

**ОБ УРАВНЕНИИ БЕТА-РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННО-НУКЛОННОГО ВЕЩЕСТВА
В ФЕРМИ-ГАЗОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ
ВБЛИЗИ ПОРОГА НЕЙТРОНИЗАЦИИ**

А. И. Серый, канд. физ.-мат. наук, доц.,

кафедра общей и теоретической физики

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина,

Брест, Беларусь

Получено приближенное уравнение бета-равновесия электронно-нуклонного вещества вблизи порога нейтронизации при низких отличных от нуля температурах. К нейтронам применена формула для химического потенциала идеального невырожденного ферми-газа, при получении выражения для химического потенциала протонного газа использовалось приближенное распределение Ферми–Дирака, линейное по энергии фермиона вблизи химического потенциала, выражение для химического потенциала электронов соответствует температуре абсолютного нуля.

Ключевые слова: электронно-нуклонное вещество, бета-равновесие, низкие температуры.

Задачи о нахождении значения концентрации протонов n_p (которое равно значению концентрации электронов n_e для электрически нейтрального вещества), соответствующего порогу нейтронизации водорода, а также значений концентраций протонов и нейтронов (n_n), соответствующих бета-равновесию электронно-нуклонного вещества, находят различные приложения в астрофизике. В простейших моделях таких систем все три типа частиц представляют собой идеальный ферми-газ при температуре абсолютного нуля, причем решения соответствующих задач хорошо известны [1, с. 55–56]. Алгоритм расчета основных характеристик ферми-газа (в том числе химического потенциала) при низких отличных от нуля температурах хорошо известен для нерелятивистского предела [2, с. 596–597]. Но его применение к релятивистскому электронному газу некорректно, поэтому алгоритм нуждается в модификации, которая была осуществлена, в частности, в [3, с. 55–59; 4, с. 57]. Возможен, однако, другой подход к указанным выше двум задачам, основанный на применении к протонному газу функции распределения Ферми–Дирака в виде [5, с. 446]

$$f(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \epsilon < \mu_p - 2kT \\ \frac{1}{2} + \frac{\mu_p - \epsilon}{4kT}, & \mu_p - 2kT < \epsilon < \mu_p + 2kT \\ 0, & \epsilon > \mu_p + 2kT \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ϵ – энергия протона, отсчитываемая от $m_p c^2$ (m_p – масса протона, c – скорость света в вакууме), μ_p – химический потенциал, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Величина n_p находится по формуле [5, с. 445, 446]

$$n_p = \frac{4\pi(2m_p)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\epsilon) \sqrt{\epsilon} d\epsilon. \quad (2)$$

Пределы интегрирования в (2) соответствуют значениям ϵ , при которых $f(\epsilon) \neq 0$ (в соответствии с (1)). Подставляя (1) в (2), получаем:

$$n_p = \frac{8\pi(2m_p)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3} (\mu_p - 2kT)^{3/2} + \frac{8\pi(2m_p)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\mu_p}{4kT} \right) \left((\mu_p + 2kT)^{3/2} - (\mu_p - 2kT)^{3/2} \right) - \frac{2\pi(2m_p)^{3/2}}{5kT(2\pi\hbar)^3} \left((\mu_p + 2kT)^{5/2} - (\mu_p - 2kT)^{5/2} \right). \quad (3)$$

Для химического потенциала релятивистского электронного газа приближенно будем использовать выражение (в котором сразу учитывается $m_e c^2$, где m_e – масса электрона), соответствующее $T = 0$ К (учтено, что $n_e = n_p$) [1, с. 55]:

$$\tilde{\mu}_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2}. \quad (4)$$

Здесь $p_{Fe} = p_{Fp}$ – импульс Ферми при температуре абсолютного нуля:

$$p_{Fe} = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n_p^{1/3}. \quad (5)$$

Приближение (4) можно считать оправданным, поскольку

$$\frac{kT}{\sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} - m_e c^2} \ll \frac{kT}{p_{Fp}^2 / (2m_p)}. \quad (6)$$

Неравенство (6) следует из

$$m_e \ll m_p. \quad (7)$$

Для нейтронов вблизи порога нейтронизации величина n_n достаточно мала, поэтому для них любая отличная от нуля температура может считаться высокой.

Следовательно, для их химического потенциала, отсчитываемого от $m_n c^2$ (m_n – масса нейтрона), можно использовать формулу, соответствующую невырожденному газу [2, с. 204]:

$$\mu_n = kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right). \quad (8)$$

Записывая уравнение бета-равновесия в общем виде

$$\tilde{\mu}_e + m_p c^2 + \mu_p = m_n c^2 + \mu_n, \quad (9)$$

можно выразить из него μ_p :

$$\mu_p = m_n c^2 + \mu_n - \tilde{\mu}_e - m_p c^2. \quad (10)$$

С учетом (4), (5) и (8) можно переписать (10) в виде

$$\mu_p = m_n c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} - m_p c^2. \quad (11)$$

Подставляя правую часть (11) вместо μ_p в левую часть (3), получаем уравнение:

$$\begin{aligned} n_p = & \frac{8\pi(2m_p)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3} \left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} - \right. \\ & \left. - 2kT \right)^{3/2} + \frac{8\pi(2m_p)^{3/2}}{3(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4kT} \left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} \right) \right) \left(\left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2kT \right)^{3/2} - \left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} - 2kT \right)^{3/2} \right) - \\ & - \frac{2\pi(2m_p)^{3/2}}{5kT(2\pi\hbar)^3} \left(\left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2kT \right)^{5/2} - \left((m_n - m_p)c^2 + kT \ln \left(\frac{n_n (2\pi\hbar)^3}{2(2\pi m_n kT)^{3/2}} \right) - \sqrt{m_e^2 c^4 + p_{Fe}^2 c^2} - 2kT \right)^{5/2} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Уравнение (12) можно решать численно относительно n_p , задавая значения n_n при различных T . При отличных от нуля температурах нельзя считать, что порог нейтронизации соответствует значению $n_n = 0 \text{ м}^{-3}$ (так допустимо считать только в приближении $T = 0 \text{ К}$), поскольку тогда в (8) $\mu_n \rightarrow -\infty$.

Для преодоления этой трудности будем считать, что порогу нейтронизации соответствует появление одного нейтрона на весь объем белого карлика (в котором может быть водород при плотностях, близких к порогу нейтронизации).

Тогда при типичных линейных размерах белого карлика порядка 10^7 м (радиус на 2 порядка меньше радиуса Солнца, что сопоставимо с радиусом Земли) [6, с. 185] порогу нейтронизации соответствует $n_n = 10^{-21} \text{ м}^{-3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с. : ил.
2. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: учеб. пособие. / Ю.Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
3. Секержицкий, В.С. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2021. – № 2. – С. 52–61.
4. Серый, А.И. Об условии бета-равновесия электронно-нуклонного вещества при низких температурах вблизи порога нейтронизации / А.И. Серый // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4 «Фізіка. Матэматыка». – 2022. – № 1. – С. 55–63.
5. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1977. – Т. 3 : Электричество. – 688 с.
6. Физическая энциклопедия / гл. ред. А. М. Прохоров ; редкол.: Д. М. Алексеев [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988. – Т. 1 : Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 704 с.