r + \frac{r^3}{10}$$

$|R(0)| < \infty \Leftrightarrow C_1 = 0$, используем краевые условия $u(R, \vartheta, \varphi) = 0 \Leftrightarrow$

$$R(R) = C_2 R + \frac{R^3}{10} = 0 \Leftrightarrow C_2 = -\frac{R^2}{10}, R(r) = \frac{r^3}{10} - \frac{R^2 r}{10} = \frac{R^3}{10} \left(\frac{r^3}{R^3} - \frac{r}{R} \right).$$

$$\text{Ответ: } u(R, \vartheta, \varphi) = R(r) \cos \vartheta = \frac{R^3}{10} \left(\frac{r^3}{R^3} - \frac{r}{R} \right)_{R=1} \cos \vartheta = \frac{\cos \vartheta}{10} (r^3 - r).$$

Пример 6. Найти распределение температуры внутри однородного изотропного шара, если на его поверхности поддерживается температура $\sin 2\varphi \sin^2 \vartheta$

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta < \pi \\ u(1, \vartheta, \varphi) = \sin(2\varphi) \sin^2 2\vartheta = \sin(2\varphi) 4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta = 4 \sin(2\varphi) x^2 (1-x^2), x = \cos \vartheta, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

В примере 6 краевые условия являются четной функцией по переменной x и нечетной функцией по переменной φ . Этими свойствами симметрии должна обладать функция-решение. Запишем общее решение по формуле (14.7)

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n P_n^m(x) \{ (A_{n,m} \cos m\varphi + B_{n,m} \sin m\varphi) r^{-n-1} + r^n (C_{n,m} \cos m\varphi + D_{n,m} \sin m\varphi) \}$$

В условии примера $m=2, n \geq m=2$. С учетом формулы

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), m=2, P_n^2(x) = (1-x^2)^2 \frac{d^2}{dx^2} P_n(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_n(x)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2(x^2-1)^2}{dx^2} = \frac{(x^4-2x^2+1)''}{8} = \frac{12x^2-4}{8} = \frac{3x^2-1}{2}, (P_2(x))'' = 3$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 4!} \frac{d^4(x^2-1)^4}{dx^4} = \frac{(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1)^{(4)}}{16 \cdot 24} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 - 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 24}{16 \cdot 24} =$$

$$= \frac{35x^4}{8} - \frac{15x^2}{4} + \frac{3}{8} \cdot (P_4(x))'' = \frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2}.$$

На поверхности шара единичного радиуса запишем краевые условия

$$u(1, \vartheta, \varphi) = 4 \sin(2\varphi) x^2 (1-x^2) = \sin(2\varphi) (AP_2^2(x)r^2 + BP_4^2(x)r^4)_{r=1} = \sin(2\varphi) (1-x^2) (A(P_2(x))'' + B(P_4(x))'') \Leftrightarrow$$

$$4x^2 = A(P_2(x))'' + B(P_4(x))'' = 3A + B \left(\frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3A - \frac{15B}{2} = 0 \Leftrightarrow B = \frac{2}{5}A = \frac{8}{105} \\ \frac{105B}{2} = 4 \Leftrightarrow B = \frac{8}{105} = \frac{2}{5}A, A = \frac{4}{21}. \end{cases}$$

$$u(r, \vartheta, \varphi) = \sin(2\varphi) (1-x^2) (Ar^2(P_2(x))'' + Br^4(P_4(x))'') = \sin(2\varphi) (1-x^2) \left(\frac{3 \cdot 4r^2}{21} + \frac{8r^4}{105} \left(\frac{105}{2}x^2 - \frac{15}{2} \right) \right) =$$

$$= \sin(2\varphi) (1-x^2) \left(\frac{4r^2}{7} + r^4 \left(4x^2 - \frac{4}{7} \right) \right) = \sin(2\varphi) \sin^2 \theta \left(\frac{4r^2}{7} + r^4 \left(4 \cos^2 \theta - \frac{4}{7} \right) \right).$$

$$\text{Ответ: } u(r, \vartheta, \varphi) = \sin(2\varphi) \sin^2 \theta \left(\frac{4r^2}{7} + r^4 \left(4 \cos^2 \theta - \frac{4}{7} \right) \right).$$

Литература

1. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – Москва : МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISBN 5-94057-148-4. – EDN QXTLUC.

Глава 6. Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма.

Лекция 15. Прямые методы решения интегральных уравнений.

В качестве модельного рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x)$$

1) Метод замены интеграла квадратурной формулой:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), \int_a^b K(x, s) y(s) ds \approx \sum_{j=0}^n C_j K(x_i, s_j) y(s_j), a \leq x, s \leq b$$

$$y(x_i) - \lambda \sum_{j=0}^n C_j K(x_i, s_j) y(s_j) = f(x_i), x_i = a + hi, s_j = a + hj, h = \frac{b-a}{n}, i, j = \overline{0, n} \quad (15.1)$$

В формуле (15.1) заданы узлы и весовые коэффициенты, x_i, s_j, C_j т.е. (15.1) – система линейных уравнений относительно неизвестных $y(x_i), y(s_j)$. Формула (15.1) удобна для аналитического решения интегральных уравнений, так как число неизвестных узловых значений функции совпадает с числом узлов квадратурной формулы. В матричном виде (15.1):

$$y_i - \lambda \sum_{j=0}^n C_j K_{ij} y_j = f_i \Leftrightarrow y_i - \lambda \sum_{j=0}^n a_{ij} y_j = f_i, a_{ij} = K_{ij} C_j, K_{ij} = K(x_i, s_j) \quad (15.2)$$

Рассмотрим пример[1]. Найти приближённое решение интегрального уравнения методом замены интеграла квадратурной формулой Симпсона и оценить его погрешность.

$$y(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xsy(s)ds \Leftrightarrow y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 xsy(s)ds = \frac{5}{6}x = f(x), \lambda = \frac{1}{2}, K(x, s) = xs$$

$$\int_a^b y(s)ds \approx \left(\frac{b-a}{6}\right) \left(y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right) \Rightarrow C_1 = C_3 = \left(\frac{b-a}{6}\right) = \frac{1}{6}, C_2 = \frac{4(b-a)}{6} = \frac{4}{6}, a=0, b=1$$

$$\begin{cases} y_1 - 0 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{6} \left(0 \cdot y_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3\right) = \frac{5}{6} \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \\ y_2 - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{6} \left(0 \cdot y_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow 22y_2 - y_3 = 10 \\ y_3 - 1 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{6} \left(0 \cdot y_1 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3\right) = \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{5}{6} \Leftrightarrow -2y_2 + 11y_3 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ 24y_2 = 12y_3 \Leftrightarrow y_3 = 2y_2 \\ 20y_2 = 10, y_2 = \frac{1}{2}, y_3 = 1 \end{cases}$$

Можно предположить, что точное решение есть $y(x) = x$, действительно:

$$x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x \int_0^1 sds \Leftrightarrow x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2}x \frac{s^2}{2} \Big|_0^1 = x.$$

2) Метод замены ядра. Применяется для уравнений с вырожденным ядром.

Определение. Вырожденное ядро интегрального оператора может быть представлено в виде суммы произведения функций с разделенными переменными.

$K(x, s) = \sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s)$. Необходимо, чтобы системы функций $\{A_i(x), i = \overline{1, n}\}$ и $\{B_i(s), i = \overline{1, n}\}$ были линейно независимы.

Представим решение в виде $y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n D_i A_i(x)$, тогда

$$f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n D_i A_i(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s) \left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^n D_j A_j(s) \right) ds = f(x) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n D_i A_i(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(x)B_i(s) \left(f(s) + \lambda \sum_{j=1}^n D_j A_j(s) \right) ds = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n A_i(x) \left(D_i - \lambda \sum_{j=1}^n D_j \int_a^b A_j(s)B_i(s)ds - \int_a^b f(s)B_i(s)ds \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$D_i - \lambda \sum_{j=1}^n D_j \int_a^b A_j(s)B_i(s)ds = \int_a^b f(s)B_i(s)ds \Leftrightarrow D_i - \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} D_j = f_i, a_{ij} = \int_a^b A_j(s)B_i(s)ds, f_i = \int_a^b f(s)B_i(s)ds \quad (15.3)$$

Если определитель матрицы $I - \lambda A$ не равен нулю, то решение D в системе уравнений (15.3) единственно. Если $\det(I - \lambda A) = 0$, то λ называется характеристическим числом интегрального ядра. А также можно найти собственные функции, соответствующие λ из уравнения:

$$(I - \lambda A)y = 0, y \neq 0 \Leftrightarrow \det(I - \lambda A) = 0 \quad (15.4)$$

Выразим матрицу $(I - \lambda A)$ через другие матрицы, так как $A^{-1}(I - \lambda A) = A^{-1} - \lambda I$, то $\det A^{-1}(I - \lambda A) = \det(A^{-1})\det(I - \lambda A) = \det(A^{-1} - \lambda I) \Leftrightarrow \det(I - \lambda A) = \det(A^{-1} - \lambda I) / \det(A^{-1})$, поэтому определитель указанной матрицы существует, если существует определитель обратной матрицы A^{-1} .

Рассмотрим пример.

$$\cos x = y(x) - \int_0^{\pi} \sin(x+s)y(s)ds = y(x) - \int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(s) + \cos(x)\sin(s))y(s)ds, \lambda = 1, f(x) = \cos x.$$

$$A_1(x) = \sin(x), A_2(x) = \cos(x), B_1(s) = \cos(s), B_2(s) = \sin(s)$$

$$\text{По формуле(15.3) находим коэффициенты: } a_{11} = \int_0^{\pi} A_1(s)B_1(s)ds = \int_0^{\pi} \sin(s)\cos(s)ds = -\frac{\cos(2s)}{4}\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$a_{12} = \int_0^{\pi} A_2(s)B_1(s)ds = \int_0^{\pi} \cos^2(s)ds = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1 + \cos(2s))d(2s) = \left(\frac{2s}{4} + \frac{\sin(2s)}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_{21} = \int_0^{\pi} A_1(s)B_2(s)ds = \int_0^{\pi} \sin^2(s)ds = \int_0^{\pi} \frac{1}{4}(1 - \cos(2s))d(2s) = \left(\frac{2s}{4} - \frac{\sin(2s)}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_{22} = \int_0^{\pi} A_2(s)B_2(s)ds = \int_0^{\pi} \cos(s)\sin(s)ds = 0, f_1 = \int_0^{\pi} f(s)B_1(s)ds = \int_0^{\pi} \cos^2(s)ds = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2s))d2s = \frac{\pi}{2}$$

$$f_2 = \int_0^{\pi} f(s)B_2(s)ds = \int_0^{\pi} \cos(s)\sin(s)ds = 0.$$

Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} D_1 - \lambda(a_{11}D_1 + a_{12}D_2) = f_1 \\ D_2 - \lambda(a_{21}D_1 + a_{22}D_2) = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D_1 - \frac{\pi}{2}D_2 = \frac{\pi}{2} \\ D_2 - \frac{\pi}{2}D_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\pi}D_2 - \frac{\pi}{2}D_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow D_2 = \frac{\pi^2}{(4-\pi^2)} \\ D_1 = \frac{2}{\pi}D_2 = \frac{2\pi}{(4-\pi^2)} \end{cases}$$

$$y(x) = f(x) + \lambda(D_1A_1(x) + D_2A_2(x)) = \cos(x) + \frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(x) + \frac{\pi^2}{(4-\pi^2)}\cos(x) = \frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(x) + \frac{4}{(4-\pi^2)}\cos(x)$$

Проверим, что полученное решение является точным:

$$\begin{aligned} \cos(x) + \frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(x) + \frac{\pi^2}{(4-\pi^2)}\cos(x) - \int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(s) + \cos(x)\sin(s))y(s)ds &= \cos x \Leftrightarrow \\ \frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(x) + \frac{\pi^2}{(4-\pi^2)}\cos(x) - \int_0^{\pi} (\sin(x)\cos(s) + \cos(x)\sin(s)) \left(\frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(s) + \frac{4}{(4-\pi^2)}\cos(s) \right) ds &= \\ \frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\sin(x) + \frac{\pi^2}{(4-\pi^2)}\cos(x) - \sin(x)\frac{4}{(4-\pi^2)}\frac{\pi}{2} - \cos(x)\frac{2\pi}{(4-\pi^2)}\frac{\pi}{2} &= 0. \text{ Верно.} \end{aligned}$$

Найдём также характеристические числа и соответствующие им линейно независимые решения из уравнения в данном примере.

$$\det(I - \lambda A) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \frac{\pi}{2} \\ -\lambda \frac{\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$$

а) Находим собственные функции интегрального оператора $(I - \lambda A)D = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda_1 = \frac{2}{\pi}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \frac{\pi}{2} \\ \lambda_1 \frac{\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, y_1(x) = D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x) = \sin(x) - \cos(x)$$

б)

$$\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}, \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2 \frac{\pi}{2} \\ \lambda_2 \frac{\pi}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2(x) = D_1 \sin(x) + D_2 \cos(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

Функции $y_1(x) = \sin(x) - \cos(x)$, $y_2(x) = \sin(x) + \cos(x)$ линейно независимы.

