

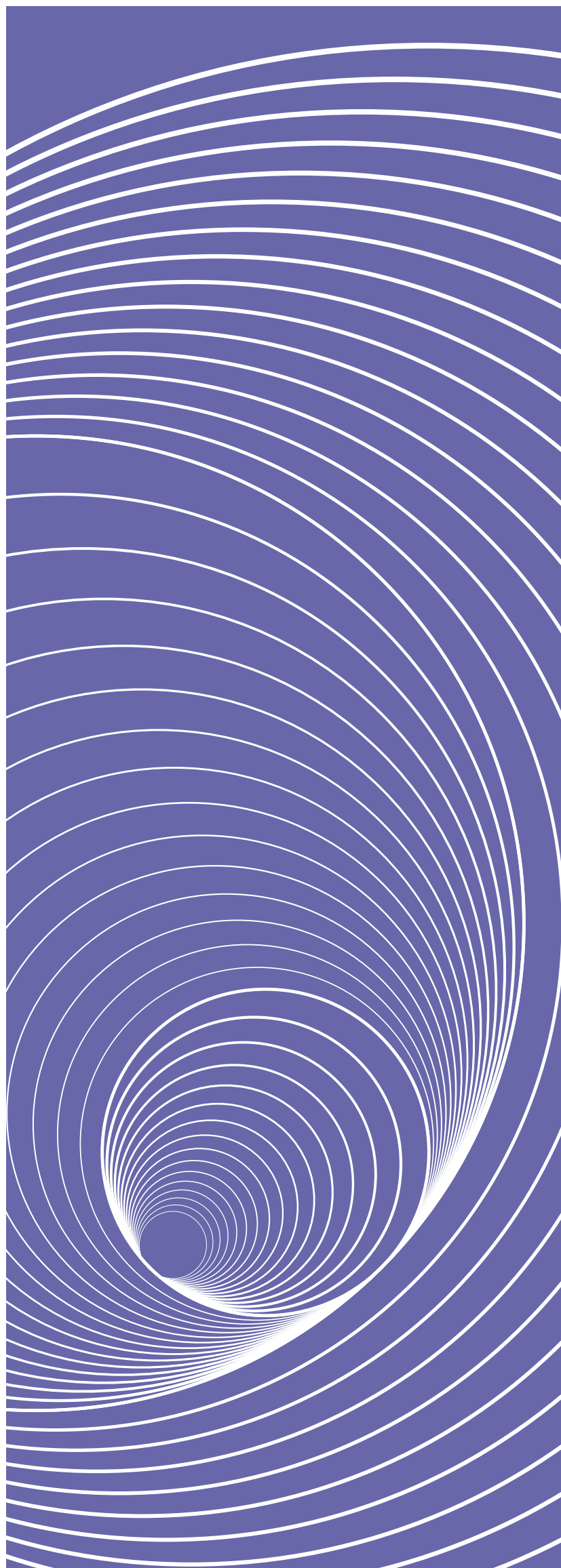
Л. С. Турищев

МЕХАНИКА

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности 7-07 0731-01
«Архитектура» очной формы обучения

Текстовое электронное издание

Новополоцк / 2025



Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет имени Евфросинии Полоцкой»

Л. С. Турищев

МЕХАНИКА

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности
7-07 0731-01 «Архитектура»
очной формы обучения

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой
2025

УДК 624.04(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией
инженерно-строительного факультета
в качестве электронного учебно-методического комплекса
(протокол № 4 от 27.05.2024)

Кафедра строительных конструкций

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой архитектуры и строительства
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы
А. Р. ВОЛИК

(протокол № 21 от 3 сентября 2024 г.);

д-р техн. наук, проф., проф. кафедры математических методов в строительстве
Белорусского национального технического университета

С. В. БОСАКОВ;

канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой архитектуры

Полоцкого государственного университета имени Евфросинии Полоцкой

Е. Г. КРЕМНЕВА

Турищев, Л. С.

Механика [Электронный ресурс] : электрон. учеб.-метод. комплекс /
Л. С. Турищев. – Новополоцк: Полоц. гос. ун-т им. Евфросинии Полоцкой,
2025. – URL: <https://elib.psu.by/handle/123456789/48019>

ISBN 978-985-531-888-1.

Содержит базовый теоретический материал и примеры решения типовых задач интегрированной учебной дисциплины «Механика», включающей в себя три раздела: основы статики твердого тела; основы сопротивления материалов; основы строительной механики стержневых систем. Приведены контрольные вопросы по каждой теме учебной дисциплины. Комплекс включает список рекомендуемой литературы.

Предназначен для студентов специальности 7-07-0731-01 «Архитектура» очной формы обучения.

№ госрегистрации 3302543779

ISBN 978-985-531-888-1

© Турищев Л. С., 2025

© Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой, 2025

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания Л. С. Турищева «Механика» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Электронный учебно-методический комплекс включен в Государственный регистр информационного ресурса. Регистрационное свидетельство № 3302543779 от 06.08.2025.

Учебное издание

ТУРИЩЕВ Леонид Степанович

МЕХАНИКА

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов специальности
7-07 0731-01 «Архитектура»
очной формы обучения

Редактор *Т. А. Дарьянова*
Компьютерный дизайн *Д. П. Змитрович*

Подписано к использованию 09.06.2025.

Объем издания 4,30 Мб. Заказ 105.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет
имени Евфросинии Полоцкой».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014., перерегистрация от 24.08.2022.

ЛП № 02330/278 от 27.05.2004.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
<http://www.psu.by>

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	8
УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА.....	9
Пояснительная записка.....	9
Содержание учебного материала	11
Перечень тем практических занятий	15
Учебно-методическая карта учебной дисциплины «Механика» (дневная форма получения высшего образования)	16
Материалы для проведения промежуточного контроля.....	22
Диагностика знаний и умений студента	30
УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ ДИСЦИПЛИНЫ	32
ТЕМА 1. Введение в интегрированную учебную дисциплину «Механика»	32
1.1. Предмет, цели и структура дисциплины.....	32
1.2. Физические величины, используемые в дисциплине «Механика»	34
1.3. Базовые определения векторной алгебры.....	34
1.4. Геометрический способ выполнения линейных операций.....	36
1.5. Аналитический способ выполнения линейных операций.....	38
1.6. Примеры к теме.....	42
Вопросы по теме для текущего контроля	44
РАЗДЕЛ I. ОСНОВЫ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА	45
ТЕМА 2. Введение в статику твердого тела	45
2.1. Предмет и основные понятия статики	45
2.2. Аксиомы статики.....	47
2.3. Связи и их реакции.....	49
Вопросы по теме для текущего контроля	53
ТЕМА 3. Система сходящихся сил.....	54
3.1. Сложение системы сходящихся сил	54
3.2. Условия равновесия твердого тела при действии системы сходящихся сил	58
3.3. Примеры к теме.....	60
Вопросы по теме для текущего контроля	61
ТЕМА 4. Момент силы. Теория пар сил	62
4.1. Момент силы относительно точки.....	62
4.2. Пара сил. Момент пары.....	65
4.3. Условия равновесия системы пар сил.....	67
4.4. Примеры к теме.....	69
Вопросы по теме для текущего контроля	70
ТЕМА 5. Система сил, произвольно расположенных на плоскости	71
5.1. Метод Пуансо	71
5.2. Приведение произвольной плоской системы сил к центру.....	72
5.3. Возможные случаи приведения произвольной плоской системы сил к центру.....	74
5.4. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил	76

5.5. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил	77
5.6. Определение реакций связей твердого тела и системы взаимосвязанных тел Статически определенные и статически неопределенные задачи	79
5.7. Примеры к теме.....	81
Вопросы по теме для самоконтроля.....	84
ТЕМА 6. Плоские фермы.....	85
6.1. Понятие о ферме и ее расчетной схеме.....	85
6.2. Терминология и система обозначений.....	86
6.3. Расчет простых ферм	87
6.4. Понятие и признаки нулевых стержней.....	90
6.5. Примеры к теме.....	92
Вопросы по теме для текущего контроля	94
ТЕМА 7. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела	94
7.1. Центр параллельных сил.....	94
7.2. Центр тяжести твердого тела.....	95
7.3. Способы определения координат центров тяжести твердых тел	97
7.4. Примеры к теме.....	98
Вопросы по теме для текущего контроля	100
РАЗДЕЛ II ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.....	102
ТЕМА 8. Основные понятия сопротивления материалов	102
8.2. Виды нагружений бруса внешними силами.....	103
8.3. Внутренние силы, внутренние усилия, напряжения	106
8.4. Основные гипотезы и принципы.....	108
Вопросы по теме для текущего контроля	109
ТЕМА 9. Растяжение-сжатие прямого бруса.....	110
9.1. Внутренние усилия и напряжения бруса при растяжении-сжатии	110
9.2. Деформации и перемещения бруса при растяжении-сжатии	113
9.3. Механические характеристики материалов при растяжении	116
9.4. Методы расчетов конструкций на прочность и жесткость	119
9.5. Примеры к теме.....	122
Вопросы по теме для текущего контроля	128
ТЕМА 10. Сдвиг	129
10.1. Понятие о сдвиге.....	129
10.2. Закон Гука при сдвиге.....	131
10.3. Практический расчет соединений, работающих на сдвиг.....	131
10.4. Примеры к теме.....	135
Вопросы по теме для текущего контроля	137
ТЕМА 11. Геометрические характеристики поперечных сечений	137
11.1. Назначение геометрических характеристик поперечных сечений	138
11.2. Определение площади поперечных сечений	141
11.3. Определение статического момента поперечных сечений	142
11.4. Определение моментов инерции поперечных сечений	143
11.5. Изменение моментов инерции поперечных сечений при преобразованиях координатных осей	146
11.6. Примеры к теме.....	148
Вопросы по теме для текущего контроля	153

ТЕМА 12. Изгиб прямого бруса.....	154
12.1. Общие сведения об изгибе прямого бруса	154
12.2. Определение внутренних усилий при плоском изгибе.....	155
12.3. Определение нормальных напряжений при плоском изгибе.....	158
12.4. Расчет балок на прочность при плоском изгибе	159
12.5. Определение перемещений при плоском изгибе	159
12.6. Расчет балок на жесткость при плоском изгибе	161
Вопросы по теме для текущего контроля	164
ТЕМА 13. Устойчивость прямых сжатых стержней.....	164
13.1. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия	165
13.2. Критическая сила и ее определение для упругого сжатого прямого стержня	166
13.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы.....	168
13.4. Пределы применимости формулы Эйлера.....	169
13.5. Практический расчет на устойчивость сжатых прямых стержней	171
Вопросы по теме для текущего контроля	177
 РАЗДЕЛ III ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ	178
ТЕМА 14. Общие положения и понятия строительной механики	178
14.1. Предмет строительной механики	178
14.2. Расчетная модель конструкции.....	179
14.3. Понятие о линейно и нелинейно деформируемых системах.....	182
Вопросы по теме для текущего контроля	184
ТЕМА 15. Кинематический анализ плоских стержневых конструкций	185
15.1. Разделение расчетных схем конструкций по статическим признакам ...	185
15.2. Разделение расчетных схем конструкций по кинематическим признакам.....	186
15.3. Взаимосвязь кинематических и статических признаков расчетных схем конструкций	187
15.4. Цель кинематического анализа и его основные понятия	188
15.5. Подсчет числа степеней свободы для плоских стержневых конструкций.....	193
15.6. Анализ геометрической структуры плоских стержневых конструкций ...	194
15.7. Порядок установления кинематических и статических признаков конструкции.....	196
15.8. Пример к теме	197
Вопросы по теме для текущего контроля	198
ТЕМА 16. Методы расчета статически определимых систем при неподвижной нагрузке.....	198
16.1. Внутренние силы и их числовые характеристики.....	199
16.2. Виды статически определимых конструкций и их свойства	200
16.3. Аналитическая форма определения внутренних усилий	202
16.4. Особенности расчета многопролетных шарнирных балок	204
16.5. Примеры к теме.....	205
Вопросы по теме для текущего контроля	221

ТЕМА 17. Определение перемещений.....	222
17.1. Общие сведения о перемещениях	222
17.2. Связь между внешними силами и перемещениями в линейно-деформируемых системах.....	225
17.3. Аналитическая форма определения перемещений в плоских стержневых конструкциях	227
17.4. Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки	230
17.5. Вычисление интегралов, встречающихся при определении перемещений от нагрузки.....	231
17.6. Пример к теме	233
Вопросы по теме для текущего контроля	235
ТЕМА 18. Введение в теорию расчета статически неопределимых стержневых конструкций.....	235
18.1. Степень статической неопределимости	236
18.2. Свойства статически неопределимых конструкций	239
18.3. Основная и частная задачи расчета статически неопределимых систем	240
18.4. Примеры к теме.....	241
ТЕМА 19. Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил.....	244
19.1. Постановка задачи	245
19.2. Основная система и канонические уравнения	245
19.3. Определение коэффициентов и свободных членов	248
19.4. Решение канонических уравнений.....	250
19.5. Определение внутренних усилий заданной системы	250
19.6. Пример к теме	252
ЛИТЕРАТУРА	257

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электронный учебно-методический комплекс по интегрированной учебной дисциплине «Механика» предназначен для обучения студентов очной формы по специальности 7-07-0731-01 «Архитектура». Данная дисциплина относится к модулю учебного плана «Инженерные конструкции и механика» и занимает важное место при формировании базы знаний в области проектирования, сооружения и эксплуатации строительных сооружений. Без знания изучаемых в дисциплине методов расчета несущих конструкций на прочность, жесткость и устойчивость невозможна подготовка современного архитектора.

Учебно-методический комплекс включает следующие структурно взаимосвязанные разделы:

- основы первого раздела теоретической механики – статика твердого тела;
- основы сопротивления материалов;
- основы строительной механики стержневых конструкций.

При изложении материала основной упор делается на объяснение сути методов решения задач, рассматриваемых в каждом разделе курса, и иллюстрации алгоритмов их решения. Надлежащее освоение методов решения задач механики является необходимым условием успешного решения вопросов, связанных с расчетом и конструированием несущих конструкций строительных сооружений.

При написании комплекса использовались материалы, изложенные в существующих учебниках, учебных и методических пособиях по теоретической механике, сопротивлению материалов и строительной механике, перечень которых приведен в списке литературы.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА

Пояснительная записка

Цель изучения учебной дисциплины «Механика» состоит в том, чтобы вооружить будущего архитектора знаниями, умениями и навыками, необходимыми для обоснованного выбора конструктивных решений при архитектурном проектировании жилых, общественных и производственных зданий. Дисциплина является интегрированной и включает в себя три раздела: основы первого раздела теоретической механики – статика твердого тела, основы сопротивления материалов и основы строительной механики стержневых систем.

Задачей дисциплины является обучение основам обеспечения прочности, жесткости и устойчивости несущих конструкций проектируемых искусственных сооружений.

Для успешного освоения дисциплины студенту необходимо освоить дисциплину «Математика». Знания, умения и навыки, полученные студентом при изучении дисциплины «Механика», используются при изучении дисциплин «Архитектурные конструкции» и «Инженерные конструкции».

В результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- базовые понятия и аксиомы теоретической механики;
- основы расчетов элементов стержневых конструкций на прочность, жесткость и устойчивость;
- основы методов определения внутренних усилий и перемещений в статически определимых и неопределимых систем;

уметь:

- решать прикладные задачи статики твердого тела;
- выполнять расчеты бруса на прочность, жесткость и устойчивость;
- выполнять кинематический анализ плоских стержневых конструкций;
- определять внутренние усилия и перемещения для базовых видов плоских стержневых конструкций.

владеть:

- навыками составления уравнений твердого тела и их применения к решению прикладных задач;
- основами методики оценки прочности, жесткости и устойчивости отдельного стержня;
- основами методов определения внутренних усилий и перемещений для базовых видов плоских стержневых конструкций.

Освоение студентом дисциплины «Механика» будет способствовать формированию специализированной компетенции СК-16 – владение базовыми понятиями и аксиомами теоретической механики, сопротивления материалов и строительной механики стержневых конструкций, методами расчетов и применения их для решения прикладных задач.

Общее количество часов, отводимое на изучение дисциплины «Механика» в соответствии с учебным планом по специальности 7-07-0731-01 «Архитектура» для студентов дневной формы обучения, составляет 144 ч, в т.ч. 74 аудиторных часов. Распределение аудиторного времени по курсам, семестрам и видам занятий приведено в таблице 1.

Таблица 1

Курс	Семестр	Аудиторных часов	в том числе	
			лекций, ч	практических занятий, ч
4	7	44	28	16
	8	30	16	14
Итого		74	44	30

В ходе изучения дисциплины студент должен самостоятельно выполнить и защитить 2 расчетно-проектировочные работы (РПР), в т.ч.:

- 7 семестр – 1 РПР;
- 8 семестр – 1 РПР.

Виды и формы проведения промежуточной аттестации с распределением по курсам и семестрам приведены в таблице 2.

Таблица 2

Курс	Семестр	Вид промежуточной аттестации	Форма проведения промежуточной аттестации
4	7	экзамен	тестирование
	8	экзамен	тестирование

Содержание учебного материала

Тема 1. Введение в интегрированную дисциплину «Механика»

Искусственные сооружения и виды конструкций, применяемые при их возведении. Понятие о несущей системе сооружения.

Структура дисциплины: основы статики твердого тела, основы сопротивления материалов, основы строительной механики стержневых систем.

Физические величины, используемые в дисциплине «Механика», и действия над ними.

Раздел I. Основы статики твердого тела

Тема 2. Введение в статику твердого тела

Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние.

Аксиомы статики. Связи и реакции связей.

Тема 3. Система сходящихся сил

Система сходящихся сил. Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил. Многоугольник сил. Проекция силы на ось. Равнодействующая сходящихся сил. Уравнения равновесия сходящихся сил. Теорема о трех непараллельных силах.

Тема 4. Момент силы. Теория пар сил

Алгебраический момент силы и его свойства. Момент силы относительно центра как вектор.

Пара сил и ее свойства. Алгебраический момент пары сил и его свойства. Момент пары сил как вектор. Теорема об эквивалентном переносе пары сил в плоскости ее действия. Сложение пар сил. Условие равновесия системы пар сил в плоскости.

Тема 5. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

Приведение произвольной плоской системы сил к центру. Главный вектор и главный момент плоской системы сил и их вычисление. Частные случаи приведения к центру. Условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Формы уравнения равновесия. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие систем тел. Статически определимые и неопределимые системы.

Тема 6. Плоские фермы

Понятие о ферме. Классификация ферм. Аналитический расчет плоских ферм: определение опорных реакций, определение внутренних усилий в стержнях методом вырезания узлов и методом сечений (способ Риттера). Признаки нулевых стержней.

Тема 7. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела

Центр параллельных сил и центр тяжести. Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус-вектор и координаты.

Центр тяжести твердого тела как центр параллельных сил тяжести. Его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел и фигур.

Раздел II. Основы сопротивления материалов

Тема 8. Основные понятия сопротивления материалов

Основные типы деформируемых твердых тел. Внутренние силы. Метод сечений. Напряжения – полное, нормальное и касательное. Внутренние усилия – продольные и поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты. Основные виды деформации тела: осевое растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Допущения и гипотезы сопротивления материалов.

Тема 9. Растяжение-сжатие прямого бруса

Определение деформации осевое растяжение-сжатие. Продольные силы. Эпюра продольных сил. Напряжения в поперечных сечениях бруса. Эпюра напряжений. Продольные и поперечные деформации бруса. Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости и коэффициент Пуассона. Механические характеристики пластических и хрупких материалов при растяжении и сжатии. Основы расчетов на прочность при растяжении и сжатии.

Тема 10. Сдвиг

Определение деформации сдвига. Абсолютный сдвиг, относительный сдвиг, угол сдвига. Напряжения при сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Условие прочности при сдвиге. Расчет заклепочных и болтовых соединений. Расчет сварных соединений.

Тема 11. Геометрические характеристики поперечных сечений

Типы поперечных сечений бруса. Статические моменты площади. Осевой, полярный и центробежный моменты инерции. Осевые моменты инерции для прямоугольника, треугольника и круга. Главные оси инерции, главные моменты инерции. Радиусы инерции. Определение геометрических характеристик стальных прокатных профилей с помощью сортамента.

Тема 12. Изгиб прямого бруса

Определение деформации изгиба и классификация видов изгиба. Определение внутренних усилий, возникающих при поперечном изгибе: изгибающие моменты и поперечные силы. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Определение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе. Расчеты бруса на прочность при поперечном изгибе.

