Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»

УТВЕРЖДАЮ
Ректор учреждения образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»
__________ Ю.Я. Романовский
«28» 06 2024 г.

Регистрационный № УД-4661/24/уч.

МОДУЛЬ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ, ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ»

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Учебная программа учреждения образования
по учебной дисциплине для специальности
1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)»
направление специальности
1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)»

2024 г.

Учебная программа составлена на основе образовательного стандарта по специальности высшего образования ОСВО 1-98 01 01-2021 и учебного плана специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)». Регистрационный № 69-22/уч. ФКНЭ от 22.07.2022 г. для очной дневной формы получения высшего образования.

СОСТАВИТЕЛЬ:
Козлов Александр Александрович, доцент кафедры математики и компьютерной безопасности учреждения образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой», кандидат физ.-мат. наук, доцент,

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой математики и компьютерной безопасности учреждения образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»
(протокол № 5 от «21» 05 2024 г.)

Методической комиссией факультета компьютерных наук и электроники учреждения образования «Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»
(протокол № 10 от « 25 » 06 2024 г.)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель учебной дисциплины: развитие интеллектуального потенциала студентов, их способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; знакомство с основными разделами математической физики, с её основными понятиями, задачами и проблемами; овладение основными методами и приемами решения задач и построения рассуждений и доказательств, характерных для физических моделей в строгой математической постановке; освоение математического аппарата современных компьютерных и информационных технологий; выработка у студентов прочных конструктивных знаний; формирование культуры выбора метода, анализа и подхода к решению задач математической физики; развитие интуитивных навыков у студента при выборе переменных, вида решения (суммы или произведения функций) с одновременным его согласования с граничными и начальными условиями.

Задачи учебной дисциплины: систематизированное и полное изложение основных понятий и методов математической физики; освещение возможностей применения математики к решению практических задач из курсов физики, IT-дисциплин; развитие научного мировоззрения у студентов.

В результате изучения учебной дисциплины «Уравнения математической физики» формируются следующие **специализированные компетенции:**

СК-1: Использовать методы функционального анализа и применять их для решения прикладных задач в различных областях науки, техники и экономики;

СК-2: Применять методы исследования и решения уравнений в частных производных в различных приложениях, интерпретировать полученные решения при исследовании естественно-научных процессов.

В результате изучения учебной дисциплины обучающийся должен:

знать:

физические задачи, связанные с волновыми процессами, процессами тепломассопереноса, стационарными процессами;

основы операционного исчисления;

классификацию уравнений в частных производных второго порядка в случае двух переменных и более переменных;

ортогональные координаты (полярные, цилиндрические и сферические), преобразование операторов градиента, дивергенции ротора, Лапласа в ортогональных координатах, коэффициенты Ламе;

метод разделения переменных, разложение по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля (постановка начально–краевых задач, первая и вторая формулы Грина, полные и замкнутые системы функций, разделение переменных для однородного и неоднородных уравнений, неоднородных граничных условий, разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения);

специальные функции (гамма – функция, уравнение Бесселя, степенной ряд для функции Бесселя, функции Бесселя полуцелого порядка, функции Ханкеля, Неймана, цилиндрические функции чисто мнимого аргумента Инсфельда, Макдональда), а также классические ортогональные полиномы, производящую

функцию, полиномы Якоби, Лежандра, Лаггера, Эрмита, присоединенные функции Лежандра, сферические, шаровые функции);
собственные функции круга, цилиндра, шара;
уравнения эллиптического типа (третья формула Грина, фундаментальное решение уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях, основные свойства гармонических функций, функция Грина оператора Лапласа, свойства функции Грина задачи Дирихле, Неймана);
уравнения параболического типа (постановка начально - краевой задачи, принцип максимума, теорема единственности и устойчивости, функция Грина, однородное, неоднородное уравнения, неоднородные граничные условия, обобщенные функции и фундаментальное решение, интеграл Пуассона);
уравнения гиперболического типа (теорема единственности, устойчивость решения, вынужденные колебания, формула Грина для уравнения колебания, формула Даламбера и Дюамеля для прямой, формула Пуассона для плоскости, формула Кирхгофа для пространства, установившиеся колебания);