Литература

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

Лекция 16. Проекционные методы решения интегральных уравнений.

1. Метод наименьших квадратов

В качестве модельного рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x). \quad (16.1)$$

Разложим приближенное решение интегрального уравнения (16.1) по системе линейно независимых функций $\varphi_i(x), i = \overline{1, n}$

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad (16.2)$$

Обозначим невязку уравнения (16.3)

$$r(x) = \tilde{y}(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \tilde{y}(s) ds - f(x) \quad (16.3)$$

Потребуем, чтобы норма невязки $r(x)$ в пространстве $L_2[a, b] \rightarrow \|r\|_{L_2}$ функций была минимальной. Подставим $\tilde{y}(x)$ из (16.2) в (16.3), $r(x)$ будет зависеть от n варьируемых коэффициентов.

$$r(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) ds - f(x)$$

Необходимое условие минимума функции n переменных:

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2(C_1, \dots, C_n)}{\partial C_i} = 2 \|r\|_{L_2} \frac{\partial \|r\|_{L_2}(C_1, \dots, C_n)}{\partial C_i} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}(C_1, \dots, C_n)}{\partial C_i} = 0, \text{ если } \|r\|_{L_2} > 0$$

($\|r\|_{L_2}^2$ удобнее дифференцировать, чем $\|r\|_{L_2}$)

$$2 \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) ds - f(x) \right) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right) dx = 0$$

В первом множителе можно заменить индекс суммирования $i \rightarrow j$. Относительно неизвестных коэффициентов C_j получаем неоднородную систему n линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n C_j \left\{ \int_a^b \left(\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right) dx \right\} = \int_a^b f(x) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right) dx$$

Таким образом, имеем матричное уравнение $AC = f$ вида

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} C_j = f_i, i = \overline{1, n} \quad (16.4)$$

где $a_{i,j}$ симметрическая матрица, как следует из формул для коэффициентов.

$$a_{i,j} = \int_a^b \left(\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_j(s) ds \right) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right) dx$$

$$f_i = \int_a^b f(x) \left(\varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds \right), i = \overline{1, n} \quad (16.5)$$

Пример[1, № 30.1]. Найти приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = x + \int_{-1}^1 (xs + x^2) y(s) ds$$

методом наименьших квадратов, используя в качестве первой системы функций

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \varphi_2(x) = x$$

Решение: Приближенное решение уравнения разложим по системе базисных функций

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) = C_1 + C_2 x$$

$$\text{Невязка уравнения } r(x) = C_1 + C_2 x - x - \int_{-1}^1 (xs + x^2) (C_1 + C_2 s) ds$$

Так как неизвестных коэффициентов всего два, проще повторить весь алгоритм сначала, не вычисляя коэффициенты $a_{i,j} f_i$ по формулам (16.5).

$$\|r\|_{L_2}^2 = \int_{-1}^1 \left(C_1 + C_2 x - x - \int_{-1}^1 (xs + x^2) (C_1 + C_2 s) ds \right)^2 dx$$

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2(C_1, C_2)}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^1 \left(C_1 + C_2 x - x - \int_{-1}^1 (xs + x^2) (C_1 + C_2 s) ds \right) \left(1 - \int_{-1}^1 (xs + x^2) ds \right) dx$$

$$\frac{\partial \|r\|_{L_2}^2(C_1, C_2)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow 0 = \int_{-1}^1 \left(C_1 + C_2 x - x - \int_{-1}^1 (xs + x^2) (C_1 + C_2 s) ds \right) \left(x - \int_{-1}^1 (xs + x^2) s ds \right) dx$$

$$\text{Так как } \int_{-1}^1 (xs + x^2) ds = \left(\frac{xs^2}{2} + x^2 s \right)_{-1}^1 = 2x^2$$

$$\int_{-1}^1 (xs + x^2) s ds = \left(\frac{xs^3}{3} + \frac{x^2 s^2}{2} \right)_{-1}^1 = \frac{2}{3} x$$

Получим систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \left(C_1 + C_2 x - x - \left(C_1 2x^2 + C_2 \frac{2}{3} x \right) \right) (1 - 2x^2) dx = 0 \\ \int_{-1}^1 \left(C_1 + C_2 x - x - \left(C_1 2x^2 + C_2 \frac{2}{3} x \right) \right) \left(x - \frac{2}{3} x \right) dx = 0 \\ \left[C_1 \left(x - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{5} x^5 \right) + C_2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^2 + \frac{4}{12} x^4 \right) - \frac{x^2}{2} + \frac{2x^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0 \\ \left[C_1 \left(\frac{1}{6} x^2 - \frac{2}{12} x^4 \right) + C_2 \left(\frac{x^3}{9} - \frac{2}{27} x^3 \right) - \frac{x^3}{9} \right]_{-1}^1 = 0 \\ \left[C_1 \left(x - \frac{2}{3} x^3 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{5} x^5 \right) \right]_{-1}^1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \\ \left[C_2 \left(\frac{x^3}{27} \right) - \frac{x^3}{9} \right]_{-1}^1 = 0 \Leftrightarrow \frac{C_2}{27} - \frac{1}{9} = 0, C_2 = 3 \\ \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) = C_1 + C_2 x = 3x. \end{cases}$$

проверим, что данное решение является точным:

$$3x = x + \int_{-1}^1 (xs + x^2) \mathcal{B} s ds = x + 3x \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 + 3x^2 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 = x + 2x = 3x.$$

2. Метод Петрова – Галеркина

Рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds = f(x), x, s \in [a, b]$$

Пусть имеются две системы линейно – независимых функций

$$\varphi_i(x), \psi_i(x), i = \overline{1, n}, x \in [a, b], \varphi_i(x), \psi_i(x) \in L_2[a, b].$$

Разложим приближенное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$\tilde{y}(x)$ по первой системе функций

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) + f(x) \tag{16.6}$$

Данное разложение подставим в уравнение Фредгольма

$$\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) + f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) + f(s) \right) ds = f(x)$$

Запишем невязку уравнения в последнем уравнении

$$r(y) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) + f(s) \right) ds$$

Потребуем ортогональности невязки $r(y)$ всем функциям второй координатной системы (в этом заключается идея методов Галеркина) $\psi_i(x), i = \overline{1, n}$. Все функции каждой

системы построены так, что их норма убывает при увеличении индекса функции. Ортогональность невязки $r(y)$ каждой из функции $\psi_i(x), i = \overline{1, n}$ обеспечивает также малость ее нормы, поскольку невязка разложима по системе функций $\psi_i(x), i = \overline{n, \infty}$ ортогонального пространства к функциям $\psi_i(x), i = \overline{1, n}$, а норма каждой $\|\psi_j\| < \|\psi_n\|, j \geq n+1$. При достаточно быстром законе уменьшения нормы $\|\psi_n\|$ в пределе при $n \rightarrow \infty$

$r_{n+1}(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \psi_j(x) \langle \psi_j, r(y(x)) \rangle$ и верна теорема Стеклова

$$\|r_{n+1}\|_{L_2}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle \psi_j, r(x) \rangle^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \langle \psi_j, r(x) \rangle = \int_a^b \psi_j(x) r(x) dx$$

$$\langle \psi_j, r \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \psi_j(x) r(x) dx = 0, j = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b \psi_j(x) \left(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) + f(s) \right) ds \right) dx = 0, j = \overline{1, n}.$$

Изменим порядок интегрирования и суммирования местами, получим систему из n линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n C_i \left(\int_a^b \psi_j(x) \varphi_i(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) \psi_j(x) ds dx \right) = \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) f(s) \psi_j(x) ds dx, j = \overline{1, n} \quad (16.7)$$

Запишем (16.7) в матричном виде

$$AC = f \Leftrightarrow a_{j,i} = \int_a^b \psi_j(x) \varphi_i(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) \psi_j(x) ds dx, j = \overline{1, n}$$

$$f_j = \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) f(s) \psi_j(x) ds dx, j = \overline{1, n} \quad (16.8)$$

Мнемоническое правило для запоминания (в формулах (16.8) первый индекс в матрице $a_{j,i}$ соответствует индексу второй системы координатных функций, соответственно, второй индекс - первой системе).

Пример[1.№30.2]. Найти приближенное решение интегрального уравнения методом Петрова – Галеркина

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xs + x^2) y(s) ds$$

Используя в качестве первой системы функций $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$
в качестве второй системы $\psi_1(x) = 1, \psi_2(x) = x$

Решение: Перепишем исходное уравнение в каноническом виде, откуда

$$y(x) - \int_{-1}^1 (xs + x^2) y(s) ds = 1, K(x, s) = xs + x^2, \lambda = 1, f(x) = 1$$

По формулам(16.8) вычисляем коэффициенты матрицы

$$a_{1,1} = \int_{-1}^1 1 \cdot x dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s \cdot 1 ds dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 - 1 \cdot \int_{-1}^1 \left(x \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 + x^2 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$a_{1,2} = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s^2 \cdot 1 ds dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - 1 \cdot \int_{-1}^1 \left(x \frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 + x^2 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{9}$$

$$a_{2,1} = \int_{-1}^1 x \cdot x dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s \cdot x ds dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - 1 \cdot \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 + x^3 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{9}$$

$$a_{2,2} = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s^2 \cdot x ds dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 - 1 \cdot \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 + x^3 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$f_1 = 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) \cdot 1 \cdot 1 ds dx = \int_{-1}^1 \left(x \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 + x^2 s \Big|_{-1}^1 \right) dx = 2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

$$f_2 = 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) \cdot x \cdot 1 ds dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 + x^3 s \Big|_{-1}^1 \right) dx = \frac{2x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

Составляем систему из 2 линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}C_1 + a_{1,2}C_2 = f_1 \\ a_{2,1}C_1 + a_{2,2}C_2 = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot C_1 + \frac{2}{9}C_2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow C_2 = 6 \\ \frac{2}{9}C_1 + 0 \cdot C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \end{cases}$$

$$y(x) = f(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = 1 + 6x^2$$

Проверим, что данное решение является точным

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2)(1 + 6s^2) ds = 1 + \left[\frac{xs^2}{2} + x^2s + 6x \frac{s^4}{4} + 6x^2 \frac{s^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= 1 + 2x^2 + 4x^2 = 1 + 6x^2. \end{aligned}$$

3. Метод Бубнова – Галеркина

Данный метод является частным случаем метода Петрова – Галеркина, если обе системы функций совпадают

$$\varphi_i(x) = \psi_i(x), i = \overline{1, n}, x \in [a, b], \varphi_i(x), \psi_i(x) \in L_2[a, b].$$

Формулы коэффициентов линейной системы уравнений (16.8) переходят в

$$\begin{aligned} AC = f &\Leftrightarrow a_{j,i} = \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_i(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) \varphi_i(s) \varphi_j(x) ds dx, j = \overline{1, n} \\ f_j &= \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, s) f(s) \varphi_j(x) ds dx, j = \overline{1, n} \end{aligned} \quad (16.9)$$