Тема 13. Устойчивость прямых сжатых стержней

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Критические нагрузки. Устойчивость сжатого стержня постоянного сечения в упругой стадии. Формула Эйлера и предел ее применимости. Формула Ясинского. Практический метод расчета сжатых стержней на устойчивость. Понятие о расчете сжато-изогнутых стержней.

Раздел III. Основы строительной механики стержневых конструкций

Тема 14. Общие положения и понятия строительной механики

Строительная механика, ее задачи и методы. Виды инженерных сооружений. Цели расчета новых сооружений и цели расчета существующих сооружений.

Понятие о расчетной схеме сооружения. Основные элементы расчетных схем сооружений: стержни, пластины, оболочки и массивные тела, узлы и опоры.

Понятие о расчетах сооружений по недеформированному и деформированному состояниям.

Тема 15. Кинематический анализ плоских стержневых конструкций

Классификация систем по статическим и кинематическим свойствам. Назначение кинематического анализа. Основные понятия кинематического

анализа: число степеней свободы, узел, диск, связь, шарнир. Определение числа свободы плоской стержневой системы. Исходы подсчета и выводы, анализ геометрической структуры, способы образования дисков. Примеры анализа геометрической структуры реальных систем.

Тема 16. Методы расчета статически определимых систем при неподвижной нагрузке

Особенности расчета статически определимых систем и их свойства. Формы и методы расчета. Суть статического метода.

Определение, типы многопролетных балок. Определение внутренних усилий от постоянной нагрузки с использованием монтажной схемы. Построение эпюр M и Q и проверка правильности их построения.

Тема 17. Определение перемещений

Цели определения перемещений. Жесткость и податливость конструкции. Два подхода к определению перемещений. Особенности определения перемещений в линейно-деформируемых системах. Определение перемещений от нагрузки. Формула Максвелла-Мора. Правило Верещагина.

Тема 18. Введение в теорию расчета статически неопределимых стержневых конструкций

Статически неопределимые системы и их свойства. Степень статической неопределимости и ее определение. Классификация методов расчета статически неопределимых систем.

Тема 19. Расчет статически неопределимых систем методом сил

Сущность метода сил. Основная система и основные неизвестные. Канонические уравнения. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений. Определение окончательных усилий, проверки правильности расчетов. Общий алгоритм расчета статически неопределимых рам по методу сил.

Перечень тем практических занятий

7 семестр

1. Равновесие плоской системы сходящихся сил.
2. Определение реакций опор плоского абсолютно твердого тела.
3. Определение внутренних усилий в стержнях плоской фермы.
4. Определение положения центра тяжести плоского абсолютно твердого тела.
5. Определение внутренних усилий при растяжении-сжатии прямого бруса.
6. 6.Определение геометрических характеристик для основных видов поперечных сечений.
7. Определение внутренних усилий при прямом поперечном изгибе балок.
8. Практический расчет на устойчивость сжатого стержня.

8 семестр

1. Определение числа степеней свободы и анализ структуры плоских стержневых систем.
2. Построение эпюр внутренних усилий в многопролетных балках.
3. Построение эпюр внутренних усилий в статически определимых рамах.
4. Определение перемещений в статически определимых рамах от нагрузки
5. Определение степени статической неопределимости плоских стержневых систем.
6. Расчет плоской рамы методом сил на действие нагрузки.

**Учебно-методическая карта учебной дисциплины «Механика»
(дневная форма получения высшего образования)**

№ темы, работы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов		Самостоя- тельная работа студента, ч	Литера- тура	Форма контроля знаний
		лекции	практические занятия			
1	2	3	4	5	6	7
Тема 1	Введение в интегрированную дисциплину «Механика»					
1.1	Искусственные сооружения и виды конструкций, применяемые при их возведении. Понятие о несущей системе сооружения. Структура дисциплины: основы статики твердого тела, основы сопротивления материалов, основы строительной механики стержневых систем. Физические величины, используемые в дисциплине «Механика», и действия над ними	2			[2; 8; 9]	
Раздел 1. Основы статики абсолютно твердого тела						
Тема 2	Введение в статику твердого тела					
2.1	Предмет статики. Основные понятия статики: абсолютно твердое тело, эквивалентные и уравновешенные системы сил, равнодействующая, силы внешние и внутренние. Аксиомы статики. Связи и реакции связей	2			[2; 8; 9]	СТ
Тема 3	Система сходящихся сил					
3.1	Система сходящихся сил. Сложение двух сходящихся сил. Параллелограмм и треугольник сил. Многоугольник сил. Проекция силы на ось. Равнодействующая сходящихся сил. Уравнения равновесия сходящихся сил. Теорема о трех непараллельных силах	2			[2; 8; 9]	СТ
3.2	Равновесие плоской системы сходящихся сил		2			КР

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Тема 4	Момент силы. Теория пар сил					
4.1	Алгебраический момент силы и его свойства. Момент силы относительно центра как вектор. Пара сил и ее свойства. Алгебраический момент пары сил и его свойства. Момент пары сил как вектор. Теорема об эквивалентном переносе пары сил в плоскости ее действия. Сложение пар сил. Условие равновесия системы пар сил в плоскости	2			[2; 8; 9]	
Тема 5	Система сил, произвольно расположенных на плоскости					
5.1	Приведение произвольной плоской системы сил к центру. Главный вектор и главный момент плоской системы сил и их вычисление. Частные случаи приведения к центру. Условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Формы уравнения равновесия. Теорема Вариньона о моменте равнодействующей. Равновесие систем тел. Статически определимые и неопределимые системы	2			[2; 8; 9]	СТ
5.2	Определение реакций опор плоского абсолютно твердого тела		2			КР
Тема 6	Плоские фермы					
6.1	Понятие о ферме. Классификация ферм. Аналитический расчет плоских ферм: определение опорных реакций, определение внутренних усилий в стержнях методом вырезания узлов и методом сечений (способ Риттера). Признаки нулевых стержней	2				
6.2	Определение внутренних усилий в стержнях плоской фермы		2			
Тема 7	Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела					
7.1	Центр параллельных сил и центр тяжести. Приведение системы параллельных сил к равнодействующей. Центр параллельных сил, его радиус-вектор и координаты. Центр тяжести твердого тела как центр параллельных сил тяжести. Его координаты. Центр тяжести объема, площади и линии. Способы определения положения центров тяжести тел и фигур	2				
7.2	Определение положения центра тяжести плоского абсолютно твердого тела		2			

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Раздел 2. Основы сопротивления материалов						
Тема 8	Основные понятия сопротивления материалов					
8.1	Основные типы деформируемых твердых тел. Внутренние силы. Метод сечений. Напряжения – полное, нормальное и касательное. Внутренние усилия – продольные и поперечные силы, крутящий и изгибающий моменты Основные виды деформации тела: осевое растяжение-сжатие, сдвиг, кручение и изгиб. Допущения и гипотезы механики деформируемого твердого тела	2			[1; 5]	СТ
Тема 9	Растяжение-сжатие прямого бруса					
9.1	Определение деформации осевое растяжение-сжатие. Продольные силы. Эпюра продольных сил. Напряжения в поперечных сечениях бруса. Эпюра напряжений. Продольные и поперечные деформации бруса. Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости и коэффициент Пуассона. Механические характеристики пластических и хрупких материалов при растяжении и сжатии. Основы расчетов на прочность при растяжении и сжатии	2			[1; 5]	
9.2	Определение внутренних усилий при растяжении-сжатии прямого бруса		2			КР
Тема 10	Сдвиг					
10.1	Определение деформации сдвига. Абсолютный сдвиг, относительный сдвиг, угол сдвига. Напряжения при сдвиге. Закон Гука при сдвиге. Условие прочности при сдвиге. Расчет заклепочных и болтовых соединений. Расчет сварных соединений	2			[1; 5]	
Тема 11	Геометрические характеристики поперечных сечений				[1; 5]	
11.1	Типы поперечных сечений бруса. Статические моменты площади. Осевой, полярный и центробежный моменты инерции. Осевые моменты инерции для прямоугольника, треугольника и круга. Главные оси инерции, Главные моменты инерции. Радиусы инерции. Определение геометрических характеристик стальных прокатных профилей с помощью сортамента	2				
11.2	Определение геометрических характеристик для основных видов поперечных сечений		2			КР

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Тема 12	Изгиб прямого бруса				[1; 5]	СТ
12.1	Определение деформации изгиба и классификация видов изгиба. Определение внутренних усилий, возникающих при поперечном изгибе: изгибающие моменты и поперечные силы. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил	2				
12.2	Определение нормальных и касательных напряжений при поперечном изгибе. Расчеты бруса на прочность при поперечном изгибе	2				
12.3	Определение внутренних усилий при прямом поперечном изгибе балок		2			КР
Тема 13	Устойчивость прямых сжатых стержней				[1; 5]	СТ
13.1	Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Критические нагрузки. Устойчивость сжатого стержня постоянного сечения в упругой стадии. Формула Эйлера и предел её применимости. Формула Ясинского. Практический метод расчета сжатых стержней на устойчивость. Понятие о расчете сжато-изогнутых стержней	2				
13.3	Практический расчет на устойчивость сжатого стержня		2			
Раздел 3. Основы строительной механики стержневых систем						
Тема 14	Общие положения и понятия строительной механики				[6]	СТ
14.1	Строительная механика, ее задачи и методы. Виды инженерных сооружений. Цели расчета новых сооружений и цели расчета существующих сооружений. Понятие о расчетной схеме сооружения. Основные элементы расчетных схем сооружений: стержни, пластины, оболочки и массивные тела, узлы и опоры. Понятие о расчетах сооружений по недеформированному и деформированному состояниям.	2				
Тема 15	Кинематический анализ плоских стержневых систем				[6]	
15.1	Классификация систем по статическим и кинематическим свойствам. Назначение кинематического анализа. Основные понятия кинематического анализа: число степеней свободы, узел, диск, связь, шарнир. Определение числа	2				

Продолжение таблицы

1	2	3	4	5	6	7
	свободы плоской стержневой системы. Исходы подсчета и выводы, анализ геометрической структуры, способы образования дисков. Примеры анализа геометрической структуры реальных систем					
15.2	Определение числа степеней свободы и анализ структуры плоских стержневых систем		4			КР
Тема 16	Методы расчета статически определимых систем при неподвижной нагрузке				[6]	
16.1	Особенности расчета статически определимых систем и их свойства. Формы и методы расчета. Суть статического метода. Определение, типы многопролетных балок. Определение внутренних усилий от постоянной нагрузки с использованием монтажной схемы	2				
16.2	Построение эпюр внутренних усилий в многопролетных балках		2			
16.3	Построение эпюр внутренних усилий в статически определимых рамах		2			
Тема 17	Определение перемещений				[6]	СТ
17.1	Цели определения перемещений. Жесткость и податливость конструкции. Два подхода к определению перемещений. Особенности определения перемещений в линейно-деформируемых системах	2				
17.2	Определение перемещений от нагрузки. Формула Максвелла-Мора. Правило Верещагина	2				
17.3	Определение перемещений в статически определимых рамах от нагрузки		2			
Тема 18	Введение в теорию расчета статически неопределимых стержневых конструкций				[7]	
18.1	Статически неопределимые системы и их свойства. Степень статической неопределимости и ее определение. Классификация методов расчета статически неопределимых систем	2				
18.2	Определение степени статической неопределимости плоских стержневых систем		2			КР

Окончание таблицы

1	2	3	4	5	6	7
Тема 19	Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил				[7]	СТ
19.1	Сущность метода сил. Основная система и основные неизвестные. Канонические уравнения. Определение и проверки правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений	2				
19.2	Определение окончательных усилий, проверки правильности расчетов. Общий алгоритм расчета статически неопределимых рам по методу сил	2				
19.3	Расчет плоской рамы методом сил на действие нагрузки		2			

СТ – семестровое тестирование (форма текущего контроля);

КР – контрольная работа (форма текущего контроля).

Материалы для проведения промежуточного контроля

Раздел I. Основы статики абсолютно твердого тела.

Перечень вопросов

1. В чем состоит предмет статики?
2. Что называется материальной точкой?
3. Что называется системой материальных точек?
4. Что называется абсолютно твердым телом?
5. Что такое сила и какими признаками она характеризуется?
6. Что называется системой сил?
7. Что называется равнодействующей силой?
8. Что называется уравнивающей силой?
9. В чем отличие равнодействующей и уравнивающей сил?
10. Какие системы сил называются эквивалентными?
11. Какая система сил называется уравновешенной или системой сил, эквивалентной нулю?
12. Какая система сил называется уравнивающей?
13. Сформулируйте аксиомы статики.
14. Чем отличается несвободное тело от свободного?
15. Что называют связью?
16. Что называют силой реакции связи?
17. В чем заключается аксиома или принцип освобождаемости от связи?
18. Перечислите основные типы связей. Как направлены их реакции в каждом случае?
19. Сформулируйте геометрический и аналитический методы определения равнодействующей плоской системы сходящихся сил.
20. Как проектируется сила на ось и на плоскость? Чем отличаются эти проекции?
21. Как вычисляются проекции сил на ось и на плоскость?
22. Как формулируются условия равновесия системы сходящихся сил в геометрической и аналитической формах?
23. Сформулируйте теорему о равновесии трех непараллельных сил.
24. Что называется парой сил и системой пар сил?
25. Разъясните основные характеристики пары сил.
26. При каком условии две пары будут эквивалентны?

27. Какая система сил называется произвольной плоской системой сил?
28. Как определяется на плоскости момент силы относительно точки (центра)?
29. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
30. Что называется моментом силы относительно данной оси? Как выбирается знак этого момента?
31. В каких случаях момент силы относительно данной оси равен нулю?
32. Что называется главным вектором произвольной плоской системы сил?
33. Какая разница между главным вектором и равнодействующей системы сил? В чем сходство?
34. Сформулируйте теорему о параллельном переносе силы.
35. Перечислите различные случаи приведения произвольной плоской системы сил к центру.
36. Сформулируйте условия равновесия произвольной плоской системы сил.
37. Какие формы условий равновесия произвольной плоской системы сил Вы знаете?
38. Сформулируйте условия равновесия плоской системы параллельных сил.
39. Какие задачи называются статически определимыми и неопределимыми?
40. В чем заключается метод решения задачи о равновесии системы, состоящей из нескольких твердых тел?
41. Расскажите о методах расчета плоской фермы.
42. Каким свойством обладает центр параллельных сил?
43. По каким формулам вычисляются координаты центра тяжести однородных тел, плоских фигур и линий?
44. Что называется статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси?
45. Как вычисляется статический момент площади плоской фигуры? Какую размерность он имеет?
46. Как определить положение центра тяжести площади, если известно положение центров тяжести отдельных ее частей?

Перечень типовых задач

1. Равновесие тела под действием сходящейся системы сил.
2. Равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил.
3. Расчет фермы.
4. Центр тяжести твердого тела.

Раздел II. Основы сопротивления материалов

Перечень вопросов

1. Что называется расчетной схемой?
2. Какие требования предъявляются к расчетной схеме?
3. Как классифицируются внешние силы?
4. Какие бывают виды воздействий внешних сил на брус?
5. Что такое растяжение? Какими внешними воздействиями оно вызывается?
6. Что такое сдвиг и какими внешними воздействиями он вызывается?
7. Что такое изгиб и какими внешними воздействиями он вызывается?
8. Что такое продольный изгиб и чем он вызывается?
9. Какие силы называются внутренними?
10. Что является числовой характеристикой внутренних сил?
11. Что называется внутренними усилиями?
12. Как определяются внутренние усилия?
13. В чем суть метода сечений?
14. Что такое напряжение?
15. Какие бывают виды напряжений?
16. Что называется деформацией?
17. Как классифицируются деформации?
18. Какие допущения вводятся в сопротивлении материалов в отношении свойств материала?
19. Какие допущения вводятся в отношении характера деформаций конструкций?
20. Какие случаи деформации бруса называются центральным растяжением?
21. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении бруса?
22. Что представляет собой эпюра продольных сил? Как она строится?
23. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого бруса и чему они равны?

24. Как используется гипотеза плоских сечений для выяснения закона распределения напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) бруса?

25. Как строится эпюра нормальных напряжений в поперечных сечениях бруса?

26. Что называется полной (абсолютной) продольной деформацией?

27. Что представляет собой относительная продольная деформация?

28. Каковы размерности абсолютной и относительной продольных деформаций?

29. Что называется модулем упругости E и как влияет величина E на деформации бруса?

30. Что называется жесткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии)?

31. Как формулируется закон Гука?

32. Что называется абсолютной и относительной поперечными деформациями бруса?

33. Что происходит с поперечными размерами бруса при его растяжении и сжатии?

34. Что называется коэффициентом поперечной деформации (коэффициентом Пуассона)? Какое значение он имеет?

35. Что называется абсолютным сдвигом, относительным сдвигом и углом сдвига?

36. Напишите выражение для закона Гука при сдвиге.

37. В каких единицах выражаются моменты инерции сечения?

38. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?

39. Чему равен осевой момент инерции прямоугольника относительно центральной оси, параллельной одной из его сторон?

40. Что представляют собой главные и главные центральные моменты инерции?

41. Какие оси называются главными и главными центральными осями инерции?

42. В каких случаях без вычисления можно установить положение главных осей?

43. Что называется прямым и косым изгибом?

44. Что называется чистым и поперечным изгибом?

45. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса при поперечном изгибе?

46. Какие правила знаков приняты для поперечной силы и изгибающего момента?
47. Как вычисляются поперечная сила и изгибающий момент в поперечном сечении бруса?
48. Какие типы опор применяются для закрепления балок к основанию?
49. Какие уравнения используются для определения значений опорных реакций?
50. Чему равна поперечная сила в сечении бруса, в которых изгибающий момент достигает экстремальных значений?
51. По каким законам изменяются поперечная сила и изгибающий момент по длине оси бруса при отсутствии распределенной нагрузки?
52. Какой вид имеет эпюра изгибающих моментов на участке балки, во всех сечениях которого поперечная сила равна нулю?
53. Как изменяется поперечная сила в сечении, в котором к балке приложена сосредоточенная внешняя сила, перпендикулярная оси балки?
54. Как изменяется изгибающий момент в сечении, в котором к балке приложен сосредоточенный внешний момент?
55. Как определяется экстремальное значение изгибающего момента?
56. Как формулируется гипотеза плоских сечений при изгибе?
57. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе?
58. Что называется жесткостью сечения при изгибе?
59. Что называется моментом сопротивления при изгибе? Какова его размерность?
60. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
61. Что называется критической силой? критическим напряжением?
62. Что называется гибкостью стержня?
63. Какой вид имеет формула Эйлера, определяющая значение критической силы?
64. Как влияют жесткость EI поперечного сечения и длина λ стержня на значение критической силы?
65. Что представляет собой коэффициент приведения длины? Чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержней?
66. Как устанавливается предел применимости формулы Эйлера?
67. Что называется предельной гибкостью?
68. Какой вид имеет условие устойчивости сжатого стержня?
69. Что представляет собой коэффициент φ ?
70. Как подбирается сечение стержня при расчете на устойчивость?

Перечень типовых задач

1. Определение внутренних усилий, напряжений и деформаций при осевом растяжении и построение их эпюр.
2. Практические расчеты на срез и смятие.
3. Построение эпюр внутренних усилий при прямом поперечном изгибе.
4. Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе.
5. Продольный изгиб.

Раздел III. Основы строительной механики стержневых систем

Перечень вопросов

1. Чем занимается строительная механика?
2. По каким направлениям осуществляется схематизации конструкции при образовании ее расчетной модели?
3. Что называется расчетной схемой конструкции?
4. Что называется линейно деформируемой системой?
5. В чем заключается суть принципа независимости действия сил?
6. В чем заключается суть принципа неизменности начальных размеров?
7. Как разделяются расчетные схемы стержневых конструкций по статическому признаку?
8. Как разделяются расчетные схемы стержневых конструкций по кинематическому признаку?
9. Какова взаимосвязь кинематических и статических признаков расчетных схем стержневых конструкций?
10. Какова последовательность кинематического анализа стержневой конструкции?
11. Какие существуют формы определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?
12. Что показывает монтажная схема составной статически определимой стержневой конструкции?
13. На чем основан статический метод определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?
14. Каковы цели определения перемещений конструкции?
15. Что такое жесткость и податливость конструкции?
16. От чего зависит жесткость конструкции?

