УДК 621.391

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕУПОРЯДОЧИВАНИЯ ДАННЫХ ПО КОДУ ГРЕЯ ПРИ ОБРАБОТКЕ БИНАРНЫХ СИГНАЛОВ

С.В. Мальцев, Р.П. Богуш, А.В. Седин

Полоцкий государственный университет

Новополоцк, Беларусь

Временные затраты при цифровой обработке бинарных сигналов определяются вычислительной сложностью базовой процедуры – вычисления векторно-матричного произведения. Существующие быстрые алгоритмы вычисления векторно - матричного произведения основаны на свойствах сигнальных матриц, допускающих их факторизацию. Одним из важнейших свойств сигнальных матриц, определяющим возможность факторизации, является связь с матрицами Адамара. В [1] приводится ряд алгоритмов быстрых вычислений векторно - матричного произведения на базе факторизации матриц для М - последовательностей и сигналов на их основе. Однако ряд сигнальных матриц - циркулянтов не может быть приведен к структуре, схожей со структурой Адамара (квадратично-вычетные коды, характеристические последовательности и др.). Для таких сигналов разработан ряд методов факторизации [2,3,4], однако оценка верхней границы сложности данных алгоритмов значительно превышает рассчитанный в [5] нижний предел сложности вычислений. Следовательно, возможно дальнейшее улучшение алгоритмов факторизации произвольных бинарных матриц.

В данной работе рассматривается возможность ускорения цифровой обработки бинарных сигналов за счет введения переупорядочивания данных во внутренней процедуре по коду Грея при вычислении векторно-матричного произведения.

Определение. Пусть $W(n)$ – матрица полного кода размером $2^n \times n$. Исключим из нее слова, представляющие инверсию других слов и оставшиеся строки упорядочим по коду Грея. При этом получим новую матрицу $W_{r1}(n)$ размером $2^{n-1} \times n$.

Лемма 1.

Любую матрицу вида $W_{r1}(n)$ можно представить в виде произведения 2^{n-1} слабозаполненных матриц:

$$W_{г1}(n) = \prod_k V(n,k), \qquad (k = 2^{n-1}-1,\ 2^{n-1}-2\ \ldots\ 0),$$

где матрица $V(n,k)$ имеет размер:

$$\begin{cases} n \times n, \ \text{если} \quad k = 0 \\ (n+k)\times(n+k-1), \ \text{если} \quad 0 < k < 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}\times(n+k-1), \ \text{если} \quad k = 2^{n-1}-1 \\ 2^{n-1}\times 2^{n-1} \ \text{если} \quad k > 2^{n-1}-1 \end{cases}$$

и элементы матрицы определяются как

$$V(n,k)_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad k=0, i=0 \\ 2, & \text{если} \quad k=0, j=i>0 \\ 1, & \text{если} \quad k>0, j=i<k \\ 1, & \text{если} \quad k>0, j+1=i=k \\ \left(W(n)_{k,(j-k+1)} - W(n)_{(k-1),(j-k+1)}\right)/2 & \text{если} \quad k \ge 0, i=k, j \ge k \\ 1, & \text{если} \quad k>0, j+1=i>k \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Примечание:

Если $k>2^{n-1}-1$ то $V(n,k)=I$ (I – единичная матрица).

Пример 1.

Матрица W(3) раскладывается на произведение четырех множителей:

$$W(3) = V(3,3) \cdot V(3,2) \cdot V(3,1) \cdot V(3,0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим матрицу С, которая составлена из матриц W(a) и W(q) (q<a) и имеет блочно-диагональную структуру. Заметим, что матрицы W(a) и W(q) сформированы согласно определению 1.

$$C = \begin{bmatrix} W(a) & & & & \\ & W(a) & & & \\ & & \dots & & \\ & & & W(a) & \\ & & & & W(q) \end{bmatrix}$$

Используя лемму 1 матрицу С можно представить в виде произведения 2^{a-1} матриц, которые составлены из матриц V(a,b) и W(q,b) и имеют блочно-диагональную структуру:

$$C=\prod_b \begin{bmatrix} V(a,b) & & & & \\ & V(a,b) & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & V(a,b) & \\ & & & & V(l,b) \end{bmatrix},$$

$$(b=2^{a-1}-1,\ \ 2^{a-1}-2\ \ \ldots\ \ 0)$$

Лемма 2.

