МАТЭМАТЫКА

УДК 512.643+517.977

ФАКТОРИЗАЦИЯ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ С НЕНУЛЕВЫМИ ГЛАВНЫМИ УГЛОВЫМИ МИНОРАМИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.А. Козлов*, Т.А. Александрович**

**Учреждение образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»*

***Учреждение образования «Витебский государственный университет имени П.М. Машерова»*

В настоящее время существуют различные факторизации квадратной матрицы (см., например, [1]): LU-разложение, QR-разложение, полярное разложение и др. В работе [2] были введены так называемые «почти единичные» матрицы, а также строго положительно регулярные матрицы. Первые отличаются от единичной матрицы наличием элементов -1, стоящих на главной диагонали; у вторых же все главные угловые миноры являются положительными числами. В статье [2] также было получено разложение «почти единичной» матрицы в произведение строго регулярно положительных матриц. Доказательство этого факта обусловило постановку вопроса о возможности представления любой квадратной матрицы в виде произведения строго регулярно положительных матриц.

Цель статьи – разложение квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и положительным определителем в произведение строго регулярно положительных матриц.

Материал и методы. *Материалом исследования являются невырожденные квадратные матрицы. В работе использованы методы линейной алгебры и теории матриц.*

Результаты и их обсуждение. *Получено разложение «почти единичной» матрицы в произведение двух строго регулярно положительных матриц, на основании которого установлено представление произвольной квадратной матрицы n-го порядка с ненулевыми главными (ведущими) угловыми минорами и отделенным от нуля положительным определителем в виде произведения трех строго регулярно положительных матриц.*

Заключение. *На основании результатов данной работы планируется установить факторизацию любой квадратной матрицы n-го порядка с положительным определителем на строго положительно регулярные квадратные* $(n \times n)$ *-матрицы. Это разложение будет использовано в теории линейных управляемых нестационарных систем для решения задач управляемости асимптотических характеристик линейных динамических систем [3].*

Ключевые слова: *главные угловые (ведущие) миноры матрицы, «почти единичная» матрица, строго положительно регулярная матрица.*

FACTORIZATION OF SQUARE MATRICES WITH NONZERO PRINCIPAL ANGULAR MINORS AND A POSITIVE DETERMINANT INTO STRICTLY REGULAR POSITIVE MATRICES

A.A. Kozlov*, T.A. Aleksandrovich**

**Education Establishment "Polotsk State E. Polotskaya University"*

***Education Establishment "Vitebsk State P.M. Masherov University"*

To date, there are various factorizations of a square matrix (see, for example, [1]): LU-decomposition, QR-decomposition, polar decomposition, etc. The so-called "almost identity" matrices were introduced in the paper [2], as well as positively regular matrices. The former differ from the identity matrix by the presence of -1 elements on the main diagonal; in the latter, all principal angular minors are positive numbers. The paper [2] also obtained a decomposition of an "almost identity" matrix into a product of strictly regular positive matrices. The proof of this fact led to the formulation of the question of the possibility of representing any square matrix as a product of strictly regular positive matrices.

The research purpose is the decomposition of a square matrix with nonzero principal angular minors and a positive determinant into a product of strictly regular positive matrices.

***Material and methods.** The research material is nondegenerate square matrices. The work uses methods of linear algebra and matrix theory.*

***Findings and their discussion.** A decomposition of an "almost identity" matrix into a product of two strictly regularly positive matrices is obtained, on the basis of which a representation of an arbitrary square matrix of the n^{th} order with nonzero principal (leading) angular minors and a positive determinant separated from zero in the form of a product of three strictly regularly positive matrices is established.*

***Conclusion.** Based on the obtained findings, it is planned to establish a factorization of any square matrix of the n^{th} order with a positive determinant into strictly positively regular square matrices. This expansion will be used in the theory of linear controllable nonstationary systems to solve controllability problems for the asymptotic characteristics of linear dynamical systems [3].*

***Key words:** principal angular (leading) matrix minors, "almost identity" matrices, strictly positively regular matrix.*

В настоящее время существуют различные факторизации квадратной матрицы (см., напр., [1]): *LU*-разложение, *QR*-разложение, полярное разложение и др. В работе [2] авторами данной статьи были введены так называемые «почти единичные» матрицы, т.е. такие матрицы, которые получены из единичной заменой некоторого четного количества 1, стоящих на главной диагонали на -1; а также строго ρ-положительно регулярные матрицы, у которых все главные угловые миноры отделены от нуля некоторым числом $\rho > 0$ (более точным является определение 2, приведенное ниже). В статье [2] авторами также была установлена теорема о представлении «почти единичной» матрицы в виде произведения трех строго 1/2-положительно регулярных матриц (последними являются матрицы плоских вращений в *n*-мерном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^n$). При этом была показана (см. пример 2 работы [2]) невозможность разложения «почти единичной» матрицы в произведение двух строго положительно регулярных матриц, являющихся матрицами плоских вращений. Установленные факты обусловили постановку вопросов как о возможности представления «почти единичной» матрицы в виде произведения двух строго ρ-положительно регулярных матриц (очевидно, не являющихся матрицами плоских вращений), так и о возможности факторизации любой квадратной матрицы с положительным определителем в произведение строго положительно регулярных матриц.

В данной работе получен положительный ответ на первый поставленный вопрос (см. п. 1 данной статьи), а также изучен частный случай второго вопроса: установлено разложение квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и положительным определителем в произведение строго положительно регулярных матриц.

Цель статьи – разложение квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и положительным определителем в произведение строго регулярно положительных матриц.

Материал и методы. Материалом исследования являются невырожденные квадратные матрицы *n*-го порядка. В работе использованы методы линейной алгебры и теории матриц.

Результаты и их обсуждение. 1. Об одной факторизации «почти единичной» матрицы. Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь и всюду далее символ T означает операцию транспонирования вектора или матрицы); через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – вектор-столбцы канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$, через M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ [1, с. 357]; $M_n := M_{nn}$. Также обозначим через $E = [e_1, \ldots, e_n] \in M_n$ единичную матрицу.

Для любых чисел $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ через ε_{ij} будем обозначать матрицу $\varepsilon_{ij} := e_i e_j^T \in M_n$. Тогда в силу формулы (5) работы [2] при всяких индексах $k, l, q, p \in \{1, \ldots, n\}$ для матриц ε_{kl} и ε_{qp} выполняются соотношения

$$\varepsilon_{kl} \cdot \varepsilon_{qp} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq q, \\ \varepsilon_{kp} & \text{при } l = q. \end{cases} \tag{1}$$

Для любых чисел $k, l \in \{1, \ldots, n\}$ $(k < l)$ также введем в рассмотрение матрицы квадратные матрицы n-го порядка

$$S^{(1)}(k,l) := 5\varepsilon_{kk} + 2\varepsilon_{kl} - 8\varepsilon_{lk} - 3\varepsilon_{ll} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ l \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & k & & & & l & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 5 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ldots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -8 & 0 & \ldots & 0 & -3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2}$$

$$S^{(2)}(k,l) := 3\varepsilon_{kk} + 2\varepsilon_{kl} - 8\varepsilon_{lk} - 5\varepsilon_{ll} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ l \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & k & & & & l & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 3 & 0 & \ldots & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \ldots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & -8 & 0 & \ldots & 0 & -5 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3}$$

Нижеприведенные леммы 1–5 устанавливают отдельные свойства этих матриц.