17. Какие существуют подходы к определению перемещений конструкции?
18. В чем заключается суть закона Гука для конструкции?
19. Что такое коэффициент податливости конструкции?
20. Что такое коэффициент жесткости конструкции?
21. Какой вид имеет формула Максвелла–Мора при определении перемещений в произвольной плоской стержневой конструкции?
22. Какой вид имеет формула для определения перемещений от температуры в плоских статически определимых стержневых конструкциях?
23. Какой вид имеет формула для определения перемещений от осадки в плоских статически определимых стержневых конструкциях?
24. Как формулируется правило Верещагина?
25. Каковы границы применения правила Верещагина?
26. Что такое степень статической неопределимости?
27. Какой вид имеют формулы для подсчета степени статической неопределимости?
28. Что такое степень внешней статической неопределимости?
29. Что такое степень внутренней статической неопределимости?
30. Какой вид имеет формула для подсчета степени внешней статической неопределимости?
31. Какой вид имеет формула для подсчета степени внутренней статической неопределимости?
32. Что называется внешне статически неопределимой стержневой конструкцией?
33. Что называется внутренне статически неопределимой стержневой конструкцией?
34. Что называется статически неопределимой стержневой конструкцией общего вида?
35. Как формулируются свойства статически неопределимых стержневых конструкций?
36. Как формулируется основная задача расчета стержневых статически неопределимых конструкций?
37. Как формулируется частная задачи расчета стержневых статически неопределимых конструкций?
38. Какие существуют методы расчета статически неопределимых стержневых конструкций?
39. В чем заключается суть методов расчета статически неопределимых стержневых конструкций?

40. Что собой представляет основная система метода сил?

41. Какой вид имеют канонические уравнения метода сил?

Перечень типовых задач

1. Определение кинематических и статических признаков плоских стержневых конструкций.

2. Определение внутренних усилий в статически определимых рамах от неподвижной нагрузки.

3. Определение внутренних усилий в многопролетных шарнирных балках от неподвижной нагрузки.

4. Определение степени статической неопределимости стержневых конструкций.

Диагностика знаний и умений студента

Оценка уровня знаний и умений студента производится в соответствии с критериями, утвержденными Министерством образования Республики Беларусь.

Для оценки уровня знаний и умений студента используются следующие формы текущего и промежуточного контроля:

- проведение в течение семестра вне расписания семестрового тестирования для проверки знаний по разделам курса;
- проведение вне расписания тестовой защиты РПР;
- проведение на практических занятиях мини контрольных работ для проверки умений решать типовые задачи курса;
- тестовая форма сдачи экзамена.

Оценка знаний и умений студента на всех формах контроля производится по десятибалльной шкале.

Критерием успешности прохождения форм текущего и промежуточного контроля является правильное выполнение не менее 60% заданий соответствующей формы контроля. Связь количества правильно выполненных заданий (N) с оценкой по десятибалльной шкале приведена в таблице.

$0 \leq N < 20\%$	$20\% \leq N < 40\%$	$40\% \leq N < 60\%$	$60\% \leq N < 65\%$	$65\% \leq N < 70\%$
1	2	3	4	5
$70\% \leq N < 75\%$	$75\% \leq N < 85\%$	$85\% \leq N < 95\%$	$95\% \leq N < 100\%$	$N = 100\%$
6	7	8	9	10

Итоговый результат текущего семестрового контроля вычисляется по формуле¹

$$\Pi = \frac{\sum_{i=1}^n \Pi K_i}{n},$$

где ΠK_i ($i = 1, \dots, n$) – отметки за семестровые мероприятия текущего контроля; n – количество семестровых мероприятий текущего контроля.

Экзамен (текущий контроль) проводится в соответствии с Правилами проведения аттестации студентов, при освоении содержания образовательных программ высшего образования, утвержденными постановлением

¹ Положение о рейтинговой системе оценки знаний и компетенций студентов ПГУ.

Министерства образования Республики Беларусь 29.05.2012 №53 и Положением о рейтинговой системе оценки знаний и компетенций студентов (приказ №294 от 06.06.2014 г.).

Отметка по экзамену (O) рассчитывается по десятибалльной шкале, полученной студентом за выполнение тестовых заданий экзаменационного теста. Связь количества правильно выполненных заданий экзаменационного теста с отметкой O устанавливается согласно таблице.

Итоговая экзаменационная оценка ($\mathcal{E}$) вычисляется по формуле

$$\mathcal{E} = k \cdot \Pi + (1 - k) \cdot O,$$

где $k = 0,5$ – весовой коэффициент текущего контроля.

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ ДИСЦИПЛИНЫ

ТЕМА 1. Введение в интегрированную учебную дисциплину «Механика»

Цели изучения темы

Рассмотреть связь профессии архитектора со строительной деятельностью человека и видами возводимых им искусственных сооружений. Ввести понятие несущей конструкции и пояснить суть трех ее свойств: прочности, жесткости и устойчивости.

Рассмотреть предмет, цели и структуру дисциплины и два вида физических величин: скаляры и векторы, которые в ней используются.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [3; 4; 6].

1.1. Предмет, цели и структура дисциплины

Сферой профессиональных интересов архитектора является строительная деятельность человека. Древнегреческое слово *αρχιτεκτον* переводится как «главный строитель». С древнейших времен человек, занимаясь строительной деятельностью, решает важную проблему – перекрыть определенные участки земной или водной поверхности искусственными сооружениями для последующего осуществления различных видов деятельности или создания определенных условий для своего существования. В древние времена эту проблему и решал единолично архитектор.

Современными участниками строительной деятельности, начиная с конца 19 века, является не только архитектор, но и инженер. Архитектор обеспечивает продуманную организацию пространства окружающего мира и придание адекватного облика искусственным сооружениям. А инженер отвечает за надежность и долговечность искусственных сооружений, перекрывающих участки пространства окружающего мира.

Строительная деятельность в современных условиях связана с возведением следующих видов искусственных сооружений:

- жилые здания;
- общественные здания;
- промышленные здания;
- специальные инженерные сооружения (мосты, тоннели, трубопроводы, резервуары и др.).

Следует отметить, что современные сооружения могут возводиться не только над земной или водной поверхностями, но и под ними. Искусственные сооружения первых трех видов, именуемые в дальнейшем здания, и связаны с содержанием подготовки современного архитектора.

Создаваемые архитектором здания состоят из отдельных элементов, которые называются конструкциями. Конструкциями могут быть твердые тела определенной формы, и они выполняют две функции – ограждающую и несущую.

Выполняя ограждающую функцию, конструкции обеспечивают создание соответствующих условий внутри здания, необходимых для поддержания того или иного вида деятельности человека или его существования, и придание зданию определенного внешнего вида. Такие конструкции называются **ограждающими конструкциями**.

Конструкции, выполняющие несущую функцию, обеспечивают безопасное восприятие зданиями внешних воздействий со стороны окружающего мира, называются **несущими конструкциями**. Такие конструкции и являются предметом рассмотрения в дисциплине «Механика»

Несущие конструкции здания, соединенные между собой в единое целое, образуют его **несущую систему** – пространственную конструктивную основу, которая обеспечивает его **надежность** и **долговечность**. **Надежность** – это способность здания сохранять эксплуатационные качества в течение определенного срока службы, а **долговечность** – это предельный срок службы здания, в течение которого сохраняются требуемые эксплуатационные качества.

Для того чтобы здание могло после возведения длительное время надежно функционировать, его несущие конструкции должны обладать тремя свойствами – **прочностью**, **жесткостью** и **устойчивостью**. **Прочность** заключается в свойстве конструкции сопротивляться разрушению в целом или отдельных ее элементов. **Жесткость** конструкции характеризуется способностью сопротивляться возникновению в ней перемещений. **Устойчивость** состоит в способности конструкции сохранять заданное положение в пространстве и исходную форму равновесия в деформированном состоянии.

Основы расчетов несущих конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и составляют **предмет** интегрированной учебной дисциплины «Механика». **Целями** дисциплины является формирование основ знаний и приобретение первичных умений расчетов на прочность, жесткость и устойчивость базовых видов конструкций. **Структура** дисциплины включает три раздела:

- основы статики твердого тела;
- основы сопротивления материалов;
- основы строительной механики стержневых конструкций.

В статике твердого тела рассматриваются вопросы равновесия твердых тел. В сопротивлении материалов, основываясь на статике твердого тела и учитывая физические свойства материалов твердых тел, – вопросы прочности, жесткости и устойчивости одного из основных элементов здания – брус или стержень. Строительная механика стержневых конструкций прорабатывает вопросы прочности, жесткости и устойчивости различных систем, состоящих из брусьев или стержней.

1.2. Физические величины, используемые в дисциплине «Механика»

При выполнении расчетов несущих конструкций на прочность, жесткость и устойчивость встречаются два вида физических величин – **скалярные** и **векторные величины**.

Скалярные величины (скаляры) характеризуются только численным значением. Примерами таких величин являются температура, масса, объем, площадь. Любая скалярная величина записывается как некоторое действительное число. Поэтому при работе с такими величинами используется аппарат арифметики, элементарной алгебры и тригонометрии.

Векторные величины (векторы) характеризуются не только численным значением, но и направлением в пространстве. Примерами таких величин являются вес, скорость, ускорение. При работе с такими величинами необходимо использовать аппарат векторной алгебры. Рассмотрим базовые определения и правила действий векторной алгебры.

1.3. Базовые определения векторной алгебры

Вектором называется прямолинейный отрезок, концы которого упорядочены. Первый из его концов называется началом, второй – концом вектора. Используются следующие обозначения векторов $\overline{MN}$, $\vec{a}$, где M – начало вектора, N – его конец, который принято обозначать стрелкой (рисунок 1.1, а)

Если у вектора $\overline{MN}$ изменить положение его начала и конца, то полученный новый вектор $\overline{NM}$ называется **противоположным вектором** исходному вектору $\overline{MN}$ (рисунок 1.1, б).

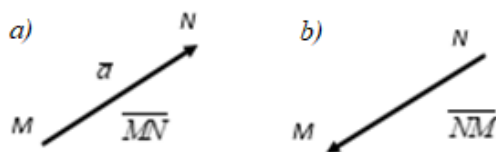


Рисунок 1.1. – Понятие вектора и противоположного вектора

Нулевой вектор – вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор не имеет направления.

Модуль (длина) вектора – расстояние между его началом и концом. Обозначается $|\overline{MN}|$, $|\vec{a}|$. Модуль нулевого вектора равен нулю $|\vec{0}| = 0$.

Единичный вектор – вектор, длина которого равна единице. Обычно его принято обозначать $\vec{e}$.

Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых (рисунок 1.2).

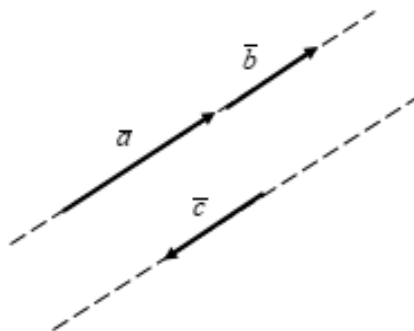


Рисунок 1.2. – Понятие коллинеарных векторов

Такие векторы обозначаются $\vec{a} \parallel \vec{c}$. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Компланарные векторы – векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях (рисунок 1.3).

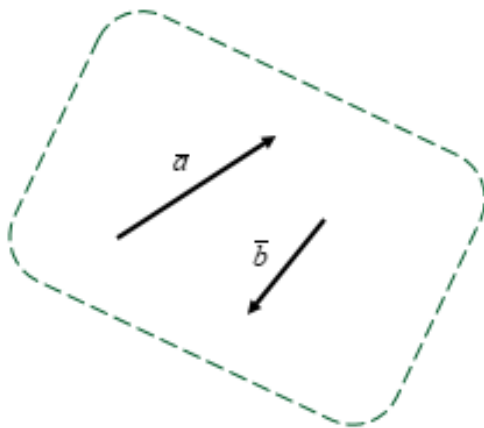


Рисунок 1.3. – Понятие компланарных векторов

Следует заметить, что любые два вектора всегда компланарны.

Равные векторы – векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если они:

- коллинеарные;
- имеют равные длины;
- имеют одинаковое направление.

Свободный вектор – вектор, у которого точка приложения может быть любой, т.е. его можно переносить.

Скользкий вектор – вектор, который можно перемещать вдоль прямой, проходящей через начало и конец вектора.

Связанный вектор – вектор, для которого точка приложения имеет существенное значение.

Над векторными величинами, применяемыми при расчетах несущих конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, могут осуществляться так называемые **линейные операции**. К ним относятся действия сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число. Линейные операции над векторами могут осуществляться геометрическим и аналитическим способами.

1.4. Геометрический способ выполнения линейных операций

Сложение векторов. Сложение двух коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ геометрическим способом осуществляется следующим образом (рисунок 1.4, а).

От произвольно выбранной точки откладываем вектор, равный вектору $\vec{a}$. От его конца откладываем вектор, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, это и есть сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (рисунок 1.4, б). Аналогично получается сумма любого конечного числа коллинеарных векторов.

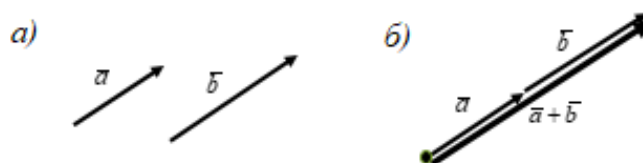


Рисунок 1.4. – Сложение двух коллинеарных векторов геометрическим способом

Сложение двух произвольных векторов (рисунок 1.5, а) геометрическим способом может осуществляться с помощью правила треугольника (рисунок 1.5, б) и правила параллелограмма (рисунок 1.5, с).

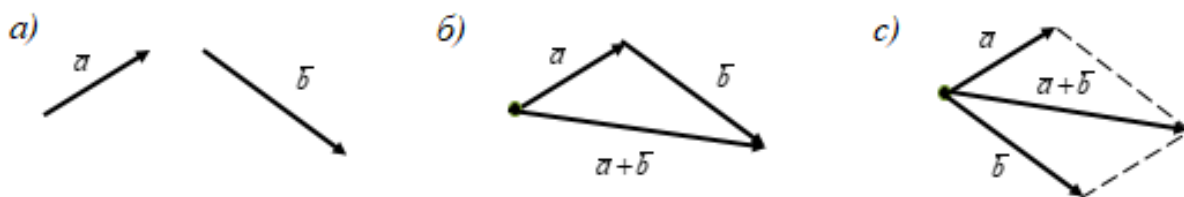


Рисунок 1.5. – Сложение двух произвольных векторов геометрическим способом

Для сложения по правилу треугольника от произвольно выбранной точки откладывается вектор, равный вектору $\vec{a}$. Затем от его конца откладывается вектор, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец – с концом второго вектора, и есть сумма $\vec{a} + \vec{b}$.

Для сложения по правилу параллелограмма от произвольно выбранной точки откладываем оба складываемых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. На этих двух векторах, как на сторонах, строим параллелограмм. Тогда направленная диагональ этого параллелограмма, выходящая из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и есть сумма $\vec{a} + \vec{b}$.

Для сложения трех произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ применяется правило треугольника. Складывая векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, получим их сумму $\vec{a} + \vec{b}$. Складывая полученный вектор с вектором $\vec{c}$, получим сумму трех векторов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Аналогично получается сумма любого конечного числа произвольных векторов.

Вычитание векторов. Вычитание двух коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ геометрическим способом осуществляется следующим образом (рисунок 1.6, а).

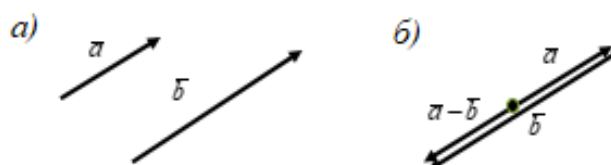


Рисунок 1.6. – Вычитание двух коллинеарных векторов геометрическим способом

От произвольно выбранной точки откладываем вектор, равный вектору $\vec{a}$. От его конца откладываем вектор, противоположный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора противоположного вектору $\vec{b}$ и есть разность коллинеарных векторов $\vec{a} - \vec{b}$ (см. рисунок 1.6, б).

Вычитание двух произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рисунок 1.7, а) геометрическим способом осуществляется с помощью правила параллелограмма (рисунок 1.7, б).

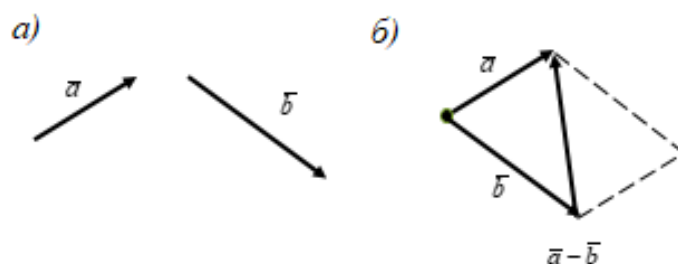


Рисунок 1.7. — Вычитание двух произвольных векторов геометрическим способом

Тогда направленная диагональ этого параллелограмма от конца вектора $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$ и есть разность произвольных векторов $\vec{a} - \vec{b}$.

Умножение вектора на число. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ является вектор $\lambda\vec{a}$, который:

- коллинеарный вектору $\vec{a}$;
- имеющий длину (модуль) $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$;
- направленный так же, как и вектор $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

1.5. Аналитический способ выполнения линейных операций

В основе аналитического способа выполнения линейных операций над векторами лежат понятия проекции вектора на ось, плоскость и координатное представление вектора.

Проекцией вектора на ось называется отрезок, заключенный между проекцией начала вектора и проекцией конца на эту ось (рисунок 1.8).

Проекция вектора на ось есть алгебраическая величина, равная произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением оси $a_t = a \cdot \cos \alpha$, и она может быть:

- положительной, если угол α между вектором $\vec{a}$ и осью t – острый (рисунок 1.8, а);
- отрицательной, если угол α между вектором $\vec{a}$ и осью t – тупой (рисунок 1.8, б);
- равной модулю вектора $\vec{a}$, если угол α между вектором $\vec{a}$ и осью t равен 0 (рисунок 1.8, в);
- равной 0, если угол α между вектором $\vec{a}$ и осью t равен 90° (рисунок 1.8, д).

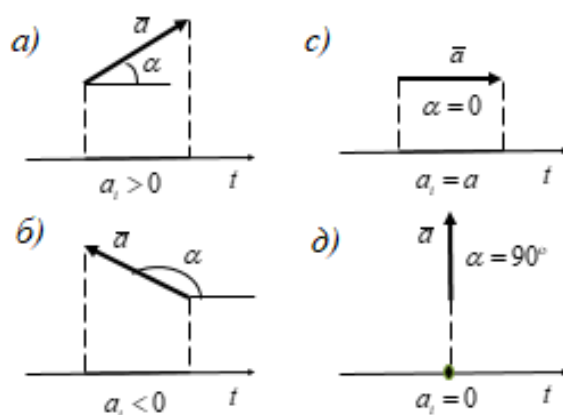


Рисунок 1.8. – Проекция вектора на ось

Проекцией вектора на плоскость называется вектор, заключенный между проекцией начала вектора и проекцией конца на эту плоскость (рисунок 1.9).

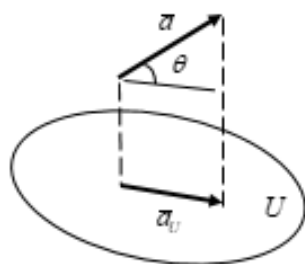


Рисунок 1.9. – Проекция вектора на плоскость

Таким образом, в отличие от проекции вектора на ось, проекция вектора на плоскость есть величина векторная, так как она характеризуется не только своими числовыми значениями, но и направлением в плоскости

Модуль проекция вектора $\vec{a}$ на плоскость равняется произведению модуля вектора $\vec{a}$ на косинус угла между направлением вектора $\vec{a}$ и направлением его проекции на плоскость $a_U = a \cdot \cos \theta$.

Координатное представление вектора. Для координатного представления вектора используем прямоугольную декартовую систему координат с тремя единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, образующими ее базис (рисунок 1.10).