уметь:

решать задачи уравнения эллиптического уравнения (внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле и Неймана в круге, интеграл Пуассона в действительной и комплексной форме);
находить решения краевых задач уравнения Лапласа и Пуассона в круге, прямоугольнике, шаре, уравнение Гельмгольца;
использовать метод конформных отображений краевых задач на плоскости, а также метод функций Грина;
решать гиперболические задачи (метод бегущих волн – формулы Даламбера и Дюамеля, интеграл Пуассона, формула Кирхгофа, метод подбора частных решений, метод интегрального преобразования Фурье, метод стоячих волн, колебания прямоугольной и круглой мембраны, метод возмущений (малого параметра));
отыскивать решения параболических задач уравнений в частных производных (метод интегрального преобразования Фурье, формула Пуассона, метод разделения переменных в круге, прямоугольнике, цилиндре, шаре);

владеть:

методами уравнений с частными производными и навыками творческого аналитического мышления.

В процессе получения математического образования студенты специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» должны уяснить, что данная дисциплина, как и математика в целом, дает удобные и плодотворные способы описания (модели) самых разнообразных явлений реального мира и является в указанном смысле эффективным инструментом его познания. Соответственно, цели изучения дисциплины «Уравнения математической физики» в УВО позволяют углубить не только знания по математике и физике, но и развить навыки самостоятельной познавательной деятельности студентов, сформировать прочную базу для изучения такой дисциплины как «Математическое моделирование», «Методы численного анализа», а также специальных дисциплин, связанных со специальностью.

Учебная дисциплина «Уравнения математической физики» является базой для таких учебных дисциплин, как «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Математическое моделирование», «Методы численного анализа», «Исследование операций».

В соответствии с учебным планом специальности на изучение учебной дисциплины «Уравнения математической физики» отводится:

Виды занятий, формы контроля знаний	Дневная форма обучения
Курсы	3
Семестры	5
Лекции (количество часов)	36
Лабораторные занятия (количество часов)	18
Аудиторных часов по учебной дисциплине	54
Самостоятельная работа (количество часов)	54
Всего часов	108
Трудоемкость учебной дисциплины, з.е.	3
Форма промежуточной аттестации	экзамен

Дневная форма обучения: всего 108 часов, из них аудиторных 54 часа. Форма промежуточной аттестации — экзамен (5 семестр).

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1.
Операционное исчисление.

Тема 1.1 Преобразование Лапласа.

Преобразование Лапласа, оригинал и изображение. Теорема о существовании оригинала. Линейность преобразования Лапласа. Смещение в области изображения. Смещение в области оригинала.

Тема 1.2 Свойства оригиналов и изображений Изображение свертки оригиналов, теорема Бореля. Дифференцирование и интегрирование оригинала. Дифференцирование и интегрирование изображений. Оригиналы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы от оригиналов и изображений. Предельные соотношения для оригиналов и изображений. Интеграл Дюамеля. Графическое задание оригинала.

Тема 1.3 Решение дифференциальных уравнений операционным методом.

Нахождение оригиналов по известным изображениям. Формула Меллина. Решение линейных ДУ операционным методом. Применение формулы Дюамеля. Решение систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами.

Раздел 2. Основные уравнения математической физики. Постановка задач. Классификация.

Тема 2.1 Классификация основных уравнений математической физики.

Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение.

Тема 2.2 Коэффициенты Ламе.

Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.

Тема 2.3 Начальные и краевые условия для уравнений в частных производных

Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно постановленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий. Классификация уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.

Тема 2.4 Метод разделения переменных Фурье. Формулы Грина.

Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувилля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций

Тема 2.5 Задача Штурма - Лиувилля.

Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма - Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.

Раздел 3. Специальные функции. Уравнения эллиптического типа.

Тема 3.1 Частные случаи решения уравнения эллиптического типа.

Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения. Условие существования и единственности для неоднородного уравнения. Функция Грина. Спектральное уравнение на собственные значения. Простейшие задачи Штурма – Лиувилля для эллиптического уравнения (отрезок, прямоугольник, параллелепипед). Интеграл Пуассона для краевой задачи в полуплоскости.

