

Задача состоит в том, чтобы установить условия, при которых система (1) имеет периодические решения, соответствующие операторам из семейства  $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ .

В [1] получены условия существования неподвижных точек отображения, порожденного системой (1), единственности неподвижной точки, а также условия, при которых существуют одновременно неподвижные точки у различных типов отображений.

Данная работа развивает результаты из [1]. Нижеследующая теорема дает необходимое и достаточное условие существования единственной неподвижной точки одновременно у всех возможных отображений, порождаемых системой (1).

**Теорема.** Пусть в системе (1) матрица  $A$  имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями,  $(\Gamma, B) \neq 0$  и выполнены неравенства (4). Семейство операторов  $\{P_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$  имеет единственную неподвижную точку тогда и только тогда, когда для  $n \geq 3$  выполняется равенство  $(-1)^{n-2} \text{sign} J_{P_2}(X_{fp}) = -1$ , где  $X_{fp}$  – неподвижная точка отображения  $P_2(X)$ ,  $J_{P_2}(X_{fp})$  – якобиан отображения  $P_2(X)$ , вычисленный в точке  $X_{fp}$ .

Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00069, <https://rscf.ru/project/23-21-00069/>.

### Литература

1. Камачкин А. М., Потапов Д. К., Евстафьева В. В. *Неподвижные точки отображения, порожденного системой обыкновенных дифференциальных уравнений с релейным гистерезисом* // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58. № 4. С. 456–469.

## О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ СТРОГО ПОЛОЖИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ

А.А. Козлов, Т.А. Александрович

Пусть  $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное евклидово векторное пространство с нормой  $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ ;  $M_n$  – пространство вещественных матриц размерности  $n \times n$  со спектральной (операторной) нормой  $\|H\| = \max_{\|x\|=1} \|Hx\|$ , т.е. нормой, индуцируемой на  $M_n$  евклидовой нормой в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.** Для любого числа  $k \in \{1, \dots, n\}$  и всякой матрицы  $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n$  через  $H\{k\} \in M_k$  обозначим ее главную ведущую подматрицу порядка  $k$  [1, с. 30], т.е.

$$H\{1\} := h_{11} \in M_1, \quad H\{2\} := \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in M_2, \quad \dots, \quad H\{n\} := H \in M_n.$$

Главным ведущим (угловым) минором  $k$ -ого порядка квадратной матрицы  $H \in M_n$  будем называть [1, с. 30] определитель ее ведущей главной подматрицы  $k$ -ого порядка, т.е.  $\det H\{k\}$ .

**Определение 2.** Возьмем любое число  $\rho > 0$ . Матрицу  $H \in M_n$  назовем строго  $\rho$ -положительно регулярной, если при всяком  $i = \overline{1, n}$  имеют место неравенства  $\det H\{i\} \geq \rho$ .

**Теорема.** При любых числах  $r > 0$  и  $\rho > 0$  и всякой матрице  $H \in M_n$ , удовлетворяющей неравенствам  $\|H\| \leq r$  и  $\det H \geq \rho$ , найдутся величина  $\theta = \theta(r, \rho) > 0$  и строго  $\theta$ -положительно регулярные матрицы  $H_i$ ,  $i = \overline{1, 5}$ , обеспечивающие равенство  $H = \prod_{i=1}^5 H_i$ .

Установленное разложение позволит доказать наличие свойства равномерной глобальной достижимости [2, 3] для равномерно вполне управляемой [4, 5] линейной периодической системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для равномерно вполне управляемой [6] дискретной линейной управляемой системы [7] с периодическими коэффициентами.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ "Конвергенция-2025" (подпрограмма "Методы математического моделирования сложных систем задание 1.2.01 "Управление асимптотическими характеристиками дискретных и непрерывных динамических систем; разработка аппарата дробного интегро-дифференцирования для изучения задач разрешимости дифференциальных уравнений дробного порядка и асимптотики их решений" (№ ГР 20211316)).

### Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989.
2. Зайцев, В. А., Тонков, Е. Л. *Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова* // Известия вузов. Математика. 1999. № 2(441). С. 60–67.
3. Макаров Е. К., Попова С. Н. *Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем*. Минск: Беларус. навука, 2012.
4. Kalman, R. E. *Contribution to the theory of optimal control* // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. № 1. Pp. 102–119.
5. Тонков, Е. Л. *Критерий равномерной управляемости и стабилизации линейной рекуррентной системы* / Е. Л. Тонков // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
6. Babiarsz A., Chornik A., Makarov E., Niezabitowski M., Popova S. *Pole placement theorem of discrete time-varying linear systems* // SIAM Journal on Control and Optimization. 2017. Vol. 55. № 2. Pp. 671–692.
7. Гайшун И. В. *Системы с дискретным временем*. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

## УПРАВЛЯЕМОСТЬ СОСТАВНЫХ КАУЗАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.В. Крахотко, Г.П. Размыслович

Пусть на отрезке времени  $[t_0, T]$  заданы промежуточные моменты  $t_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , такие, что  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2, \dots < t_{m-1} < t_m = T$ .

Рассмотрим динамическую систему, определённую на отрезке  $[t_0, T]$ , которая на каждом промежутке времени  $[t_{k-1}, t_k]$ ,  $1 \leq k \leq m$ , описывается системой вида

$$A_0 \dot{x}^{(k)}(t) = A_k x^{(k)}(t) + B_k u^{(k)}(t), \quad (1)$$

где  $x^{(k)} \in R^n$  – фазовый вектор системы;  $A_0, A_k \in R_{n,n}$ ,  $B_k \in R_{n,l}$  – заданные матрицы; причём  $\det A_0 = 0$ ;  $u^{(k)} \in R^l$  – управление.

Будем считать, что система (1), на указанном промежутке времени является каузальной [1–3].

Составную систему, определённую на отрезке  $[t_0, T]$ , назовём каузальной, если на каждом промежутке времени  $[t_{k-1}, t_k]$  система вида (1) является каузальной.

Пусть для составной каузальной системы заданы начальное состояние в момент  $t_0$ , т.е.

$$x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}$$