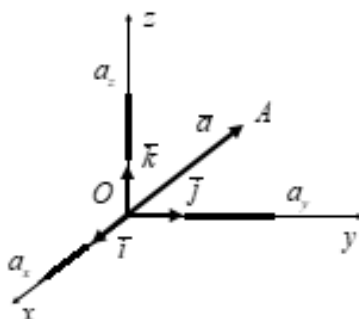


Рисунок 1.10. – Координатное представление вектора

Тогда вектор $\vec{a}$ может быть спроектирован на координатные оси и записан в виде разложения по базису системы координат:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z – проекции вектора $\vec{a}$ на соответствующие координатные оси, которые принято называть координатами вектора $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат. Координатную форму записи вектора можно представить в другой форме:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z).$$

Если вектор $\vec{a}$ задан двумя точками со своими координатами: началом в точке $M(x_M, y_M, z_M)$ и концом в точке $N(x_N, y_N, z_N)$ (рисунок 1.11),

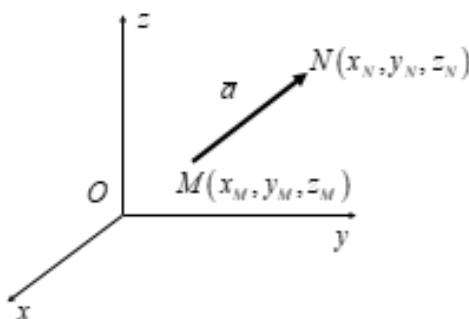


Рисунок 1.11. – Координаты вектора, заданного двумя точками

то его координаты находятся по формулам

$$a_x = x_N - x_M,$$

$$a_y = y_N - y_M,$$

$$a_z = z_N - z_M.$$

Длина (модуль) вектора $\vec{a}$ определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Углы α, β, γ , которые вектор $\vec{a}$ образует с осями координат, характеризуют его направление и поэтому их косинусы принято называть **направляющими косинусами** (рисунок 1.12).

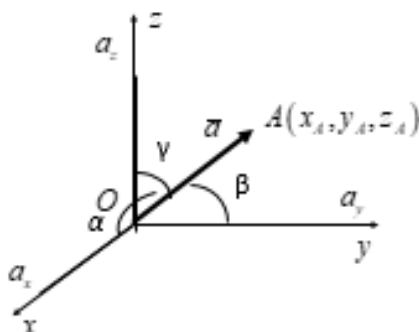


Рисунок 1.12. – Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$

Они представляют собой координаты единичного вектора $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и удовлетворяют соотношению

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Направляющие косинусы связаны с координатами и модулем вектора следующими формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Аналитическое выполнение линейных операций над векторами. При вычислении суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты складываются:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

При вычислении разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных в координатной форме, их соответствующие координаты вычитаются:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ все его координаты умножаются на это число:

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot a_x, \lambda \cdot b_y, \lambda \cdot b_z).$$

1.6. Примеры к теме

Пример 1. Вычислить проекции векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на оси x и y , модуль главного вектора и его направляющие косинусы. Значение модулей векторов $F_1 = 10$, $F_2 = 20$ (рисунок 1.13).

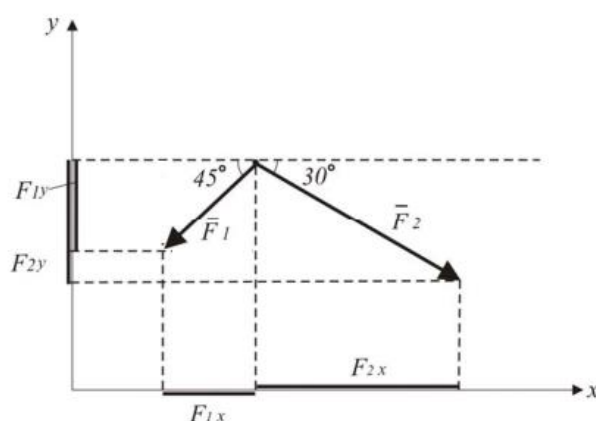


Рисунок 1.13. – Рисунок к примеру 1

Решение:

1. Находим проекции вектора $\vec{F}_1$ на координатные оси:

$$F_{1x} = -F_1 \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot 0,7071 = -7,071;$$

$$F_{1y} = -F_1 \cdot \cos 45^\circ = -10 \cdot 0,7071 = -7,071.$$

2. Находим проекции вектора $\vec{F}_2$ на координатные оси:

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,321;$$

$$F_{2y} = -F_2 \cdot \cos 60^\circ = -20 \cdot 0,5 = -10.$$

3. Находим сумму проекций векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на координатную ось x :

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 10,249.$$

4. Находим сумму проекций векторов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ на координатную ось y :

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = -17,07.$$

5. Находим модуль главного вектора:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{10,249^2 + (-17,07)^2} = 19,912.$$

6. Находим направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = 0,515 \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = -0,857.$$

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = (3, -2, 6)$ и $\vec{b} = (-2, 1, 0)$. Требуется:

- найти векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $-2\vec{a}$;
- вычислить модули векторов $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Решение:

1. Нахождение векторов

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 - 2, -2 + 1, 6 + 0) = (1, -1, 6);$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3 + 2, -2 - 1, 6 - 0) = (5, -3, 6);$$

$$-2\vec{a} = (-6, 4, -12).$$

2. Вычисление модулей векторов

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7;$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} = 2,236;$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{38} = 6,164.$$

Пример 3. Даны точки $A(1, -2, 0)$, $B(-2, 3, -1)$. Требуется вычислить:

- проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$;
- проекции вектора $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$;
- модули векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Решение:

1. Вычисление проекций:

– вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

$$a_x = x_B - x_A = -2 - 1 = -3;$$

$$a_y = y_B - y_A = 3 - (-2) = 5;$$

$$a_z = z_B - z_A = -1 - 0 = -1.$$

– вектора $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$

$$b_x = x_A - x_B = 1 - (-2) = 3;$$

$$b_y = y_A - y_B = -2 - 3 = -5;$$

$$b_z = z_A - z_B = 0 - (-1) = 1.$$

2. Вычисление модулей:

– вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-3)^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35} = 5,916;$$

– вектора $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} = \sqrt{35} = 5,916.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Чем характеризуются скалярные величины?
2. Чем характеризуются векторные величины?
3. Что называется вектором?
4. Что называется противоположным вектором?
5. Что называется нулевым вектором?
6. Что называется модулем вектора?
7. Что называется единичным вектором?
8. Какие векторы называются коллинеарными?
9. Какие векторы называются компланарными?
10. Какие векторы считаются равными?
11. Что называется свободным вектором?
12. Что называется скользящим вектором?
13. Что называется связанным вектором?
14. Как производится сложение двух коллинеарных векторов геометрическим способом?
15. Как производится сложение двух произвольных векторов геометрическим способом?
16. Как производится вычитание двух коллинеарных векторов геометрическим способом?
17. Как производится вычитание двух произвольных векторов геометрическим способом?
18. Как производится умножение вектора на число?
19. Что называется проекцией вектора на ось?
20. Что называется проекцией вектора на плоскость?
21. Как осуществляется координатное представление вектора?
22. Что называется направляющими косинусами вектора?
23. Как производится сложение двух произвольных векторов аналитическим способом?
24. Как производится вычитание двух произвольных векторов аналитическим способом?

РАЗДЕЛ I. ОСНОВЫ СТАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ТЕМА 2. Введение в статику твердого тела

Цели изучения темы

Выяснить, что изучает наука теоретическая механика и из каких разделов она состоит.

Рассмотреть, что собой представляет раздел теоретической механики – статика твердого тела, на каких основных понятиях он базируется и что является основной задачей статики. Выяснить суть аксиом статики и их назначение.

Разобраться с понятием связи, ее реакции и рассмотреть простейшие виды связей и их реакции.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [2; 7; 8].

2.1. Предмет и основные понятия статики

Статика представляет собой первый раздел теоретической механики – науки, изучающей общие закономерности механического взаимодействия твердых тел. Теоретическая механика построена на законах классической механики, сформулированных Ньютоном.

В результате механического взаимодействия тело может находиться в двух состояниях: состоянии механического движения или состоянии покоя. Эти состояния тела принято называть механическими (кинематическими).

Механическим движением называется состояние тела, при котором в пространстве и во времени происходит его перемещение по отношению к другим телам.

Частным случаем механического движения тела является его покой, т.е. состояние тела, при котором оно неподвижно по отношению к другим телам. Предметом статики и является выяснение условий, при которых твердые тела будут неподвижны. Древнегреческое слово *στατός* означает «неподвижный».

Вторым разделом теоретической механики является кинематика, в котором рассматривается геометрическая сторона механического движения твердых тел независимо от причин, вызвавших его.

Третьим разделом – динамика, в которой рассматривается физическая сторона механического движения твердых тел, связанная с причинами, вызвавшими его.

Рассмотрим базовые понятия теоретической механики, встречающиеся при изучении статики.

Механическое взаимодействие – взаимодействие твердых тел, которое изменяет или может привести к изменению их состояния.

Абсолютно твердое тело – тело, у которого расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными. Полагая тела абсолютно твердыми, не учитывают деформаций, которые возникают в реальных телах. Это значительно упрощает изучение условий, при которых тело будет находиться в покое.

Материальная точка – тело, размерами которого в условиях конкретной задачи можно пренебречь. Материальная точка обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами.

Система материальных точек (механическая система) – совокупность материальных точек, в которой состояние каждой точки зависит от состояния других точек этой системы.

Сила – мера механического взаимодействия тел, определяющая интенсивность и направление этого взаимодействия. Понятие силы является важнейшим понятием теоретической механики. Это векторная величина, которая характеризуется тремя составляющими: числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения (рисунок 2.1).

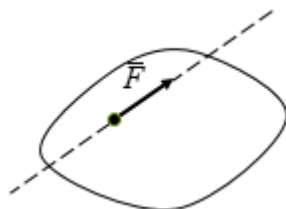


Рисунок 2.1. – К понятию силы

В связи с тем, что в число составляющих входит точка приложения, сила является связанным вектором.

Прямая, по которой направлена сила, называется линией действия силы. За единицу силы в Международной системе единиц измерения СИ принимается ньютон Н или кратная единица килоньютон кН.

Система сил – совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел.

Эквивалентные системы сил – системы сил, под действием каждой из которых твердое тело находится в одинаковом механическом состоянии.

Равнодействующая сила - сила, эквивалентная некоторой системе сил.

Уравновешивающая сила – сила, равная по модулю равнодействующей и направленная по линии её действия в противоположную сторону.

Система взаимно уравновешивающихся сил – система сил, которая, будучи приложена к твердому телу, находящемуся в покое, не выводит его из этого состояния.

Силы, действующие на механическую систему, делят на две группы: **внешние** и **внутренние** силы.

Внешние силы – силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе.

Внутренние силы – силы взаимодействия между материальными точками рассматриваемой системы.

Основной задачей статики является исследование условий, при которых абсолютно твердое тело, под действием приложенных к нему внешних сил, находится в состоянии покоя. Говорят, что в этом случае внешние силы удовлетворяют условиям равновесия абсолютно твердого тела, а сами силы являются системой взаимно уравновешивающихся сил.

2.2. Аксиомы статики

В шести аксиомах статики формулируются простейшие и общие закономерности, которым подчиняются силы, действующие на твердые тела. Эти утверждения были установлены на основе наблюдений и изучения окружающих нас явлений реального мира. Рассмотрим суть аксиом статики.

1-я аксиома. **Аксиома инерции.**

Под действием уравновешенной системы сил тело находится в состоянии покоя или движется прямолинейно и равномерно.

Аксиома инерции выражает установленный Галилеем закон инерции.

2-я аксиома. **Аксиома равновесия двух сил.**

Две силы, приложенные к телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если они имеют равные модули, противоположные направления и общую линию действия (рисунок 2.2).

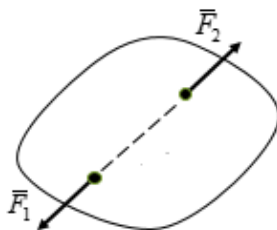


Рисунок 2.2. – К аксиоме о равновесии двух сил

Этой аксиоме соответствуют следующее геометрическое равенство:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2.$$

3-я аксиома. **Аксиома присоединения или исключения уравнивающих сил.**

Действие системы сил на тело не изменится, если к ней присоединить или исключить уравнивающуюся систему сил.

У данной аксиомы имеется следствие, согласно которое формулируется следующим образом.

Не изменяя механического состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия, сохраняя неизменными ее модуль и направление.

Поэтому в статике твердого тела сила рассматривается как скользящий вектор.

4-я аксиома. **Аксиома параллелограмма сил.**

Равнодействующая двух пересекающихся сил приложена в точке их пересечения и изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рисунок 2.3).

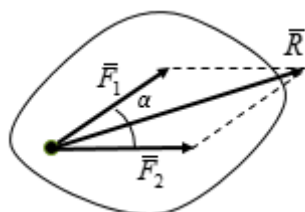


Рисунок 2.3. – К аксиоме параллелограмма сил

Эта аксиома описывается геометрическим равенством

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Модуль равнодействующей силы определяется по следующей формуле:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Эта аксиома допускает и обратное утверждение.

Силу можно разложить бесчисленным множеством способов на две силы, приложенные в любой точке линии действия данной силы (рисунок 2.4).

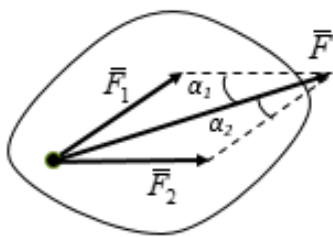


Рисунок 2.4. – Разложение силы на две силы

Используя теорему синусов, можно вывести формулы для определения модулей сил, получаемых при разложении заданной силы на два произвольных направления

$$F_1 = \frac{F \sin \alpha_1}{\sin(180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2))}, \quad F_2 = \frac{F \sin \alpha_2}{\sin(180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2))}.$$

5-ая аксиома. **Аксиома равенства действия и противодействия.**

Всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Эта аксиома утверждает, что силы действия друг на друга двух тел равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, в природе не существует одностороннего действия силы.

Аксиома действия и противодействия установлена Ньютоном и известна как один из основных законов классической механики.

6-я аксиома. **Аксиома отвердевания.**

Равновесие деформируемого твердого тела, находящегося под действием системы сил, не нарушится, если тело считать абсолютно твердым.

Из этой аксиомы следует, что условия равновесия сил, приложенных к абсолютно твердому телу, выполняются и для сил, приложенных к деформируемому телу. Однако в случае деформирующегося тела эти условия необходимы, но недостаточны. Например, две уравнивающие силы, приложенные к тросу, удовлетворяют этому условию, но только при наличии добавочного условия – силы должны растягивать, а не сжимать трос.

2.3. Связи и их реакции

Все твердые тела в теоретической механике делятся на **свободные** и **несвободные**.

Свободное тело – тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Тело, ограничивающее свободу движения данного твердого тела, называется его **связью**.

Несвободное тело – тело, перемещения которого в пространстве ограничены связями.

Все силы, действующие на несвободное твердое тело, наряду с делением на внешние и внутренние силы, можно также разделить на **задаваемые силы** и **реакции связей**.

Задаваемые силы выражают действие на твердое тело других тел, вызывающих или способных вызвать изменение его механического состояния.

Реакцией связи называется сила или система сил, выражающая механическое действие связи на тело. Реакция связи всегда направлена в сторону, противоположную исключаемому перемещению телу

Одним из основных положений статики твердого тела является принцип освобождаемости от связей, согласно которому несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых сил, действуют реакции связей.

Рассмотрим простейшие виды связей и их реакции.

Гладкая поверхность. Поверхность, трением о которую данного тела можно пренебречь.

Реакция гладкой поверхности направлена по общей нормали к поверхности тела и поверхности связи в точке их касания (рисунок 2.5).

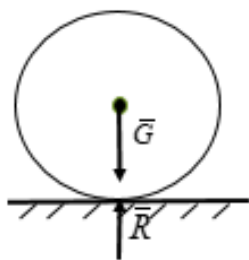


Рисунок 2.5. – Гладкая поверхность

Когда твердое тело опирается на острие гладкой поверхности, то реакция связи будет направлена по нормали к поверхности тела в точке опирания. Когда твердое тело упирается острием в гладкую поверхность, то реакция связи будет направлена по нормали к гладкой поверхности (рисунок 2.6).

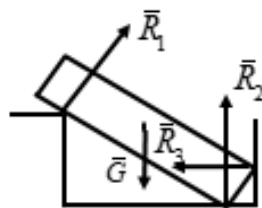


Рисунок 2.6. – К опиранию тела на острие

Гибкая связь. Гибкая связь работает только на растяжение и ее реакция направлена вдоль связи (рисунок 2.7).

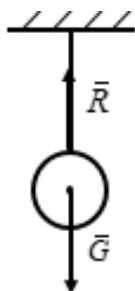


Рисунок 2.7. – Гибкая связь

Шаровой шарнир. Устройство, позволяющее соединенным телам, совершать вращение одного тела относительно другого в пространстве. Реакция в шаровом шарнире может иметь любое направление в пространстве (рисунок 2.8).

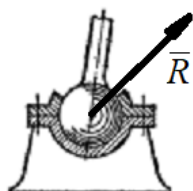


Рисунок 2.8. – Шаровой шарнир

Цилиндрический шарнир. Устройство, позволяющее соединенным телам, совершать вращение одного тела относительно другого в плоскости. Реакция в цилиндрическом шарнире может иметь любое направление в плоскости (рисунок 2.9).

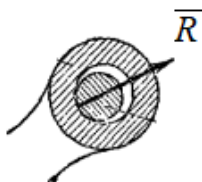


Рисунок 2.9. – Цилиндрический шарнир

Стержень. Прямолинейное твердое тело с шарнирами по концам. Такая связь является жесткой и, в отличие от гибкой связи, может работать как на растяжение, так и на сжатие. Реакция стержня всегда направлена вдоль его оси (рисунок 2.10).

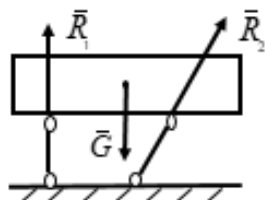


Рисунок 2.10. – Стержень

Важным видом связей твердого тела или системы таких тел, когда они являются несущими конструкциями, являются опоры – устройства, соединяющие конструкцию с основанием, на котором она располагается. Например, земная поверхность. Рассмотрим основные типы опор.

Шарнирно-неподвижная опора. Устройство, соединяющее конструкцию с основанием и препятствующее любым поступательным перемещениям в месте ее опирания, но допускающее вращение. Реакция шарнирно-неподвижной опоры может иметь любое направление в плоскости (рисунок 2.11).

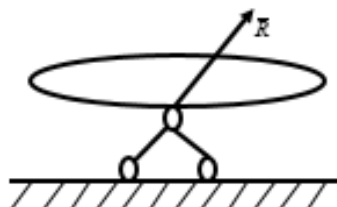


Рисунок 2.11. – Шарнирно-неподвижная опора

Шарнирно-подвижная опора. Устройство, соединяющее конструкцию с основанием и допускающее для конструкции вращение и поступательное перемещение параллельно основанию в месте ее опирания. Реакция шарнирно-подвижной опоры направлена по нормали к опорной поверхности (рисунок 2.12)

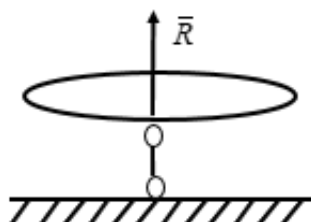


Рисунок 2.12. – Шарнирно-подвижная опора

Неподвижная заземляющая опора. Устройство, соединяющее конструкцию с некоторым основанием и исключающее как вращение, так и любые поступательные перемещения в месте ее опирания. Реакция такой опоры характеризуется двумя составляющими – силовой и моментной (рисунок 2.13).

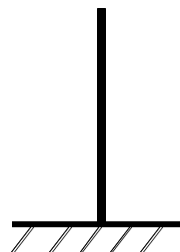


Рисунок 2.13. – Неподвижная заземляющая опора

Вопросы по теме для текущего контроля

1. В чем заключается предмет статики?
2. Что называется материальной точкой?
3. Что называется системой материальных точек?
4. Что называется абсолютно твердым телом?
5. Что такое сила? Какими признаками она характеризуется?
6. Что называется системой сил?
7. Что называется равнодействующей силой?
8. Что называется уравнивающей силой?
9. В чем их отличие равнодействующей и уравнивающей сил?
10. Какие системы сил называются эквивалентными?
11. Какая система сил называется уравновешенной или системой сил, эквивалентной нулю?
12. Какая система сил называется уравнивающей?
13. Сформулируйте аксиомы статики.
14. Чем отличается несвободное тело от свободного?
15. Что называют связью?
16. Что называют силой реакции связи?
17. В чем заключается аксиома или принцип освобождаемости от связи?
18. Перечислите основные типы связей и как направлены их реакции в каждом случае?

ТЕМА 3. Система сходящихся сил

Цели изучения темы

Выяснить, что собой представляет система сходящихся сил, что является целью сложения и какие возможны способы ее сложения.

