

ФОРМИРОВАНИЕ КАНАЛОВ УТЕЧКИ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ ПРИ ОТСЧЕТНО-ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ

В.К. ЖЕЛЕЗНЯК, С.В. ЛАВРОВ,
А.Г. ФИЛИППОВИЧ, М.М. БАРАНОВСКИЙ

*Учреждение образования «Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой», г. Новополоцк, Республика Беларусь*

*Оперативно-аналитический центр при Президенте Республики Беларусь,
г. Минск, Республика Беларусь*

В работе [1] исследовано, что для реализации высоких требований по передаче с высокой точностью речевой информации установлены методы ее защиты в каналах утечки речевых сигналов. Амплитудная характеристика квантователя при аналого-дискретном преобразовании речи является ступенчатой функцией и представляется в виде суммы идеальной линейной и нелинейной характеристик, последняя из которых формирует искажение сигнала [2]. Характеристикой искажений является последовательность импульсов пилообразной формы. Преобразованием Фурье эта последовательность раскладывается на спектральные составляющие четной и нечетной последовательностей $k = 1, 2, 3, 4, 5 \dots$. В работе [3] показана деформация косинусоидального колебания и периодической последовательности импульсов пилообразной формы при квантовании.

Академик В.А. Котельников положил начало развитию теории статистических оптимальных систем. Решена задача обнаружения сигналов, зависящих от конечного числа неизвестных параметров в присутствии случайных помех. Методы статистических испытаний определяют методами решения математических задач и задач исследования сложных систем при помощи моделирования сложных реализаций и имитаций случайных процессов с оценкой их вероятностных характеристик.

Ряд Котельникова записывается как

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}. \quad (1)$$

Полученное выражение представляет собой разложение непрерывной функции $f(t)$ в ряд по ортогональным функциям вида $\frac{\sin x}{x}$.

Разложим периодическую стробирующую функцию, показанную на рисунке 1, в экспоненциальный ряд Фурье и изобразим ее частотный спектр.

Стробирующая функция имеет ширину (длительность импульса) t_u и период повторения T , с.

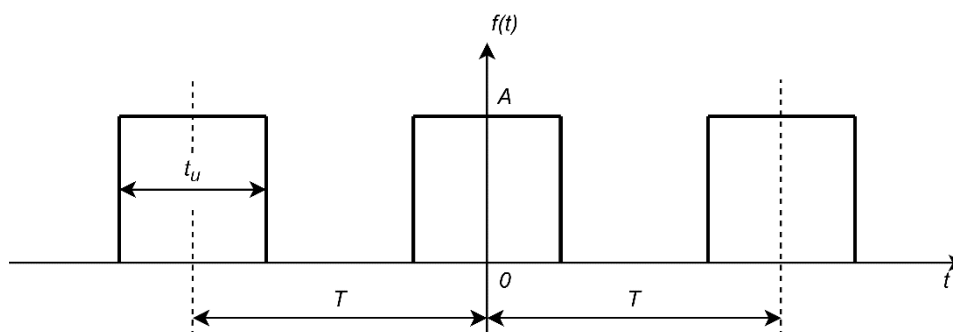


Рисунок 1. – Периодическая стробирующая функция

На интервале в один период функцию можно аналитически записать как

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{при } \left(-\frac{t_{\text{и}}}{2} < t < \frac{t_{\text{и}}}{2}\right), \\ 0 & \text{при } \left(\frac{t_{\text{и}}}{2} < t < T - \frac{t_{\text{и}}}{2}\right). \end{cases}$$

Для удобства выберем пределы интегрирования от $-\frac{t_{\text{и}}}{2}$ до $T - \frac{t_{\text{и}}}{2}$:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_{\text{и}}}{2}}^{T - \frac{t_{\text{и}}}{2}} f(t) e^{-i n \omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{t_{\text{и}}}{2}}^{T - \frac{t_{\text{и}}}{2}} A e^{-i n \omega_0 t} dt = \frac{-A}{-i n \omega_0 T} e^{-i n \omega_0 t} \bigg|_{-\frac{t_{\text{и}}}{2}}^{T - \frac{t_{\text{и}}}{2}} = \\ &= \frac{2A}{n \omega_0 T} \sin\left(\frac{n \omega_0 t_{\text{и}}}{2}\right) = \frac{A t_{\text{и}}}{T} \left[\frac{\sin\left(\frac{n \omega_0 t_{\text{и}}}{2}\right)}{\frac{n \omega_0 t_{\text{и}}}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Заключенная в скобки функция имеет форму $\frac{\sin x}{x}$ и называется функцией отсчетов.

В дальнейшем эта функция обозначается как

$$Sa(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (3)$$

Функция отсчетов показана на рисунке 2.

