

$$2.3. \lg^2 x + \lg x^3 - 10^{\lg 4} < 0.$$

$$2.4. \lg^2 x + \lg x^3 - 10^{\lg 4} < \lg 1.$$

$$2.5. \lg^2 x + \lg x^7 - \lg x^4 - 10^{\lg 4} < \lg 1.$$

$$2.6. \left( \frac{\log_5 x}{\log_5 10} \right)^2 + \lg x^7 - \lg x^4 - 10^{\lg 4} < \lg 1.$$

Следующим способом укрупнения может быть способ обобщения неравенства. Например, после решения неравенства  $\lg^2 x + 3 \lg x - 4 < 0$  можно решить обобщённое неравенство  $a \lg^2 x + b \lg x + c < 0$ . Сделаем замену  $\lg x = t$ . Получим квадратное неравенство  $at^2 + bt + c < 0$ . Находим множество его решений  $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < t < \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  или  $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} < \lg x < \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$  и так далее.

**Заключение.** Анализ результатов исследования позволил сделать вывод о том, что методическая схема изучения логарифмических неравенств может состоять из следующих этапов: подготовительного (повторение ранее изученного материала), основного (овладение методами решения неравенств), дополнительного (укрупнение неравенств). При этом на каждом этапе нами вносились некоторые изменения и дополнения в традиционное изложение темы. Кроме того, укрупнённые блоки неравенств сначала составлял сам учитель и предлагал для рассмотрения учащимся, а затем подключал к составлению наиболее активных и способных учеников. Подобное изучение логарифмических неравенств оказало положительное воздействие на развитие у школьников вариативности и логики мышления, воображения и интуиции.

1. Устименко, В.В. Методика работы с логарифмическими уравнениями в контексте укрупнения дидактических единиц / В.В. Устименко, О.А. Попп // Весн. Вісб. дзярж. ун-та. – 2016. - № 3(92). – С. 88-94. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/8899> (дата обращения: 24.01.2023).

## ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ АДАМАРА

*С.А. Шлапаков<sup>1</sup>, О.В. Скоромник<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

<sup>2</sup>*Новополоцк, ПГУ имени Евфросинии Полоцкой*

В работе объектом исследования является дифференциальная задача, представляющая собой аналог задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида. В качестве производной выступает дробная производная Адамара [2]. Естественно возникает проблема интегрирования такого уравнения с учётом начальных условий. Цель данного исследования состоит в отыскании решения интегрального уравнения второго рода, которое эквивалентно поставленной задаче.

**Материал и методы.** Материалом исследования являются операции дробного интегрирования и дифференцирования Адамара. В работе используется аппарат функционального анализа в сочетании с методами дифференциального и интегрального исчисления.

**Результаты и их обсуждение.** Классическая задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля рассмотрена в [1]. В работе [3], а далее и в [4] рассматривалась аналогичная задача для дифференциального уравнения общего вида с дробной производной Адамара [2]:

$$(D_{a+}^{\alpha} g)(x) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g)(x), \quad \alpha > 0, \quad \delta = x \frac{d}{dx}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

при этом

$$(D_{a+}^{\alpha} g)(x) = \delta^n (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} g)(x) = \delta^n (D_{a+}^{\alpha-n} g)(x),$$

где конструкция

$$(\mathfrak{I}_{a+}^{\alpha} g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{g(t)}{\left(\ln \frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}} \frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0, \quad 0 \leq a < x$$

является дробным интегралом Адамара порядка  $\alpha > 0$ .

Задача состояла в отыскании функции  $y(x)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющей уравнению

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f(x, y(x)), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in N, \quad a > 0 \quad (1)$$

и начальным условиям

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n = -[-\alpha]. \quad (2)$$

Левую часть в начальных условиях (2) следует рассматривать как предел в правосторонней окрестности  $(a, a + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  точки  $a$ :

$$(D_{a+}^{\alpha-k} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (D_{a+\mu}^{\alpha-k} y)(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$(D_{a+}^{\alpha-n} y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} (\mathfrak{I}_{a+}^{n-\alpha} y)(x), \quad \alpha \neq n,$$

$$(D_{a+\mu}^0 y)(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} y(x), \quad \alpha = n.$$

Задача (1)-(2) рассматривалась в пространстве регулярных функций

$$L_{\delta}^{\alpha}(a, b) = \{y \in L(a, b) \mid D_{a+}^{\alpha} y \in L(a, b)\}, \quad 0 < a < b < +\infty, \quad (3)$$

где

$$L(a, b) = \left\{ z(t) \mid \int_a^b |z(t)| dt < +\infty \right\}, \quad \|z_1 - z_2\|_{L(a, b)} = \int_a^b |z_1(t) - z_2(t)| dt.$$

Естественным видится рассмотрение дифференциальной задачи в более общей постановке: найти функцию  $y(x) \in L_{\delta}^{\alpha}(a, b)$ , заданную на отрезке  $[a, b]$  и удовлетворяющую уравнению

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(x), (D_{a+}^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_m} y)(x)], \quad (4)$$

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < \alpha.$$

и начальным условиям (2).

Дифференциальная задача (4)-(2) равносильна уравнению Вольтерра 2-го рода

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left( \ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha - k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha - 1} f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), (D_{a+}^{\alpha_2} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_m} y)(t)] \frac{dt}{t}, \quad x > a \quad (5)$$

Для отыскания решения этого уравнения можно, например, применить принцип сжимающих отображений в пространстве (3), записав соотношение (5) предварительно в виде  $y(x) = (Ay)(x)$ , где

$$(Ay)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \left( \ln \frac{x}{t} \right)^{\alpha - 1} f[t, y(t), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(t), (D_{a+}^{\alpha_2} y)(t), \dots, (D_{a+}^{\alpha_m} y)(t)] \frac{dt}{t} + g(x),$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left( \ln \frac{x}{a} \right)^{\alpha - k}.$$

Затем строится рекуррентная функциональная последовательность  $y_l(x) = (A^l y_0)(x)$ ,  $l = 1, 2, \dots$ , где начальным приближением может служить, например,  $y_0(x) = g(x)$ . В силу полноты пространства  $L(a, b)$  построенная последовательность будет сходиться к единственному решению  $y^*(x)$  интегрального уравнения, а, значит, и дифференциальной задачи (4)-(2).

**Заключение.** В приложениях часто возникает необходимость решать аналоги задач Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. К тому же при интегрировании некоторых классов дифференциальных уравнений целого порядка приходится руководствоваться положениями теории дробного дифференцирования и интегрирования. В работе построено решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, которое эквивалентно задаче типа Коши для дифференциального уравнения с дробными производными Адамара в пространстве регулярных функций.

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Мн.: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Шлапаков, С.А. Операторы дробного интегрирования по Адамару / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы XVI (63) Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов (Витебск, 16–17 марта 2011г.) – 2011. Т. 1. С. 71-73. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/13214> (дата обращения: 01.02.2023).

3. Шлапаков, С. А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения общего вида дробного порядка / С.А. Шлапаков // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 73-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 11марта 2021 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2021. С. 71-72. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/26880> (дата обращения: 01.02.2023).

4. Шлапаков, С.А. О разрешимости задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка / С.А. Шлапаков, О.В. Скоромник // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 74-й Региональной научно-практической конференции преподавателей, научных сотрудников и аспирантов, Витебск, 18 февраля 2022 г. Витебск: ВГУ им. П.М. Машерова, 2022. С. 52-53. URL: <https://rep.vsu.by/handle/123456789/31567> (дата обращения: 01.02.2023).