Лемма 1. *При любых, не равных между собой, числах* $k, l, q, p \in \{1, \ldots, n\}$ $(k < l, q < p)$ *для* $(n \times n)$*-матриц* $S^{(1)}(k,l)$, $S^{(2)}(q,p)$ *и* $S^{(2)}(k,l)$ *выполняются равенства* $S^{(1)}(k,l) \cdot S^{(2)}(q,p) = 0$ *и* $S^{(1)}(k,l) \cdot S^{(2)}(k,l) = -(\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ll})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные, не равные между собой, числа $k, l, q, p \in \{1, \ldots, n\}$ $(k < l, q < p)$ и рассмотрим матрицы $S^{(1)}(k,l)$, $S^{(2)}(q,p) \in M_n$. На основании формул (2) и (3) имеем равенство $S^{(1)}(k,l) \cdot S^{(2)}(q,p) = (5\varepsilon_{kk} + 2\varepsilon_{kl} - 8\varepsilon_{lk} - 3\varepsilon_{ll}) \cdot (3\varepsilon_{qq} + 2\varepsilon_{qp} - 8\varepsilon_{pq} - 5\varepsilon_{pp})$, раскрыв скобки в котором, ввиду соотношений (1) и $k \neq l \neq q \neq p$, установим требуемое первое равенство леммы 1.

Также, в силу определений (2), (3) и соотношений (1), получим равенства

$$S^{(1)}(k,l)\cdot S^{(2)}(k,l)=(5\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl}-8\varepsilon_{lk}-3\varepsilon_{ll})\cdot(3\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl}-8\varepsilon_{lk}-5\varepsilon_{ll})=$$
$$=15\varepsilon_{kk}+10\varepsilon_{kl}-0-0+0+0-16\varepsilon_{kk}-10\varepsilon_{kl}-24\varepsilon_{lk}-16\varepsilon_{ll}+0+0-$$
$$-0-0+24\varepsilon_{lk}+15\varepsilon_{ll}=-(\varepsilon_{kk}+\varepsilon_{ll}),$$

означающие справедливость второго из равенств в рассматриваемой лемме. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *При любых числах* $k,l,q\in\{1,...,n\}$ $(k<l)$ *для матриц* $S^{(1)}(k,l)\in M_n$ *и* $\varepsilon_{qq}\in M_n$ *имеет место равенство*

$$S^{(1)}(k,l)\cdot\varepsilon_{qq}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ k\neq q,\ l\neq q,\\ 5\varepsilon_{kk}-8\varepsilon_{lk},\ \text{если}\ k=q,\\ 2\varepsilon_{kl}-3\varepsilon_{ll},\ \text{если}\ l=q.\end{cases}\tag{4}$$

Доказательство. Возьмем любые числа $k,l,q\in\{1,...,n\}$, причем $k<l$, и рассмотрим произведение $(n\times n)$-матрицы $S^{(1)}(k,l)$ на матрицу $\varepsilon_{qq}\in M_n$. При $k\neq q, l\neq q$ на основании определения $S^{(1)}(k,l)$ и формул (1) легко установить соотношение $S^{(1)}(k,l)\cdot\varepsilon_{qq}=(5\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl}-8\varepsilon_{lk}-3\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{qq}=0.$ При $q=k$ в силу определения (2) и формулы (1) имеем равенства $S^{(1)}(k,l)\cdot\varepsilon_{qq}=(5\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl}-8\varepsilon_{lk}-3\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{kk}=$ $=5\varepsilon_{kk}+0-8\varepsilon_{lk}-0=5\varepsilon_{kk}-8\varepsilon_{lk}$, а при $q=l$ соотношения $S^{(1)}(k,l)\cdot\varepsilon_{qq}=(5\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl}-8\varepsilon_{lk}-3\varepsilon_{ll})\cdot\varepsilon_{ll}=$ $=0+2\varepsilon_{kl}-0-3\varepsilon_{ll}=2\varepsilon_{kl}-3\varepsilon_{ll}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *При любых числах* $k,l,q\in\{1,...,n\}$ $(k<l)$ *для матриц* $S^{(2)}(k,l)\in M_n$ *и* $\varepsilon_{qq}\in M_n$ *имеет место равенство*

$$\varepsilon_{qq}\cdot S^{(2)}(k,l)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ q\neq l,\ q\neq k,\\ 3\varepsilon_{kk}+2\varepsilon_{kl},\ \text{если}\ q=k,\\ -8\varepsilon_{lk}-5\varepsilon_{ll},\ \text{если}\ q=l.\end{cases}$$

Доказательство данного утверждения проводится аналогичным доказательству леммы 2 образом.

Лемма 4. *При всяких натуральных числах s,* $1\le s\le[n/2]$ (здесь и далее скобки $[\cdot]$ означают целую часть числа)*, и* $i=\overline{1,s}$ *для произвольных s пар* $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *чисел, таких, что* $1\le k_1<l_1<k_2<l_2<...<k_s<l_s\le n$*, и матриц* $S^{(1)}(k_i,l_i)$, $S^{(2)}(k_i,l_i)\in M_n$, $i=\overline{1,s}$, *определяемых формулами* (2) *и* (3)*, справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)=\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)\cdot\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\ \ и\ \ \sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)=\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\cdot\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i).\tag{5}$$

Доказательство. Установим справедливость второго равенства (доказательство первого равенства производится аналогичным образом). При всяком $i=\overline{1,s}$ по определению (3) матрица $S^{(2)}(k_i,l_i)$ получена из нулевой заменой только лишь элементов, стоящих в позициях (k_i,k_i), (k_i,l_i), (l_i,k_i), (l_i,l_i), на соответственно числа 3, 2, -8 и -5. Поэтому она в силу леммы 3 представляется в виде:

$$S^{(2)}(k_i,l_i)=\varepsilon_{k_ik_i}\cdot S^{(2)}(k_i,l_i)+\varepsilon_{l_il_i}\cdot S^{(2)}(k_i,l_i).\tag{6}$$

Поскольку при любом $i=\overline{1,s}$, ввиду определения матрицы $S^{(2)}(k_i,l_i)$, для всех $j\in\{1,...,s\}\setminus\{k_i,l_i\}$ ее j-я строка является нулевой, то для каждого $p\in\{1,2,...,i-1,i+1,...,s\}$ имеют место равенства

$\varepsilon_{k_p k_p} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) = 0$ и $\varepsilon_{l_p l_p} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) = 0$. Тогда из представления (6) и последних равенств следуют соотношения

$$S^{(2)}(k_i, l_i) = 0 + \ldots + 0 + \varepsilon_{k_i k_i} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \varepsilon_{l_i l_i} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + 0 + \ldots + 0 =$$
$$= \varepsilon_{k_1 k_1} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \varepsilon_{l_1 l_1} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \varepsilon_{k_2 k_2} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \ldots + \varepsilon_{l_{i-1} l_{i-1}} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) +$$
$$+ \varepsilon_{k_i k_i} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \varepsilon_{l_i l_i} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \varepsilon_{k_{i+1} k_{i+1}} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) + \ldots + \varepsilon_{l_s l_s} \cdot S^{(2)}(k_i, l_i),$$

т.е. $S^{(2)}(k_i, l_i) = \sum_{j=1}^{s} (\varepsilon_{k_j k_j} + \varepsilon_{l_j l_j}) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i)$ при каждом $i = \overline{1, s}$.