Пример[1.№30.6]. Найти методом Бубнова – Галеркина приближенное решение интегрального уравнения

$$y(x) = 1 + \int_{-1}^1 (xs + x^2) y(s) ds$$

Используя в качестве системы функций $\varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2$

Решение:

В данном примере

$$K(x, s) = xs + x^2, \lambda = 1, f(x) = 1$$

Вычисляем элементы матрицы системы линейных уравнений

$$a_{1,1} = \int_{-1}^1 x^2 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s \cdot x ds dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 + x^3 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) dx = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{9}$$

$$a_{1,2} = \int_{-1}^1 x^3 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s^2 \cdot x ds dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 + x^3 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$a_{2,1} = \int_{-1}^1 x^3 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s \cdot x^2 ds dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(x^3 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 + x^4 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 \right) dx = -\frac{2}{3} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$a_{2,2} = \int_{-1}^1 x^4 dx - 1 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) s^2 \cdot x^2 ds dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \left(x^3 \frac{s^4}{4} \Big|_{-1}^1 + x^4 \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right) dx = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{15}$$

$$f_1 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) \cdot x \cdot 1 ds dx = \int_{-1}^1 \left(x^2 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 + x^3 s \Big|_{-1}^1 \right) dx = 2 \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$f_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (xs + x^2) \cdot x^2 \cdot 1 ds dx = \int_{-1}^1 \left(x^3 \frac{s^2}{2} \Big|_{-1}^1 + x^4 s \Big|_{-1}^1 \right) dx = 2 \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5}$$

Получаем систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}C_1 + a_{1,2}C_2 = f_1 \\ a_{2,1}C_1 + a_{2,2}C_2 = f_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{9}C_1 + 0C_2 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0 \\ 0C_1 + \frac{2}{15}C_2 = \frac{4}{5} \Leftrightarrow C_2 = 6 \end{cases}$$

Ответ: $y(x) = 1 + 6x^2$.

4.Метод коллокации

Будем искать приближенное решение $z(x)$ интегрального уравнения

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)y(s)ds = f(x), x, s \in [a, b]$$

в виде

$$z(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x)$$

$\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ - известная система линейно - независимых функций. Неизвестные коэффициенты найдем из условия равенства нулю невязки уравнения Фредгольма в заданных точках отрезка $[a, b]$ -точках коллокации.

$$\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, s) \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(s) ds = f(x_k), k = \overline{1, n} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x_k) - \lambda \sum_{i=1}^n C_i \int_a^b K(x_k, s) \varphi_i(s) ds = f(x_k), k = \overline{1, n} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n C_i \left(\varphi_i(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, s) \varphi_i(s) ds \right) = f(x_k)$$

$$AC = f \Leftrightarrow a_{k,i} = \left(\varphi_i(x_k) - \lambda \int_a^b K(x_k, s) \varphi_i(s) ds \right), k = 1, n, f_k = f(x_k) \quad (16.10)$$

Пример[1, №30.8]. Найти приближение решение интегрального уравнения

$$y(x) = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xs^2 - x)y(s)ds \Leftrightarrow y(x) - \int_{-1}^1 (xs^2 - x)y(s)ds = 1 + \frac{4}{3}x$$

$$f(x) = 1 + \frac{4}{3}x, \lambda = 1, K(x, s) = (xs^2 - x)$$

С точками коллокации -1, 0, 1, используя в качестве координатной системы функций три первых полинома Лежандра.

Решение: Полиномы Лежандра ортогональны друг другу на отрезке [-1, 1] с весовой функцией $p(x) \equiv 1$. Находим полиномы ортогонализацией.

$$P_0(x) \equiv 1; P_1(x) = x + a;$$

$$\int_{-1}^1 P_1(x)P_0(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (x + a)dx = 0 = \left(\frac{x^2}{2} + ax \right)_{-1}^1 = 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0, P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = x^2 + bx + c :$$

$$\int_{-1}^1 P_0(x)P_2(x)dx = 0 = \int_{-1}^1 (x^2 + bx + c)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right)_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 2c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{-1}^1 P_1(x)P_2(x)dx = 0 = \int_{-1}^1 (x^2 + bx + c)x dx = \left(\frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + c\frac{x^2}{2} \right)_{-1}^1 = \frac{2}{3}b = 0 \Leftrightarrow b = 0$$

Откуда

$$P_2(x) = x^2 + bx + c = x^2 - \frac{1}{3}$$

В качестве системы координатных функций имеем три многочлена Лежандра

$$\varphi_1(x) \equiv 1; \varphi_2(x) = x, \varphi_3(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Запишем решение в виде

$$z(x) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + C_3 \varphi_3(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

В точках коллокации приравниваем нулю невязку исходного уравнения

$$r(x_k) = 0, k = 1, 2, 3, x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

Находим коэффициенты системы по формуле (16.10) $K(x, s) = (xs^2 - x)$

$$a_{1,1} = \varphi_1(x_1) - \int_{-1}^1 K(x_1, s) \varphi_1(s) ds = 1 - \int_{-1}^1 (-s^2 + 1) ds = 1 + \left(\frac{s^3}{3} - s \right)_{-1}^1 = -\frac{1}{3}$$

$$a_{1,2} = \varphi_2(x_1) - \int_{-1}^1 K(x_1, s) \varphi_2(s) ds = -1 - \int_{-1}^1 (-s^2 + 1)s ds = -1 + \left(\frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2} \right)_{-1}^1 = -1$$

$$a_{1,3} = \varphi_3(x_1) - \int_{-1}^1 K(x_1, s) \varphi_3(s) ds = \frac{2}{3} - \int_{-1}^1 (-s^2 + 1) \left(s^2 - \frac{1}{3} \right) ds = \frac{2}{3} + \left(\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} - \frac{s^3}{9} + \frac{s}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{38}{45}$$

$$a_{2,1} = \varphi_1(x_2) - \int_{-1}^1 K(x_2, s)\varphi_1(s)ds = 1 - \int_{-1}^1 (0) \cdot 1 ds = 1$$

$$a_{2,2} = \varphi_2(x_2) - \int_{-1}^1 K(x_2, s)\varphi_2(s)ds = 0 - \int_{-1}^1 (0)s ds = 0$$

$$a_{2,3} = \varphi_3(x_2) - \int_{-1}^1 K(x_2, s)\varphi_3(s)ds = -\frac{1}{3} - \int_{-1}^1 (0)\left(s^2 - \frac{1}{3}\right)ds = -\frac{1}{3}$$

$$a_{3,1} = \varphi_1(x_3) - \int_{-1}^1 K(x_3, s)\varphi_1(s)ds = 1 - \int_{-1}^1 (s^2 - 1)ds = 1 - \left(\frac{s^3}{3} - s\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{7}{3}$$

$$a_{3,2} = \varphi_2(x_3) - \int_{-1}^1 K(x_3, s)\varphi_2(s)ds = 1 - \int_{-1}^1 (s^2 - 1)s ds = 1 - \left(\frac{s^4}{4} - \frac{s^2}{2}\right)\Big|_{-1}^1 = 1$$

$$a_{3,3} = \varphi_3(x_3) - \int_{-1}^1 K(x_3, s)\varphi_3(s)ds = \frac{2}{3} - \int_{-1}^1 (s^2 - 1)\left(s^2 - \frac{1}{3}\right)ds = \frac{2}{3} - \left(\frac{s^5}{5} - \frac{s^3}{3} + \frac{s^3}{9} - \frac{s}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{62}{45}$$

$$f_1 = f(x_1) = 1 + \frac{4}{3}x_1 = -\frac{1}{3}, f_2 = f(x_2) = 1 + \frac{4}{3}x_2 = 1, f_3 = f(x_3) = 1 + \frac{4}{3}x_3 = \frac{7}{3}$$

Оставляем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3 = f_1 \\ a_{21}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3 = f_2 \\ a_{31}C_1 + a_{32}C_2 + a_{33}C_3 = f_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}C_1 - C_2 + \frac{38}{45}C_3 = -\frac{1}{3} \\ C_1 + 0C_2 - \frac{1}{3}C_3 = 1 \\ \frac{7}{3}C_1 + C_2 + \frac{62}{45}C_3 = \frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0$$

Откуда, решение системы уравнений единственно $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0$.

$$z(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x) \equiv 1$$

Покажем, что полученное решение является точным

$$z(x) = 1 = 1 + \frac{4}{3}x + \int_{-1}^1 (xs^2 - x) \cdot 1 \cdot ds = 1 + \frac{4}{3}x + \left(x\frac{s^3}{3} - xs\right)\Big|_{-1}^1 = 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x - 2x = 1$$

Литература

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.

Приложение

Лекция 17. Дифференциальные операторы математической физики в криволинейных ортогональных системах координат

Невырожденные ортогональные преобразования координат. Коэффициенты Ламе.

Задачи математической физики на практике имеют размерность максимум 3. Поэтому рассмотрим произвольное невырожденное преобразование декартовой 3 мерной системы координат в новое 3 мерное координатное пространство.

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3), q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3), q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3), \det \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right) \neq 0, i, j = 1, 2, 3 \quad (17.1)$$

Возьмём дифференциал от (1):

$$\begin{aligned} dq_1 &= \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \\ dq_2 &= \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \\ dq_3 &= \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial q_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \end{aligned} \quad (17.2)$$

Выразим теперь старые координаты через новые. В силу ортогональности $dx_1, dx_2, dx_3, dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}$ - получим длину дифференциала дуги в старой системе координат вдоль координатной линии q_1 .

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2} dq_1 = H_1 dq_1$$

Аналогично, вдоль 2 других координатных линий в новой координатной системе

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2} dq_2 = H_2 dq_2$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2} dq_3 = H_3 dq_3 \quad (17.3)$$

Где обозначены масштабные коэффициенты – коэффициенты Ламе

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right)^2} &= H_1 \\ \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right)^2} &= H_2 \\ \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right)^2} &= H_3 \end{aligned} \quad (17.4)$$

Для координатных систем наиболее часто применяемых в математической физике (цилиндрической и сферической) вычислим коэффициенты Ламе:

1) $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi, x_3 = z, q_1 = r, q_2 = \varphi, q_3 = z, 0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$H_1 = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 + (0)^2} = 1, H_2 = \sqrt{(-r \sin \varphi)^2 + (r \cos \varphi)^2 + (0)^2} = r \quad (17.5)$$

$H_3 = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + (1)^2} = 1$ - в **цилиндрической** системе координат.

2) $x_1 = r \sin(\vartheta) \cos \varphi, x_2 = r \sin(\vartheta) \sin \varphi, x_3 = r \cos(\vartheta), q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$

$0 \leq r, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$H_1 = \sqrt{(\sin(\vartheta) \cos \varphi)^2 + (\sin(\vartheta) \sin \varphi)^2 + (\cos(\vartheta))^2} = 1,$$

$$H_2 = \sqrt{(r \cos(\vartheta) \cos \varphi)^2 + (-r \cos(\vartheta) \sin \varphi)^2 + (-r \sin(\vartheta))^2} = r \quad (17.6)$$

$$H_3 = \sqrt{(-r \sin(\vartheta) \sin \varphi)^2 + (r \sin(\vartheta) \cos \varphi)^2 + (0)^2} = r \sin(\vartheta)$$

- в **сферической** системе координат.

В дальнейшем нам понадобится запись операторов поля - градиента, дивергенции, оператора Лапласа в ортогональных системах координат.