Рассмотреть условия равновесия твердого тела при действии системы сходящихся сил и их возможные формы.

Разобраться с применением условий равновесия системы сходящихся сил к решению задач статики.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [9].

3.1. Сложение системы сходящихся сил

Системой сходящихся сил называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке (рисунок 3.1).

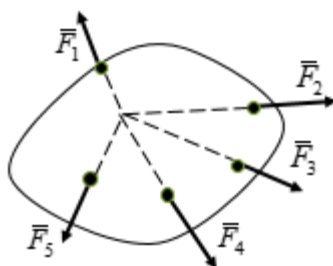


Рисунок 3.1. – Система сходящихся сил

Различают плоскую и пространственную системы сходящихся сил. Если линии действия всех сил системы лежат в одной плоскости, то она называется плоской, в противном случае – пространственной.

Целью сложения системы сходящихся сил является определение ее равнодействующей. Возможны два способа сложения системы сходящихся сил – геометрический и аналитический.

Геометрическое сложение плоской системы сходящихся сил. Простейшую плоскую систему сходящихся сил образуют две произвольные силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых пересекаются в одной точке. Тогда, согласно правилам векторной алгебры и 4-й аксиоме статики, их геометрическая сумма является равнодействующей этих сил:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

Она изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих силах (рисунок 3.2, а), а её модуль можно найти по формуле

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

Построение параллелограмма сил можно заменить построением треугольника сил (рисунок 3.2, б). Направление равнодействующей силы $\bar{R}$ по контуру треугольника противоположно направлению обхода контура треугольника, определяемому слагаемыми силами. Получившийся треугольник называется силовым, а соответствующее правило нахождения равнодействующей силы – правилом силового треугольника.

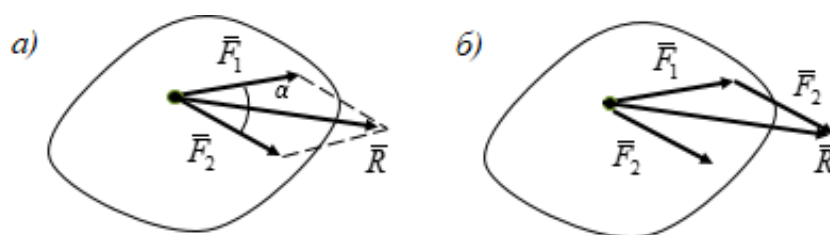


Рисунок 3.2. – Равнодействующая двух сходящихся сил

При помощи параллелограмма или треугольника сил можно решить обратную задачу — разложить любую силу $\bar{F}$ на две силы $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$, приложенные в той же точке и направленные по заданным линиям действия (рисунок 3.3)

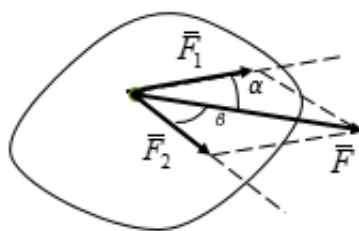


Рисунок 3.3. – Разложение силы на две составляющие

Тогда, используя теорему синусов

$$\frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \alpha} = \frac{F}{\sin(\alpha + \beta)},$$

можно найти модули этих сил

$$F_1 = F \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad F_2 = F \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Чтобы найти равнодействующую в том случае, когда на твердое тело действует плоская система сходящихся сил с произвольным числом сил (рисунок 3.4, а),

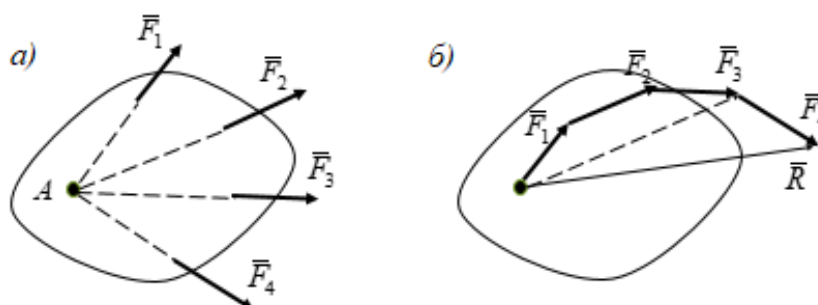


Рисунок 3.4. – Плоская система сходящихся сил с произвольным числом сил

воспользуемся правилом силового треугольника последовательно для сложения сначала двух, затем трех и т.д. сил. В результате получим так называемый силовой многоугольник, в котором вектор, проведенный из начала первой силы к концу последнего перенесенного вектора, и будет изображать искомую равнодействующую (см. рисунок 3.4, б):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k. \quad (3.1)$$

Направление равнодействующей по контуру силового многоугольника противоположно направлению обхода этого контура, определяемого направлением первой силы

Геометрическое сложение пространственной системы сходящихся сил. Простейшую пространственную систему сходящихся сил образуют три произвольные силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, линии действия которых не лежат в одной плоскости, но пересекаются в одной точке (рисунок 3.5).

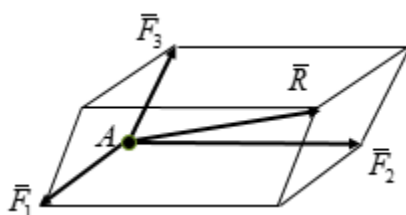


Рисунок 3.5. – Равнодействующая трех сходящихся сил

Тогда, согласно правилам векторной алгебры, их геометрическая сумма изображается диагональю параллелепипеда, построенного на этих силах, и она является их равнодействующей:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Чтобы найти равнодействующую в том случае, когда на твердое тело действует пространственная система сходящихся сил с произвольным числом сил (рисунок 3.6), силы переносят по их линиям действия в точку их пересечения – строится пространственный многоугольник этих сил. Замыкающая сторона многоугольника сил определяет равнодействующую силу. При этом направление равнодействующей по контуру многоугольника обратно направлению составляющих сил.

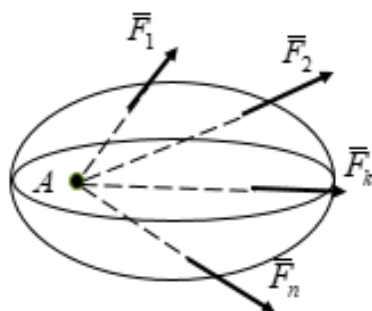


Рисунок 3.6. – Пространственная система сходящихся сил с произвольным числом сил

Таким образом, равнодействующая пространственной системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил, равна геометрической сумме данных сил и, следовательно, как и в случае плоской системы сходящихся сил, будет описываться формулой (3.1).

Аналитическое сложение системы сходящихся сил. Равнодействующая как плоской, так и пространственной системы сходящихся сил равна геометрической сумме сил (3.1)

Аналитический способ сложения системы сходящихся сил основывается на понятии векторной алгебры – проекция вектора на ось, и свойстве проекции геометрической суммы векторов на любую ось равняться алгебраической сумме проекций составляющих векторов на ту же ось.

Рассмотрим произвольную пространственную систему сходящихся сил в прямоугольной декартовой системе координат (рисунок 3.7).

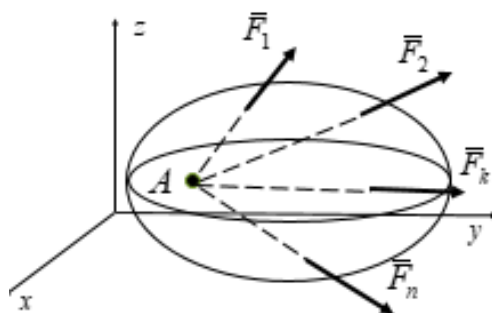


Рисунок 3.7. – Произвольная пространственная система сил
в прямоугольной декартовой системе координат

Тогда проекции равнодействующей силы на оси этой системы координат, в соответствии с правилами векторной алгебры, рассмотренными в первом разделе, имеют вид:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}, R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}, R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Зная проекции равнодействующей силы на оси координат, можно найти ее величину:

- в случае пространственной системы сил по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

- в случае плоской системы сил по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Направление равнодействующей определяется углы, образуемые ею с осями Ox , Oy и Oz , косинусы которых (направляющие косинусы) можно найти по формулам векторной алгебры

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

3.2. Условия равновесия твердого тела при действии системы сходящихся сил

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая этих сил была

равна нулю. Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или аналитической форме.

Геометрическая форма условий равновесия. Как для плоской, так и для пространственной системы сходящихся сил эта форма основана на построении силового многоугольника. Если при его построении конец последней перенесенной силы $\vec{F}_n$ попадет в начало первой, то многоугольник замкнется. В этом случае равнодействующая сила системы сходящихся сил окажется равной нулю

$$\vec{R} = 0, \quad (3.2)$$

и, следовательно, данная система сил эквивалентна нулю. Отсюда заключаем, что для равновесия твердого тела в системе сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.2), а силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнут.

Аналитическая форма условий равновесия. Аналитически модуль равнодействующей пространственной системы сходящихся сил определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Под корнем стоит сумма положительных слагаемых, поэтому равнодействующая обратится в нуль только тогда, когда ее проекции на оси координат будут одновременно равны нулю:

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0. \quad (3.3)$$

Для этого необходимо, чтобы действующие на тело силы согласно (3.1) удовлетворяли трем уравнениям равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0.$$

В случае плоской системы сходящихся сил модуль ее равнодействующей определяется формулой

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Тогда действующие на тело силы должны удовлетворять двум уравнениям равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Таким образом, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил системы на каждую из координатных осей равнялась нулю.

При решении задач о равновесии твердого тела при действии системы сходящихся сил часто бывает удобно пользоваться следующей теоремой.

Теорема о равновесии трех непараллельных сил. *Линии действия трех непараллельных, взаимно уравнивающих сил пересекаются в одной точке* (рисунок 3.8).

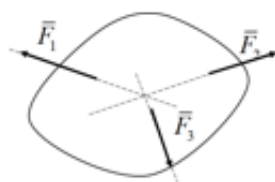


Рисунок 3.8. – Три непараллельные, взаимно уравнивающиеся силы

3.3. Примеры к теме

Пример 1. Уличный фонарь веса 300 Н подвешен к вертикальному столбу с помощью горизонтальной поперечины $AC = 1,2$ м и подкоса $BC = 1,5$ м (рисунок 3.9). Найти усилия S_1 и S_2 в стержнях AC и BC , считая крепления в точках A , B и C шарнирными.

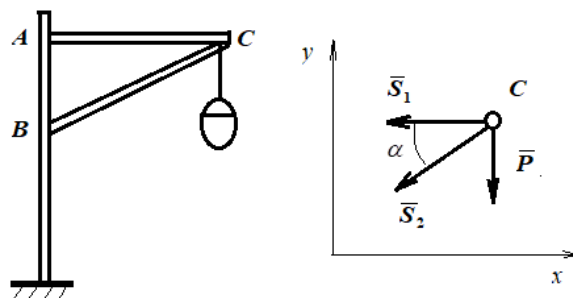


Рисунок 3.9. – Рисунок к примеру 1

Решение:

1. Найдем синус и косинус угла наклона подкоса:

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 0,9 \text{ м},$$

$$\sin \alpha = \frac{AB}{BC} = 0,6, \quad \cos \alpha = \frac{AC}{BC} = 0,8.$$

2. Найдем усилие в стержне BC:

$$\sum F_{ky} = 0. \quad -S_2 \cdot \sin \alpha - P = 0,$$

$$S_2 = -\frac{P}{\sin \alpha} = -500 \text{ Н.}$$

3. Найдем усилие в стержне AC:

$$\sum F_{kx} = 0. \quad -S_1 - S_2 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$S_1 = -S_2 \cdot \cos \alpha = 400 \text{ Н.}$$

Пример 2. Определить модуль силы F_1 , если известно, что в положении равновесия ветви троса образуют углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 75^\circ$, а натяжение ветви троса AC равняется 15 (рисунок 3.10).

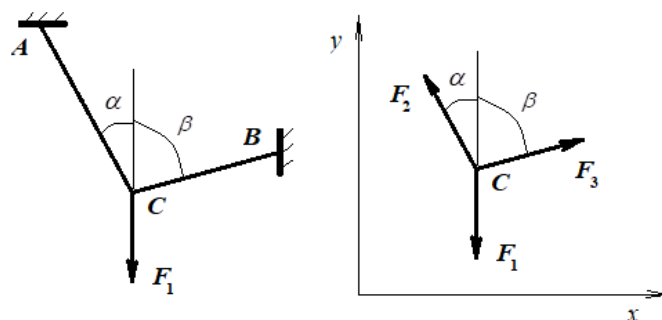


Рисунок 3.10. – Рисунок к примеру 2

Решение:

1. Найдем натяжение ветви троса BC:

$$\sum F_{kx} = 0. \quad -F_2 \cdot \sin \alpha + F_3 \cdot \sin \beta = 0,$$

$$F_3 = \frac{F_2 \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} = 7,765 \text{ Н.}$$

2. Найдем значение силы F_1 :

$$\sum F_{ky} = 0. \quad -F_1 + F_2 \cdot \cos \alpha + F_3 \cdot \cos \beta = 0,$$

$$F_1 = F_2 \cdot \cos \alpha + F_3 \cdot \cos \beta = 15 \text{ Н.}$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется системой сходящихся сил?
2. Что является целью сложения системы сходящихся сил?

3. Как производится геометрическое сложение двух произвольных сил?
4. Как производится геометрическое разложение силы на две силы?
5. Как найти равнодействующую произвольной плоской системы сходящихся сил?
6. Как производится геометрическое сложение пространственной системы трех сходящихся сил?
7. Как найти равнодействующую произвольной пространственной системы сходящихся сил?
8. Как производится аналитическое сложение произвольной пространственной системы сходящихся сил?
9. Какой вид имеет геометрическая форма условий равновесия произвольной пространственной системы сходящихся сил?
10. Какой вид имеет аналитическая форма условий равновесия произвольной пространственной системы сходящихся сил?
11. Какой вид имеет аналитическая форма условий равновесия произвольной плоской системы сходящихся сил?
12. Сформулируйте теорему о равновесии трех непараллельных сил.

ТЕМА 4. Момент силы. Теория пар сил

Цели изучения темы

Рассмотреть, что собой представляет момент силы относительно точки, его разновидности и какими свойствами он обладает.

Рассмотреть понятия пары сил, ее момента и какими свойствами она обладает.

Разобраться с условиями равновесия системы пар сил.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [8; 9].

4.1. Момент силы относительно точки

Твердое тело под действием приложенной к нему силы, наряду с поступательным движением, может совершать вращательное движение вокруг некоторой точки. Тогда вращательный эффект силы характеризуется моментом силы относительно этой точки, которую принято называть **центром момента**, или **центром вращения**. Различают две его разновидности:

- момент силы относительно точки на плоскости;
- момент силы относительно точки в пространстве.

Момент силы относительно точки на плоскости, вызывающий плоское вращение тела, является скалярной величиной, т.к. характеризуется только численным значением, и может различаться направлением вращения. Поэтому его принято называть **алгебраическим моментом силы**.

Для его описания рассмотрим твердое тело под действием силы $\vec{F}$, вызывающей его плоское вращение вокруг некоторого центра вращения O (рисунок 4.1).

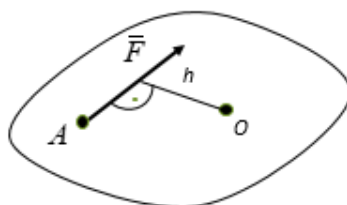


Рисунок 4.1. – Твердое тело под действием силы $\vec{F}$, вызывающей плоское вращение

Длина перпендикуляра, опущенного из центра момента на линию действия силы F , называется **плечом силы** h .

Алгебраическим моментом силы называется алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо этой силы относительно выбранной точки:

$$M_O = \pm Fh.$$

Момент силы относительно некоторой точки будем считать положительным, если сила стремится повернуть тело по часовой стрелке.

Единица измерения алгебраического момента равна произведению единицы силы на единицу длины – Нм, кНм.

Момент системы сил, лежащих в одной плоскости, относительно какой-либо ее точки (рисунок 4.2) вычисляется как алгебраическая сумма моментов этих сил. Он называется **главным алгебраическим моментом плоской системы сил**.

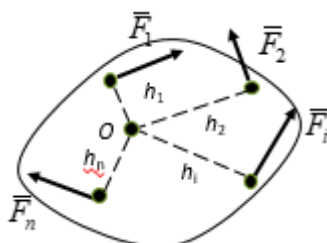


Рисунок 4.2. – Момент системы сил, лежащих в одной плоскости

$$M_O = \sum_i F_i h_i.$$

Главный алгебраический момент плоской сходящейся системы сил подчиняется теореме Вариньона.

Теорема Вариньона. Алгебраический момент равнодействующей сходящейся системы сил относительно произвольной точки в плоскости действия сил равняется главному алгебраическому моменту этой системы сил

Момент силы относительно точки в пространстве, вызывающий пространственное вращение тела, является векторной величиной, т.к. характеризуется тремя составляющими:

- плоскостью вращения;
- направлением вращения;
- численным значением.

Поэтому его принято называть **векторным моментом силы**.

Для его описания рассмотрим твердое тело под действием силы $\vec{F}$, вызывающей его вращение в пространстве вокруг некоторого центра вращения O и имеющей плечо h (рисунок 4.3, а).

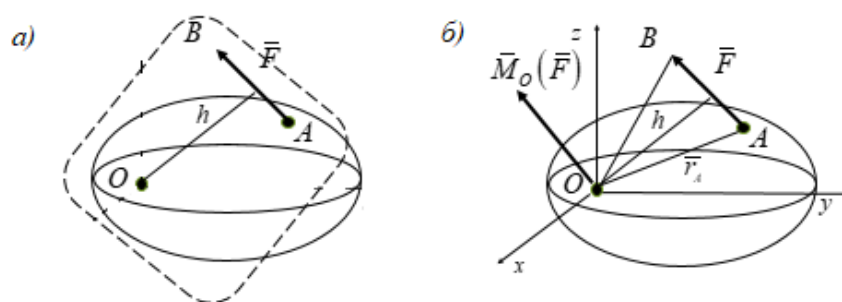


Рисунок 4.3. – Твердое тело под действием силы $\vec{F}$, вызывающей пространственное вращение

Введем прямоугольную декартовую систему координат с началом в центре вращения тела. Положение точки приложения силы описывается ее радиусом-вектором $\vec{r}_A$ (см. рисунок 4.3, б).

Векторным моментом силы называется вектор, приложенный в центре вращения и равный по модулю произведению силы на плечо силы относительно этого центра:

$$|\vec{M}_O(\vec{F})| = |\vec{F}| \cdot h.$$

Векторный момент силы направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит сила и центр вращения, таким образом, что с его конца можно видеть стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки

(см. рисунок 4.3, б). В соответствии с правилами векторной алгебры этот момент равен векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}_A$, проведенного из центра О в точку приложения силы, и вектора силы $\vec{F}$:

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_A \times \vec{F}.$$

Момент силы относительно точки обладает следующими свойствами:

- **первое свойство.** Момент силы относительно точки не изменяется при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия;
- **второе свойство.** Момент силы относительно точки равен нулю только тогда, когда нулю равна сила или ее плечо.

4.2. Пара сил. Момент пары

Парой сил называется система двух параллельных сил, равных по модулю и противоположных по направлению (рисунок 4.4).

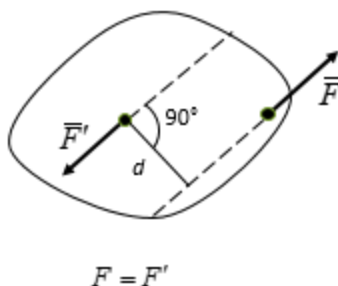


Рисунок 4.4. – Пара сил

Кратчайшее расстояние d между линиями действия сил называется **плечом пары сил**. Плоскость, в которой действует пара сил, называется **плоскостью пары**.

Пара сил не имеет равнодействующей, однако силы пары, не лежащие на одной линии, не уравниваются, а стремятся произвести вращение тела, к которому они приложены, в направлении движения часовой стрелки или противоположно ему. Вращательный эффект пары сил характеризуется **моментом пары сил**.

Моментом пары сил называется взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на плечо пары сил:

$$M = \pm F \cdot d.$$

Момент пары положителен, если пара стремится повернуть плоскость пары против движения часовой стрелки, и отрицателен – в обратном случае.

Единственным механическим последствием действия пары сил на тело является возможный поворот тела. Поэтому для изображения действующей на тело пару сил используют эквивалентное изображение круговой стрелкой, указывающей направление вращения тела, и рядом записывают величину момента (рисунок 4.5).