Просуммировав последнее соотношение по всем $i = \overline{1, s}$, получим равенство $\sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i) = \sum_{i=1}^{s} (\sum_{j=1}^{s} (\varepsilon_{k_j k_j} + \varepsilon_{l_j l_j}) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i))$. Меняя порядок суммирования в правой части найденного равенства, имеем соотношение $\sum_{i=1}^{s} (\sum_{j=1}^{s} (\varepsilon_{k_j k_j} + \varepsilon_{l_j l_j}) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i)) = \sum_{j=1}^{s} (\varepsilon_{k_j k_j} + \varepsilon_{l_j l_j}) \cdot \sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i)$. Тогда, переобозначив индекс суммирования *j* на *i*, на основании двух последних равенств установим требуемую формулу $\sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i) = \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i}) \cdot \sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *При всяких натуральных* s, $1 \le s \le [n/2]$, *и* $i = \overline{1, s}$ *для любых пар* $(k_i, l_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *чисел, удовлетворяющих оценкам* $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \le n$, *и матриц* $S^{(1)}(k_i, l_i)$, $S^{(2)}(k_i, l_i) \in M_n$, $i = \overline{1, s}$, *определяемых равенствами* (2) *и* (3), *справедливо соотношение* $\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot \sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i) = = -\sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное число $s \in \mathbb{N}$ такое, что $1 \le s \le [n/2]$. Зафиксируем любые пары чисел $(k_i, l_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i = \overline{1, s}$, для которых верны неравенства $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \le n$. В силу леммы 1 выполняются равенства $S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot S^{(2)}(k_j, l_j) = 0$ при всех $i \ne j$, $i, j = \overline{1, s}$. Тогда отсюда, ввиду определения индексов k_i, l_i, $i = \overline{1, s}$, вытекают соотношения

$$\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot \sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i, l_i) =$$
$$= (S^{(1)}(k_1, l_1) + S^{(1)}(k_2, l_2) + \ldots + S^{(1)}(k_s, l_s)) \cdot (S^{(2)}(k_1, l_1) + S^{(2)}(k_2, l_2) + \ldots + S^{(2)}(k_s, l_s)) =$$
$$= S^{(1)}(k_1, l_1) \cdot S^{(2)}(k_1, l_1) + S^{(1)}(k_1, l_1) \cdot S^{(2)}(k_2, l_2) + \ldots + S^{(1)}(k_1, l_1) \cdot S^{(2)}(k_s, l_s) + \ldots + \quad (7)$$
$$+ S^{(1)}(k_s, l_s) \cdot S^{(2)}(k_s, l_s) = S^{(1)}(k_1, l_1) \cdot S^{(2)}(k_1, l_1) + 0 + \ldots + 0 + S^{(1)}(k_2, l_2) \cdot S^{(2)}(k_2, l_2) +$$
$$+ 0 + \ldots + 0 + S^{(1)}(k_s, l_s) \cdot S^{(2)}(k_s, l_s) = \sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i).$$

На основании второй формулы леммы 1 для всякого $i = \overline{1, s}$ и ранее определенных $k_i < l_i$ выполняется равенство $S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) = -(\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i})$. Поэтому справедливо соотношение $\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i, l_i) \cdot S^{(2)}(k_i, l_i) = -\sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i})$. Отсюда и из формулы (7) следует требуемое равенство**.** Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *При всяком числе* $s \in \mathbb{N}$, $1 \le s \le [n/2]$, *для любых пар* $(k_i, l_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $i = \overline{1, s}$, *чисел, удовлетворяющих неравенствам* $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_s < l_s \le n$, *имеет место соотношение* $\left(\sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i}) \right)^2 = = \sum_{i=1}^{s} (\varepsilon_{k_i k_i} + \varepsilon_{l_i l_i})$.

Доказательство. Для всякого $s\in\mathbb{N}$, $1\le s\le[n/2]$, рассмотрим любые пары чисел $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $i=\overline{1,s}$, удовлетворяющие условиям леммы 6. В силу определения матриц ε_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, выполняется соотношение $\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})=\mathrm{diag}(0,\dots,0,\underset{k_1}{1},0,\dots,0,\underset{l_1}{1},0,\dots,0,\underset{k_2}{1},0,\dots,0,\underset{l_s}{1},0,\dots,0)$, из которого, ввиду свойства произведения диагональных матриц [1, с. 37], вытекают необходимые равенства

$$\left(\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\right)^2=(\mathrm{diag}(0,\dots,\underset{k_1}{1},0,\dots,0,\underset{l_1}{1},0,\dots,0,\underset{k_2}{1},0,\dots,0,\underset{l_s}{1},0,\dots,0))^2=$$

$$=\mathrm{diag}(0\cdot0,\dots,\underset{k_1}{1\cdot1},0\cdot0,\dots,0\cdot0,\underset{l_1}{1\cdot1},0\cdot0,\dots,0\cdot0,\underset{k_2}{1\cdot1},0\cdot0,\dots,0\cdot0,\underset{l_s}{1\cdot1},\dots,0\cdot0)=\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i}).$$

Лемма 6 доказана.

Возьмем произвольное число $s\in\mathbb{N}$, такое, что $1\le s\le[n/2]$. Зафиксируем любые пары чисел $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $i=\overline{1,s}$, для которых выполняются оценки $1\le k_1<l_1<k_2<l_2<\dots<k_s<l_s\le n$. Обозначим через $S^{(1)}:=S^{(1)}(k_1,l_1,k_2,l_2,\dots,k_s,l_s)$ и $S^{(2)}:=S^{(2)}(k_1,l_1,k_2,l_2,\dots,k_s,l_s)$ квадратные матрицы n-го порядка

$$S^{(1)}:=E+\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\ \text{и}\ S^{(2)}:=E+\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i}),\tag{8}$$

в которых слагаемые $S^{(1)}(k_i,l_i)$, $S^{(2)}(k_i,l_i)\in M_n$, $i=\overline{1,s}$, определяются равенствами соответственно (2) и (3).

Замечание 1. *Матрица* $S^{(1)}\in M_n$ $(S^{(2)}\in M_n)$ *получена из единичной заменой элементов, стоящих в позициях* (k_i,k_i), (k_i,l_i), (l_i,k_i), (l_i,l_i), $i=\overline{1,s}$, *соответственно на числа* 5, 2, -8 *и* -3 *(на числа* 3, 2, -8 *и* -5*).*

Обозначим также $\bar{E}(k_1,l_1,\dots,k_s,l_s):=E-2\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\in M_n$ матрицу, полученную из единичной заменой единиц, стоящих в строках под номерами $k_1,l_1,\dots,k_s,l_s$, на -1.

Замечание 2. *Пользуясь терминологией статьи [2], такие матрицы далее будем называть «почти единичными».*

Теорема 1. *Для ранее определенных числе* $s\in\mathbb{N}$ *и парах* $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $i=\overline{1,s}$, *матрицы* $S^{(1)},S^{(2)}\in M_n$, *описываемые формулами* (8), *обеспечивают равенство*

$$S^{(1)}\cdot S^{(2)}=\bar{E}(k_1,l_1,\dots,k_s,l_s).\tag{9}$$

Доказательство. Возьмем всякое число $s\in\mathbb{N}$ такое, что $1\le s\le[n/2]$. Зафиксируем любые пары чисел $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $i=\overline{1,s}$, для которых выполняются неравенства $1\le k_1<l_1<k_2<l_2<\dots<k_s<l_s\le n$, и рассмотрим произведение матриц $S^{(1)}\in M_n$ и $S^{(2)}\in M_n$, определяемых равенствами (8).

На основании этих равенств для матриц $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ получим соотношения

$$\begin{gathered}S^{(1)}\cdot S^{(2)}=\left(E+\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\right)\cdot\left(E+\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\right)=\\=E+\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})+\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)+\\+\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)\cdot\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}S^{(1)}(k_i,l_i)\cdot\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})-\\-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\cdot\sum_{i=1}^{s}S^{(2)}(k_i,l_i)+\left(\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\right)^2.\end{gathered}\tag{10}$$

В силу леммы 5 имеем равенство $\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i,l_i)\cdot\sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i,l_i)=-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})$. Отсюда и из формулы (10) с учетом соотношений (5), а также равенства $\left(\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})\right)^2=\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})$, вытекающего из леммы 6, ввиду определения матрицы $\bar{E}(k_1,l_1,\dots,k_s,l_s)$ установим требуемые равенства

$$S^{(1)}\cdot S^{(2)}=E+\sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})+\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})-$$
$$-\sum_{i=1}^{s} S^{(1)}(k_i,l_i)-\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})-\sum_{i=1}^{s} S^{(2)}(k_i,l_i)+\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})=$$
$$=E-2\sum_{i=1}^{s}(\varepsilon_{k_ik_i}+\varepsilon_{l_il_i})=\bar{E}(k_1,l_1,\dots,k_s,l_s).$$

Теорема 1 доказана.