1) В новой ортогональной системе координат для оператора градиента имеем:

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}, \frac{\partial u}{\partial l_2}, \frac{\partial u}{\partial l_3} \right) = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) = \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) u \quad (17.7)$$

В частности, если новая и старая (декартова $\{x_1, x_2, x_3\}$) координатные системы совпадают

$$x_1 = q_1, x_2 = q_2, x_3 = q_3, \text{ то } H_1 = H_2 = H_3 = 1 \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \frac{\partial}{\partial q_2}, \frac{\partial}{\partial q_3} \right) u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u$$

2) Оператор дивергенции векторного поля $\vec{A} = \{A_1(q_1, q_2, q_3), A_2(q_1, q_2, q_3), A_3(q_1, q_2, q_3)\}$,

в старой (декартовой) системе координат есть $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$.

$$\text{С другой стороны, по определению, } \text{div} \vec{A} \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, ds \quad (17.8)$$

где: V - объём тела с гладкой замкнутой поверхностью площади S , ds - дифференциал площади, $\vec{n} = \{n_1(q_1, q_2, q_3), n_2(q_1, q_2, q_3), n_3(q_1, q_2, q_3)\}$ - вектор внешней нормали к дифференциалу площади ds , $\vec{A} \cdot \vec{n}$ - скалярное произведение векторов. Не теряя общности, воспользуемся определением (17.8) для расчёта дивергенции в параллелепипеде:

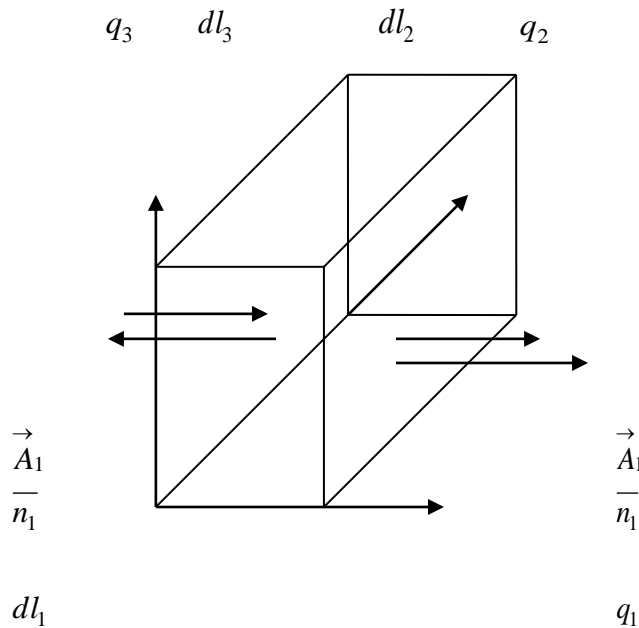


Рис.1 Дивергенция векторного поля вдоль оси q_1 .

Из рисунка 1 видно, что поток векторного поля через две противоположные грани параллелепипеда перпендикулярным оси q_1 равен:

$$\Delta F_1 = \Delta \left(\vec{A}_1 \vec{n}_1 S_1 \right) = \Delta (A_1(q_1, q_2, q_3) dl_2 dl_3) = \Delta (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3 dq_2 dq_3) = \frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3 dq_2 dq_3)}{\partial l_1} dl_1 = \frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3$$

Переменные q_1, q_2, q_3 не зависят друг от друга. Поэтому, дифференциалы $dq_2 dq_3$ можно вынести из - под знака производной $dl_1 = H_1 dq_1$ (17.2). Тогда dl_1 представляет собой движение точки вдоль координатной линии q_1 . Благодаря локальной ортогональности

координатных линий q_1, q_2, q_3 имеем, что частный дифференциал в этом случае равен полному дифференциалу $\partial q_1 = dq_1$, тогда $\partial l_1 = H_1 \partial q_1 = dl_1 = H_1 dq_1$.

Аналогично, поток векторного поля через две другие противоположные пары граней равен:

$$\begin{aligned}\Delta F_2 &= \Delta \left(\vec{A}_2 \vec{n}_2 S_2 \right) = \Delta (A_2(q_1, q_2, q_3) dl_1 dl_3) = \Delta (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3 dq_1 dq_3) = \\ &= \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3 dq_1 dq_3)}{\partial l_2} dl_2 = \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3 \\ \Delta F_3 &= \Delta \left(\vec{A}_3 \vec{n}_3 S_3 \right) = \Delta (A_3(q_1, q_2, q_3) dl_2 dl_1) = \Delta (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1 dq_2 dq_1) = \\ &= \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1 dq_2 dq_1)}{\partial l_3} dl_3 = \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3\end{aligned}$$

Полный поток векторного поля через параллелепипед объёмом $V = dl_1 dl_2 dl_3$ равен:

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 = \left(\frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1)}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3$$

Имеем:

$$\oiint_S \vec{A} \vec{n} ds = \Delta F = \left(\frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1)}{\partial q_3} \right) dq_1 dq_2 dq_3$$

По формуле (7) получим:

$$\begin{aligned}div \vec{A} &\equiv \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \vec{A} \vec{n} ds = \frac{\Delta F}{H_1 dq_1 H_2 dq_2 H_3 dq_3} = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1)}{\partial q_3} \right) \quad (17.9)\end{aligned}$$

Формула (17.9) и описывает дивергенцию векторного поля в произвольной криволинейной системе координат. В частном случае для перехода от декартовой системы координат к декартовой системе координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ и формула (17.9) переходит в

$$\text{хорошо известную формулу } div \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial q_1} + \frac{\partial A_2}{\partial q_2} + \frac{\partial A_3}{\partial q_3} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

В цилиндрической и сферической системах координат получим соответственно:

$$1) \quad div \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (A_r r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z r}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial (A_r r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$2) \quad div \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \left(\frac{\partial (A_r r^2 \sin(\vartheta))}{\partial r} + \frac{\partial A_\vartheta r \sin(\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial A_\varphi r}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (A_r r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial (A_\vartheta \sin(\vartheta))}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

Наконец, мы сможем построить оператор Лапласа в произвольных криволинейных ортогональных системах координатах, используя формулы (17.7), (17.9):

$$\begin{aligned}\Delta u &= div(grad u) = div \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2}, \frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial (A_1(q_1, q_2, q_3) H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2(q_1, q_2, q_3) H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3(q_1, q_2, q_3) H_2 H_1)}{\partial q_3} \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial \left(\left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) H_2 H_3 \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) H_1 H_3 \right)}{\partial q_2} + \frac{\partial \left(\left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) H_2 H_1 \right)}{\partial q_3} \right) = \\
\Delta u &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right)}{\partial q_1} + \frac{\partial \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right)}{\partial q_2} + \frac{\partial \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right)}{\partial q_3} \right) \quad (17.10)
\end{aligned}$$

В частном случае для перехода от декартовой системы координат к декартовой системе координат $H_1 = H_2 = H_3 = 1$ и формула (17.10) переходит в хорошо известную формулу

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial q_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В цилиндрической и сферической системах координат имеем:

$$1) \Delta u = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} + \frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (17.11)$$

$$\begin{aligned}
2) \Delta u &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} \right) = \\
&= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \quad (17.12)
\end{aligned}$$

Формулы (17.11) и (17.12) часто используются при решении эллиптических задач математической физики.

Предметный указатель

задача:

- о трансформации колебаний в правую бегущую волну	38
- о распространении тепла на полупрямой	40
- колебаний круглой мембраны	47
- колебания прямоугольной мембраны	59
- простейшая классическая вариационная	62
- о брахистохроне	67
- Гильберта	69
- Больца	70
- краевая Дирихле в кольце	85
- краевая Дирихле в сферическом слое	92
- об обтекании тела идеальной жидкостью	88

лемма:

- Римана	21
- Жордана	22
- об интегральном синусе	26
- о значении несобственного интеграла от экспоненты с квадратичным полиномом в показателе	39
- об инвариантности класса элементарных функций	58
- Дюбуа-Реймона	63

определение:

- линейной зависимости векторов	6
- определителя Грама	8
- ортогональной системы функций	9
- эквивалентных норм	10
- ряда Лорана	16
- полюса порядка m	16
- нуля порядка m	16
- вычета функции комплексной переменной	16
- радиуса сходимости ряда	16
- ряда Фурье 18	
- дискретного преобразования Фурье	32
- гамма-функции и бета-функции	41
- функции Бесселя	45
- классического ортогонального полинома	52
- полинома Лежандра	56
- полинома Лаггера	56
- полинома Эрмита	56
- краевых условий Дирихле	60
- краевых условий Неймана	60
- локального экстремума	62
- производная функционала по направлению	62
- сопряженной точки	65
- функции Вейерштрасса	66
- усиленного условия Лежандра	66
- терминанта, интегранта	70
- условия трансверсальности	71
- Z -преобразования	74
- свертки двух функций	76

- обратного Z -преобразования	77
- коэффициентов Ламе	107
свойства:	
- запаздывания аргумента	75
- линейность Z - преобразования	75
- опережения аргумента	75
- подобия	76
- свертки Z - преобразования	76
- линейности преобразования Лапласа	80
- растяжения аргумента	80
- теорема запаздывания	81
- изображения производной	81
- изображения интеграла	81
- изображения свертки	82
Теорема:	
- критерий линейной зависимости системы векторов через определитель Грамма	7
- единственность разложения элемента линейного пространства по базису	9
- принцип сжимающих отображений в полном метрическом пространстве	13
- основная теорема вычетов	16
- о разложении периодической функции в ряд Фурье	22
- о разложении непериодической функции в интеграл Фурье	25
- необходимые условия локального экстремума в классической вариационной задаче	63
- необходимые условия локального экстремума в задаче Больца	70
уравнение:	
- цилиндрических функций	44
- Пирсона	52
- Лапласа	58
- теплопроводности	58
- волновое	58
- Эйлера-Лагранжа	63
- Якоби	65
- Фредгольма второго рода	96
формула:	
- коэффициентов разложения евклидова пространства по ортогональному базису	10
- Грина	14
- интеграла Коши	15
- коэффициентов ряда Фурье	19
- коэффициентов интеграла Фурье	25
- дискретного преобразования Фурье	32
- комплексного преобразования Фурье	36-37
- косинус и синус прямого и обратного преобразования Фурье	39
- обобщенного ряда Фробениуса	44
- нормы цилиндрической функций	46
- Родрига	56
- собственных значений КОП	56
- условие Якоби	65
- обратного Z -преобразования	77
- прямого преобразования Лапласа	78
- обратного преобразования Лапласа	79
- Меллина	83
- обобщенная обратного преобразования Лапласа	83
- системы присоединенных многочленов Лежандра	92

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 240 с.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учебное пособие для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. – 7-е изд. – Москва: Бином. Лаб. знаний, 2011. – 636 с. – (Классический университетский учебник). – ISBN 978-5-9963-0449-3.
3. Пикулин, В. П. Практический курс по уравнениям математической физики / В. П. Пикулин, С. И. Похожаев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 208 с. – ISBN 5-94057-148-4.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа: Учебник для вузов. – 6-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит., 1989. – 624 с. – ISBN 5-02-013993-9
5. Свешников, А. Г. Курс высшей математики и математической физики : учеб. для студентов физ. специальностей и специальности "Прикладная математика" / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов; А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – Изд. шестое, стер. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 335 с. – (Курс высшей математики и математической физики; Теория функций комплексной переменной). – ISBN 5-9221-0133-1. – EDN QJKVOT.
6. Свешников, А. Г. Лекции по математической физике : учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлениям "Физика", "Прикладная математика", "Информатика" и специальностям "Физика", "Прикладная математика", "Информатика" / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов; А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – (Классический университетский учебник/ Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова). – ISBN 5-211-04899-7. – EDN QJMXQX.
7. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: Учебник / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 4-е изд., пер. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 324 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-07067-5. – EDN QNHHTK.
8. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Moscow : ООО Издательская фирма "Физико-математическая литература", 2004. – 280 с. – (Курс высшей математики и математической физики; Выпуск 4). – ISBN 978-5-9221-0481-4. – EDN MUWSGL.
9. Алексеев, В. М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи / В. М. Алексеев, Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – Москва: Физматлит, 2008. – 256 с. – ISBN 978-5-9221-0992-5.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов/ Б.П. Демидович. –Москва: АСТ,2010. – 558 с. – ISBN 978-5-17-010062-0.
11. Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: Учеб. Пособие для вузов/ под редакцией Л.Д. Кудрявцева. Санкт – Петербург.1994. 496 с.
12. Некоторые методы уравнения теплопроводности в параллелепипеде, полученные методом быстрых разложений/А.Д. Чернышев, В.В. Горяинов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 07-