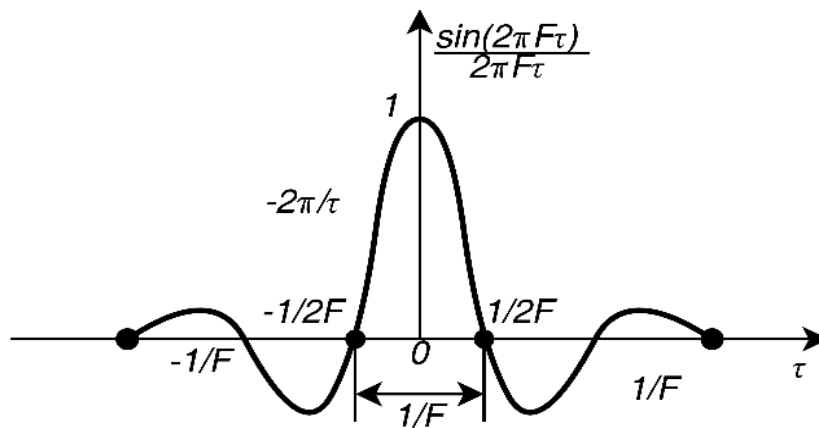


Рисунок 2. – Функция отсчетов $Sa(x)$

Заметим, что она осциллирует с периодом 2π , спадая по амплитуде с увеличением x и переходя через нуль в точках $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$ и т.д. Из формулы (2) следует, что

$$F_n = \frac{A t_{\text{и}}}{T} Sa\left(\frac{n \omega_0 t_{\text{и}}}{2}\right).$$

Поскольку $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\frac{n\omega_0 t_{\text{и}}}{2} = \frac{n\pi t_{\text{и}}}{T}$, получаем

$$F_n = \frac{At_{\text{и}}}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi t_{\text{и}}}{T}\right), \quad (4)$$

$$f(t) = \frac{At_{\text{и}}}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi t_{\text{и}}}{T}\right) e^{i n \omega_0 t}. \quad (5)$$

Из формул (4), (5) следует, что F_n – действительная величина, поэтому для частного представления достаточно одного спектра.

Величины $f(k\Delta t)$ называются отсчетами функции $f(t)$. Они определяют значения исходной функции $f(t)$ в дискретные моменты времени $k\Delta t$. Множитель $\frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)}$ называется функцией отсчетов.

Если обозначить $\tau = t - k\Delta t$, то функция отсчетов примет вид:

$$\psi[\tau] = \frac{\sin 2\pi F \tau}{2\pi F \tau}. \quad (6)$$

Функция отсчетов принимает наибольшее значение, равное единице, в моменты времени $t = k\Delta t$ ($\tau = 0$) и обращается в нуль в моменты времени $t = (k \pm m)\Delta t$, где $m = 1, 2, 3 \dots$. Ширина главного лепестка функции отсчетов на нулевом уровне равна $1/F$. Спектр функции отсчетов является равномерным в полосе $(-F, F)$ и равен нулю вне этой полосы. Действительно,

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi F(t - k\Delta t)}{2\pi F(t - k\Delta t)} e^{i n \omega_0 t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2F} e^{i k \Delta t \omega} & \text{при } |\omega| < 2\pi F, \\ 0 & \text{при } |\omega| > 2\pi F. \end{cases}$$

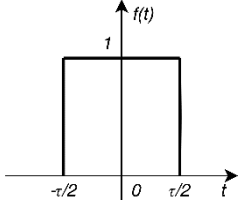
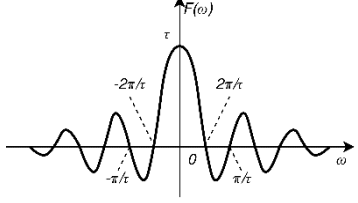
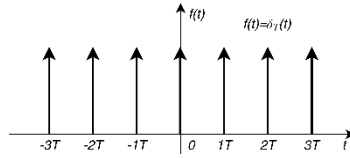
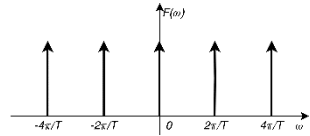
Модуль спектра $S(\omega) = \frac{1}{2F}$. Энергия сигнала через отсчетные значения выражается следующим образом:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f^2(k\Delta t). \quad (7)$$

Если полоса частот сигнала $f(t)$ расширяется (таблица 1, п. 1), то Δt будет уменьшаться, и в пределе $F \rightarrow \infty$ функция отсчетов стремится к дельта-функции $t_{\text{и}}(t - t_k)$ (таблица 1, п. 2), а ряд Котельникова (1) превращается в интеграл:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) t_{\text{и}}(t - t_k) dt. \quad (8)$$

Таблица 1. – Некоторые сигналы и их преобразования Фурье

1. Строблирующая функция $f(t) = G_\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < \frac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при } t > \frac{\tau}{2}. \end{cases}$		$F(\omega) = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
2. Немодулированная периодическая последовательность дельта-функций $f(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$		$F(\omega) = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$ $\omega_0 = 2\pi/T$	