Определение 1 [1, с. 30]. *Для любого числа* $k\in\{1,\dots,n\}$ *и всякой матрицы* $H=(h_{ij})_{i,j=1}^{n}\in M_n$ *через* $H\{k\}\in M_k$ *обозначим ее главную ведущую подматрицу порядка k, т.е.*

$$H\{1\}:=h_{11}\in M_1,\quad H\{2\}:=\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{pmatrix}\in M_2,\ \dots,\ H\{n\}:=H\in M_n.$$

Главным ведущим (угловым) минором k-го порядка квадратной матрицы $H\in M_n$ *будем называть* [1, с. 30] *определитель ее главной ведущей подматрицы k-го порядка, т.е.* $\det H\{k\}$.

При любых $r\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ и $k,l\in\{1,\dots,r\}$, где $k<l$, через $G^{(p)}(k,l)\in M_r$, $p=1,2$, обозначим квадратную $(r\times r)$-матрицу

$$G^{(p)}(k,l):=E+S^{(p)}(k,l)-\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{ll},\ \ p=1,2, \tag{11}$$

где матрицы $S^{(p)}(k,l)\in M_r$ определяются равенствами, аналогичными (2) и (3).

Замечание 3. *Отметим, что матрица* $G^{(1)}(k,l)\in M_r$ $(G^{(2)}(k,l)\in M_r)$ *получена из единичной заменой элементов, стоящих в позициях* (k,k), (k,l), (l,k), (l,l), *соответственно на числа* 5, 2, -8 *и* -3 *(на числа* 3, 2, -8 *и* -5*)*.

Лемма 7. *Зафиксируем произвольное число* $r\in\mathbb{N}$. *Тогда при любых* $k,l\in\mathbb{N}$, $1\le k<l\le r$ *для матриц* $G^{(p)}(k,l)\in M_r$ *справедливы соотношения*

$$\det G^{(p)}(k,l)\{j\}\ge 1,\ \ j=\overline{1,r},\ \ и\ \det G^{(p)}(k,l)=1,\ \ p=1,2.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $r\in\mathbb{N}$ и $1\le k<l\le r$ и рассмотрим матрицы $G^{(p)}:=G^{(p)}(k,l)\in M_r$, $p=1,2$. Из замечания 3 следует, что при всяком $j=\overline{1,k-1}$ главная угловая подматрица *j*-го порядка матрицы $G^{(p)}, p=1,2,$ совпадает с единичной матрицей того же порядка, поэтому $\det G^{(p)}\{j\}=1\ge 1$ для всех $j=\overline{1,k-1}$ и $p=1,2.$ При $j=\overline{k,l-1}$ главная ведущая подматрица *j*-го порядка матрицы $G^{(p)}, p=1,2,$ совпадает с верхнетреугольной матрицей, на главной диагонали которой находятся единицы, за исключением *k*-й строки (здесь диагональным элементом для матрицы $G^{(1)}$ является число 5, а для матрицы $G^{(2)}$ – число 3). Отсюда, поскольку определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на ее главной диагонали, следует, что при всех $j=\overline{k,l-1}$ для главных угловых миноров *j*-го порядка матриц $G^{(p)}, p=1,2,$ верны соотношения $\det G^{(1)}\{j\}=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 5\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=5\ge 1$ и $\det G^{(2)}\{j\}=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 3\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=3\ge 1.$ Теперь рассмотрим определитель

подматрицы $G^{(p)}\{j\}$ при любом $i\in\{l,\dots,r\}$. Последовательно используя формулу разложения Лапласа [1, с. 19] по элементам каждого из столбцов матрицы $G^{(p)}\{j\}$, начиная с первого, за исключением k-го и l-го столбцов, в результате придем к равенствам

$$\det G^{(1)}\{j\}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ -8 & -3\end{vmatrix}=1,\quad \left(\det G^{(2)}\{j\}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -8 & -5\end{vmatrix}=1\right),\quad j\in\{l,\dots,r\}, \tag{12}$$

очевидно, обеспечивающим при всяком $j\in\{l,\dots,r\}$ оценку $\det G^{(p)}\{i\}\geq 1,\ p=1,2.$ Таким образом, для любых $i=\overline{1,r}$ и $p=1,2$ выполняется требуемое неравенство $\det G^{(p)}(k,l)\{i\}\geq 1$.

Поскольку же главный угловой минор r-го порядка матрицы $G^{(p)}(k,l)\in M_r$ совпадает с ее определителем, то, ввиду формулы (12), справедливо и равенство $\det G^{(p)}(k,l)=\det G^{(p)}(k,l)\{r\}=1,\quad p=1,2.$ Лемма 7 доказана.

Замечание 4. *Возьмем произвольное число $s\in\mathbb{N}$ такое, что $1\leq s\leq[n/2]$. Зафиксируем любые пары чисел $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ i=\overline{1,s}$, для которых выполняются неравенства $1\leq k_1<l_1<k_2<l_2<\ldots<k_s<l_s\leq n$. Введем также ряд обозначений*

$$l'_j:=l_j-\textstyle\sum_{i=1}^{j-1}l'_i,\quad k'_j:=k_j-\sum_{i=1}^{j-1}l'_i,\quad j=\overline{1,s+1}, \tag{13}$$

и рассмотрим квадратные матрицы $G_1^{(p)}(k'_1,l'_1),G_2^{(p)}(k'_2,l'_2),\dots,G_s^{(p)}(k'_s,l'_s),\quad p=1,2$, порядки которых равны соответственно $l'_1,l'_2,\dots,l'_s$ и которые определяются равенствами (11). Обозначим через E_{s+1} единичную матрицу размерности $l'_{s+1}=n-\sum_{i=1}^{s}l'_i$ (если $l'_{s+1}=0$, то рассматриваемая матрица отсутствует). Тогда в силу определения (8) матриц $S^{(1)},S^{(2)}\in M_n$ и равенств (13) имеем для $p=1,2$ верные соотношения

$$S^{(p)}=S^{(p)}(k_1,l_1,k_2,l_2,\dots,k_s,l_s):=\operatorname{diag}\left(G_1^{(p)}(k'_1,l'_1),G_2^{(p)}(k'_2,l'_2),\dots,G_s^{(p)}(k'_s,l'_s),E_{s+1}\right)\in M_n. \tag{14}$$

Теорема 2. *Для зафиксированных в замечании 4 числа $s\in\mathbb{N}$ и пар $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ i=\overline{1,s}$, при $p=1,2$ матрицы $S^{(p)}\in M_n$, удовлетворяют оценкам*

$$\det S^{(p)}\{j\}\geq 1,\quad j=1,\dots,n. \tag{15}$$

Доказательство. Возьмем всякое число $s\in\mathbb{N}$ такое, что $1\leq s\leq[n/2]$. Зафиксируем любые пары чисел $(k_i,l_i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N},\ i=\overline{1,s}$, для которых выполняются неравенства $1\leq k_1<l_1<k_2<l_2<\ldots<k_s<l_s\leq n$, и покажем, что для матриц $S^{(1)},S^{(2)}\in M_n$, определяемых формулами (8), имеют место оценки (15).