- 09 декабря 2020 года/ФБГОУ ВО “Воронежский государственный университет”. – Воронеж: Научно-исследовательские публикации, 2021. – С. 1461-1473.
13. Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки/ А.Д. Чернышев, В.В. Горяйнов, С.В. Кузнецов, О.Ю. Никифорова//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. №70. – С. 127-142. DOI 10.17223/19988621/70/11.
 14. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [учебное пособие] / А. Ф. Филиппов; А. Ф. Филиппов. – Изд. 3-е. – Москва: URSS, 2009. – ISBN 978-5-397-00658-3.
 15. Пастухов Ю.Ф. “ Необходимые условия в обратной вариационной задаче ”, Фундаментальная и прикладная математика, 7:1(2001), 285-288.
 16. Численные методы. Лекции. Численный практикум: учебное пособие / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова [и др.]. – 3-е издание, дополненное. – Новополюцк. 2021. – 237 с.
 17. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур) С добавлением Н.А. Колобова, - М.:Наука, 1987, 352 с.
 18. Сидлер, И. В. О численном решении начально-краевой задачи для гиперболической системы в модели гидравлического удара / И. В. Сидлер // Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения (DYSC 2023): материалы 5-й Международной конференции, Иркутск, 18–23 сентября 2023 года. – Иркутск: Иркутский государственный университет, 2023. – С. 209-212. – EDN UDJJGX.
 19. Волосов, К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью “мелкой воды” на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.
 20. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н.А. Колобова, - М.:Наука, 1987, 352 с.
 21. Волосов, К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
 22. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде// Дифференциальные уравнения, 2007. Т.43. № 4. С. 492-497.
 23. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме// Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т. 7. № 26. С. 13-20.
 24. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными// Сибирский журнал индустриальной математики 2008. Т. 11, № 2(34). С. 29-39.
 25. Волосова Н.К., Волосова А.К., Волосов К.А. Интегрирование уравнений Гарри Дима и Кортевега де Вриза в параметрической форме. Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2017. № 4. С. 194-214.
 26. Вдовина Е.К. , Пугина Л.В., Волосов К.А. Моделирование пульсирующих режимов динамики свертывания крови//Математическое моделирование. 2014. Т. 26. № 12. С. 14-32
 27. Вдовина Е.К., Волосов К.А. Моделирование спиральных волн в процессе свертывания крови// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 3. С. 14-24.

28. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными//Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008 . Т.11. № 2(34). С.29-39.
29. Михеев, Р. А. Компьютерное нахождение четырехэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец / Р. А. Михеев, А. А. Петров // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 46-52. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-46-52. – EDN RNQCTS.
30. Иванов, Г. Г. Аппарат производных чисел и возможности применения / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 3(54). – С. 5-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-3-5-18. – EDN XUYVBD.
31. Половицкий, Я. Д. О конечных группах с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе / Я. Д. Половицкий, Т. М. Коневских // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 3(50). – С. 5-16. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-3-5-16. – EDN ТМКВНҚ.
32. Половицкий, Я. Д. Одно обобщение минимальных нециклических групп / Я. Д. Половицкий, А. А. Волочков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 16-22. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-16-22. – EDN XIWPSL.
33. Половицкий, Я. Д. О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп / Я. Д. Половицкий, Т. М. Коневских // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 23-31. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-23-31. – EDN OUOTWJ.
34. Половицкий, Я. Д. О максимальных антицепях нециклических подгрупп конечных групп / Я. Д. Половицкий, А. А. Волочков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 16-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-16-24. – EDN UVGAZC.
35. Половицкий, Я. Д. Конечные нильпотентные группы d -ширина которых не превосходит трех / Я. Д. Половицкий, А. А. Волочков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 25-30. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-25-30. – EDN XUOIOD.
36. Половицкий, Я. Д. Группы, насыщенные инвариантными подгруппами / Я. Д. Половицкий, Т. М. Коневских // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 31-37. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-31-37. – EDN XUOIOI.
37. Половицкий, Я. Д. Конечные группы с одним условием инцидентности, связанным с обращением теоремы Лагранжа. Часть 1 / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 2(37). – С. 5-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-2-5-18. – EDN ZXFPFB.
38. Половицкий, Я. Д. Конечные группы с некоторыми условиями инцидентности, связанными с теоремой Лагранжа / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 3(34). – С. 5-20. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-3-5-20. – EDN XAYUAN.
39. Симонов, П. М. Локально насыщенные σ -подалгебры, локально инъективные отображения и N -условие Лузина / П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 4(35). – С. 11-19. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-4-11-19. – EDN VLAFTO.
40. Симонов, П. М. Предельно ненасыщенные σ -подалгебры, антиинъективные отображения и диффузность / П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 4(35). – С. 20-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-4-20-24. – EDN XUXJIL.

41. Половицкий, Я. Д. d -ширина некоторых групп. Конечные группы d -ширины 5 / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 1(24). – С. 13-24. – EDN SIGWDR.
42. Вечтомов, Е. М. Простые идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0, \infty]$ -значных функций / Е. М. Вечтомов, Н. В. Шалагинова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 1(24). – С. 5-12. – EDN SIGWDH.
43. Половицкий, Я. Д. О максимальных антицепях решеток делителей натуральных чисел некоторых видов / Я. Д. Половицкий, А. А. Волочков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3(26). – С. 5-12. – EDN SXTVHL.
44. Фаерштейн, С. И. Бесконечные периодические группы с конечным множеством классов неинвариантных сопряженных подгрупп / С. И. Фаерштейн, И. С. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1(13). – С. 10-12. – EDN PZQWAB.
45. Половицкий, Я. Д. Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями максимальных подгрупп / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 2(21). – С. 22-35. – EDN RAIOMX.
46. Половицкий, Я. Д. Конечные и некоторые почти полные группы, в которых одинаковы пересечения любых двух максимальных подгрупп / Я. Д. Половицкий, А. А. Волочков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 3(22). – С. 8-14. – EDN RPSSUL.
47. Половицкий, Я. Д. Некоторые классы конечных групп с примарными пересечениями неинцидентных подгрупп / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – № 1(9). – С. 5-18. – EDN PCVJMZ.
48. Фаерштейн, С. И. Локально конечные непримарные группы с заданными ограничениями на пересечения неинвариантных подгрупп / С. И. Фаерштейн, И. С. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – № 1(9). – С. 24-32. – EDN PCVJOD.
49. Фаерштейн, С. И. Конечные непростые группы с некоторыми ограничениями на факторгруппы / С. И. Фаерштейн, И. С. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – № 3(11). – С. 9-11. – EDN PJHWXD.
50. Поляков, С. В. О тензорных квадратах неприводимых представлений почти простых групп с цоколем, изоморфным $L_2(q)$ / С. В. Поляков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 1(5). – С. 4-9. – EDN NTUNTL.
51. Фаерштейн, С. И. О непериодических группах / С. И. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 1(5). – С. 20-22. – EDN NTUNUF.
52. Фаерштейн, С. И. Конечные непримарные группы, все собственные факторгруппы которых примарны / С. И. Фаерштейн, И. С. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3(7). – С. 17-18. – EDN OIVSET.
53. Митин, В. Ю. Использование гомотопического метода для непрерывных конечномерных векторных полей в пространствах любой размерности / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 2(6). – С. 8-9. – EDN OIVRYP.
54. Половицкий, Я. Д. Конечные разрешимые группы с одним условием для пересечений неинцидентных подгрупп / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского

- университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 2(6). – С. 10-21. – EDN OIVRYZ.
55. Фаерштейн, С. И. К вопросу о классах неинвариантных сопряженных подгрупп / С. И. Фаерштейн // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 2(6). – С. 22-24. – EDN OIVRZJ.
56. Половицкий, Я. Д. Группы с условием инцидентности для ненильпотентных (неразрешимых) подгрупп / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 1(1). – С. 24-28. – EDN LGKJOT.
57. Половицкий, Я. Д. Конечные группы ранга инцидентности 4 / Я. Д. Половицкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 2(2). – С. 4-14. – EDN MNLKJJ.
58. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в "закрытой" кювете / Н. К. Волосова, М. А. Басараб, А. К. Волосова [и др.] // Некоторые Актуальные проблемы современной математики математического образования: Материалы 74-й научной КОНФЕРЕНЦИИ «ГЕРЦЕНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ 2021», Санкт-Петербург, 05–10 апреля 2021 года / Российская Академия Образования; Академия информатизации образования; Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Кафедра математического анализа, Кафедра компьютерной инженерии и программной техники. – Санкт-Петербург: ООО "Издательство ВВМ", 2021. – С. 208-213. – EDN HREUQK.
59. Бузмакова, М. М. модель организации индивидуальной образовательной траектории студента вуза / М. М. Бузмакова // Методы и технологии обучения в вузе в условиях цифровой трансформации образования : Сборник статей по материалам Всероссийской (с международным участием) научно-методической конференции, Пермь, 18–19 мая 2023 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2023. – С. 105-109. – EDN VWOIPS.
60. Бузмакова, М. М. Моделирование структуры полимерных полидисперсных сред методами теории перколяции / М. М. Бузмакова, С. В. Русаков, К. А. Эберт // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023) : Материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. – С. 26-28. – EDN XGKAIK.
61. Вдовин, И. Е. Компьютерное моделирование случайной плотной упаковки несжимаемых окружностей на плоскости / И. Е. Вдовин, М. М. Бузмакова // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023): Материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. – С. 34-36. – EDN XWGOTH.
62. Бузмакова, М. М. Применение технологий параллельных вычислений для решения перколяционной задачи k-меров в континууме / М. М. Бузмакова, П. Д. Пучинина, С. В. Русаков // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии : Труды XXIII Международной конференции, Нижний Новгород, 13–16 ноября 2023 года. – Нижний Новгород: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2023. – С. 37-40. – EDN HHWZLC.
63. Нестеров, А. А. Параллельные вычисления перколяционных задач на двумерной решетке / А. А. Нестеров, М. М. Бузмакова // Материалы XXIII Международной

- конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023): Материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. – С. 70-71. – EDN PSMSTS.
64. Вдовин, И. Е. Компьютерное моделирование случайной плотной упаковки несжимаемых окружностей на плоскости / И. Е. Вдовин, М. М. Бузмакова // Актуальные проблемы математики, механики и информатики: Сборник статей по материалам студенческой конференции, Пермь, 24 апреля – 20 2023 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2023. – С. 85-89. – EDN EHUOBR.
65. Безматерных, А. Е. Распознавание изображений с использованием подходов теории перколяции / А. Е. Безматерных, М. М. Бузмакова // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023) : Материалы конференции, с. Дивноморское, Краснодарский край, 04–10 сентября 2023 года. – Москва: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2023. – С. 96-98. – EDN ORJMVA.
66. Пермский международный форум "Наука и глобальные вызовы XXI века" / М. М. Бузмакова, Е. Ю. Никитина, А. В. Черников, Л. Н. Ясницкий // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 4(59). – С. 5-8. – EDN WUMBNC.
67. Теплых, П. Д. Расчет характеристик перколяционной модели it -меров на плоскости / П. Д. Теплых, М. М. Бузмакова // Актуальные проблемы математики, механики и информатики: сборник статей по материалам студенческой конференции, Пермь, 25 мая – 10 2021 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2021. – С. 126-131. – EDN LMJVXI.
68. Бузмакова, М. М. Моделирование перколяционной системы k -меров на плоскости / М. М. Бузмакова, П. Д. Теплых // Математика и междисциплинарные исследования - 2021 : Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 18–20 октября 2021 года / Гл. редактор А.П. Шкарапута. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2021. – С. 40-43. – EDN ZPLNGQ.
69. Романова, М. П. Модель структуры тонкой пленки эпоксидной смолы, модифицированной углеродными нанотрубками, с учетом наличия ван-дер-Ваальсова взаимодействия / М. П. Романова, М. М. Бузмакова // Актуальные проблемы математики, механики и информатики : сборник статей по материалам студенческой конференции, Пермь, 25 мая – 10 2021 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2021. – С. 52-56. – EDN VCPMRU.
70. Боков, К. А. Компьютерное моделирование перколяции k -меров на кубической решетке / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2020 : Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 12–14 октября 2020 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. – С. 262-267. – EDN EJIEGH.
71. Романова, М. П. Модель структуры тонкой пленки эпоксидной смолы, модифицированной углеродными нанотрубками, с учетом наличия межфазных областей / М. П. Романова, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2020: Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 12–14 октября