Тема 3.2 Функции Бесселя

Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод ноёрмы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля.

Тема 3.3 Сферические функции, именные многочлены.

Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера.

Тема 3.4 Внутренняя и внешняя задачи Дирихле

Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике. Метод функций Грина для решения уравнения Лапласа.

Раздел 4. Уравнения гиперболического типа.

Тема 4.1 Уравнения колебания струны.

Постановка начально–краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве. Интеграл Кирхгофа

Тема 4.2 Метод Фурье решения уравнений гиперболического типа

Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа. Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа.

Раздел 5. Уравнения параболического типа.

Тема 5.1 Уравнение теплопроводности.

Уравнения параболического типа. Постановка начально – краевой задачи. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.

Тема 5.2 Метод Фурье решения уравнений параболического типа

Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.

Тема 5.3 Уравнение параболического типа для бесконечного полупространства.

Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.

Тема 5.4 Тепловые волны.

Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ «УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

(дневная форма обучения)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы.	Количество аудиторных					Литература	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Управляемой самостоятельной работы студента		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (54 часа)		**36**			**18**			
5 семестр		**36**			**18**			
	Раздел 1. Операционное исчисление.	**6**			**4**			
Тема 1.1	Преобразование Лапласа, оригинал и изображение. Теорема о существовании оригинала. Линейность преобразования Лапласа. Смещение в области изображения. Смещение в области оригинала.	2					[1] с. 27-30, 61- 65	
Тема 1.2	Дифференцирование и интегрирование оригинала. Дифференцирование и интегрирование изображений. Оригиналы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы от оригиналов и изображений. Предельные соотношения для оригиналов и изображений. Интеграл Дюамеля. Графическое задание оригинала.	2			2		[1] с. 31-40	УО
Тема 1.3	Нахождение оригиналов по известным изображениям. Формула Меллина. Решение линейных ДУ операционным методом. Применение формулы Дюамеля. Решение систем линейных ДУ с постоянными коэффициентами.	2			2		[1] с. 41-44	ИДЗ
	Раздел 2. Основные уравнения математической физики. Постановка задач. Классификация.	**10**			**4**			
Тема 2.1	Основные уравнения математической физики. Уравнение теплопроводности и диффузии. Стационарные процессы. Стационарное распределение тепла, законы электростатики. Уравнение Лапласа и Пуассона. Уравнение колебания струны, волновое уравнение.	2					[2] с. 54-60, 60-62	УО
Тема 2.2	Ортогональные системы координат, декартовы, полярные, цилиндрические и сферические, невырожденные преобразования координат. Коэффициенты Ламе. Операторы дивергенции, градиента, ротора, Лапласа в декартовых, цилиндрических и сферических системах координат.	2					[2] с. 60-65, 65-68	ИДЗ

Тема 2.3	Постановка, начальных, краевых условий. Краевые условия Дирихле (1 рода), Неймана (второго рода), краевые условия 3 рода, смешанные условия. Корректно постановленные начально-краевые задачи. Согласование начальных и краевых условий. Классификация уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. Невырожденные преобразования переменных, теорема о сохранении классификации при невырожденных преобразованиях. Классификация уравнений с произвольным числом независимых переменных, метод Коши и Якоби, каноническая форма уравнения.	2			2		[2] с. 29-34, 68-82	МСР
Тема 2.4	Метод разделения переменных. Разложение по собственным функциям задачи Штурма - Лиувиля. Использование линейности уравнения, начальных и краевых условий для решения более простых задач с одним типом неоднородности. Первая и вторая формулы Грина. Полнота и замкнутость системы функций	2			2		[2] с. 39-41, 81-86	ИДЗ
Тема 2.5	Задача Штурма – Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля. Общая схема разделения переменных. Задача Штурма-Лиувилля с неоднородными начальными условиями. Метод разделения переменных для неоднородного уравнения. Функция Грина.	2					[2] с. 39-41, 81-86	ИДЗ
	Контрольная работа «Классификация уравнений математической физики».							РКР*
	Раздел 3. Специальные функции. Уравнения эллиптического типа.	**8**			**4**			
Тема 3.1	Разложение по собственным функциям для эллиптического уравнения. Условие существования и единственности для неоднородного уравнения. Функция Грина. Спектральное уравнение на собственные значения. Простейшие задачи Штурма – Лиувилля для эллиптического уравнения (отрезок, прямоугольник, параллелепипед). Интеграл Пуассона для краевой задачи в полуплоскости.	2			2		[2] с. 108-116, 151-159	УО
Тема 3.2	Специальные функции. Уравнение Бесселя. Цилиндрические функции. Функции Бесселя полуцелого порядка. Уравнение Бесселя действительного и мнимого аргумента. Получение цилиндрических функций через обобщенный ряд Фробениуса. Вывод нормы цилиндрических функций из задачи Штурма – Лиувилля	2					[2] с. 216-232, 251-261	ПДЗ
Тема 3.3	Сферические и шаровые функции. Уравнение для сферических функций. Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра, Эрмита, Лаггера.	2					[2] с. 123-124,	