Замечание 5. *Из структуры произвольной матрицы блочно-диагонального вида $A=\operatorname{diag}(A_1,A_2,\dots,A_s)$, где $A_i\in M_{r_i},\ r_i\in\mathbb{N},\ i=\overline{1,s}$, следует, что все ее главные угловые подматрицы суть матрицы блочно-диагонального вида, при этом для главных угловых миноров i-го порядка такой матрицы, очевидно, выполняются равенства*

$$\det A\{i\}=\begin{cases}\det A_1\cdot\det A_2\cdot\ldots\cdot\det A_t \ \text{ для }\ i=r_1+\ldots+r_t,\\ \det A_1\cdot\det A_2\cdot\ldots\cdot\det A_{t-1}\cdot\det A_t\{j\},\ \ j=i-\sum_{k=1}^{t-1}r_k,\ \text{для}\ \ r_1+\ldots+r_{t-1}<i<r_1+\ldots+r_t.\end{cases}$$

Из леммы 7 следует, что при каждом $i=\overline{1,s}$ и любом $j=\overline{1,l'_i}$ для матрицы $G_i^{(p)}(k'_i,l'_i)$ имеют место соотношения

$$\det G_i^{(p)}(k_i', l_i')\{j\} \geq 1, \tag{16}$$

$$\det G_i^{(p)}(k_i', l_i') = 1. \tag{17}$$

Возьмем произвольный индекс $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тогда из равенства (14) для матрицы $S^{(p)}$, замечания 5 и равенств (17) следует, что при $i = l_1' + l_2' + \ldots + l_t'$, где $t \in \{1,\ldots,s\}$, выполняются соотношения

$$\det S^{(p)}\{i\} = \det G_1^{(p)}(k_1', l_1') \cdot \ldots \cdot \det G_t^{(p)}(k_t', l_t') = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1 \geq 1. \tag{18}$$

Если же $l_1' + \ldots + l_{t-1}' < i < l_1' + \ldots + l_t'$, где $t \in \{1,\ldots,s\}$, то в силу равенств (14), замечания 5, формул (17) и (16) справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\det S^{(p)}\{i\} = \det G_1^{(p)}(k_1', l_1') \cdot \ldots \cdot \det G_{t-1}^{(p)}(k_{t-1}', l_{t-1}') \cdot \det G_t^{(p)}(k_t', l_t')\{j\} = \\ = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \det G_t^{(p)}(k_t', l_t')\{j\} = \det G_t^{(p)}(k_t', l_t')\{j\} \geq 1, \quad \text{где } j = i - \textstyle\sum_{k=1}^{t-1} l_k' < \sum_{k=1}^{t} l_k'.\end{gathered} \tag{19}$$

Поскольку главный угловой (ведущий) минор единичной матрицы – единичная матрица, то для случая $l_1 + l_2 + \ldots + l_s < i \leq n$, пользуясь равенством (14) для матрицы $S^{(p)}$, замечанием 5, формулой (17), установим соотношения

$$\begin{gathered}\det S^{(p)}\{i\} = \det S_1^{(p)}(k_1, l_1) \cdot \ldots \cdot \det S_s^{(p)}(k_s, l_s) \cdot \det E_{s+1}\{j\} = \\ = 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \det E_{s+1}\{j\} = \det E_{s+1}\{j\} \geq 1, \quad \text{где } j = i - \textstyle\sum_{k=1}^{s} l_k'.\end{gathered} \tag{20}$$

Таким образом, из соотношений (18)–(20) вытекает, что для всех $p = 1,2$ и $j = \overline{1,n}$ матрица $S^{(p)} \in M_n$, удовлетворяет оценкам (15). Теорема 2 доказана.

Зафиксируем произвольное $\rho > 0$. Следуя работе [2], введем

Определение 2 [2]. *Матрицу $H \in M_n$ назовем строго ρ-положительно регулярной, если при всяком $i = \overline{1,n}$ имеют место неравенства $\det H\{i\} \geq \rho$.*

Замечание 6. *Из теоремы 2 следует, что $S^{(p)} \in M_n$, $p = 1,2$, являются строго 1-положительно регулярными матрицами. На основании этого можно сделать вывод, что теорема 2 устанавливает разложение «почти единичной» матрицы в произведение* ***двух*** *строго 1-положительно регулярных матриц. Здесь отметим, что в теореме 4 статьи [2] было также получено аналогичное разложение, только с помощью* ***трех*** *матриц плоских вращений (строго 1/2-положительно регулярных матриц), и показано (см. пример 2 данной статьи), что вышеуказанное представление «почти единичной» матрицы в виде произведения двух сомножителей – строго регулярных положительных матриц плоских вращений невозможно.*

Таким образом, в настоящей работе нам удалось установить, что для разложения «почти единичной» матрицы в произведение строго регулярно положительных матриц ***достаточно двух*** *сомножителей (хотя и не являющихся матрицами плоских вращений).*

П р и м е р 1. Рассмотрим «почти единичную» (5×5)-матрицу

$$\bar{E}(1,3,4,5) := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить, что справедливы следующие соотношения

$$S^{(1)}\cdot S^{(2)}:=S^{(1)}(1,3,4,5)\cdot S^{(2)}(1,3,4,5):=\begin{pmatrix}5&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-3&0&0\\0&0&0&5&2\\0&0&0&-8&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-5&0&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&-8&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}=\overline{E}(1,3,4,5),$$

$$\det S^{(1)}\{1\}=5\ge 1,\quad \det S^{(2)}\{1\}=3\ge 1,\quad \det S^{(1)}\{2\}=5\ge 1,\quad \det S^{(2)}\{2\}=3\ge 1,$$
$$\det S^{(1)}\{3\}=(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot(5\cdot(-3)-(-8)\cdot 2)=1\ge 1,$$
$$\det S^{(2)}\{3\}=(-1)^{2+2}\cdot 1\cdot(3\cdot(-5)-(-8)\cdot 2)=1\ge 1,$$
$$\det S^{(1)}\{4\}=\det S^{(1)}\{3\}\cdot(-1)^{4+4}\cdot 5=5\ge 1,$$
$$\det S^{(2)}\{4\}=\det S^{(1)}\{3\}\cdot(-1)^{4+4}\cdot 3=3\ge 1,$$
$$\det S^{(1)}\{5\}=\det S^{(1)}\{3\}(5\cdot(-3)-(-8)\cdot 2)=1\ge 1,$$
$$\det S^{(2)}\{5\}=\det S^{(2)}\{3\}(3\cdot(-5)-(-8)\cdot 2)=1\ge 1,$$

которые устанавливают представление «почти единичной» матрицы $\overline{E}(1,3,4,5)$ в виде произведения двух строго 1-положительно регулярных матриц $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$.

2. Факторизация квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и положительным определителем с помощью строго положительно регулярных матриц. Установленное в предыдущем пункте разложение «почти единичной» матрицы в произведение двух строго положительно регулярных матриц (см. теоремы 1 и 2) позволяет получить факторизацию любой квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и положительным определителем на строго положительно регулярные матрицы.

Прежде чем перейти к доказательству такого результата (см. ниже теорему 3 и ее следствие 1), сделаем одно, необходимое нам в дальнейшем,

Замечание 7. *При любых матрице $A\in M_n$ и числе $i\in\{1,\dots,n\}$ для матрицы $A_1:=A\cdot(E-2e_ie_i^T)\in M_n$ имеют место соотношения*

$$\det A_1\{j\}=\det A\{j\},\ j=\overline{1,i-1},\tag{21}$$

$$\det A_1\{j\}=-\det A\{j\},\ \ j=\overline{i,n}.\tag{22}$$

Действительно, поскольку верны равенства $A_1=A\cdot(E-2e_ie_i^T)=A-2Ae_ie_i^T$, то умножение справа матрицы $A\in M_n$ на матрицу $(E-2e_ie_i^T)\in M_n$, $i\in\{1,\dots,n\}$, полученную из единичной матрицы заменой столбца $e_i\in\mathbb{R}^n$ на столбец, ему противоположный, приводит к матрице $A_1=A-2Ae_ie_i^T\in M_n$, совпадающей с матрицей *A*, за исключением *i*-го столбца, элементы которого равны элементам матрицы *A*, взятым с противоположным знаком.