- 2020 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. – С. 295-300. – EDN MCRWFU.
72. Теплых, П. Д. Континуальная перколяция k -меров на плоскости / П. Д. Теплых, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2020 : Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 12–14 октября 2020 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2020. – С. 301-307. – EDN EHFJKJ.
73. Бузмакова, М. М. Компьютерное моделирование джемминга для перколяционной задачи Накамуры / М. М. Бузмакова, К. А. Боков // Математические методы и информационно-технические средства: Материалы XV Всероссийской научно-практической конференции, Краснодар, 21 июня 2019 года / Редколлегия: И.Н. Старостенко [и др.]. – Краснодар: Федеральное государственное казенное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Краснодарский университет Министерства внутренних дел Российской Федерации", 2019. – С. 27-31. – EDN NYPZEF.
74. Никитин, И. В. Моделирование структуры полимера, модифицированного углеродными нанотрубками / И. В. Никитин, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2019: Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 15–18 мая 2019 года / гл. ред. А. П. Шкарапута. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 281-285. – EDN GCXULN.
75. Решетникова, Е. А. Алгоритм равномерного распределения k -меров в пространстве / Е. А. Решетникова, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2019 : Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 15–18 мая 2019 года / гл. ред. А. П. Шкарапута. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 319-323. – EDN GRMXRR.
76. Романова, М. П. Континуальная модель структуры тонкой пленки полимера, модифицированной углеродными нанотрубками / М. П. Романова, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2019: Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 15–18 мая 2019 года / гл. ред. А. П. Шкарапута. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 324-329. – EDN XYEDBL.
77. Боков, К. А. Джемминг k -меров разной формы на квадратной решетке / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2019: Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 15–18 мая 2019 года / гл. ред. А. П. Шкарапута. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 50-54. – EDN XENYHD.
78. Боков, К. А. Перколяционная модель структуры тонкой пленки эпоксидной смолы, модифицированной углеродными нанотрубками, с учетом межфазных областей / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2018): Сборник трудов конференции, Москва, 20–23 ноября 2018 года. – Москва: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук, 2019. – С. 537-540. – EDN YWLFID.
79. Семенов, В. А. Исследование проводимости эпоксидной смолы, модифицированной углеродными нанотрубками, при изменении направления

- электрического тока / В. А. Семенов, С. В. Русаков, М. М. Бузмакова // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред : Сборник тезисов 9-й всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, посвященной 30-летию ИПРИМ РАН, Москва, 19–21 ноября 2019 года. – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Сам Полиграфист", 2019. – С. 86. – EDN QUCVEN.
80. Семенов, В. А. Исследование анизотропной проводимости эпоксидного полимера, модифицированного углеродными нанотрубками / В. А. Семенов, С. В. Русаков, М. М. Бузмакова // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 18–19 декабря 2018 года. – Москва: Институт прикладной механики РАН, 2019. – С. 92-95. – EDN YYQLSP.
81. Бузмакова, М. М. Континуальная перколяционная модель тонкой пленки полимера, модифицированного углеродными нанотрубками / М. М. Бузмакова, М. П. Романова // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов, электронный ресурс, Тюмень, 18 апреля 2019 года / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Тюменский государственный университет, Институт математики и компьютерных наук. Том Выпуск 17. – Тюмень: Тюменский государственный университет, 2019. – С. 13-18. – EDN ICLIYA.
82. Никитин, И. В. Моделирование структуры полимера, модифицированного углеродными нанотрубками с учетом наличия межфазного слоя / И. В. Никитин, М. М. Бузмакова // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов, электронный ресурс, Тюмень, 18 апреля 2019 года / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Тюменский государственный университет, Институт математики и компьютерных наук. Том Выпуск 17. – Тюмень: Тюменский государственный университет, 2019. – С. 19-23. – EDN BKQSRS.
83. Решетникова, Е. А. Сравнительный анализ алгоритмов равномерного распределения k-меров в пространстве / Е. А. Решетникова, М. М. Бузмакова // Математическое и информационное моделирование : сборник научных трудов, электронный ресурс, Тюмень, 18 апреля 2019 года / Министерство науки и высшего образования Российской Федерации; Тюменский государственный университет, Институт математики и компьютерных наук. Том Выпуск 17. – Тюмень: Тюменский государственный университет, 2019. – С. 7-12. – EDN WBMVAY.
84. Боков, К. А. Моделирование структуры полимерного нанокompозита, содержащего углеродные нано трубки / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Современные проблемы физики и технологий : VIII-я Международная молодежная научная школа-конференция, Москва, 15–20 апреля 2019 года. Том Часть 2. – Москва: Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", 2019. – С. 230-231. – EDN OPVCMS.
85. Никитин, И. В. Нейросетевое моделирование прогнозирования вероятности возникновения перколяционного кластера / И. В. Никитин, Е. А. Решетникова, М. М. Бузмакова // Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века: Сборник статей по материалам Четвертой всероссийской научно-практической конференции, проводимой в рамках Пермского естественнонаучного форума «Математика и глобальные вызовы XXI века», Пермь, 21–23 мая 2019 года / Пермский государственный национальный исследовательский университет. Том Часть II. – Пермь: Пермский

- государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 145-150. – EDN UVCJET.
86. Решетникова, Е. А. Прогнозирование концентрации k -меров, необходимой для достижения порога перколяции с помощью нейросетевой системы / Е. А. Решетникова, И. В. Никитин, М. М. Бузмакова // Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века: Сборник статей по материалам Четвертой всероссийской научно-практической конференции, проводимой в рамках Пермского естественнонаучного форума «Математика и глобальные вызовы XXI века», Пермь, 21–23 мая 2019 года / Пермский государственный национальный исследовательский университет. Том Часть II. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2019. – С. 150-155. – EDN TZMRGG.
87. Бузмакова, М. М. Экспериментальное исследование реокинетики эпоксидного связующего, модифицированного фуллеренами C60 / М. М. Бузмакова, В. Г. Гилев, С. В. Русаков // Вестник Пермского университета. Физика. – 2019. – № 2. – С. 35-40. – DOI 10.17072/1994-3598-2019-2-35-40. – EDN JMTEXL.
88. Боков, К. А. Моделирование нанокompозита, получаемого путем модификации эпоксид-полимера наночастицами / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Высокие технологии, определяющие качество жизни : материалы II Международной научной конференции, Пермь, 17–19 сентября 2018 года / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2018. – С. 154-156. – EDN YQFYJN.
89. Боков, К. А. Перколяционная модель структуры тонкой пленки полимера, модифицированной углеродными нанотрубками / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Математика и междисциплинарные исследования - 2018: Материалы Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием, Пермь, 14–19 мая 2018 года. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2018. – С. 155-157. – EDN UZSBVW.
90. Бузмакова, М. М. Реологические свойства эпоксидной композиции модифицированной фуллеренами / М. М. Бузмакова, В. Г. Гилев, С. В. Русаков // Высокие технологии, определяющие качество жизни : материалы II Международной научной конференции, Пермь, 17–19 сентября 2018 года / Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2018. – С. 156-159. – EDN VOFFCC.
91. Боков, К. А. Компьютерное моделирование перколяции k -меров на квадратной решетке / К. А. Боков, М. М. Бузмакова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 51-55. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-51-55. – EDN XMHXWP.
92. Романова, М. П. Алгоритм диспергирования углеродных нанотрубок в тонкой пленке полимера / М. П. Романова, М. М. Бузмакова // Математическое моделирование в естественных науках. – 2018. – Т. 1. – С. 260-264. – EDN VJMQSH.
93. Бузмакова, М. М. Компьютерное моделирование структуры эпоксидной смолы, модифицированной фуллеренами / М. М. Бузмакова // Морские интеллектуальные технологии. – 2017. – № 4-3(38). – С. 189-193. – EDN YPLAOG.
94. Бузмакова, М. М. Алгоритмы диспергирования частиц в неупорядоченной среде / М. М. Бузмакова, С. В. Русаков // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 7-2. – С. 213-217. – EDN WGCFXL.

95. Иванов, Г. Г. Исследование почти периодических решений дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 4(63). – С. 22-35. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-22-35. – EDN WYUUAS.
96. Иванов, Г. Г. Компактность в пространстве квази абсолютно непрерывных функций / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 3(62). – С. 13-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-3-13-18. – EDN LUSSLH.
97. Иванов, Г. Г. Стабилизация программных движений систем переменной структуры / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 2(61). – С. 16-28. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-2-16-28. – EDN CLLIVI.
98. Обобщение метода Петрова-Галеркина для решения системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 5-14. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-5-14. – EDN KQEIXG.
99. Гусаренко, С. А. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом / С. А. Гусаренко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 15-29. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-15-29. – EDN UBCKZF.
100. Иванов, В. Н. Итерационный метод решения систем линейных алгебраических уравнений с положительно полуопределенными матрицами системы / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 30-46. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-30-46. – EDN NKOPPN.
101. Иванов, Г. Г. Исследование решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2023. – № 1(60). – С. 47-53. – DOI 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53. – EDN MIEIEA.
102. Иванов, Г. Г. Теорема об области асимптотической устойчивости и ее приложения / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 1(56). – С. 5-13. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-1-5-13. – EDN СТРОУМ.
103. Шеремет, Г. Г. Геометрическое пространство, получающееся "склеиванием" трехмерного евклидова пространства с помощью группы, являющейся прямым произведением трех подгрупп параллельных переносов / Г. Г. Шеремет, З. И. Андреева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 1(56). – С. 14-21. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-1-14-21. – EDN PQLEGL.
104. Агамалиева, А. И. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной граничной задаче управления динамикой популяции / А. И. Агамалиева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 5-13. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-5-13. – EDN NITQOZ.
105. Еленская, Е. Ю. Множества в пополнении нормированных пространств / Е. Ю. Еленская, Ю. Н. Еленский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 26-30. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-26-30. – EDN НТКОКЛ.
106. Иванов, Г. Г. Об устойчивости решений системы линейных дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 2(57). – С. 31-39. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-2-31-39. – EDN LBONGE.

107. Шеремет, Г. Г. Склеивание" трехмерного евклидова пространства с помощью циклической группы, порожденной осевой скользящей симметрией / Г. Г. Шеремет, З. И. Андреева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2022. – № 3(58). – С. 11-17. – DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-11-17. – EDN HPIPAL.
108. Мансимов, К. Б. О квазисобых управлениях в дискретных системах с запаздыванием / К. Б. Мансимов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 3(54). – С. 19-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-3-19-24. – EDN IQEYTE.
109. Кислицын, В. Д. Описание вязкоупругих свойств низко- и высоконаполненных эластомерных нанокомпозитов / В. Д. Кислицын, К. А. Мохирева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2021. – № 4(55). – С. 19-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2021-4-19-24. – EDN NLDDUQ.
110. Андреева, З. И. Геометрии, развертывающиеся на трехмерное евклидово пространство / З. И. Андреева, Г. Г. Шеремет // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 1(48). – С. 5-12. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-1-5-12. – EDN SLORLL.
111. Мансимов, К. Б. Квазисобые управления в задачах оптимального управления, описываемые гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями / К. Б. Мансимов, В. Г. Рзаева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 1(48). – С. 13-20. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-1-13-20. – EDN WBAUNT.
112. Иванов, Г. Г. Системы с транзисторными ключами / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 14-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-14-18. – EDN KXCZUY.
113. Лутманов, С. В. Вывод тяжелой материальной точки на базовую траекторию при наличии геометрических ограничений на дополнительные управления / С. В. Лутманов, О. А. Хотько // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 19-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-19-24. – EDN ETZDNU.
114. Макеев, Н. Н. К теории гамильтоновых систем со связями / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 25-31. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-25-31. – EDN BEFDEN.
115. Полосков, И. Е. Расчет характеристик ускоренного движения автомобиля по дороге со случайным микропрофилем / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2020. – № 2(49). – С. 32-38. – DOI 10.17072/1993-0550-2020-2-32-38. – EDN ADSMIF.
116. Митин, В. Ю. Фрактальный анализ данных рельефа местности на основе метода минимального покрытия / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-5-10. – EDN SYLLPH.
117. Носков, В. И. Геометризация классических полей в модели вложенных пространств / В. И. Носков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 11-23. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-11-23. – EDN ZYLJKH.
118. Панов, В. Ф. Вектор поляризации электромагнитного излучения во Вселенной типа Гёделя / В. Ф. Панов, В. Н. Павелкин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 24-26. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-24-26. – EDN SNMDNH.
119. Пенский, О. Г. Математические модели диалектики виртуального мира / О. Г. Пенский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика.

- Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 27-35. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-27-35. – EDN VKVWTQ.
120. Полосков, И. Е. Схема вычисления ковариационных функций векторов состояния нестационарных линейных стохастических дифференциальных систем с запаздыванием / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 36-45. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-36-45. – EDN MFJAWM.
121. Фиговский, О. Л. Строительные артиллерийские орудия: технические решения и результаты эксплуатации / О. Л. Фиговский, О. Г. Пенский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 2(45). – С. 55-59. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-2-55-59. – EDN YWOQIK.
122. Периодические решения дифференциальных уравнений / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, В. С. Королев, Е. А. Селицкая // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 3(46). – С. 5-15. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-3-5-15. – EDN QAJIVP.
123. Гаришин, О. К. Структурная модель образования микротяжей при деформировании наполненных эластомеров / О. К. Гаришин, А. К. Соколов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 5-12. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-5-12. – EDN WWNVCR.
124. Иванов, В. Н. Матричные уравнения движения систем твердых тел в гамильтоновых переменных. Системы с замкнутыми цепями / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 13-20. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-13-20. – EDN JDALUN.
125. Комар, Л. А. Перестройка волнообразного рельефа упругого слоя под действием нагрузки / Л. А. Комар, А. Л. Свистков, А. Ю. Беляев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 21-29. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-21-29. – EDN ELZHGO.
126. Кувшинова, Е. В. Этап ранней инфляции эволюции Вселенной / Е. В. Кувшинова, О. В. Сандакова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 30-33. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-30-33. – EDN OTVYFS.
127. Кулаков, Ф. М. Дистанционное управление манипуляционными роботами / Ф. М. Кулаков, Г. В. Алферов, П. А. Ефимова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 34-43. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-34-43. – EDN VIRJHN.
128. Кусяков, А. Ш. Проектирование композитных стрингерных пластин / А. Ш. Кусяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 44-48. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-44-48. – EDN ANOPNY.
129. Макеев, Н. Н. Перманентные вращения твердого тела в обобщенном силовом поле / Н. Н. Макеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 49-55. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-49-55. – EDN YOPOLB.
130. Полосков, И. Е. Приближенное решение одного класса нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных методом расширения пространства состояний / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 56-61. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-56-61. – EDN PLQHMG.
131. Попов, И. П. Резонансы сил и скоростей / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 62-66. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-62-66. – EDN BYWOOW.

132. Чирков, М. В. Моделирование управления иммунным ответом в условиях неопределенности на основе клинических данных / М. В. Чирков, С. В. Русаков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2019. – № 4(47). – С. 67-71. – DOI 10.17072/1993-0550-2019-4-67-71. – EDN IEKTQZ.
133. Гунин, В. И. Вихревая гидродинамика: новый подход к моделированию геосистем / В. И. Гунин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 5-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-5-18. – EDN XMHXRJ.
134. Лутманов, С. В. Сравнительный анализ результатов управления динамической системой, линеаризованной в окрестности базового движения, по критериям "минимум энергии" и "минимум силы" / С. В. Лутманов, Т. Ю. Кучкова, В. А. Овчинников // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 19-26. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-19-26. – EDN ORLLOH.
135. Павелкин, В. Н. Нестационарная космологическая модель с метрикой типа Геделя в теории Эйнштейна-Картана / В. Н. Павелкин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 27-31. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-27-31. – EDN XMHXRZ.
136. Пенский, О. Г. Простейшие математические модели пропаганды и контрпропаганды / О. Г. Пенский, Н. В. Ощепкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 32-35. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-32-35. – EDN XMHXSH.
137. Полосков, И. Е. Построение спектральной плотности решения линейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с постоянными запаздываниями / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 36-45. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-36-45. – EDN UOALAO.
138. Чечулин, В. Л. О простых математических моделях роста культурных растений / В. Л. Чечулин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 1(40). – С. 46-50. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-1-46-50. – EDN XMHXVB.
139. Андреева, З. И. Равномерно - разрывные подгруппы группы движений евклидова n - мерного пространства / З. И. Андреева // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-5-10. – EDN XUOINF.
140. Еленская, Е. Ю. Об одной краевой задаче, сводящейся к уравнению с разрывным оператором / Е. Ю. Еленская, Ю. Н. Еленский // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 11-15. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-11-15. – EDN XUOINN.
141. Симонов, П. М. Теорема Боля-Перрона и обратная к ней об асимптотической устойчивости для гибридных линейных систем с последствием / П. М. Симонов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 2(41). – С. 38-43. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-2-38-43. – EDN XUOIOY.
142. Иванов, Г. Г. Производные числа функций одной переменной / Г. Г. Иванов, Г. В. Алферов, П. А. Горовенко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 3(42). – С. 5-19. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-3-5-19. – EDN YMJSUX.
143. Симонов, П. М. Принцип максимума в задачах оптимального управления процессами, описываемыми гибридными функционально-дифференциальными уравнениями / П. М. Симонов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 3(42). – С. 20-25. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-3-20-25. – EDN VKVNFO.

144. Гусаренко, С. А. О разрешимости квадратичных вариационных задач с линейными ограничениями / С. А. Гусаренко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2018. – № 4(43). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2018-4-5-10. – EDN YRJEAX.
145. Симонов, П. М. Условия действия и ограниченности операторов внутренней суперпозиции с весом в пространстве функций на полуоси / П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 1(36). – С. 5-12. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-1-5-12. – EDN YORJAP.
146. Чудинов, К. М. Признаки осцилляции линейных уравнений с последствием / К. М. Чудинов, В. В. Малыгина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 2(37). – С. 19-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-2-19-24. – EDN ZXFPPL.
147. Симонов, П. М. Обзор результатов по теории линейных порядково непрерывных операторов в полуупорядоченных пространствах измеримых функций (Посвящается 95-летию со дня рождения профессора Н.В. Азбелева и памяти старшего научного сотрудника А.В. Чистякова) / П. М. Симонов, А. В. Чистяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 3(38). – С. 27-48. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-3-27-48. – EDN ZXNXBT.
148. Кандаков, А. А. Об устойчивости автономных разностных уравнений четвертого порядка / А. А. Кандаков, К. М. Чудинов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 4(39). – С. 5-10. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-4-5-10. – EDN ZXNXFZ.
149. Чудинов, К. М. Об осцилляции линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями / К. М. Чудинов, В. В. Малыгина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – № 4(39). – С. 11-18. – DOI 10.17072/1993-0550-2017-4-11-18. – EDN ZXNXGJ.
150. Баландин, А. С. О разрешимости на оси автономных дифференциальных уравнений с последствием / А. С. Баландин, В. В. Малыгина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 7-13. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-7-13. – EDN WLSNKF.
151. Дружинина, О. В. О развитии метода функций Ляпунова для дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием / О. В. Дружинина, Н. О. Седова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 14-20. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-14-20. – EDN WLSNKP.
152. Искандаров, С. Об оценках снизу решений и их производных линейного интегро - дифференциального уравнения четвертого порядка типа Вольтерра / С. Искандаров, Г. Т. Халилова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 21-29. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-21-29. – EDN WLSNKZ.
153. Кирчанов, В. С. Уравнения дробного порядка для диффузии и релаксации в фрактальных средах / В. С. Кирчанов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 30-37. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-30-37. – EDN WLSNLJ.
154. Плаксина, В. П. Достаточные условия существования решения краевой задачи для одного квазилинейного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка / В. П. Плаксина, И. М. Плаксина, Э. В. Плехова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 38-43. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-38-43. – EDN WLSNLT.

155. Попов, И. П. Интегрирование градиента в R^3 / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 44-46. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-44-46. – EDN WLSNMD.
156. Родина, Л. И. О сосуществовании циклов и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами / Л. И. Родина, И. И. Тютеев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 47-49. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-47-49. – EDN WLSNMN.
157. Седова, С. М. Устойчивость одного дифференциально-разностного уравнения с одним запаздыванием и с постоянными коэффициентами / С. М. Седова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 50-55. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-50-55. – EDN WLSNMX.
158. Симонов, П. М. Теорема Боля-Перрона для гибридных линейных систем с последствием / П. М. Симонов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 56-60. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-56-60. – EDN WLSNNH.
159. Юмагулов, М. Г. О построении областей устойчивости решений дифференциальных уравнений, зависящих от параметров / М. Г. Юмагулов, Л. С. Ибрагимова, И. Ж. Фанина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 2(33). – С. 61-66. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-2-61-66. – EDN WLSNNR.
160. Рекка, Р. А. Построение приближенного решения одного класса нелинейных уравнений методом осциллирующей функции / Р. А. Рекка, Е. Ю. Рекка, Ю. Ю. Фролов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 3(34). – С. 21-24. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-3-21-24. – EDN XAYUAR.
161. Сабатулина, Т. Л. Об осциллирующих решениях автономных дифференциальных уравнений с последствием / Т. Л. Сабатулина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 3(34). – С. 25-31. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-3-25-31. – EDN XAYUBV.
162. Черепенников, В. Б. Гладкие решения некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений / В. Б. Черепенников // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – № 3(34). – С. 32-36. – DOI 10.17072/1993-0550-2016-3-32-36. – EDN XAYUBL.
163. Малыгина, В. В. Об устойчивости одной модели динамики популяций с последствием / В. В. Малыгина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 1(28). – С. 5-10. – EDN UHSYXR.
164. Седова, С. М. Устойчивость одного дифференциально-разностного уравнения с постоянным коэффициентом / С. М. Седова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 1(28). – С. 11-16. – EDN UHSYUB.
165. Гусаренко, С. А. О разрешимости сингулярного линейного дифференциального уравнения с опережающим аргументом / С. А. Гусаренко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 2(29). – С. 5-8. – EDN UHSZEP.
166. Куликов, А. Ю. Об устойчивости линейных функционально-дифференциальных уравнений / А. Ю. Куликов, В. В. Малыгина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 2(29). – С. 9-14. – EDN UHSZEZ.
167. Мулюков, М. В. Устойчивость линейного автономного осциллятора с запаздывающей обратной связью / М. В. Мулюков // Вестник Пермского

- университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 5-11. – EDN VHLMNZ.
168. Механические свойства синтетических матриц трахеи на основе полимерного ультраволокнистого материала / М. В. Киселевский, Н. Ю. Анисимова, А. Д. Шепелев [и др.] // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 12-18. – EDN VHLMOJ.
169. Полосков, И. Е. Некоторые классы дифференциальных систем со случайными запаздываниями и методы их исследования / И. Е. Полосков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 19-36. – EDN VHLMOT.
170. Попов, И. П. Механические аналоги реактивной мощности / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 37-39. – EDN VHLMPP.
171. Стрелкова, Н. А. Об управлении одной системой второго порядка в сопротивляющейся среде / Н. А. Стрелкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3(30). – С. 46-51. – EDN TECNYS.
172. Абдуллаев, А. Р. Об одном обобщенном уравнении пантографа / А. Р. Абдуллаев, Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 4(31). – С. 5-10. – EDN VHLGDL.
173. Малыгина, В. В. Об осциллирующих и знакоопределенных решениях одного класса функционально-дифференциальных уравнений / В. В. Малыгина, Т. Л. Сабатулина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 4(31). – С. 11-15. – EDN VH LGDV.
174. Иванов, В. Н. Численные методы исследования механических систем с дополнительными связями / В. Н. Иванов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 4(31). – С. 16-27. – EDN VH LG EF.
175. Абдуллаев, А. Р. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциального уравнения второго порядка / А. Р. Абдуллаев, Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 2(25). – С. 5-9. – EDN SNFDVT.
176. Попов, И. П. О мерах механического движения / И. П. Попов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3(26). – С. 13-15. – EDN SXTVHV.
177. Тарунин, Е. Л. Задача электростатики о взаимодействии заряженных шаров на близких расстояниях / Е. Л. Тарунин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 3(26). – С. 16-27. – EDN SXTVIF.
178. Малыгина, В. В. Об устойчивости автономных функционально-дифференциальных уравнений / В. В. Малыгина, Т. Л. Сабатулина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 4(27). – С. 5-9. – EDN TCRTPR.
179. Суюндукова, Э. С. Функционализация параметра в задаче о седло-узловых бифуркациях многопараметрических динамических систем / Э. С. Суюндукова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – № 4(27). – С. 10-15. – EDN TCRTQB.
180. Абдуллаев, А. Р. О периодических решениях обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка / А. Р. Абдуллаев, Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1(13). – С. 5-9. – EDN PZQVZR.