Тема 3.4	Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Краевая задача для уравнения Лапласа в шаре, внешности шара и шаровом слое. Краевая задача для уравнения Лапласа в цилиндре. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа, внутренняя и внешняя задачи для круга. Метод конформных отображений для краевой задачи Лапласа. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике.	2			2		[2] с.124-129, 162-164	УО
	Раздел 4. Уравнения гиперболического типа.	4			4			
Тема 4.1	Постановка начально–краевой задачи для уравнения колебания в ограниченной области и колебания бесконечной струны. Постановка задачи с начальными условиями для бесконечной струны. Формула Даламбера. Колебания бесконечной струны под действием внешних сил. Формула Дюамеля. Колебания на неограниченной плоскости. Интеграл Пуассона. Колебания в бесконечном пространстве: Интеграл Кирхгофа	2			2		[2] с. 140-145, 172-174	ИДЗ
Тема 4.2	Теорема существования и единственности для общей начально-краевой задачи уравнения гиперболического типа. Метод подбора частных решений для уравнений колебаний. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны. Функция Грина для уравнения колебаний. Метод малого параметра для решения уравнений гиперболического и параболического типа	2			2			
	Раздел 5. Уравнения параболического типа.	8			**2**			
Тема 5.1	Уравнения параболического типа. Постановка начально–краевой задачи. Теорема существования и единственности для общей начально-краевой гиперболической задачи. Функция Грина для уравнения теплопроводности.	2			2		[2] с. 160-165, 172-174	ПДЗ
Тема 5.2	Метод интегрального преобразования Фурье. Решение неоднородного уравнения теплопроводности для бесконечного стержня.	2						
Тема 5.3	Задача об остывании бесконечного полупространства. Задача об остывании бесконечного цилиндра.	2	2				[3] 190-195	
Тема 5.4	Тепловые волны для уравнения теплопроводности. Фазовая скорость, глубина проникновения.	2						

Принятые сокращения:

ИДЗ - индивидуальное домашнее задание
МСР - мини-самостоятельная работа
ПДЗ - проверка домашнего задания
УО - устный опрос, в том числе и экспресс-опрос;
РКР- рейтинговая контрольная работа.
*мероприятия текущего контроля

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Сабитов, К. Б. Уравнения математической физики: учебник / К. Б. Сабитов; К.Б. Сабитов. - Москва : Физматлит, 2021. - 352 с. – Текст электронный. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275562
2. Палин, В.В. Методы математической физики. Лекционный курс: учебное пособие для вузов / В. В. Палин, Е. В. Радкевич. - Москва : Юрайт, 2024. - 220 с. - Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям.
3. Торшина. О. А. Уравнения математической физики: учебное пособие / О. А. Торшина. — Москва : ИНФРА-М, 2020. — 59 с. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1089483 (дата обращения: 28.10.2024).
4. Байков, В.А. Уравнения математической физики: учебник и практикум для вузов / В. А. Байков, А. В. Жибер. - 2 изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 252 с. - Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям.