Тогда для всех $j=\overline{1,i-1}$ первые *j* строк и столбцов матрицы A_1 совпадают с соответствующими строками и столбцами матрицы *A*, и поэтому справедливы равенства $\det A_1\{j\}=\det A\{j\}$, $j=\overline{1,i-1}$. Кроме того, в силу определения матрицы $A_1\in M_n$ имеют место соотношения $A_1e_i=-Ae_i$ и $A_1e_j=Ae_j$, $j=\overline{i+1,n}$, из которых, ввиду того, что при замене всех элементов одного столбца матрицы на им противоположные ее определитель также меняет знак, следуют верные для всех $j=\overline{i,n}$ равенства $\det A_1\{j\}=-\det A\{j\}$.

Введение понятия «почти единичная матрица» и получение ее разложения (как в этой статье, так и в работе [2]) обусловлены теоремой 3.

Теорема 3. *При любом числе* $\rho > 0$ *и всякой матрице* $H \in M_n$, *для которой справедливы оценки* $|\det H\{i\}| \geq \rho > 0$, $i = \overline{1,n}$, *причем* $\det H \geq \rho > 0$, *найдутся такие матрица* $H_1 \in M_n$, *удовлетворяющая соотношениям* $\det H_1\{i\} \geq \rho$, $i = \overline{1,n}$, *и диагональная матрица* $\bar{E} := \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1) \in M_n$, *с четным количеством -1 на диагонали, которые обеспечивают равенство* $H = H_1 \cdot \bar{E}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные число $\rho > 0$ и матрицу $H =: K_1 \in M_n$, удовлетворяющую условию теоремы 3, и построим такие квадратную матрицу $H_1 \in M_n$, для которой выполняются оценки $\det H_1\{i\} \geq \rho > 0$, $i = \overline{1,n}$, и диагональную матрицу $\bar{E} := \mathrm{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1) \in M_n$, с четным количеством -1 на диагонали, обеспечивающие выполнение равенства $H = H_1 \cdot \bar{E}$. Указанное построение будем производить индуктивным образом.

Рассмотрим вначале главный угловой минор первого порядка $\det H\{1\}$. Из определения матрицы $H \in M_n$ (равной K_1) следует истинность неравенства $|\det K_1\{1\}| \geq \rho > 0$. Если выполняется оценка $\det K_1\{1\} \geq \rho$, то, полагая $E_1 := E$ и $K_2 := K_1 \cdot E_1$, получим соотношения $|\det K_2\{j\}| = |\det(K_1 \cdot E_1)\{j\}| =$ $= |\det(K_1 \cdot E)\{j\}| = |\det K_1\{j\}| \geq \rho$, $j = \overline{2,n}$. Если же имеет место неравенство $\det K_1\{1\} \leq -\rho < 0$, то, обозначив $E_1 := E - 2e_1 e_1^T$ и $K_2 := K_1 \cdot E_1$, на основании формулы (22) замечания 7 установим соотношения $|\det K_2\{j\}| = |\det(K_1 \cdot E_1)\{j\}| = |\det(K_1 \cdot (E - 2e_1 e_1^T))\{j\}| = |-\det K_1\{j\}| \geq \rho > 0$, $j = \overline{2,n}$, при этом $\det K_2\{1\} = -\det K_2\{1\} \geq \rho$. Таким образом, в каждом из возможных случаев выполняются оценки

$$\det K_2\{1\} \geq \rho \text{ и } |\det K_2\{j\}| \geq \rho, \quad j = \overline{2,n}. \tag{23}$$

Рассмотрим главный угловой минор второго порядка матрицы $K_2 \in M_n$. Из второго неравенства в (23) при $j = 2$ следует оценка $|\det K_2\{2\}| \geq \rho$. Тогда, если $\det K_2\{2\} \geq \rho$, то, полагая $E_2 := E$ и $K_3 := K_2 \cdot E_2$, с учетом формул (23) получим соотношения $\det K_3\{j\} = \det(K_2 \cdot E_2)\{j\} = \det(K_2 \cdot E)\{j\} = \det K_2\{j\} \geq \rho$ для $j = 1,2$ и, аналогично, $|\det K_3\{j\}| = |\det K_2\{j\}|$ при $j = \overline{3,n}$. Из последних равенств, ввиду формулы (23), установим оценки $|\det K_3\{j\}| \geq \rho$, $j = \overline{3,n}$. Если же выполняется неравенство $\det K_2\{2\} \leq -\rho < 0$, тогда отсюда, обозначив $E_2 := E - 2e_2 e_2^T$ и $K_3 := K_2 \cdot E_2$, ввиду формул (21), первого из неравенств (23), а также равенств (22) получим соотношения

$$\det K_3\{1\} = \det(K_2 \cdot (E - 2e_2 e_2^T))\{1\} = \det K_2\{1\} \geq \rho,$$
$$\det K_3\{2\} = \det(K_2 \cdot (E - 2e_2 e_2^T))\{2\} = -\det K_2\{2\} \geq \rho \text{ и } \det K_3\{j\} = -\det K_2\{j\}, \quad j = \overline{3,n}.$$

В силу последних равенств и формулы (23) имеем оценки $|\det K_3\{j\}| \geq \rho$, $j = \overline{3,n}$.

Следовательно, в каждом из возможных случаев верны неравенства

$$\det K_3\{1\} \geq \rho, \ \det K_3\{2\} \geq \rho, \ |\det K_3\{j\}| \geq \rho, \ j = \overline{3,n}.$$

Пусть теперь на (*l-1*)-м шаге имеем последовательности диагональных матриц $E_i = [e_1, e_2, \ldots, \pm e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n] \in M_n$, $i = \overline{1, l-1}$, и таких квадратных матриц $K_i \in M_n$, $i = \overline{1,l}$, которые удовлетворяют соотношениям $K_{j+1} := K_j \cdot E_j$, $j = \overline{1, l-1}$,

$$\det K_l\{j\} \geq \rho > 0, \ j = \overline{1, l-1}, \text{ и } |\det K_l\{s\}| \geq \rho, \ s = \overline{l,n}. \tag{24}$$

Покажем, что на l-м шаге $(2 < l \le n)$ всегда найдется такая матрица $E_l = [e_1, e_2, \ldots, e_{l-1}, \pm e_l, e_{l+1}, \ldots, e_n] \in M_n$, что для матрицы $K_{l+1} := K_l \cdot E_l \in M_n$ будут выполняться неравенства

$$\det K_{l+1}\{j\} \ge \rho > 0, \quad j = \overline{1,l}, \quad |\det K_{l+1}\{s\}| \ge \rho, \quad s = \overline{l+1,n}. \qquad (25)$$