181. Чечулин, В. Л. О счётности последователей типа PN и основаниях теории меры / В. Л. Чечулин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1(13). – С. 13-15. – EDN PZQWAL.
182. Чечулин, В. Л. О трёхмерности задачи управления и её некотором обобщении / В. Л. Чечулин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1(13). – С. 16-18. – EDN PZQWAV.
183. Абдуллаев, А. Р. Об одном методе оценки норм сингулярных интегральных операторов / А. Р. Абдуллаев, И. М. Плаксина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 2(21). – С. 5-8. – EDN RAIOLT.
184. Митин, В. Ю. Метод минимального покрытия и другие методы фрактального анализа изрезанности рельефа поверхностей / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 2(21). – С. 16-21. – EDN RAIOMN.
185. Чечулин, В. Л. Изоморфизм недостижимых последователей типа PO и основания теории меры / В. Л. Чечулин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 2(21). – С. 36-37. – EDN RAIONH.
186. Памяти академика Ивана Ивановича Ерёмкина (1933 - 2013) / Г. С. Шевцов, Я. Д. Половицкий, З. И. Андреева [и др.] // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 3(22). – С. 5-7. – EDN RPSSUB.
187. Абдуллаев, А. Р. Разрешимость периодической краевой задачи для уравнения типа Ван дер Поля / А. Р. Абдуллаев, А. А. Савочкина // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 4(23). – С. 5-8. – EDN RPYGRF.
188. Абдуллаев, А. Р. Периодические решения системы линейных функционально-дифференциальных уравнений / А. Р. Абдуллаев, Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 4(23). – С. 9-13. – EDN RPYGRP.
189. Седова, С. М. Устойчивость одного дифференциально-разностного уравнения с периодическим кусочно-постоянным коэффициентом / С. М. Седова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – № 2(10). – С. 5-14. – EDN PCRVGX.
190. Рекка, Р. А. Приближенное решение дифференциальных уравнений с отражением аргумента / Р. А. Рекка, Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – № 3(11). – С. 5-8. – EDN PJHWWT.
191. Тарунин, Е. Л. Уточнения формул распределения простых чисел / Е. Л. Тарунин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 1(5). – С. 10-19. – EDN NTUHTV.
192. Шрагин, И. В. Пространства Орлича, порожденные параметризованными функциями Юнга векторного аргумента / И. В. Шрагин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 1(5). – С. 26-32. – EDN NTUHUZ.
193. Гусаренко, Е. Л. Об одном обобщении интегро-дифференциального неравенства Виртингера / Е. Л. Гусаренко, С. А. Гусаренко // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 2(6). – С. 4-7. – EDN OIVRYF.
194. Шрагин, И. В. Равенство норм Амеми и Орлича в пространствах Орлича, порожденных параметризованными функциями Юнга векторного аргумента / И. В. Шрагин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 2(6). – С. 25-34. – EDN OIVRZT.

195. Митин, В. Ю. Вычисление индекса Пуанкаре: описание "неколлинеарного случая" в пространствах произвольной конечной размерности / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3(7). – С. 4-5. – EDN OIVSDP.
196. Седова, С. М. О критерии устойчивости дифференциально-разностных уравнений / С. М. Седова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3(7). – С. 6-11. – EDN OIVSDZ.
197. Скачкова, Е. А. О периодических решениях функционально-дифференциального уравнения третьего порядка / Е. А. Скачкова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 3(7). – С. 12-16. – EDN OIVSEJ.
198. Митин, В. Ю. Доказательство изолированности нулевой особой точки в "неколлинеарном" случае для конечномерных векторных полей любой размерности / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 4(8). – С. 10-12. – EDN NPTKFL.
199. Садилов, Е. С. Конвекция в горизонтальном слое жидкости со свободными границами при малых числах Прандтля. Спектральный метод / Е. С. Садилов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 5(9). – С. 171-174. – EDN RMRXOB.
200. Бочкарев, Г. П. Вариационные задачи в свете современной теории функционально-дифференциальных уравнений / Г. П. Бочкарев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 1(1). – С. 9-18. – EDN LGKJNZ.
201. Чистяков, А. В. О разложении Лебега линейных операторов в пространстве суммируемых вектор-функций / А. В. Чистяков // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 1(1). – С. 32-41. – EDN LGKJPN.
202. Тарунин, Е. Л. Возможности вычислительных методов в проблемах теории чисел / Е. Л. Тарунин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 2(2). – С. 15-28. – EDN MNLKJT.
203. Морозова, Е. А. Разрешимость краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Е. А. Морозова // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 3(3). – С. 46-50. – EDN MVLIIJ.
204. Митин, В. Ю. Векторный подход к вычислению индекса Пуанкаре для изолированных нулей плоских векторных полей с вырожденной линейной частью / В. Ю. Митин // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2010. – № 4(4). – С. 4-7. – EDN NDXQSV.
205. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие последовательностью пределов и вычитаний / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва : Российский Университет Транспорта, 2024. – 21 с. – EDN MPBRWF.
206. Алгоритмы и программы для вычисления производных дробного порядка с двойной точностью : Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям по предмету Специальные математические методы и функции для студентов специальности 1- 40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий 1-39 03 02 Программируемые мобильные системы / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – 1-е издание. – Москва : Российский Университет Транспорта, 2024. – 57 с. – EDN TXNCSY.
207. Обобщение формулы Эйлера для непланарного графа / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Российский Университет Транспорта, 2024. – 29 с. – EDN JZUSRB.

208. Матричное решение краевой задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с восьмым порядком погрешности / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2024. – 33 с. – EDN DDZPNH.
209. Модифицированная формула Герасимова-Капуто / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – № 1(64). – С. 5-14. – DOI 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14. – EDN QLHWNH.
210. Сборник статей по гидродинамике / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – 2-е издание. – Москва: Московский государственный университет путей сообщения Императора Николая II, 2023. – 231 с. – EDN UDVEDI.
211. Алгебраические методы шифрования: Учебное пособие / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – 4-е издание. – Москва: Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 52 с. – EDN QZKSJC.
212. Шифрование данных на базе эллиптических кривых: Учебное пособие / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 52 с. – EDN RPATBZ.
213. Несколько теорем о числах Кармайкла / Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, К. А. Волосов [и др.]. – Москва: Российская открытая академия транспорта федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский университет транспорта" (МИИТ), 2023. – 33 с. – EDN ONPGFT.
214. Критерий существования решений, количество решений, структура решений канонического неоднородного алгебраического уравнения степени n в кольце вычетов Z_m с генераторами и свободным членом, взаимно простым с порядком кольца / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2023. – № 101-4. – С. 114-117. – DOI 10.18411/trnio-09-2023-186. – EDN ELNFXM.
215. Квазилинейность в расслоенных пространствах скоростей конечного порядка - теорема о локальном представлении слоевых координат в виде функциональной квазилинейной комбинации преобразованных координат / Ю. Ф. Пастухов, Д. Ф. Пастухов, С. В. Чернов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2023. – № 95-6. – С. 124-127. – DOI 10.18411/trnio-03-2023-308. – EDN QBTLBX.
216. Метод последовательных функциональных компенсаций в задачах математической физики: Учебное пособие для практических занятий по курсу Уравнения математической физики / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 10 с. – EDN QQYOOA.
217. Алгебраические методы шифрования: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность / Д. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, Ю. Ф. Пастухов [и др.]. – 3-е издание. – Москва: 2022. – 37 с. – EDN SNZVRK.
218. Моделирование систем. Лекции. Лабораторный практикум: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий / Д. Ф. Пастухов, Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова [и др.]. – 3-е дополненное. – Новополюк: Учреждение

- образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой», 2022. – 142 с. – EDN PYJINB.
219. Сборник статей по гидродинамике: Учебное пособие к лекционным и практическим занятиям для студентов специальности 1-40 01 01 Программное обеспечение информационных технологий / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 219 с. – EDN UAADIO.
220. О двух численных алгоритмах для решения конечномерной задачи Лагранжа на экстремум с ограничениями типа равенств: Учебное пособие для практических занятий по предметам Методы оптимизации и Математическое программирование / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.]. – Москва: Полоцкий государственный университет, 2022. – 33 с. – EDN ZHJIPU.
221. Матрица Гессе по старшим производным локальной записи гладкой функции в расслоении скоростей - тензор второго ранга типа (0,2) / Ю. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, К. А. Волосов [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 85-2. – С. 28-32. – DOI 10.18411/trnio-05-2022-57. – EDN PLVSFG.
222. Сравнение методов прогонки столбцов и строк неизвестной матрицы для решения уравнения Пуассона в переменных функция тока-вихрь в гидродинамической задаче для закрытой прямоугольной каверны / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 87-2. – С. 48-56. – DOI 10.18411/trnio-07-2022-48. – EDN AOYFJY.
223. Матричное решение интегральных уравнений Фредгольма квадратурой с двенадцатым порядком погрешности / Н. К. Волосова, К. А. Волосов, А. К. Волосова [и др.] // Тенденции развития науки и образования. – 2022. – № 89-1. – С. 105-112. – DOI 10.18411/trnio-09-2022-31. – EDN LBUIKP.
224. Пастухов, Д. Ф. Построение нестационарных моделей в оболочке ANSYS Fluent: учебное пособие / Д. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, Ю. Ф. Пастухов. – Новополоцк: Полоцкий государственный университет, 2018. – 45 с. – EDN SBWQRY.
225. Пастухов, Д. Ф. Некоторые методы передачи QR-кода с помощью стеганографии / Д. Ф. Пастухов, Н. К. Волосова, А. К. Волосова // Мир транспорта. – 2019. – Т. 17, № 3(82). – С. 16-39. – DOI 10.30932/1992-3252-2019-17-3-16-39. – EDN RSGSLR.
226. Вакуленко, С. П. Способы передачи QR-кода в компьютерной стеганографии / С. П. Вакуленко, Н. К. Волосова, Д. Ф. Пастухов // Мир транспорта. – 2018. – Т. 16, № 5(78). – С. 14-25. – EDN YNQNQT.

УДК 519. 6

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ФУНКЦИИ

Пастухов Дмитрий Феликсович, к. ф.-м. н.

Пастухов Юрий Феликсович, к. ф.-м. н.

(Полоцкий государственный университет)

Волосова Наталья Константиновна

(МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва)

Волосов Константин Александрович, д.ф.-м.н., профессор

Волосова Александра Константиновна, к.ф.-м.н.

(МИИТ, г. Москва)

2024