

УДК 624.072

## РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ В ПАКЕТЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MathCAD

П.Н. ДАНСКАЯ

(Представлено: Л.С. Турищев)

Рассматривается расчет плоских статически определимых ферм в пакете компьютерной математики MathCAD с применением общей системы уравнений строительной механики. Используется формализованное описание геометрической структуры расчетной схемы фермы. Составлена MathCAD программа автоматизированного расчета произвольной плоской статически определимой фермы.

Рассматривается плоская статически определимая ферма с произвольным очертанием поясов и любым типом простой решетки, которая включает в себя  $s$  прямолинейных стержней, соединяющих  $n$  узлов. Число опорных стержней равняется  $r$ .

Соотношение между числом узлов и стержней фермы удовлетворяет условию

$$s + r - 3n = 0$$

Формализованное описание геометрической структуры плоской фермы и её числовых характеристик согласно [1] осуществляется с помощью:

- матрицы геометрической структуры;
- матрицы инцидентий;
- матрицы координат узлов;
- матрицы проекций длин стержней;
- матрицы направляющих косинусов стержней.

Внешняя нагрузка, действующая на ферму, представляет собой систему сосредоточенных сил, приложенных ко всем  $n$  узлам фермы по направлениям перемещений этих узлов. Внешняя нагрузка, приложенная к каждому внутреннему узлу, характеризуется двумя составляющими. Таким образом, внешняя нагрузка описывается вектором

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}.$$

Продольные силы, возникающие в стержнях фермы от действия нагрузки, описываются вектором

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_i \\ \vdots \\ N_s \end{pmatrix}.$$

Уравнения равновесия узлов заданной фермы имеют вид

$$A\bar{N} + \bar{P} = 0. \quad (1)$$

Прямоугольная матрица коэффициентов уравнений равновесия узлов имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Перемещения, возникающие в узлах фермы от действия нагрузки, описываются вектором

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} Z_{.1} \\ \vdots \\ Z_{.s} \\ Z_t \end{pmatrix}.$$

Происходящие изменения длин стержней фермы от действия нагрузки, описываются вектором

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{.1} \\ \vdots \\ \lambda_{.s} \\ \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Связь между изменениями длин стержней и перемещениями узлов фермы описывается формулой

$$\bar{\lambda} = B\bar{Z} \quad (2)$$

Матрица  $B$  имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} h_{.1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s1} & \dots \end{pmatrix}$$

и она связана с матрицей  $A$  следующим образом

$$B = -A'. \quad (3)$$

Происходящие изменения длин стержней фермы от действия нагрузки согласно закону Гука, связаны с продольными силами соответствующих стержней следующей формулой

$$\bar{N} = r\bar{\lambda}. \quad (4)$$

Матрица  $r$  является матрицей жесткости несвязанных между собой стержней фермы и имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots \\ & \ddots \\ 0 & \dots \end{pmatrix} \quad r_k = \frac{E_k A_k}{l_k}; \quad k = 1, \dots, s).$$

Уравнения (1), (2), (4) образуют общую систему уравнений строительной механики стержневых систем [2], характеризующих статическую, геометрическую и физическую стороны задачи. Подставляя в уравнения равновесия (1) соотношения (2), (4), получим разрешающие уравнения для расчета фермы

$$ArA'\bar{Z} - \bar{P} = 0. \quad (5)$$

Решая уравнение (5), найдем вектор узловых перемещений фермы

$$\bar{Z} = (ArA')^{-1} \bar{P}. \quad (6)$$

Подставляя (2), (3), (6) в (4) получим формулу для определения вектора продольных сил стержней фермы

$$\bar{N} = -rA'(ArA')^{-1} \bar{P}. \quad (7)$$

На основании полученного разрешающего уравнения (5) и конечных формул (6), (7) с учетом соотношений, приведенных в [1], составлена программа их численной реализации в пакете MathCAD.

Программа имеет модульную структуру и включает в себя следующие модули:

- модуль формирования матрицы координат узлов фермы;
- модуль формирования матрицы геометрической структуры фермы;
- модуль формирования вектора нагрузки;

- модуль формирования матрицы инцидентов фермы;
- модуль формирования проекций длин стержней;
- модуль формирования матрицы направляющих косинусов стержней;
- модуль формирования матрицы коэффициентов уравнений равновесия узлов;
- модуль определения внутренних усилий фермы;
- модуль определения перемещений узлов фермы.

На рисунке 1 приведен скриншот базового модуля программы - модуля формирования матрицы коэффициентов уравнений равновесия узлов.

```

A :=
  k ← 1
  for i ∈ 1..n
    for j ∈ 1..s + r
      |
      | A1 i,j ← (-cosα)k,j · di,j if j ≤ s
      | A1 i,j ← 1 if j = s + 1 ∧ i = 1
      | A1 i,j ← 0 if j > s + 1
      |
    k ← 2
    for i ∈ 1..n
      for j ∈ 1..s + r
        |
        | A2 i,j ← (-cosα)k,j · di,j if j ≤ s
        | A2 i,j ← 1 if j = s + 2 ∧ i = 1
        | A2 i,j ← 1 if j = s + r ∧ i = p + 1
        |
      A ← stack(A1, A2)

```

Рисунок 1. – Модуль формирования матрицы коэффициентов

Составленная Mathcad программа позволяет определять продольные силы и узловые перемещения для балочной фермы с произвольным очертанием поясов и различными типами простых решеток. Исходными параметрами программы являются следующие числовые характеристики фермы – пролет и высота, число панелей, число опорных стержней и значения узловых нагрузок.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данская П.Н. Топологическое описание геометрического очертания плоских ферм в пакете компьютерной математики MathCad. – Статья в настоящем сборнике трудов.
2. Шапошников Н.Н. Вычислительная механика. Ч.2. – М.: МИИТ, 2005. – 72 с.