Дополнительная:

5. Чудесенко, В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты : учебное пособие / В. Ф. Чудесенко. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2005. – 124 с.
6. Будак, Б. М. Сборник задач по математической физике [Электронный ресурс] / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов . - Москва : Физматлит, 2004. - 688 с. // Университетская библиотека онлайн. – Текст электронный – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=67912
7. Полянин, А.Д. Нелинейные уравнения математической физики и механики. Методы решения : учебник и практикум для вузов / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. - 2 изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2024. - 255 с. - Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по естественнонаучным направлениям.
8. Титов, К. В. Уравнения математической физики. Практикум. Компьютерные технологии решения задач : учебное пособие / К.В. Титов. — Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2022. - 262 с. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1874633 (дата обращения: 28.10.2024).
9. Лесин, В. В. Уравнения математической физики : учебное пособие / В.В. Лесин. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2023. — 240 с. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/2126799 (дата обращения: 28.10.2024).

10. Свешников, А.Г. Лекции по математической физике : учеб. пособие / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов ; Московский гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. - М. : Наука; Моск. ун-т, 2004. - 414 с. - Допущено М-вом образования и науки РФ в качестве учеб. пособия для студ. вузов, обуч-ся по направлениям "Физика", "Прикладная математика", "Информатика"и спец. "Физика, "Прикладная математика", "Информатика".

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКЗАМЕНА

1) Дифференциальные уравнения с частными производными. Общие понятия.
2) Уравнения в частных производных первого порядка. Теорема С. Ковалевской.
3) Линейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка.
4) Метод характеристик решения линейных неоднородных уравнений в частных производных первого порядка.
5) Общее решение линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.
6) Уравнение Пфаффа. Условие его интегрируемости.
7) Решение уравнений Пфаффа.
8) Классификация уравнений второго порядка.
9) Краевые условия и краевые задачи.
10) Задача Коши для уравнений в частных производных.
11) Проблемы существования и единственности краевых задач для уравнений в частных производных.
12) Корректность краевой задачи. Пример Адамара.
13) Характеристики дифференциального уравнения.
14) Приведение уравнений произвольных второго порядка к каноническому виду.
15) Преобразование независимых переменных.
16) Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду (эллиптический случай).
17) Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду (гиперболический случай).
18) Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду (параболический случай).
19) Уравнение Лапласа и Пуассона. Основные понятия.
20) Сингулярное решение уравнения Лапласа.
21) Интегральное представление функций класса $C^{(2)}$.
22) Интегральное представление гармонических функций.
23) Свойства гармонических функций.
24) Постановка задач Дирихле и Неймана.
25) Теорема единственности для уравнений Лапласа
26) Решение задачи Дирихле для шара.
27) Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных функций.
28) Формула Даламбера для волнового уравнения.
29) Метод разделения переменных (Метод Фурье) для уравнения теплопроводности.

Перечень практических заданий для проведения экзамена.

1. Найти общее решение $u = u(x,y)$ уравнения

$$\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

2. Найти решение $u = u(x,y)$ уравнения

$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = x - y,$ удовлетворяющее условию: $u(1,y) = y + e^y$. .

3. Найти общее решение $u = u(x,y)$ уравнения

$$u_x + u_y = x + y.$$

4. Найти общее решение $u = u(x,y)$ уравнения

$$y \cdot u_x - x \cdot u_y = 0.$$

5. Найти общее решение $u = u(x,y)$ уравнения

$$x \cdot u_x + y \cdot u_y = 1.$$

6. Решить уравнение Пфаффа $z \cdot dx + (x - y) \cdot dy + zy \cdot dz = 0.$
7. Решить уравнение Пфаффа

$$(6x + yz) \cdot dx + (xz - 2y) \cdot dy + (xy + 2z) \cdot dz = 0.$$

8. Решить уравнение Пфаффа $(y^2 + z^2 - x^2) \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz = 0.$
9. Определить тип уравнения для $u = u(x,y)$

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 8u_{yy} + u_x - 6u + y = 0.$$

10. Определить тип уравнения для $u = u(x,y)$

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0.$$

11. Определить тип уравнения для $u = u(x,y)$

$$2u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y - u = 0.$$

12. Определить тип уравнения для $u = u(x,y)$

$$4u_{xx} + 2u_{yy} - 6u_{zz} + 6u_{xy} + 10u_{xz} + 4u_{yz} + 2u = 0.$$

13. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

14. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} - 3u_x - 15u_y + 27x = 0.$$