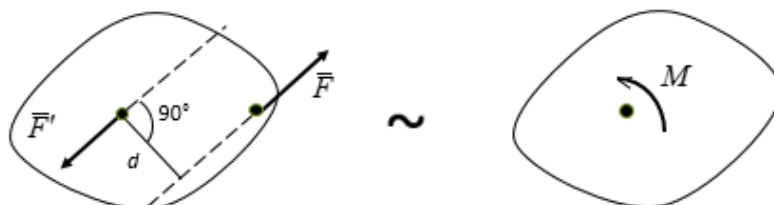


Рисунок 4.5. – Эквивалентное изображение момента пары сил

В пространстве, если смотреть на плоскость действия пары с различных ее сторон, можно видеть одну и ту же пару стремящейся вращать плоскость в различных направлениях, поэтому момент пары сил в пространстве рассматривают как вектор, характеризующийся тремя составляющими:

- плоскостью действия пары сил;
- направлением вращения в плоскости пары сил;
- модулем момента пары сил.

Вектор момента пары сил считается направленным по перпендикуляру к плоскости заданной пары сил в такую сторону, чтобы, если смотреть навстречу этому вектору, можно было видеть пару стремящейся вращать плоскость против движения часовой стрелки (рисунок 4.6)

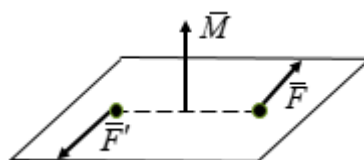


Рисунок 4.6. – Изображение момента пары сил в пространстве

Модуль вектора момента пары сил равняется произведению модуля силы пары на ее плечо

$$|\vec{M}| = F \cdot d .$$

Пары сил обладают следующими свойствами:

- не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить в любое место в плоскости действия пары;
- не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить из данной плоскости в любую другую плоскость, параллельную (компланарную) данной;
- не изменяя действия пары на твердое тело, у нее можно произвольно менять модуль сил или длину плеча, сохраняя неизменным модуль ее момента.

В случае действия на тело совокупности пар сил ее принято называть **системой пар сил**. Если пары сил лежат в одной плоскости действия, то систему пар называют **плоской системой пар**. Если пары сил лежат в разных плоскостях действия, то систему пар называют **пространственной системой пар**.

4.3. Условия равновесия системы пар сил

Для получения условий равновесия плоской системы пар сил сформулируем следующие теоремы.

Теорема об условии эквивалентности пар сил, лежащих в одной плоскости. Пары сил, лежащие в одной плоскости, эквивалентны, если их моменты численно равны и одинаковы по знаку (рисунок 4.7).

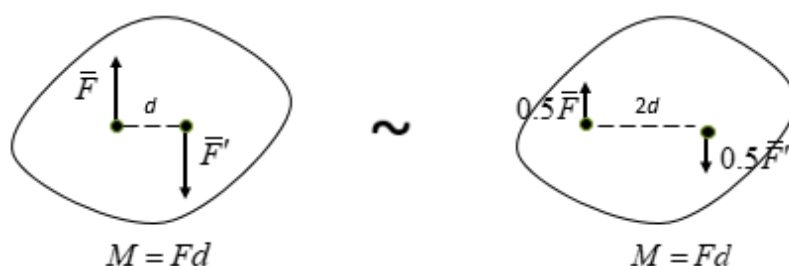


Рисунок 4.7. – Эквивалентные пары сил, лежащие в одной плоскости

Теорема о сложении пар сил на плоскости. Момент пары сил, эквивалентный системе пар сил на плоскости, равен алгебраической сумме моментов, составляющих систему пар (рисунок 4.8).

Тогда пары сил, расположенные в одной плоскости взаимно уравниваются, если алгебраическая сумма их моментов равна нулю, а условие равновесия имеет вид

$$\sum_k M_k = 0.$$

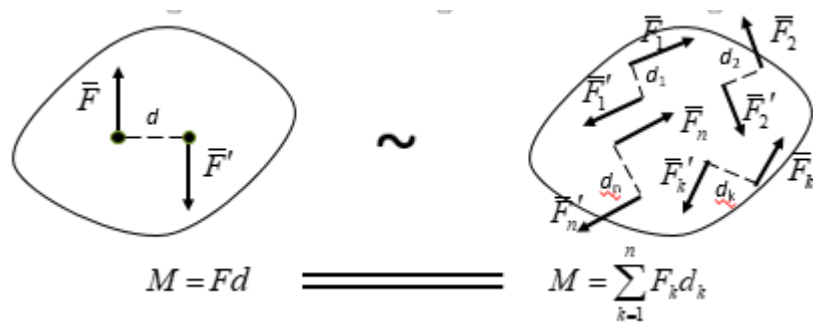


Рисунок 4.8. – Момент пары сил,
эквивалентный системе пар сил на плоскости

Для получения условий равновесия пространственной системы пар сил сформулируем следующие теоремы.

Теорема об условии эквивалентности пар сил, расположенных в пространстве. Пары сил в пространстве эквивалентны, если их моменты геометрически равны (рисунок 4.9)

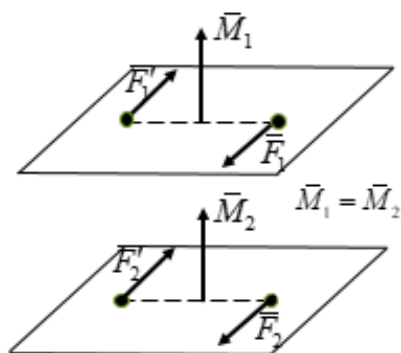


Рисунок 4.9. – Эквивалентные пары сил,
расположенные в пространстве

Теорема о сложении пар сил в пространстве. Момент пары сил, эквивалентный системе пар сил в пространстве, равен геометрической сумме моментов, составляющих систему пар (рисунок 4.10).

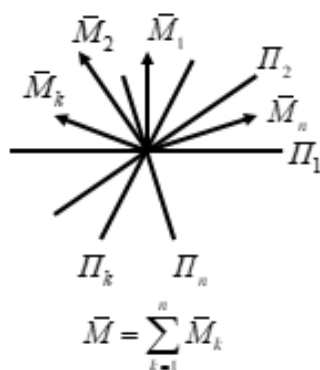


Рисунок 4.10. – Момент пары сил,
эквивалентный системе пар сил в пространстве

Тогда пары сил, расположенные в одной пространстве взаимно уравновешиваются, если геометрическая сумма их моментов равна нулю, а условие равновесия имеет вид

$$\sum_k \bar{M}_k = 0.$$

В соответствии с правилами векторной алгебры, используя проекции моментов всех пар сил на каждую из трех координатных осей, условие равновесия можно записать в виде

$$\sum_k M_{kx} = 0 \quad \sum_k M_{ky} = 0 \quad \sum_k M_{kz} = 0.$$

4.4. Примеры к теме

Пример 1. К свободному плоскому телу в точке D приложена сила F (рисунок 4.11).

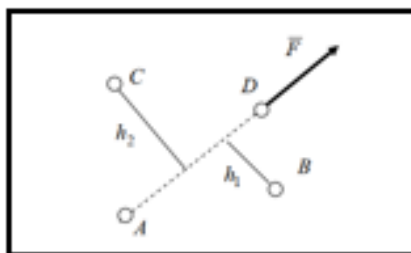


Рисунок 4.11. – Рисунок к примеру 1

Записать алгебраический момент силы F относительно точек A , B , C этого тела.

Решение:

1. Алгебраический момент силы F относительно точки A

$$M_A = 0.$$

2. Алгебраический момент силы F относительно точки B

$$M_B = F \cdot h_1.$$

3. Алгебраический момент силы F относительно точки C

$$M_C = -F \cdot h_2.$$

Пример 2. Вычислить алгебраические моменты трех сил, действующих по сторонам твердого тела $ABCD$ (рисунок 4.12) относительно точек A и B , если $F_1 = 3 \text{ кН}$; $F_2 = 5 \text{ кН}$; $F_3 = 8 \text{ кН}$.

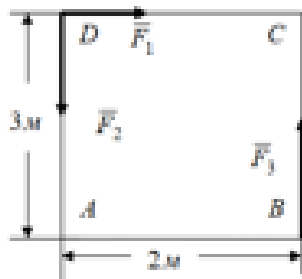


Рисунок 4.12. – Рисунок к примеру 2

Решение:

1. Алгебраический момент сил относительно точки A

$$M_A = M_A(F_1) + M_A(F_2) + M_A(F_3) = 9 + 0 - 8 \cdot 2 = -7 \text{ кНм.}$$

2. Алгебраический момент сил относительно точки B

$$M_B = M_B(F_1) + M_B(F_2) + M_B(F_3) = 9 - 10 + 0 = -1 \text{ кНм.}$$

3. Алгебраический момент сил относительно точки C

$$M_C = M_C(F_1) + M_C(F_2) + M_C(F_3) = 0 - 5 \cdot 2 + 0 = -10 \text{ кНм.}$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Чем характеризуется вращательный эффект силы?
2. Что называется плечом силы?
3. Что называется алгебраическим моментом силы?
4. В чем измеряется момент силы относительно точки?
5. Что называется главным алгебраическим моментом плоской системы сил?
6. Как формулируется теорема Вариньона для плоской системы сходящихся сил?
7. Что называется векторным моментом силы?
8. Как формулируются свойства момента силы относительно точки?
9. Что называется парой сил?

10. Что называется плечом пары сил?
11. Что называется моментом пары сил?
12. Как формулируется теорема об условии эквивалентности пар сил, лежащих в одной плоскости?
13. Как формулируется теорема о сложении пар сил на плоскости?
14. Какой вид имеет условие равновесия пар сил, лежащих в одной плоскости?
15. Как формулируется теорема об условии эквивалентности пар сил, расположенных в пространстве?
16. Как формулируется теорема о сложении пар сил в пространстве?
17. Какой вид имеют условия равновесия пар сил, расположенных в пространстве?

ТЕМА 5. Система сил, произвольно расположенных на плоскости

Цели изучения темы

Выяснить, что собой представляет система сходящихся сил, что является целью сложения и какие возможны способы ее сложения.

Рассмотреть условия равновесия твердого тела при действии системы сходящихся сил и их возможные формы.

Разобраться с применением условий равновесия системы сходящихся сил к решению задач статики.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [8; 9].

5.1. Метод Пуансо

Если линии действия сил лежат в одной плоскости, не параллельны и не пересекаются в одной точке, то такая система сил называется произвольной плоской системой сил. При сложении сил такой системы применяют метод приведения силы к заданному центру. Метод был предложен французским ученым Пуансо и поэтому носит его имя.

Рассмотрим суть метода приведения силы к заданному центру.

Дана сила $\vec{F}$, приложенная к плоскому телу в точке А (рисунок 5.1, а), и задана некоторая произвольная точка О, которую будем называть центром приведения. Опустим из центра приведения О перпендикуляр на линию действия силы $\vec{F}$ и определим ее момент относительно центра приведения

$$M = Fd.$$

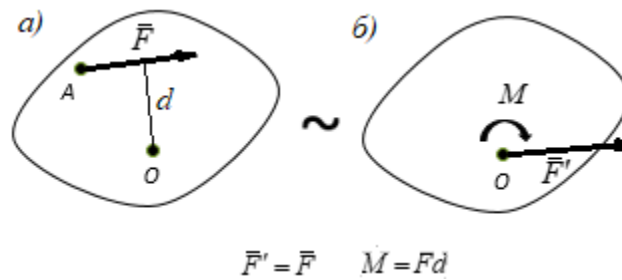


Рисунок 5.1. – Метод Пуансо

Приложим в точке O взаимно уравнивающиеся силы $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные силе $\bar{F}$ и равные ей по модулю. Тогда получим силу $\bar{F}''$, геометрически равную силе $\bar{F}$, приложенную в центре приведения, и пару сил, составленную силами $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, момент которой $M = Pd$ равен моменту силы $\bar{F}$ относительно центра приведения O .

Таким образом, метод Пуансо заключается в замене силы $\bar{F}$ эквивалентной ей совокупностью – геометрически равной ей силой $\bar{F}''$, приложенной в центре приведения, и парой сил с моментом, равным моменту силы относительно центра приведения (см. рисунок 5.1, б).

5.2. Приведение произвольной плоской системы сил к центру

Рассмотрим произвольное твердое тело под действием трех сил, лежащих в одной плоскости. Примем за центр приведения произвольную точку O в этой плоскости и, применяя метод Пуансо, приведем все силы к этому центру (рисунок 5.2).

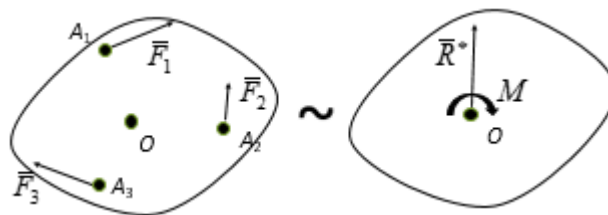


Рисунок 5.2. – Произвольное твердое тело под действием трех сил

Складывая силы $\bar{F}_1''$, $\bar{F}_2''$, $\bar{F}_3''$ по правилу многоугольника, получим их равнодействующую $\bar{R}^*$, равную геометрической сумме сил $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$:

$$\bar{R}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3.$$

Геометрическая сумма заданных сил называется **главным вектором системы сил**.

Складывая пары сил $\bar{F}_1, \bar{F}'_1; \bar{F}_2, \bar{F}'_2; \bar{F}_3, \bar{F}'_3$, моменты которых равны моментам сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ относительно центра приведения O , получим эквивалентную им пару сил. Момент этой пары равен сумме моментов сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

и является главным моментом этой системы сил относительно центра приведения.

Таким образом, в результате приведения трех сил, лежащих в одной плоскости, мы получили, что они эквивалентны главному вектору и главному моменту этих сил.

Распространяя полученные результаты на случай, когда на произвольное твердое тело действует n сил, лежащих в одной плоскости (рисунок 5.3),

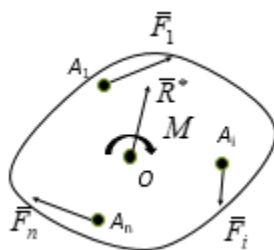


Рисунок 5.3. – Произвольное твердое тело под действием n сил

получим соответствующие этим силам главный вектор

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$$

и главный момент

$$M = M_O = \sum_{k=1}^n M_{k_O}.$$

Исходя из этого, силы, произвольно расположенные на плоскости, можно привести к одной силе, приложенной в центре приведения, равной главному вектору данной системы сил, и к паре сил с моментом, равным главному моменту этой системы сил относительно центра приведения.

Выбор центра приведения не отражается на модуле и направлении главного вектора, но влияет на величину и знак главного момента.

Модуль и направление главного вектора плоской системы сил определяются по способу проекций так же, как определяются модуль и направление равнодействующей сходящихся сил:

$$R_x^* = \sum_k F_{kx} \quad R_y^* = \sum_k F_{ky},$$

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x^*}{R^*}, \quad \cos \beta = \frac{R_y^*}{R^*}.$$

5.3. Возможные случаи приведения произвольной плоской системы сил к центру

Рассмотрим случаи, которые могут иметь место при приведения произвольной плоской системы сил к некоторому центру (рисунок 5.4).

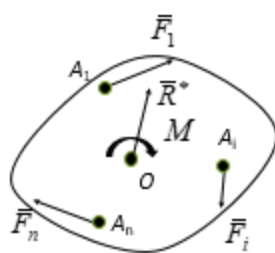


Рисунок 5.4. – Случаи приведения произвольной плоской системы сил к некоторому центру

1-й случай. В результате приведения системы сил к центру полученные главный вектор и главный момент удовлетворяют условиям

$$\bar{R}^* = 0 \quad M = 0.$$

Следовательно, в этом случае система сил является системой взаимно уравновешивающихся сил. Поэтому тело при действии такой системы сил будет находиться в равновесии.

2-й случай. В результате приведения системы сил к центру полученные главный вектор и главный момент удовлетворяют условиям

$$\bar{R}^* = 0 \quad M \neq 0.$$

Следовательно, в этом случае система сил приводится к паре сил, момент которой равен главному моменту сил системы относительно центра

приведения. Поэтому тело при действии такой системы сил не может находиться в равновесии.

3-й случай. В результате приведения системы сил к центру полученные главный вектор и главный момент удовлетворяют условиям

$$\bar{R}^* \neq 0 \quad M = 0.$$

Следовательно, в этом случае система сил приводится к равнодействующей силе, равной главному вектору сил, линия действия которого проходит через центр приведения

$$\bar{R} = \bar{R}^*.$$

Поэтому тело при действии такой системы сил не может находиться в равновесии.

4-й случай. В результате приведения системы сил к центру полученные главный вектор и главный момент удовлетворяют условиям

$$\bar{R}^* \neq 0 \quad M \neq 0.$$

Представляя главный момент как пару сил, модули которых равны модулю главного вектора

$$\bar{R} = \bar{R}^*,$$

а плечо определяется по формуле

$$d = \frac{M}{R^*},$$

получим, что в этом случае система сил приводится к равнодействующей, геометрически равной главному вектору

$$\bar{R} = \bar{R}^*.$$

Поэтому тело при действии такой системы сил не может находиться в равновесии.

На основе рассмотренных выше случаев приведения можно сделать следующий вывод: если силы, произвольно расположенные на плоскости, не уравниваются, то их можно привести или к одной силе или к паре сил.

Для равнодействующей произвольной плоской системы сил справедлива **теорема Вариньона**. Момент равнодействующей силы относительно

любой точки на плоскости равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

$$M_O(\bar{R}) = \sum_k M_{k_O}$$

5.4. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил

Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы, согласно первому случаю приведения сил такой системы, имеют вид

$$R^* = \sqrt{(R_x^*)^2 + (R_y^*)^2} = 0,$$

$$M = \sum_{k=1}^n M_{k_O} = 0.$$

Под корнем стоит сумма положительных слагаемых, поэтому главный вектор обратится в нуль только тогда, когда его проекции на оси координат будут одновременно равны нулю:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Таким образом, два условия равновесия сил, произвольно расположенных на плоскости, можно выразить в виде системы трех уравнений

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n M_{k_O} = 0.$$

Эти уравнения образуют первую форму уравнений равновесия плоской системы сил (основная форма уравнений равновесия). Для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил системы на каждую из двух координатных осей, а также

сумма моментов этих сил относительно какого-нибудь центра были равны нулю. Центр моментов и направление координатных осей для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Наряду с основной формой уравнений равновесия существуют еще две формы уравнений равновесия.

Вторая форма уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{aligned}\sum M_{iA} &= 0, \\ \sum M_{iB} &= 0, \\ \sum_i F_{iU} &= 0.\end{aligned}$$

Согласно этой форме уравнений для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно каких-нибудь двух центров А и В, а также сумма проекций этих сил на любую ось, не перпендикулярную прямой АВ, были равны нулю.

Третья форма уравнений равновесия имеет вид

$$\begin{aligned}\sum M_{iA} &= 0, \\ \sum M_{iB} &= 0, \\ \sum M_{iC} &= 0.\end{aligned}$$

Согласно этой форме уравнений для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов всех сил системы относительно каких-нибудь трех центров, не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

Таким образом, установлено, что число уравнений равновесия произвольной плоской системы сил равно трем. При помощи этих уравнений можно решать задачи статики на плоскости, в которых число неизвестных не превышает трех.

5.5. Уравнения равновесия плоской системы параллельных сил

В случае, когда все действующие на тело силы лежат в одной плоскости и параллельны друг другу, можно направить ось Ох перпендикулярно силам, а ось Оу параллельно им (рисунок 5.5, а).