Рассмотрим главный угловой минор l-го порядка $\det K_l\{l\}$. Из второго соотношения формулы (24) при $j = l$ следует оценка $|\det K_l\{l\}| \ge \rho$. Если справедливо неравенство $\det K_l\{l\} \ge \rho$, тогда отсюда, полагая $E_l := E$, ввиду (24), получим соотношения $\det K_{l+1}\{j\} = \det(K_l \cdot E_l)\{j\} = \det(K_l \cdot E)\{j\} = \det K_l\{j\} \ge \rho$, $j = \overline{1,l}$, и, аналогично, $|\det K_{l+1}\{s\}| = |\det K_l\{s\}|$, $s = \overline{l+1,n}$. Из последних равенств, ввиду второй формулы в (24), следуют оценки $|\det K_{l+1}\{s\}| \ge \rho$, $s = \overline{l+1,n}$. Если же выполняется неравенство $\det K_l\{l\} \le -\rho < 0$, то, обозначая $E_l := (E - 2e_l e_l^T) \in M_n$, в силу формул (21), (24) и (22) получим соотношения

$$\det K_{l+1}\{j\} = \det(K_l \cdot E_l)\{j\} = \det(K_l \cdot (E - 2e_l e_l^T))\{j\} = \det K_l\{j\} \ge \rho, \quad j = \overline{1,l-1},$$
$$\det K_{l+1}\{l\} = \det(K_l \cdot (E - 2e_l e_l^T))\{l\} = -\det K_l\{l\} \ge \rho,$$
$$|\det K_{l+1}\{s\}| = |\det(K_l \cdot (E - 2e_l e_l^T))\{s\}| = |-\det K_l\{s\}|, \quad s = \overline{l+1,n}. \qquad (26)$$

Ввиду равенств (26) и формулы (24) имеем оценки $|\det K_{l+1}\{s\}| \ge \rho$, $s = \overline{l+1,n}$.

Таким образом, для каждого из возможных случаев получили такую матрицу $E_l \in M_n$, что для матрицы $K_{l+1} := K_l \cdot E_l \in M_n$, выполняются оценки (25).

Продолжая этот процесс, на n-м шаге получим последовательности диагональных матриц $E_i = [e_1, e_2, \ldots, \pm e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n] \in M_n$, $i = \overline{1,n}$, и квадратных матриц $K_j \in M_n$, $j = \overline{1,n+1}$, которые удовлетворяют равенствам $K_{i+1} = K_i \cdot E_i$, $i = \overline{1,n}$, причем для матрицы $K_{n+1} \in M_n$ будут справедливы оценки

$$\det K_{n+1}\{i\} \ge \rho > 0, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (27)$$

Из соотношений $K_{i+1} = K_i \cdot E_i$, $i = \overline{1,n}$, и $K_1 = H$ следует цепочка равенств

$$K_{n+1} = K_n \cdot E_n = K_{n-1} \cdot E_{n-1} \cdot E_n = \ldots = K_1 \cdot E_1 \cdot \ldots \cdot E_{n-1} \cdot E_n = H \cdot E_1 \cdot \ldots \cdot E_{n-1} \cdot E_n. \qquad (28)$$

Поскольку произведение диагональных матриц с числами ± 1 на главной диагонали есть диагональная матрица с ± 1 на главной диагонали, то матрица $E_1 \cdot \ldots \cdot E_{n-1} \cdot E_n$ обратима, причем, как легко показать, обратная к ней матрица также является диагональной с ± 1 на диагонали. Обозначим эту матрицу $\overline{E}$, т.е. $\overline{E} := (E_1 \cdot \ldots \cdot E_{n-1} \cdot E_n)^{-1}$. Отсюда и из формулы (28) следует

$$H = K_{n+1} \overline{E}. \qquad (29)$$

Положим $H_1 := K_{n+1}$, тогда для $H_1 \in M_n$ в силу неравенств (27) имеем оценки

$$\det H_1\{i\} \ge \rho > 0 \quad \text{для любого } i = \overline{1,n}. \qquad (30)$$

Из свойств матрицы $H \in M_n$, формулы (29), а также $\det K_{n+1} = \det K_{n+1}\{n\}$ вытекают соотношения $0 < \rho \le \det H = \det(K_{n+1} \cdot \overline{E}) = \det K_{n+1} \cdot \det \overline{E} = \det K_{n+1}\{n\} \cdot \det \overline{E}$.

В силу неравенства (27) при $i=n$ и последнего соотношения выполняется оценка $\det\bar{E}>0$. Определитель диагональной матрицы $\bar{E}\in M_n$ есть произведение элементов, стоящих на главной диагонали, т.е. чисел ± 1. Тогда, ввиду последней оценки, на главной диагонали матрицы $\bar{E}$ расположено четное количество -1. Отсюда и из формулы (30), верной для матрицы $H_1\in M_n$, следует, что теорема 3 доказана.

Замечание 8. *Из доказательства теоремы 3 вытекает, что для любого числа $\rho>0$ и всякой матрицы $H\in M_n$, удовлетворяющей* ***только оценкам*** $|\det H\{i\}|\geq\rho>0$, $i=\overline{1,n}$, *найдутся такие квадратная матрица $H_1\in M_n$, для которой справедливы неравенства $\det H_1\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$, и диагональная матрица $\bar{E}:=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)\in M_n$ (имеющая* ***не всегда*** *четное количество -1), которые обеспечивают равенство $H=H_1\cdot\bar{E}$.*

Замечание 9. *Заметим также, что при всяком числе $\rho>0$ и любой матрице $H\in M_n$, для которой имеют место неравенства $|\det H\{i\}|\geq\rho>0$, $i=\overline{1,n}$, существуют такие квадратная матрица $H_2\in M_n$, удовлетворяющая оценкам $\det H_2\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$, и диагональная матрица $\bar{E}:=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)\in M_n$, при которых справедливо равенство $H=\bar{E}\cdot H_2$.*

Действительно, взяв любые число $\rho>0$ и матрицу $H\in M_n$, такую, что $|\det H\{i\}|\geq\rho>0$, рассмотрим матрицу $H^T\in M_n$. Поскольку транспонирование матрицы не меняет ее главные угловые миноры (см., напр., доказательство теоремы 2 работы [2]), то для матрицы $H^T\in M_n$ имеют место оценки $|\det H^T\{i\}|\geq\rho>0$, $i=\overline{1,n}$, т.е. она удовлетворяет замечанию 7. Поэтому найдутся такие матрица $H_1\in M_n$, для которой верны неравенства $\det H_1\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$, и матрица $\bar{E}:=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)\in M_n$, что справедливо равенство $H^T=H_1\cdot\bar{E}$. Поэтому для $H\in M_n$ верны соотношения $H=(H^T)^T=(H_1\cdot\bar{E})^T=\bar{E}^T\cdot H_1^T$. Положим $H_2:=H_1^T\in M_n$. Так как транспонирование матрицы не меняет ее главных угловых миноров, то с учетом оценок $\det H_1\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$, имеем соотношения $\det H_2\{i\}=\det H_1^T\{i\}=\det H_1\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$. Из определения $\bar{E}$ вытекает очевидное равенство $\bar{E}^T=\bar{E}\in M_n$, из которого, ввиду $H=\bar{E}^T\cdot H_1^T$ и $H_1^T=H_2\in M_n$ следует требуемое разложение $H=\bar{E}\cdot H_2$, в котором $\bar{E}=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)$ и $\det H_2\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$.