15. Привести к каноническому виду уравнение:

$$(1 + x^2)^2 u_{xx} + u_{yy} + 2x(1 + x^2)u_x = 0.$$

16. Привести к каноническому виду уравнение:

$$y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$$

17. Упростить уравнение, исключив первые производные функции

$$u_{xx} - u_{xy} + 3u_x + u_y = 0.$$

18. Упростить уравнение, исключив первые производные функции

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 2u_y = 0.$$

19. Привести к каноническому виду уравнение:

$$2u_{xy} - 4u_{yy} + u_x - 2u_y + u + x = 0.$$

20.Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 9u = 0.$$

21.На плоскости (x,y) укажите области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнений

$$(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} - (1+y^2)u_{yy} - 2xu_x - 2yu_y = 0.$$

22. Привести уравнение для $u = u(x,y)$ к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} - u_x + 2yu_y + u = 0.$$

23.Привести уравнение для $u = u(x,y)$ к каноническому виду

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$$

24.Привести уравнение для $u = u(x,y)$ к каноническому виду

$$u_{xy} - u_{xz} - u_x + u_y + u_z + u = 0.$$

25.Показать, что функция $w(r) = \dfrac{1}{4\pi r}e^{-kr}$, $k - const$ и

$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, является решением уравнения:

$$\Delta u - k^2 u = 0.$$

26.Покажите, что функция $w(r) = \ln\dfrac{1}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$, является гармонической на всей плоскости, исключая начало координат.

27.Найти методом бегущей волны решение волнового уравнения

$u_{tt} + 2u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = e^{2x-t}x \cdot \sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0$, удовлетворяющее условиям $u(x,0) = e^{2x}\sin x, \quad u_t(x,0) = e^{2x}(\cos x - \sin x)$.

28.Найти методом бегущей волны решение волнового уравнения

$$u_{tt} + 2u_{xx} + 2u_t + 4u_x - 3u = e^{2x-t}x \cdot \sin t, \quad |x| < +\infty, \quad t > 0,$$

удовлетворяющее условиям $u(x,0) = e^{2x}\sin x, \quad u_t(x,0) = e^{2x}(\cos x - \sin x)$.

29.Решить с помощью метода бегущей волны в области $|x| < +\infty, \quad t > 0$, следующую задачу $u_{tt} = u_{tt}, \quad u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 4x$.

30.Решить с помощью метода бегущей волны в области $|x| < +\infty, \quad t > 0$, следующую задачу $u_{tt} = u_{xx} + bx^2, u(x,0) = e^{-x}, \quad u_t(x,0) = a, \quad a,b - const$.

31.Решить задачу Штурма-Лиувилля $X'' + cX(x) = 0$ при следующих условиях $X(0) = X(l) = 0$.

32.Решить задачу Штурма-Лиувилля $X'' + cX(x) = 0$ при следующих условиях $X'(0) = X(l) = 0$.

33.Решить задачу Штурма-Лиувилля $X'' + cX(x) = 0$ при условиях $X(0) = X'(l) = 0$.

34.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе. $D = \{(x,y): 0 < x < l, t > 0\}$ найти решение уравнения $U_{tt} = a^2 U_{xx}$, удовлетворяющее однородным граничным условиям $U(0,t)=U(l,t)=0$, и начальным условиям $U(x,0)=0$, $U_t(x,0)=\sin\frac{2\pi}{l}x$.

