УДК 517.983+517.444

ОДИН СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А. А. КУРОХТИНА
(Представлено: канд. физ.-мат. наук, доц. О. В. СКОРОМНИК)

В работе приведена постановка одной конкретной задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, получена формула ее решения и изучен вопрос единственности решения.

Ключевые слова: *дробный интеграл, дробная производная, задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка, функция Миттаг – Леффлера.*

Работа посвящена решению одного частного случая задачи типа Коши для неоднородного дифференциального уравнения вида:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}y(x) = \lambda y(x) + h(x), \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{1}$$

с условиями

$$\left.\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}y(x)\right|_{x=0} = b, \tag{2}$$

когда $h(x) = e^x$. Здесь $y(x)$ – искомая функция, b – постоянная величин, $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} = D_{0+}^\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, – оператор левосторонней дробной производной Римана – Лиувилля [1, § 2].

Нам понадобятся следующие вспомогательные сведения.

Определение 1. [1, §2] *Интеграл*

$$(\mathrm{I}_{a+}^\alpha \varphi)(x) \overset{def}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \; x > a, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$*, называется левосторонним дробным интегралом Римана – Лиувилля дробного порядка* α.

Определение 2. [1, §2] *Для функции* $f(x)$*, заданной на отрезке* (a, b)*, выражение*

$$\left(D_{a+}^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, \tag{4}$$

называется левосторонней дробной производной Римана – Лиувилля порядка $\alpha, 0 < \alpha < 1$.

Будем использовать следующее обозначение:

$$\mathrm{I}_{a+}^\alpha f = \begin{cases} \mathrm{I}_{a+}^\alpha f, \alpha > 0, \\ D_{a+}^{-\alpha} f, \alpha \le 0. \end{cases}$$

Обозначим через R_1 следующее множество точек (x, y) из области D, лежащей в $R \times R$:

$$R_1 = \left\{(x, y) \in D : 0 < x \le h, \quad \left|x^{1-\alpha}y(x) - \frac{b}{\Gamma(\alpha)}\right| \le a\right\}, \; a > \frac{h\,b}{\Gamma(\alpha)},$$

где a, h, b — некоторые постоянные.

Следующая теорема дает условия существования и единственности решения задачи Коши (1) – (2).

Теорема 1. [1, Теорема 42.1] Пусть $f(x, y)$ – вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \le A\left|y_1 - y_2\right|$$

и ограничению $\sup\limits_{(x, y)\in D}\left|f(x, y)\right| = b < \infty$. Тогда решение задачи Коши (1) – (2) в области $R_1 \subset D$ существует и единственно.

Известно, что при $0 < \alpha < 1$ [1, формула 2.61]

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}, \tag{5}$$

где $f_{1-\alpha}(x) = I_{a+}^{1-\alpha} f$.

Функцией Миттаг – Леффлера называется целая функция, определяемая рядом (см., например, [1, формулы 1.90 и 1.91; 2; 3]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0;$$

также функцией Миттаг – Леффлера называют сумму более общего ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \tag{6}$$

Нам понадобится также соотношение [1, формула (1.92)]

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^{\alpha} z)dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \tag{7}$$

Решим следующую задачу типа Коши:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \lambda y(x) + e^x, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{8}$$

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x)\Big|_{x=0} = b. \tag{9}$$

Интегрируем уравнение (8), имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \left(\lambda y(x) + e^x\right),$$

где $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I_{0+}^{\alpha}$ – оператор дробного интеграла вида (3). Получаем, согласно свойству (5) и условию (9):

$$y(x) = b\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(\lambda y(t) + e^t\right) dt. \tag{10}$$

Таким образом показали, что задача Коши (8) – (9) приводится к уравнению (10). Покажем теперь, наоборот, что если непрерывная функция $\varphi(x) = \lambda y(x) + e^x$ удовлетворяет уравнению (10), то она удовлетворяет и ситеме уравнений (8) – (9). Для этого применяем к равенству (10) оператор $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} = D_{0+}^{\alpha}$ дробной производной вида (4), имеем:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \left(\lambda y(x) + e^x\right),$$

откуда $\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}} y(x) = \lambda y(x) + e^x$.

Условие (9) получается, если к (10) применить оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} = D_{0+}^{\alpha-1}$:

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} \left(\lambda y(x) + e^x\right) = b + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x \left(\lambda y(t) + e^t\right) dt,$$

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) = b + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x \left(\lambda y(t) + e^t\right) dt. \tag{11}$$

Если в (11) положить $x = 0$, то получим равенство (9).

Итак, приходим к выводу, что уравнение (10) в указанном смысле равносильно уравнению (8) с начальным условием (9).

Далее методом последовательных приближений, опираясь на результаты теоремы 1, последовательно находим

$$y_0(x) = b\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_m(x) = b\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left(\lambda y_{m-1}(t) + e^t\right) dt, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

или

$$y_m(x) = b\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} y_{m-1}(t)dt + \frac{e^x}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} e^{-(x-t)}dt, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

или

$$y_m(x) = b\sum_{j=1}^{m+1}\lambda^{j-1}\frac{x^{\alpha j-1}}{\Gamma(\alpha j)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{\lambda^{j-1}e^x}{\Gamma(\alpha j)}\int_0^x (x-t)^{\alpha j-1}e^{-(x-t)}dt\ . \tag{12}$$

В равенстве (12) переходим к пределу при $m \to \infty$ и используем (6), имеем:

$$y(x) = b\sum_{k=1}^{n} x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) + e^x\int_0^x e^{-(x-t)}(x-t)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\lambda(x-t)^{\alpha}]dt. \tag{13}$$

Далее, для интеграла в левой части (13) применяем формулу (7) и получаем следующее окончательное представление решения задачи Коши (8) – (9):

$$y(x) = bx^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda x^{\alpha}) - \frac{1}{1-\lambda}e^x, \quad |\lambda| < 1\ .$$

На основании теоремы 1 оно единственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987. – 688с.
2. Paneva-Konovska J. From Bessel to multi-index Mittag-Leffler functions : enumerable families, series in them and convergence – World Scientific Publishing Europe Ltd., 2017. – 229 p.
3. Gorenflo R., Kilbas A.A, Mainardi F., Rogosin S. Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications. registered company Springer-Verlag GmbH, DE part of Springer Nature, 2020. – 548 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61550-8