Свертка дельта-функции с любой функцией $f(t)$ дает равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) t_{\text{и}}(t - t_k) dt = f(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} t_{\text{и}}(t - t_k) = f(t_k),$$

из которого видно, что интеграл (8) не изменится от замены функции $f(t)$ ее значением $f(t_k)$. Следовательно, (8) преобразовывается в интеграл Дюмеля:

$$f(t) = \int_0^t f(\tau) t_{\text{и}}(t - \tau) d\tau. \quad (9)$$

Вернемся к выражению ряда Котельникова (1). Каждое слагаемое этого разложения по физическому смыслу представляет отклик идеального фильтра нижних частот с частотой среза F на весьма короткий импульс, приходящий в момент $t = k\Delta t$ и имеющий площадь, равную мгновенному значению функции $f(t)$ в тот же момент. Отсюда следует, что при передаче сигнала $f(t)$ с ограниченным спектром по каналу связи необходимо через равные интервалы $\Delta t = \frac{1}{2} F$ взять отсчеты мгновенных значений сигнала и передать по каналу короткие импульсы, площади которых пропорциональны этим отсчетам. На приемном конце эти импульсы пропускаются через фильтр нижних частот, а исходный сигнал $f(t)$ восстанавливается как сумма откликов фильтра. Сигнал длительности T будет определяться $\nu = \frac{T}{\Delta t} = 2TF$ отсчетами.

$$G_\tau(\omega) = \frac{\tau_{\text{и}}}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Omega\tau_{\text{и}}/2)}{k\Omega\tau_{\text{и}}/2} G_\tau(\omega - k\Omega). \quad (10)$$

Для сигналов с конечной длительностью можно сформулировать теорему отсчетов в частотной области, аналогичную теореме отсчетов во временной области, т.е. теореме Котельникова. Такая возможность следует из симметрии преобразований Фурье относительно переменных ω и t .

Заменяя выражение (1) t на ω , ширину спектра $2\omega_m$ на длительность сигнала T_c , интервал дискретизации $T = \frac{1}{2} f_m$ на $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$, функцию $s(t)$ на $G(\omega)$, получим теорему отсчетов в частотной области:

$$G(\omega) = \sum_{k=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} G(k\Omega) \frac{\sin \frac{T_c}{2}(\omega - k\Omega)}{\frac{T_c}{2}(\omega - k\Omega)}.$$

Здесь N – число выборок (спектральных линий) функции $G(\omega)$. Суммирование происходит по значениям k от $-(\frac{N-1}{2})$ до $(\frac{N-1}{2})$, включая $k = 0$. Таким образом, спектр сигнала конечной длительности T_c полностью определяется выборками, взятыми с интервалом $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$.

При дискретизации сигнала в частотной области общее число спектральных линий при ширине спектра $2\omega_m$ равно:

$$\frac{2\omega_m}{\Omega} = 2T_c f_m.$$

Заключение

Величины $f(kt)$ функции $f(t)$, сдвинутые на время $T = \frac{\pi}{\omega_m} = \frac{1}{2f_m}$, формируют канал утечки информации в виде амплитудно-импульсно-модулированных сигналов.

Число выборок от $(N - 1)$ до $(N + 1)$. Суммированное число выборок $G(k\Omega)$ спектральных линий по значениям k от $-(\frac{N-1}{2})$ до $(\frac{N-1}{2})$, включая $k = 0$, взятое с интервалами $\Omega = \frac{2\pi}{T_c}$, формирует канал утечки информации в виде амплитудно-импульсных моделированных сигналов.

Список литературы

1. Способ оценки защищенности преобразованного в цифровую форму речевого сигнала в каналах утечки информации / В.К. Железняк, С.В. Лавров, А.Г. Филиппович и др. // Комплексная защита информации: материалы XXIV науч.-практ. конф. / г. Витебск (21–23 мая 2019 г.). – С. 53–59.
2. Анализ ошибки равномерного квантования периодической импульсной последовательностью треугольной формы в спектральной области / В.К. Железняк, К.Я. Раханов, С.В. Лавров и др. // Проблемы инфокоммуникаций. – 2022. – № 1 (15). – С. 39–45.
3. Передача информации в системах подвижной связи / В.Ю. Бабков, М.А. Вознюк, В.А. Петраков и др. – СПб.: СПбГУТ, 1999. – 152 с.

4. Лавров С.В., Железняк В.К., Рябенко Д.С. Оценка защищенности каналов утечки высокоскоростной передачи речевых сигналов в цифровой форме / Комплексная защита информации: материалы XXIV науч.-практ. конф. / г. Витебск (21–23 мая 2019 г.). – С. 74–77.

5. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др.; под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.