Из теоремы 3 вытекает нижеприведенное

Следствие 1. *Для любого числа $\rho>0$ и всякой матрицы $H\in M_n$, удовлетворяющей оценкам $|\det H\{i\}|\geq\rho>0$, $i=\overline{1,n}$, и $\det H\geq\rho>0$, существуют такие величина $\rho_1=\rho_1(\rho)>0$ и строго ρ_1-положительно регулярные матрицы $H_i\in M_n$, $i=\overline{1,3}$, что имеет место представление $H=\prod_{i=1}^{3}H_i$.*

Доказательство. Возьмем любые число $\rho>0$ и матрицу $H\in M_n$, при которой выполняются условия следствия 1. Тогда матрица H удовлетворяет теореме 3, на основании которой найдем такие квадратную матрицу $H_1\in M_n$, для которой справедливы оценки $\det H_1\{i\}\geq\rho$, $i=\overline{1,n}$, и диагональную матрицу $\bar{E}:=\mathrm{diag}(\pm1,\ldots,\pm1)\in M_n$, с четным количеством -1 на диагонали, которые обеспечивают равенство $H=H_1\cdot\bar{E}$. В силу теорем 2 и 1 для матрицы $\bar{E}\in M_n$ найдутся такие квадратные матрицы $S^{(1)},S^{(2)}\in M_n$, при которых выполняются оценки $\det S^{(k)}\{j\}\geq1$, $j=\overline{1,n}$, $k=1,2$, и равенство $\bar{E}=S^{(1)}\cdot S^{(2)}$. Поэтому для матрицы $H\in M_n$ имеет место представление

$$H=H_1\cdot S^{(1)}\cdot S^{(2)}. \tag{31}$$

Положим $\rho_1 := \min\{1,\rho\} > 0$, $H_2 := S^{(1)} \in M_n$ и $H_3 := S^{(2)} \in M_n$. Тогда отсюда и из определения матриц $H_1, S^{(1)}, S^{(2)} \in M_n$ получим верные при всех $j = \overline{1,n}$, оценки $\det H_1\{j\} \ge \rho \ge \rho_1$, $\det H_2\{j\} = \det S^{(1)}\{j\} \ge 1 \ge \rho_1$, $\det H_3\{j\} = \det S^{(2)}\{j\} \ge 1 \ge \rho_1$ и, ввиду формулы (31), требуемое разложение $H = \prod_{i=1}^{3} H_i$. Следствие 1 доказано.

Замечание 10. *Используя разложение «почти единичной» матрицы* $\bar{E} \in M_n$ *в произведение трех матриц плоских вращений (см. теорему 4 работы [2]), а также теорему 3, можно получить представление любой матрицы* $H \in M_n$ *, удовлетворяющей оценкам* $|\det H\{i\}| \ge \rho > 0$, $i = \overline{1,n}$, *причем* $\det H \ge \rho > 0$, *в виде произведения* ***четырех*** *строго* ρ_1*-положительно регулярных матриц с величиной* $\rho_1 = \min\{\rho, 1/2\}$, *т.е. справедливо*

Следствие 2. *Для любого числа* $\rho > 0$ *и всякой матрицы* $H \in M_n$, *для которой имеют место оценки* $|\det H\{i\}| \ge \rho > 0$, $i = \overline{1,n}$, *причем* $\det H \ge \rho > 0$, *найдутся строго* ρ_1*-положительно регулярные матрицы* $H_i \in M_n$, $i = \overline{1,4}$, *(с* $\rho_1 = \min\{\rho, 1/2\}$*), обеспечивающие выполнение равенства* $H = \prod_{i=1}^{4} H_i$.

Замечание 11. *Отметим, что представление квадратной матрицы в виде произведения строго регулярно положительных матриц на основании следствия 1 (следствие 2) может быть получено не для всякой квадратной матрицы с отделенным от нуля положительным определителем, а только лишь для такой, которая имеет не равные нулю все главные угловые миноры и отделенный от нуля положительный определитель.*

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \in M_5.$$

Легко показать, что для нее выполняются соотношения $|\det H\{1\}| = |-2| \ge 2$, $|\det H\{2\}| = |-2| \ge 2$, $|\det H\{3\}| = |19| \ge 2$, $|\det H\{4\}| = |-46| \ge 2$, $|\det H\{5\}| = |\det H| = |372| \ge 2$.

Поэтому матрица $H \in M_5$ удовлетворяет теореме 3 (а также ее следствию 1).

Представим H в виде произведения строго положительно регулярной матрицы и «почти единичной» матрицы, воспользовавшись доказательством теоремы 3. Имеем цепочку равенств

$$H = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \overset{\det K_1\{1\}=-2}{=} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\det K_2\{1\}=2}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot E_1 \overset{\det K_3\{2\}=2}{=}$$

$$
=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot E_2 \cdot E_1 \overset{\det K_4\{3\}=19}{=}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \overset{\det K_5\{4\}=46}{=}
$$

$$
=\left(\boxed{\begin{matrix} 2 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -5 \end{matrix}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot E_4 \cdot E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \overset{\det K_6\{5\}=372}{=}
$$

$$
=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =: H_1 \cdot \bar{E}, \qquad (32)
$$

где

$$
K_1 = H = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{pmatrix},
$$

$$
K_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_5 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad K_6 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} = H_1,
$$

$$
E_1 := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Легко показать, что $\det H_1\{1\} = 2 \geq 2$, $\det H_1\{2\} = 2 \geq 2$, $\det H_1\{3\} = 19 \geq 2$, $\det H_1\{4\} = 46 \geq 2$, $\det H_1\{5\} = \det H_1 = 372 \geq 2$, т.е. $H_1 \in M_5$ – строго *2*-положительно регулярная матрица.

На основании примера 1 для матрицы $\bar{E} \in M_5$ имеем соотношения

$$\bar{E}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}=S^{(1)}\cdot S^{(2)}=\begin{pmatrix}5&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-3&0&0\\0&0&0&5&2\\0&0&0&-8&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-5&0&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&-8&-5\end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$\det S^{(k)}\{j\}\geq 1,\quad j=\overline{1,5},\quad k=1,2.$$

Таким образом, в силу формул (32) и (33), а также оценок на главные угловые миноры матриц H_1, $S^{(1)},S^{(2)}\in M_5$ для матрицы $H\in M_5$ имеем следующее разложение, в котором матрицы-сомножители, очевидно, являются строго *1*- положительно регулярными матрицами:

$$H=\begin{pmatrix}-2&-3&3&-2&1\\-4&-5&-2&-3&2\\1&0&1&-1&3\\0&1&0&-1&4\\0&2&3&-4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-3&-3&2&-1\\4&-5&2&3&-2\\-1&0&-1&1&-3\\0&1&0&1&-4\\0&2&-3&4&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-3&0&0\\0&0&0&5&2\\0&0&0&-8&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&2&0&0\\0&1&0&0&0\\-8&0&-5&0&0\\0&0&0&3&2\\0&0&0&-8&-5\end{pmatrix}.$$

Заключение. Настоящее исследование посвящено разложению квадратной матрицы с ненулевыми главными угловыми минорами и отделенным от нуля положительным определителем в произведение трех строго положительно регулярных матриц. В дальнейшем на основании полученных результатов планируется установить факторизацию произвольной квадратной матрицы *n*-го порядка с отделенным от нуля определителем на строго положительно регулярные квадратные $(n\times n)$-матрицы. Впоследствии такое разложение будет использовано в теории линейных управляемых нестационарных систем при построении управляющих воздействий, обеспечивающих решение различных задач управляемости асимптотических характеристик линейных динамических систем [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2025» (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем», задание 1.2.01 «Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений» (№ ГР 20211316)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
2. Козлов, А.А. О свойствах строго положительно регулярных матриц / А.А. Козлов, Т.А. Александрович // Весн. Віцеб. дзярж. ун-та. – 2022. – № 4(117). – С. 20–27.
3. Макаров, Е.К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е.К. Макаров, С.Н. Попова. – Минск: Беларус. навука, 2012. – 407 с.

REFERENCES

1. Chorn R., Johnson Ch. *Matrichni analiz* [Matrix Analysis], Moscow: Mir, 1989, 656 p.
2. Kozlov A.A., Aleksandrovich T.A. *Vesn. Vitseb. dziarzh. un-ta* [Bulletin of Vitebsk State University], 2022, 4(117), pp. 20–27.
3. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravliayemost asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh system* [Controllability of Asymptotic Invariants of Non-Stationary Linear Systems], Minsk: Belarus. navuka, 2012, 407 p.

Поступила в редакцию 05.08.2022

Адрес для корреспонденции: e-mail: tatyanka.aleksandrovich@mail.ru – Александрович Т.А.