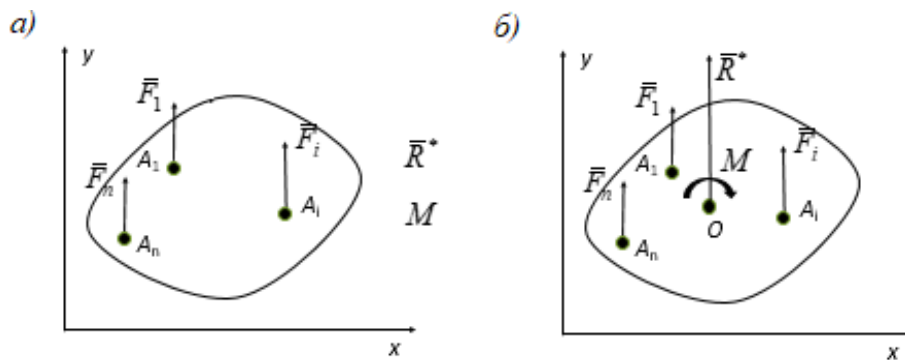


Рисунок 5.5. – Плоская система параллельных сил

Если к твердому телу приложена плоская система параллельных сил, то их тоже можно привести к некоторому центру O и получить главный вектор $\bar{R}^*$ и главный момент M (см. рисунок 5.5, б). Для параллельных сил на плоскости возможны все те же случаи приведения, что и для сил, произвольно расположенных на плоскости. Следовательно, условия равновесия имеют тот же вид:

$$\bar{R}^* = 0 \quad M = 0.$$

Главный вектор этой системы сил $\bar{R}^*$ параллелен оси Oy и его проекция на ось Ox будет равна нулю, поэтому для плоской системы параллельных сил возможны только две формы уравнений равновесия.

Первая форма уравнений равновесия имеет вид

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Центр моментов для этой системы уравнений можно выбирать произвольно.

Вторая форма уравнений равновесия имеет вид

$$\sum M_{iA} = 0,$$

$$\sum M_{iB} = 0.$$

При этом прямая AB не должна быть параллельна силам. Вторая форма уравнений показывает, что силы не приводятся ни к паре сил, ни к равнодействующей.

5.6. Определение реакций связей твердого тела и системы взаимосвязанных тел

Статически определенные и статически неопределенные задачи

Как известно, твердые тела, из которых состоят искусственные сооружения, принято называть конструкциями. Важным видом связей конструкций являются опоры – устройства, соединяющие конструкции с основанием, на котором они располагаются. При определении реакций опор конструкций возможны два вида задач: статически определенные и статически неопределенные.

Статически определенные задачи. Задачи, в которых опорные реакции конструкций можно определить с помощью уравнений равновесия сил. Для таких задач число неизвестных опорных реакций не превышает число уравнений равновесия сил. В этом случае конструкции принято называть статически определимыми системами.

Статически неопределенные задачи. Задачи, в которых опорные реакции конструкций невозможно определить с помощью уравнений равновесия сил. Для таких задач число неизвестных опорных реакций превышает число уравнений равновесия сил. В этом случае конструкции принято называть статически неопределимыми системами. Для определения их опорных реакций необходимо учитывать деформацию конструкции, обусловленную внешними силами.

При решении статически определенных задач возможны два вида статически определимых систем – **простые** и **составные**.

Простые статически определимые системы представляют собой конструкции, состоящие из одного твердого тела. Примерами таких систем являются простые балки.

Составные статически определимые системы представляют собой конструкции, состоящие из системы взаимосвязанных твердых тел. Примерами таких систем, могут быть составные балки.

Сформулируем алгоритмы определения опорных реакций в простых и составных статически определимых системах.

Для определения опорных реакций в простых статически определимых системах требуется:

- изобразить конструкцию с приложенными внешними силами;
- удалить опоры конструкции и, согласно принципу освобожденности от связей, заменить их опорными реакциями;
- составить уравнения равновесия для опорных реакции и внешних сил конструкции;

- определить опорные реакции конструкции, решив для этого составленные уравнения равновесия;

- проверить правильность определения опорных реакций конструкции, составляя для этого неиспользованное уравнение равновесия, которое будет включать все найденные опорные реакции.

Для определения опорных реакций в составных статически определимых системах требуется:

- изобразить конструкцию с приложенными внешними силами;
- удалить опоры конструкции и, согласно принципу освобожденности от связей, заменить их опорными реакциями;

- составить уравнения равновесия для опорных реакции и внешних сил конструкции;

- расчленить конструкцию на отдельные тела в местах их соединения, заменяя внутренние связи соответствующими реакциями;

- рассматривать каждое из полученных тел как свободное, находящееся под действием соответствующих ему внешних сил, опорных реакций и реакций внутренних связей;

- составить уравнения равновесия сил, приложенных к каждому телу;

- решить полученную систему уравнений равновесия оптимальным образом и найти опорные реакции;

- проверить правильность определения реакций опор конструкции, составляя для этого неиспользованное уравнение равновесия, которое включает все найденные реакции конструкции.

При определении опорных реакций в статически определимых системах в число внешних сил могут входить **распределенные линейные силы** – силы, действующие на все точки некоторой линии поверхности тела. Такие силы при расчетах реальных конструкций принято называть **погонной нагрузкой**.

Величина такой нагрузки характеризуется **интенсивностью** – численным значением силы, приходящейся на единицу длины. Обычно обозначается буквой q . Измеряется такая нагрузка в Н/м и кН/м . Другими характеристиками такой нагрузки являются:

- длина линии поверхности тела с действующими распределенными силами;

- направление распределенных сил.

Различают следующие основные виды погонных нагрузок:

- с постоянной интенсивностью (рисунок 5.6, а);

- с линейной интенсивностью (рисунок 5.6, б);

- с произвольной интенсивностью (рисунок 5.6, в).

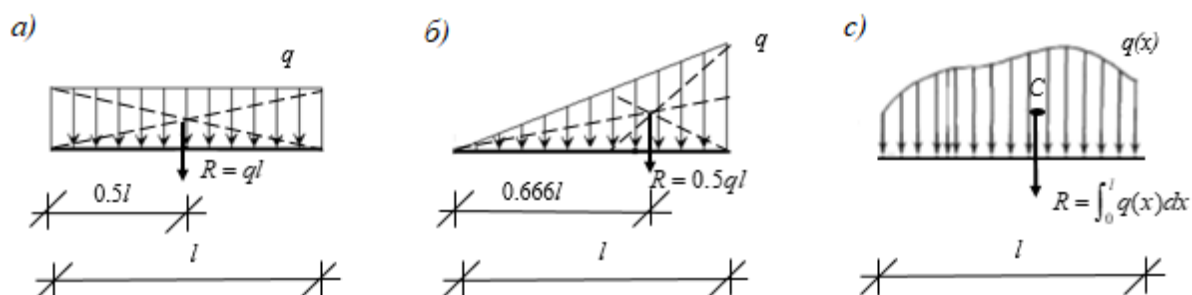


Рисунок 5.6. – Виды погонных нагрузок

Для включения таких нагрузок в уравнения равновесия сил используются их равнодействующие, численно равные площадям фигур, описывающих очертания соответствующих нагрузок. Точками приложения равнодействующих являются центры тяжести этих фигур.

5.7. Примеры к теме

Пример 1. Определить опорные реакции простой рамы (рисунок 5.7).

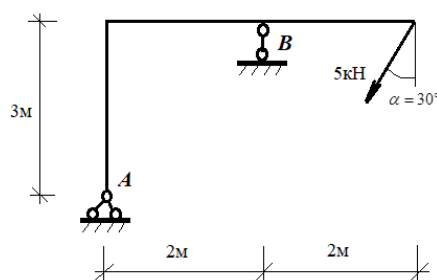


Рисунок 5.7. – Схема простой рамы

Решение:

1. Покажем схему опорных реакций (рисунок 5.8).

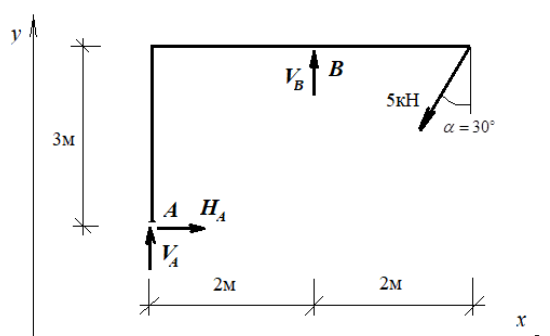


Рисунок 5.8. – Схема опорных реакций

2. Найдем опорную реакцию H_A :

$$\sum x = 0 \quad H_A - 5 \cdot \sin 30^\circ = 0,$$

$$H_A = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,5 \text{ кН}.$$

3. Найдем опорную реакцию V_A :

$$\sum M_O = 0 \quad V_A \cdot 2 - 5 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 + 5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 = 0,$$

$$V_A = 5 \cdot (\sin 30^\circ \cdot 1,5 - \cos 30^\circ) = -0,5801 \text{ кН}.$$

4. Найдем опорную реакцию V_B :

$$\sum M_A = 0 \quad -V_B \cdot 2 - 5 \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 + 5 \cdot \cos 30^\circ \cdot 4 = 0,$$

$$V_B = 5 \cdot (\cos 30^\circ \cdot 2 - \sin 30^\circ \cdot 1,5) = 4,9103 \text{ кН}.$$

5. Проверим правильность найденных опорных реакций:

$$\sum M_C = 0 \quad -V_A \cdot 4 - H_A \cdot 3 + V_B \cdot 2 = 0,$$

$$\sum M_C = 0 \quad -0,5801 \cdot 4 - 2,5 \cdot 3 + 4,9103 \cdot 2 = 0,0002 \approx 0.$$

Пример 2. Определить опорные реакции составной рамы (рисунок 5.9).

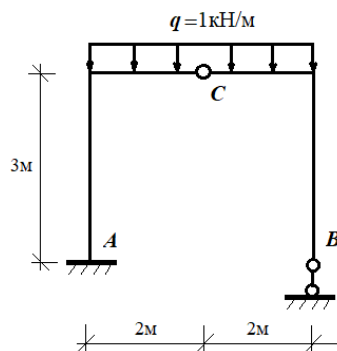


Рисунок 5.9. – Схема составной рамы

Решение:

1. Покажем схему опорных реакций (рисунок 5.10).

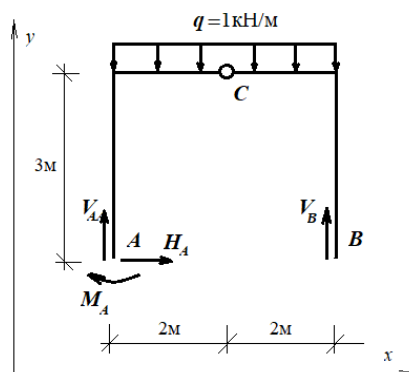


Рисунок 5.10. – Схема опорных реакций

2. Заменим распределенную нагрузку равнодействующими (рисунок 5.11).

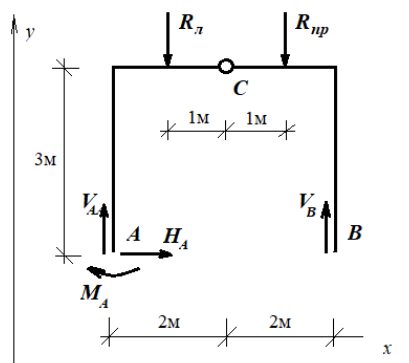


Рисунок 5.11. – Замена распределенной нагрузки равнодействующими

и вычислим модули равнодействующих

$$R_{\text{л}} = 2 \cdot q = 2 \text{ кН},$$

$$R_{\text{нр}} = 2 \cdot q = 2 \text{ кН}.$$

3. Найдем опорную реакцию H_A :

$$\sum x = 0, \quad H_A = 0.$$

3. Найдем опорную реакцию V_B

$$\sum M_C^{\text{нр.ч.}} = 0 \quad -V_B \cdot 2 + R_{\text{нр}} \cdot 1 = 0,$$

$$V_B = 0,5 R_{\text{нр}} = 1 \text{ кН}.$$

4. Найдем опорную реакцию V_A

$$\sum y = 0, \quad V_A - R_{\text{л}} - R_{\text{нр}} + V_B = 0,$$

$$V_A = R_{\text{л}} + R_{\text{нр}} - V_B = 2 + 2 - 1 = 3 \text{ кН}.$$

5. Найдем опорный момент M_A

$$\sum M_A = 0, \quad M_A + R_{\text{л}} \cdot 1 + R_{\text{нр}} \cdot 3 - V_B \cdot 4 = 0,$$

$$M_A = -R_{\text{л}} \cdot 1 - R_{\text{нр}} \cdot 3 + V_B \cdot 4 = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = -4 \text{ кНм}.$$

6. Проверим правильность найденных опорных реакций

$$\sum M_C = 0, \quad -M_C + V_A \cdot 2 - R_{\text{л}} \cdot 1 + R_{\text{нр}} \cdot 1 - V_B \cdot 2 = 0,$$

$$\sum M_C = 0, \quad -4 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -6 + 6 = 0.$$

Вопросы по теме для самоконтроля

1. В чем заключается суть метода Пуансо?
2. Что называется главным вектором системы сил?
3. Что называется главным моментом системы сил?
4. Какие возможны случаи приведения произвольной плоской системы сил к центру?
5. Как формулируется теорема Вариньона для произвольной плоской системы сил?
6. Какой вид имеют условия равновесия произвольной плоской системы сил?
7. Какой вид имеет первая форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил?
8. Какой вид имеет вторая форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил?
9. Какой вид имеет третья форма уравнений равновесия произвольной плоской системы сил?
10. Какой вид имеют условия равновесия плоской системы параллельных сил?
11. Какой вид имеет первая форма уравнений равновесия плоской системы параллельных сил?
12. Какой вид имеет вторая форма уравнений равновесия плоской системы параллельных сил?
13. Какие задачи определения опорных реакций называются статически определенными?
14. Что называется простой статически определимой системой?
15. Что называется составной статически определимой системой?
16. Сформулируйте порядок определения опорных реакций в простой статически определимой системе.
17. Сформулируйте порядок определения опорных реакций в простой статически определимой системе?

ТЕМА 6. Плоские фермы

Цели изучения темы

Выяснить, что собой представляет реальная ферма и ее расчетная схема.

Познакомиться с терминологией и системой обозначений, применяемых при расчете ферм.

Рассмотреть определение продольных сил в стержнях простых ферм при узловом приложении сил.

Разобраться с понятием и признаками нулевых стержней.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [6; 9].

6.1. Понятие о ферме и ее расчетной схеме

Одной из распространенных стержневых конструкций, которая применяется при возведении промышленных и общественных зданий, являются плоские фермы. Такие конструкции могут быть железобетонными, металлическими, деревянными и металлодеревянными.

Реальная плоская ферма представляет собой геометрически неизменяемую стержневую конструкцию с жестким соединением прямолинейных стержней в узлах (рисунок 6.1, а). Особенностью фермы является то, что она остается геометрически неизменяемой при условной замене жестких узлов шарнирами. Полученная при замене жестких узлов шарнирами система есть **расчетная схема фермы** (рисунок 6.1, б).

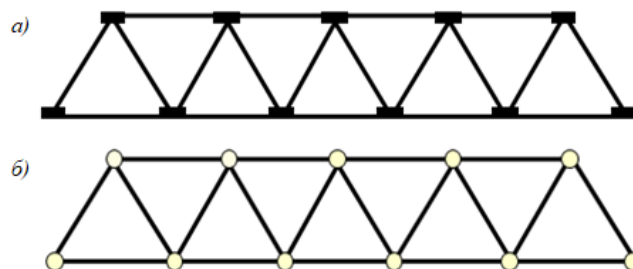


Рисунок 6.1. — К понятию фермы и ее расчетной схеме

При дальнейшем изложении под фермой будет пониматься ее расчетная схема.

При расчете ферм возможно узловое и внеузловое приложение сил. В первом случае действующие силы прикладываются к узлам фермы.

Во втором – действующие силы могут прикладываться к стержням фермы в произвольных сечениях.

При изложении темы рассматривается только узловое приложение сил. В этом случае на каждый отдельный стержень фермы будут действовать две внутренние силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Следовательно, можно считать, что стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие. Возникающие в стержнях внутренние силы называются продольными силами.

6.2. Терминология и система обозначений

При расчете ферм используется специальная терминология и система обозначений. Введем систему обозначений на примере фермы (рисунок 6.2).

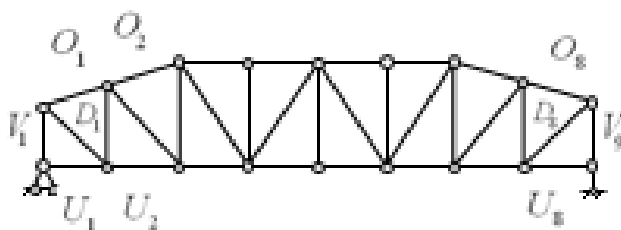


Рисунок 6.2. – Система обозначений

Стержни фермы, расположенные по ее внешнему контуру, образуют ее **пояса фермы**. Различают верхний и нижний пояса. Стержни поясов обозначают, соответственно, прописными латинскими буквами O и U и нумеруют слева направо. Участок пояса между смежными узлами называется панелью этого пояса.

Стержни, расположенные внутри контура и соединяющие пояса, образуют **решетку фермы**. Наклонные стержни решетки называются **раскосами** и обозначаются латинской буквой D . Вертикальные стержни решетки называются **стойками** и обозначаются латинской буквой V . Нумерация стержней решетки также осуществляется слева направо.

Введенная система обозначений стержней фермы используется и для обозначения продольных сил, возникающих в этих стержнях при узловой схеме нагружения.

Характерными геометрическими размерами фермы являются ее **пролет**, **высота** и **длины панелей поясов**. **Пролетом фермы** называется расстояние по горизонтали между осями ее опор. **Высотой фермы** называется расстояние

по вертикали между центрами наиболее удаленных друг от друга узлов верхнего и нижнего поясов. **Длиной панели пояса** называется расстояние по горизонтали между смежными узлами этого пояса.

По способу образования геометрической структуры различают **простые** и **сложные фермы** (рисунок 6.3).

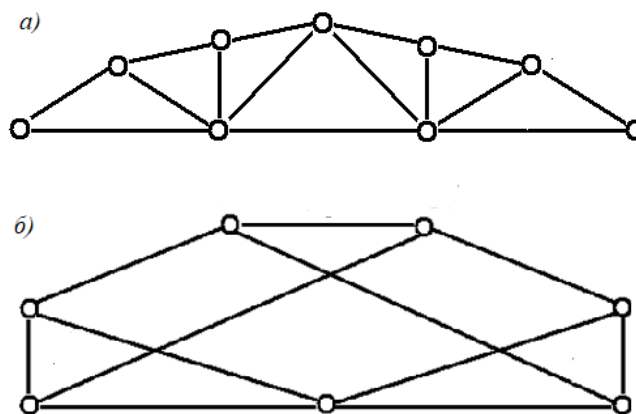


Рисунок 6.3. – Простые и сложные фермы

Ферма считается **простой** (см. рисунок 6.3, а), если в ней можно выделить шарнирно стержневой треугольник и образовать ее остальную структуру последовательным наращиванием двухстержневых шарнирных узлов. В противном случае ферма считается **сложной** (см. рисунок 6.3, б).

6.3. Расчет простых ферм

Расчет простой фермы сводится к определению опорных реакций и продольных сил в ее стержнях. Опорные реакции фермы можно определить как для простой статически определимой системы, рассматривая ферму как единое твердое тело.

Определение продольных сил в стержнях фермы может осуществляться **методом вырезания узлов** и **методом сечений (методом Риттера)**.

Метод вырезания узлов. В основе метода лежит использование уравнений равновесия плоской системы сходящихся сил и применение их к узлам фермы, мысленно вырезанным из нее сквозными сечениями. Для каждого узла фермы можно составить по два независимых уравнения равновесия.

Обычно в качестве таких уравнений используются уравнения проекций сил на некоторые оси, проходящие через центры вырезанных узлов фермы и позволяющие отдельно определить продольные силы. Поскольку входящие в такие уравнения продольные силы неизвестны, как по величине, так

и по знаку, то первоначально они все полагаются положительными, направляются в сторону от узлов, а стержни фермы считаются растянутыми. Если при расчете какая-либо продольная сила получится отрицательной, то это означает, что выбранное для нее направление было неправильным и данный стержень фермы сжат.

Применение метода вырезания узлов покажем на примере фермы (рисунок 6.4, а).