35.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$ найти решение краевой задачи $U_{tt}=a^2U_{xx}+b$, $b-const$, удовлетворяющее однородным граничным условиям $U(0,t)=U(l,t)=0$, и начальным условиям $U(x,0)=0=U_t(x,0)=0$

36.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$ решите задачу

$$U_t=a^2U_{xx},\quad U(0,t)=U_x(l,t)=0,\quad U(x,0)=f(x).$$

37.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$ решите задачу

$$U_t=a^2U_{xx},\quad U_x(0,t)=U(l,t)=0,\quad U(x,0)=A(l-x),\quad A-const>0.$$

38.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$ решите задачу

$$U_t=a^2U_{xx},\quad U_x(0,t)=U_x(l,t)=0,\quad U(x,0)=Bx,\quad B-const>0.$$

39.С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе $D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$ решите задачу

$$U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U_x(0,t)=U_x(l,t)=0,\quad U(x,0)=x,\quad U_t(x,0)=1.$$

Примерное содержание экзаменационного билета

1. Дифференциальные уравнения с частными производными. Общие понятия.

2. Привести к каноническому виду уравнение:

$$u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+9u_x+9u_y-9u=0.$$

3. С помощью метода Фурье разделения переменных в полуполосе

$$D=\{(x,y):0<x<l,t>0\}$$

решите задачу

$$U_{tt}=a^2U_{xx},\quad U_x(0,t)=U_x(l,t)=0,\quad U(x,0)=x,\quad U_t(x,0)=1.$$

Время выполнения – 90 минут.

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Цель самостоятельной работы студентов — содействие усвоению в полном объеме содержания учебной дисциплины и формирование самостоятельности как личностной черты и важного профессионального качества, сущность которых состоит в умении систематизации, планирования и контроля собственной деятельности.

Задача самостоятельной работы студентов - усвоение определенных стандартом знаний, умений и навыков по учебной дисциплине, закрепление и систематизация полученных знаний, их применение при выполнении практических заданий и творческих работ, а также выявление пробелов в системе знаний по дисциплине.

При изучении дисциплины используются следующие формы самостоятельной работы:

-самостоятельная работа, в том числе в виде выполнения ИДЗ с консультациями преподавателя.

Методы планирования и организации самостоятельной работы студентов:

-анализ учебной программы по учебной дисциплине «Уравнения математической физики» с целью выделения тематических блоков для самостоятельной работы студентов;

-проработка баланса времени, необходимого для самостоятельной работы студентов с выделенными тематическими блоками;

-структурирование тематических заданий, ориентированных на формирование и развитие компетенций студентов в контексте самостоятельной работы.

Содержание самостоятельной работы студентов дневной формы обучения

Вид работы	Тематическое содержание	Используемые источники	К-во часов
			5 сем.
Углубленное изучение теоретической части учебной дисциплины	**Раздел 1. Операционное исчисление**. - *Изучить информационную таблицу раздела, графическую схему раздела, глоссарий.* *Выучить таблицу оригиналов и изображений.* *Проработать задания, вынесенные на самостоятельную работу.*	[1], [2], [4]	6
	Раздел 2. Основные уравнения математической физики. Постановка задач. Классификация. *Изучить глоссарий.* *Проработать задания, которые будут вынесены вынесенные на контрольную работу.*	[1], [2], [4], [7], [8], [9]	8
	Раздел 3. Специальные функции. Уравнения эллиптического типа. *Изучить графическую схему раздела, глоссарий.* *Проработать задания, вынесенные на самостоятельную работу.* *При изучении эллиптических уравнений использовать системы компьютерной алгебры.*	[1], [2], [3], [10]	8
	Раздел 4. Уравнения гиперболического типа. *Изучить графическую схему раздела, глоссарий.* *Проработать задания, вынесенные на самостоятельную работу.* *При изучении уравнений гиперболического типа использовать системы компьютерной алгебры.*	[3], [5], [6] [7], [8]. [9]	8
	Раздел 5. Уравнения параболического типа. *Изучить графическую схему раздела, глоссарий.* *Проработать задания, вынесенные на самостоятельную работу.* *Выполнить задания теста.* *При изучении уравнений параболического типа использовать системы компьютерной алгебры.*	[3], [6] [7], [9]	8

	Подготовка к ЭКЗАМЕНУ	Конспект лекционных и лабораторных занятий	10
	Рейтинговая контрольная работа №1 Раздел 2. **Основные уравнения математической физики. Постановка задач. Классификация.** - Обзор лекционных и практических занятий. - Обзор графических схем, глоссария по теме. - Задачи для самоконтроля.	Конспект лекционных и лабораторных занятий	6
Всего часов			**54**

КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

Средства диагностики результатов учебной деятельности:
Для оценки достижений студентов используется следующий диагностический инструментарий:

> индивидуальное домашнее задание
> мини-самостоятельная работа
> проверка домашнего задания
> рейтинговая контрольная работа
> устный опрос, в том числе и экспресс-опрос
> письменный/устный экзамен.

