

УДК 624.072

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ОЧЕРТАНИЯ ПЛОСКИХ ФЕРМ В ПАКЕТЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MathCAD

П.Н. ДАНСКАЯ

(Представлено: Л.С. Турищев)

Рассматривается формализованное описание геометрического очертания плоской статически определимой фермы и её числовых характеристик в пакете компьютерной математики MathCAD с помощью специальных матриц теории графов. Составлены MathCAD программы формирования этих матриц.

Среди встречающихся в строительной практике стержневых конструкций весьма широкий класс образуют плоские статически определимые фермы с балочной схемой опирания, применяемые в качестве несущих конструкций покрытий зданий и сооружений различного назначения. В проектной практике для расчетов несущих конструкций обычно используют программные комплексы Лира и Склад. Вместе с тем использование программных комплексов является громоздким для вариантного проектирования ферменных конструкций при изменении их параметров. Наиболее просто вопросы вариантного проектирования ферменных конструкций решаются в пакете компьютерной математики MathCAD. Этот пакет получил мировое распространение в инженерных расчетах. К числу узловых вопросов, связанных с расчетом ферменных конструкций в пакете MathCAD, относится формализованное описание информации о геометрическом очертании конструкции.

Рассматривается плоская статически определимая балочная ферма с произвольным очертанием поясов (прямоугольное, треугольное, трапециевидальное, полигональное) и следующими 3 типами простых решеток:

- 1 тип – раскосная решетка с восходящими раскосами;
- 2 тип – раскосная решетка с нисходящими раскосами;
- 3 тип – треугольная решетка с дополнительными стойками.

Расчетная схема фермы характеризуется следующими числовыми параметрами:

- пролет фермы – L ;
- высота фермы – H ;
- число панелей – p ;
- число узлов – n , в том числе m внутренних узлов и $n-m$ опорных узлов;
- число стержней – s ;
- число опорных стержней – r .

Топологическое описание расчетной схемы фермы основывается на матричном описании геометрической структуры и её числовых характеристик.

Для матричного описания геометрической структуры расчетной схемы фермы формируются следующие матрицы:

- матрица геометрической структуры;
- матрица инцидентий.

Прямоугольная матрица геометрической структуры имеет размеры $3 \times s$ и описывает формализованную информацию о стержнях фермы. Первая строка содержит номера стержней, вторая – номера начальных узлов фермы, третья – номера конечных узлов фермы. Для ферм любой мерности матрица имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots \\ e_1 & e_2 & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

где j – номер стержня;

b_j ($j = 1, \dots, s$) – номер начального узла j – того стержня;

e_j ($j = 1, \dots, s$) – номер конечного узла j – того стержня.

Принимается следующий порядок нумерации стержней фермы:

- нумерация элементов нижнего пояса $j = 1, 2, \dots, p$;
- нумерация элементов верхнего пояса $j = p + 1, p + 2, \dots, 2p$;
- нумерация стоек $j = 2p + 1, 2p + 2, \dots, 3p + 1$;

– нумерация раскосов $j = 3p + 2, \dots, 4p + 1$.

Связь нумерации узлов элементов поясов и стоек с их номерами и числом панелей фермы не зависит от типа решетки и описывается следующими соотношениями:

– узлы элементов нижнего пояса $b_j = j \quad e_j = j + 1 \quad (1 \leq j \leq p)$;

– узлы элементов верхнего пояса $b_j = j + 1 \quad e_j = j + 2 \quad (p + 1 \leq j \leq 2p)$;

– узлы стоек $b_j = j - 2p \quad e_j = j - (p - 1) \quad (2p + 1 \leq j \leq 3p + 1)$.

Связь нумерация узлов раскосов с их номерами зависит от типа решетки и описывается следующими соотношениями:

1 тип решетки $b_j = j - (3p + 1) \quad e_j = j - (2p - 1) \quad (3p + 2 \leq j \leq 4p + 1)$;

2 тип решетки $b_j = j - 3p \quad e_j = j - 2p \quad (3p + 2 \leq j \leq 4p + 1)$;

3 тип решетки:

– нечетные панели $b_j = j - (3p + 1) \quad e_j = j - (2p - 1) \quad (p_j = 1, 3, 5, \dots)$;

– четные панели $b_j = p_j + 1 \quad e_j = j - 2p \quad (p_j = 2, 4, 6, \dots)$.

Прямоугольная матрица инцидентий [1] описывает взаимосвязь между номерами стержней фермы и номерами их начальных и конечных узлов. Размеры матрицы $n \times s$ и она имеет вид

$$d = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & & \\ d_{21} & d_{22} & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & & \end{pmatrix} \quad (2)$$

В этой матрице каждому стержню фермы соответствует столбец, а каждому узлу – строка. Если стержень номера j начинается в узле b_j и заканчивается в узле e_j , то элементы соответствующего ему столбца матрицы могут принимать следующие значения

$$\begin{aligned} d_{ij} &= -1 \quad \text{если } i = b_j \\ d_{ij} &= +1 \quad \text{если } i = e_j \\ d_{ij} &= 0 \quad \text{если } i \neq b_j \text{ и } i \neq e_j \end{aligned}$$

Для матричного описания числовых характеристик геометрической структуры фермы в декартовой системе координат используются:

- матрица координат узлов;
- матрица проекций длин стержней;
- вектор длин стержней;
- матрица направляющих косинусов стержней.

Прямоугольная матрица координат имеет размеры $2 \times n$ и описывает координаты узлов фермы в заданной координатной системе

$$z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots \\ z_{21} & z_{22} & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

Прямоугольная матрица проекций длин стержней фермы на координатные оси имеет размеры $2 \times s$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots \end{pmatrix} \quad (4)$$

и её элементы связаны с элементами матриц (2) и (3) следующей формулой [1]

$$\Delta_{jk} = \sum_{i=1}^n z_{ki} d_{ij}$$

Вектор длин стержней фермы имеет вид

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_j \\ \vdots \\ l_s \end{pmatrix}, \quad (5)$$

и его элементы связаны с элементами матрицы (4) следующей формулой

$$l_j = \sqrt{\sum_{k=1}^2 \Delta_{jk}^2}.$$

Прямоугольная матрица направляющих косинусов стержней фермы имеет размеры $2 \times s$

$$c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots \\ c_{21} & c_{22} & \dots \end{pmatrix} \quad (6)$$

и её элементы связаны с элементами матрицы (4) и вектора (5) следующей формулой

$$c_{jk} = \frac{\Delta_{jk}}{l_j}.$$

Полученные формулы (1) – (6) позволяют формализовано с помощью матриц описывать топологию расчетной схемы балочных ферм и могут использоваться при их численном расчете в пакете MathCAD с использованием разрешающих уравнений строительной механики [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Перельмутер А. Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 180 с.
2. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / А.П. Филин, О.Д. Тананайко, И.М. Чернева, М.А. Шварц – Л.: Стройиздат, 1983. – 228 с.