Любую матрицу A размером N x M можно представить в виде произведения

$$A=B\cdot C,$$

где матрица C составлена из матриц W(a) и W(q) и имеет блочно-диагональную структуру, как показано в примере 3;

матрица B состоит из |M/a|+1 вертикальных блоков. Количество элементов в строке первых |M/a| блоков составляет 2^{a-1} элементов, а количество элементов строки последнего блока – 2^{q-1}.

Пример2.

Пусть имеется матрица A размером 3 x 8.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Положим a=3, тогда q=2, тогда матрица C имеет вид:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & & & \\ 1 & -1 & -1 & & & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & -1 & & \\ & & & 1 & -1 & 1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Матрица B будет иметь вид:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Лемма 3.

Матрицу B (см. пример 2) можно разложить на $t=\rceil\log_2(M/a)\lceil$ слабозаполненных множителей способом, предложенным в [2].

$$B=\prod_{h=1}^{t} B(h)$$

Из рассмотренных лемм 1-3 вытекает следующая теорема

Теорема.

Любую матрицу A размером M x N, состоящую из 1,-1 можно представить в виде произведения

$$A=\prod_{h=1}^{t} B(h)\cdot\prod_{b}\begin{bmatrix} V(a,b) & & & & \\ & V(a,b) & & & \\ & & \ldots & & \\ & & & V(a,b) & \\ & & & & V(q,b) \end{bmatrix},$$

$$(b=2^{a-1}-1,\ \ 2^{a-1}-2\ \ \ldots\ \ 0)$$

где $t=\rceil\log_2(M/a)\lceil$; $a<M$; $q=M-\lceil M/a\rceil\cdot a$;

Пример3.

Для матрицы A из примера 2 будем иметь разложение:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\
-1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1\\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 0 & -1\\
 & & & & & & & & -1 & 0
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0\\
 & & & & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

$$
\cdot
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 1 & -1 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0\\
 & & & & & & & & 0 & 1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & \\
0 & 1 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 0 & 1 & & \\
 & & & 0 & 1 & 0 & & \\
 & & & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & 0\\
 & & & & & & 1 & -1
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & & & & & \\
0 & 2 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 2 & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 0 & 2 & 0 & & \\
 & & & 0 & 0 & 2 & & \\
 & & & & & & 1 & 1\\
 & & & & & & 0 & 2
\end{bmatrix}
$$

Для качественной оценки предлагаемого метода вычисления в табл.1 приведены значения коэффициентов верхней границы сложности с использованием данного метода факторизации (S_1)и метода, представленного в [2] (S_2) для средних длин сигналов квадратичных вычетов и характеристических последовательностей

Таблица 1

N	78	79	100	103	126	127	210	211
$S_{1кв}$	-	18.8	-	23	-	27	-	39.8
$S_{2кв}$	-	22	-	28	-	34	-	45
$S_{1хр}$	18.8	-	22	-	26	-	38.8	-
$S_{2хр}$	22	-	28	-	34	-	45	-
W%	15	15	22	21	24	23	14	13

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев В.В., Бродская Е.Б., Коржик В.И. Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов / Под ред. В.И. Коржика. - М.: Радио и связь, 1988

2. Лосев В.В., Мальцев С.В. // РЭ. 1992. Т.37, С.2190

3. Конопелько В.К., Липницкий В.А. // Материалы Межд. конф. «Цифровая обработка сигналов и управление в чрезвычайных ситуациях». Минск, ИТК. 1998. Т.1. С.118.

4. Осипов А.Н., Конопелько В.К., Чередник Б.Г. // Известия Белорусской инженерной академии. 1997. N 1(3)/1. С.78.
5.Капорин И.Е.//Библиотека программ для решения краевых задач разностными методами. Москва, 1983,С.51