Диагностика качества усвоения знаний проводится в форме текущего контроля и промежуточной аттестации.

Отметка текущего контроля (Т) за семестр определяется по результатам рейтинговой контрольной работы.

Форма промежуточной аттестации - экзамен. Итоговая экзаменационная отметка (ИЭ) учитывает отметку по результатам текущего контроля (Т) и экзаменационную отметку (Э).

Таблица 1. Составляющие итоговой отметки по дисциплине и их весовые коэффициенты

Составляющие итоговой оценки (ИЭ)	k	T	(1-k)	Э
	0,5	*Рейтинговая контрольная работа*	0,5	*

*Отметка, полученная студентом на экзамене за письменный/устный ответ по билету. Билет включает 1 теоретический вопрос и 2 практических задания.

Итоговая отметка по дисциплине определяется по формуле:

$$И_Э=0{,}5Т + 0{,}5Э.$$

Положительной является итоговая экзаменационная отметка не ниже 4 баллов.

ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ПРОГРАММ

Microsoft Office Excel ver. 2003 и выше, MATHCAD 2000 PROFESSIONAL и выше, MAPLE 12 и выше, MATLAB 5 и выше.

ХАРАКТЕРИСТИКА ИННОВАЦИОННЫХ ПОДХОДОВ К ПРЕПОДАВАНИЮ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Основной методической системой для организации учебного процесса является УМК нового поколения, спроектированный с точки зрения полипарадигмального подхода (комплексного взаимодействия *системно-деятельностного, дифференцированного, модульного, когнитивно-визуального, компетентностного подходов)* с целью максимального использования его потенциальных возможностей в конкретном дидактическом процессе обучения дифференциальным уравнениям математической физики студентов специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)». Указанная методическая система базируется на обще-дидактических принципах обучения (*научности, структуризации; информационной системности и целостности; доступности; пролонгации, профессиональной направленности, развивающей деятельности, реализации обратной связи в обучении уравнений математической физики, пролонгации, профессиональной направленности, развивающего обучения и других).*

Используемые методы обучения:

-методы проблемного обучения (проблемное изложение, частично-поисковый и исследовательский методы);

-личностно ориентированные (развивающие) технологии, основанные на активных (рефлексивно-деятельностных) формах и методах обучения («мозговой штурм», дискуссия, пресс-конференция);

-информационно-коммуникационные технологии, обеспечивающие проблемно-исследовательский характер процесса обучения и активизацию самостоятельной работы студентов (структурированные электронные презентации для лекционных занятий, использование аудио-, видео поддержки учебных занятий, видеолекции, применение специализированных компьютерных программ Microsoft Word, Microsoft Office Excel, SPSS, MATHCAD PROFESSIONAL, MAPLE, MATLAB, POWERPOINT).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ С ДРУГИМИ УЧЕБНЫМИ ДИСЦИПЛИНАМИ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Функциональный анализ и интегральные уравнения	математики и компьютерной безопасности	замечаний и предложений нет	
Математическое моделирование	математики и компьютерной безопасности	Замечаний и предложений нет	
Методы численного анализа	математики и компьютерной безопасности	Замечаний и предложений нет	
Исследование операций	математики и компьютерной безопасности	замечаний и предложений нет	

Зав. кафедрой МиКБ [подпись] И.Б. Бурачёнок

Из вышесказанного следует, что рецензируемая учебная программа по дисциплине «Уравнения математической физики» для студентов специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)», направление специальности 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)» полностью соответствует требованиям образовательных стандартов Республики Беларусь для специальностей для студентов специальности 1-98 01 01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» и рекомендуется к утверждению в качестве учебной программы.

Доцент кафедры математики
Витебского государственного
университета им. П.М. Машерова
кандидат физико-математических наук,
доцент М.Н. Подоксенов