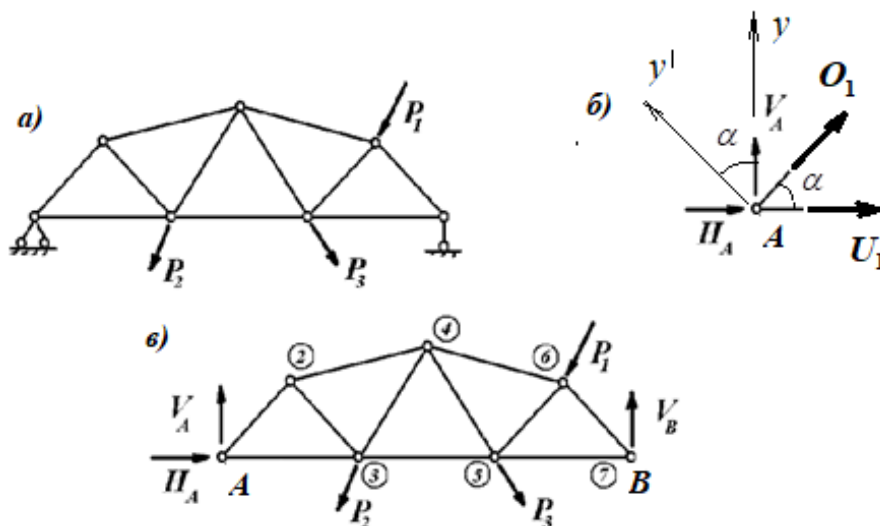


Рисунок 6.4. – Применение метода вырезания узлов

Поскольку равновесие каждого узла описывается только двумя независимыми уравнениями, то необходимо начинать вырезание узлов, где сходится не более двух стержней с неизвестными продольными силами. Такими узлами для рассматриваемой фермы являются опорные узлы.

Вырежем левый опорный узел (см. рисунок 6.4, б) и составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum y = 0, \quad O_1 \sin \alpha + V_A &= 0, \\ \sum y' = 0, \quad -U_1 \sin \alpha + V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Решая составленные уравнения, найдем независимо друг от друга продольные силы, возникающие в стержнях этого узла:

$$O_1 = -\frac{V_A}{\sin \alpha}, \quad U_1 = V_A \operatorname{ctg} \alpha - H_A.$$

Последовательность вырезания остальных узлов фермы и составления для них уравнений равновесия показана на рисунок 6.4, в. При этом следует

иметь в виду, что уравнения равновесия для последнего узла являются контрольными и позволяют проверить правильность определения продольных сил.

Метод сечений. В основе метода лежит использование уравнений равновесия произвольной плоской системы сил и применение их к одной из частей фермы, полученной при ее мысленном рассечении через любые три стержня. Оси таких стержней не должны пересекаться в одной точке.

Для каждой отсеченной части фермы можно составить по три независимых уравнения равновесия. Обычно для определения продольной силы в каждом рассеченном стержне составляют уравнение моментов относительно точки пересечения осей двух оставшихся стержней. Такая точка называется **моментной точкой** определяемой продольной силы. Использование моментных точек позволяет отдельно находить продольные силы в рассеченных стержнях.

Если рассечение фермы осуществляется через три стержня, два из которых параллельны, то в этом случае моментная точка для продольной силы третьего стержня лежит в бесконечности. Тогда для ее определения составляется сумма проекций сил на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

Применение метода сечений покажем на примере фермы (рисунок 6.5, а).

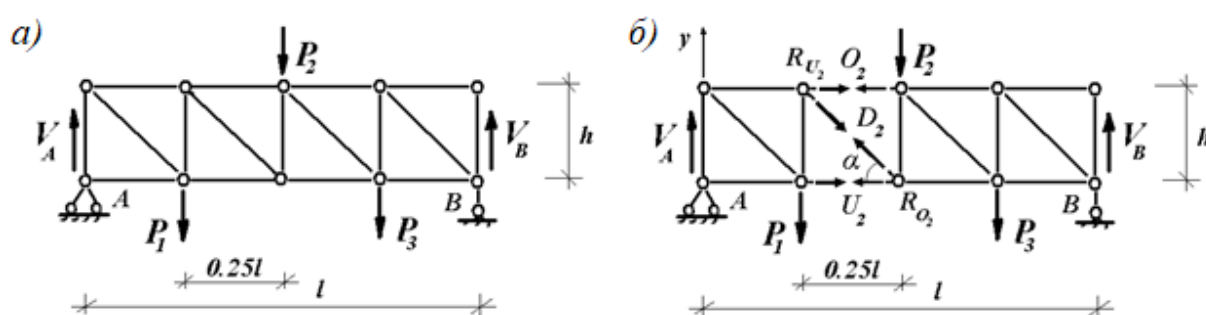


Рисунок 6.5. – Применение метода сечений

Рассечем ферму через вторую панель верхнего и нижнего поясов (см. рисунок 6.5, б) и определим продольные силы в трех перерезанных стержнях – O_2 , U_2 , D_2 , используя уравнения равновесия левой отсеченной части (см. рисунок 6.5, б).

Для определения продольных сил в поясах составим уравнения моментов относительно моментных точек этих продольных сил:

$$\begin{aligned}\sum M_{R_{O_2}}^{\pi.ч.} &= 0, \quad O_2 h + V_A 0,5l - P_1 0,25l = 0; \\ \sum M_{R_{U_2}}^{\pi.ч.} &= 0, \quad -U_2 h + V_A 0,25l = 0; \\ O_2 &= -0,5 \frac{l}{h} (V_A - 0,5P_1), \quad U_2 = 0,25 \frac{l}{h} V_A.\end{aligned}$$

и найдем независимо друг от друга продольные силы, возникающие в поясах:

$$\begin{aligned}\sum M_{R_{O_2}}^{\pi.ч.} &= 0, \quad O_2 h + V_A 0,5l - P_1 0,25l = 0; \\ \sum M_{R_{U_2}}^{\pi.ч.} &= 0, \quad -U_2 h + V_A 0,25l = 0; \\ O_2 &= -0,5 \frac{l}{h} (V_A - 0,5P_1), \quad U_2 = 0,25 \frac{l}{h} V_A.\end{aligned}$$

Для определения внутреннего усилия в раскосе составим уравнение проекций сил на вертикальную ось:

$$\begin{aligned}\sum y^{\pi.ч.} &= 0, \quad -V_2 \sin \alpha + V_A - P_1 = 0, \\ V_2 &= -\frac{1}{\sin \alpha} (V_A - P_1)\end{aligned}$$

и найдем продольную силу, возникающую в раскосе

$$\begin{aligned}\sum y^{\pi.ч.} &= 0, \quad -V_2 \sin \alpha + V_A - P_1 = 0, \\ V_2 &= -\frac{1}{\sin \alpha} (V_A - P_1).\end{aligned}$$

6.4. Понятие и признаки нулевых стержней

Нулевыми стержнями называются стержни, в которых продольные силы при данной схеме узловой нагрузки тождественно равны нулю. Однако такие стержни нельзя считать неработающими вообще. При других схемах нагружения в них могут появиться продольные силы с ненулевыми значениями. Важно уметь до начала расчета фермы определять нулевые стержни, т.к. это позволит дополнительно контролировать его правильность. Существует три признака таких стержней.

Первый признак. В ненагруженном двухстержневом узле фермы оба стержня нулевые.

Для обоснования признака рассмотрим произвольный ненагруженный двухстержневой узел фермы (рисунок 6.6).

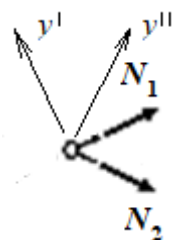


Рисунок 6.6. – Ненагруженный двухстержневой узел фермы

Составим для него уравнения проекций сил на оси y' и y'' , перпендикулярные, соответственно, одному и второму стержню. Из этих уравнений получим

$$\begin{aligned}\sum y' &= 0; \quad N_2 \equiv 0; \\ \sum y'' &= 0; \quad N_1 \equiv 0.\end{aligned}$$

Второй признак. В двухстержневом узле фермы, нагруженном силой вдоль оси одного из стержней, другой стержень нулевой.

Для обоснования признака рассмотрим произвольный двухстержневой узел фермы, нагруженный силой вдоль оси одного из стержней (рисунок 6.7).

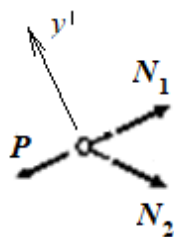


Рисунок 6.7. – Нагруженный двухстержневой узел фермы

Составим для него уравнение проекций сил на ось y' , перпендикулярную линии действия силы. Из этого уравнения получим

$$\sum y' = 0; \quad N_2 \equiv 0.$$

Третий признак. В ненагруженном трехстержневом узле фермы, в котором оси двух стержней лежат на одной прямой, третий стержень нулевой.

Для обоснования признака рассмотрим произвольный ненагруженный трехстержневой узел фермы (рисунок 6.8).

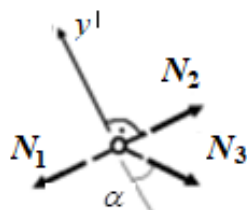


Рисунок 6.8. – Ненагруженный трехстержневой узел фермы

Составим для него уравнение проекций сил на ось y' , перпендикулярную стержням, лежащих по одной прямой. Из этого уравнения получим

$$\sum y' = 0; N_3 \equiv 0.$$

6.5. Примеры к теме

Пример. Определить опорные реакции и продольные усилия в отмеченных стержнях

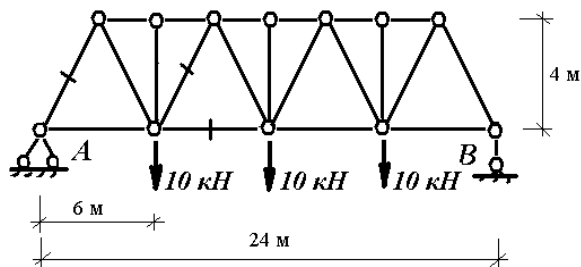


Рисунок 6.9. – Рисунок к примеру

Решение:

1. Определяем опорные реакции (рисунок 6.10).

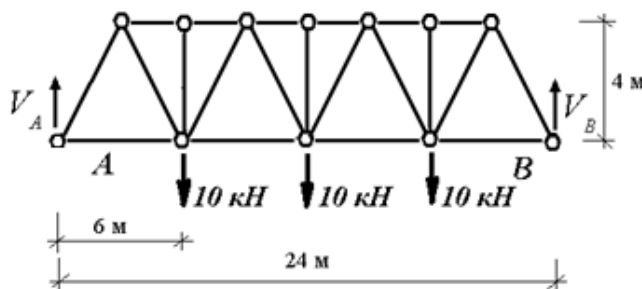


Рисунок 6.10. – Рисунок к определению опорных реакций

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot 24 - 10 \cdot 18 - 10 \cdot 12 - 10 \cdot 6 = 0; V_A = 15 \text{ кН},$$

$$\sum M_A = 0; -V_B \cdot 24 + 10 \cdot 18 + 10 \cdot 12 + 10 \cdot 6 = 0; V_B = 15 \text{ кН}.$$

2. Определяем продольную силу O_1 .

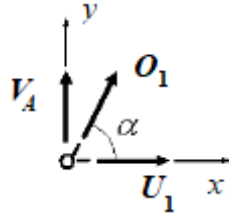


Рисунок 6.11. – Рисунок к определению продольной силы O_1

$$\sum y = 0; O_1 \sin \alpha + V_A = 0,$$

$$O_1 = -\frac{V_A}{\sin \alpha} = -\frac{15}{0.8} = -18,75 \text{ кН}.$$

3. Определяем продольную силу U_2 .

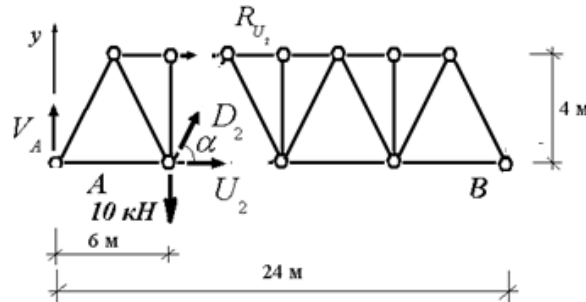


Рисунок 6.12. – Рисунок к определению продольной силы U_2

$$\sum M_{R_{U_2}}^{n.ч.} = 0; -U_2 \cdot 4 + V_A \cdot 9 - 10 \cdot 3 = 0.$$

$$U_2 = \frac{105}{4} = 26,25 \text{ кН}.$$

4. Определяем продольную силу D_2 .

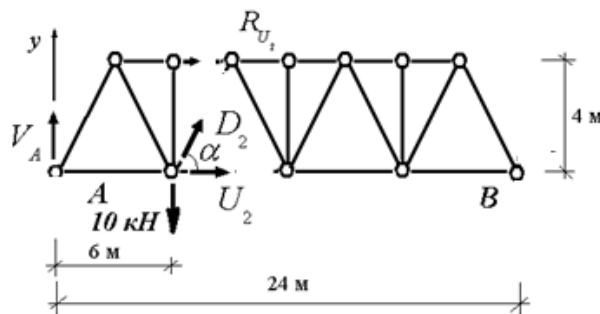


Рисунок 6.13. – Рисунок к определению продольной силы D_2

$$\sum y^{л.ч.} = 0; D_2 \sin \alpha - 10 + V_A = 0.$$

$$D_2 = -\frac{V_A - 10}{\sin \alpha} = -\frac{5}{0,8} = -6,25 \text{ кН}.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что собой представляет реальная ферма?
2. Что называется расчетной схемой фермы?
3. Как называются и обозначаются различные стержни ферм?
4. Как называются характерные геометрические размеры ферм?
5. Как различают фермы по способу образования геометрической структуры?
6. Что лежит в основе определения продольных сил в стержнях фермы методом вырезания узлов?
7. Что лежит в основе определения продольных сил в стержнях фермы методом сечений?
8. Что называется нулевыми стержнями фермы?
9. Как формулируются три признака нулевых стержней?

ТЕМА 7. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела

Цели изучения темы

Разобраться с понятием центра параллельных сил и его применением к определению центра тяжести твердого тела.

Рассмотреть формулы для определения координат центров тяжести объема, плоской фигуры и линии.

Разобраться со способами определения координат центров тяжести однородных твердых тел.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [8; 9].

7.1. Центр параллельных сил

Рассмотрим твердое тело, к которому в заданных точках приложены пространственная система параллельных сил, направленных в одну сторону (рисунок 7.1, а).

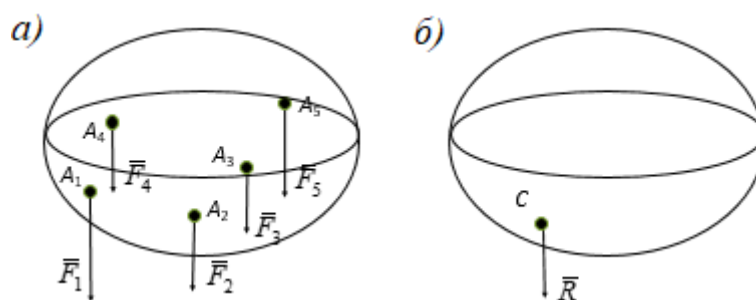


Рисунок 7.1. – Твердое тело с пространственной системой параллельных сил

Последовательно складывая заданные параллельные силы по ранее рассмотренному в теме 5 правилу сложения двух параллельных сил, направленных в одну сторону, получим равнодействующую заданных сил (см. рисунок 7.1, б)

$$R = \sum_i F_i.$$

Точка С, в которой приложена полученная равнодействующая, называется **центром параллельных сил**, а ее координаты определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_i x_i F_i}{R}, \quad y_c = \frac{\sum_i y_i F_i}{R}, \quad z_c = \frac{\sum_i z_i F_i}{R}.$$

7.2. Центр тяжести твердого тела

Любое твердое тело притягивается к Земле. Сила притяжения тела к Земле на ее поверхности называется **весом тела** G . Вес тела направлен к центру Земли, а точка приложения веса тела называется **центром тяжести тела** (рисунок 7.2, а).

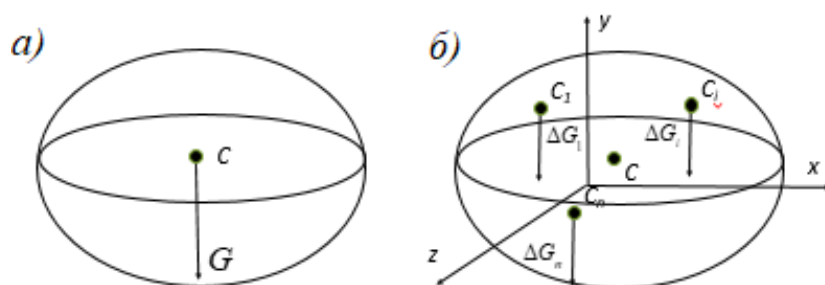


Рисунок 7.2. – К понятию центра тяжести твердого тела

Если разбить твердое тело на отдельные части (см. рисунок 7.2, б), то каждая часть будет притягиваться к центру Земли силой ΔG_k . Размеры Земли значительно больше размеров тел, поэтому можно считать, что силы притяжения отдельных частей являются параллельными силами, направленными в одну сторону. равнодействующая этих параллельных сил считают весом тела G , а центр системы параллельных сил притяжения отдельных частей – центром тяжести тела. Тогда координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum_k x_k \Delta G_k}{G}, \quad y_c = \frac{\sum_k y_k \Delta G_k}{G}, \quad z_c = \frac{\sum_k z_k \Delta G_k}{G},$$

где x_k, y_k, z_k – координаты центра тяжести k -й части тела.

Для однородного тела и его частей веса определяются по формулам

$$G = \gamma \cdot V, \quad \Delta G_k = \gamma \cdot \Delta V_k,$$

где γ – удельный вес материала тела; V – объем тела; ΔV_k – объем k -й части тела. Тогда формулы для координат центров тяжести однородного тела примут вид:

$$x_c = \frac{\sum_k x_k \Delta V_k}{V}, \quad y_c = \frac{\sum_k y_k \Delta V_k}{V}, \quad z_c = \frac{\sum_k z_k \Delta V_k}{V}.$$

В этом случае говорят, что полученные формулы определяют центр тяжести объема.

Если однородное тело представляет из себя пластину постоянной толщины h , то

$$V = h \cdot A, \quad \Delta V_k = h \cdot \Delta A_k,$$

где S – площадь поверхности всей пластины; ΔS_k – площадь поверхности k -й части пластины. В этом случае тело может рассматриваться как плоская фигура, положение центра тяжести которой будет характеризоваться двумя координатами:

$$x_c = \frac{\sum_k x_k \Delta S_k}{S}, \quad y_c = \frac{\sum_k y_k \Delta A_k}{A}$$

В этом случае говорят, что полученные формулы определяют центр тяжести плоской фигуры.

Если однородное тела представляет из себя стержень прямолинейного или криволинейного очертания с постоянной площадью поперечного сечения A , то

$$V = A \cdot l, \Delta V_k = A \cdot \Delta l_k,$$

где l – длина всего стержня; Δl_k – длина k -й части стержня. В этом случае тело может рассматриваться в общем случае как пространственная линия, положение центра тяжести которой описывается формулами

$$x_c = \frac{\sum_k x_k \Delta l_k}{l}, y_c = \frac{\sum_k y_k \Delta l_k}{l}, z_c = \frac{\sum_k z_k \Delta l_k}{l}.$$

В этом случае говорят, что полученные формулы определяют центр тяжести линии.

7.3. Способы определения координат центров тяжести твердых тел

При определении координат центров тяжести однородных тел произвольной формы с помощью полученных выше формул возможно применение следующих способов, упрощающих определение искомых координат.

1. Способ симметрии. В основе данного способа лежит использование трех свойств центра тяжести однородного тела:

- если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести находится на этой плоскости;
- если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести лежит на этой оси;
- если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести находится в центре симметрии.

2. Способ разбиения на части. В основе данного способа лежит разбиение однородного тела части, центры тяжести которых известны. Тогда в соответствующие формулы для нахождения координат центра тяжести всего тела входят объемы, площади или длины этих частей тела.

3. Способ отрицательных площадей. Данный способ удобен при определении центра тяжести тел, имеющих вырезанные части. При этом тело разбивают на части, считая, что вырезанные части тела, в зависимости от их мерности, имеют отрицательные объем, площадь или длину.

4. **Способ интегрирования.** Данный способ применяется, если тело произвольной формы не удастся разбить так, чтобы координаты центров тяжести всех частей были известны. Тогда вычисление координат центра тяжести тела сводится к вычислению интегралов по объему тела, площади фигуры или длине линии.

7.4. Примеры к теме

Пример. Определить координаты центра тяжести плоского тела $R = 1$ м (рисунок 7.3).

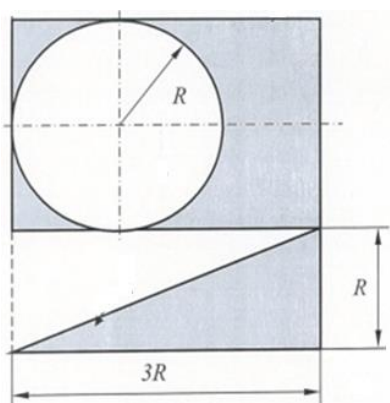


Рисунок 7.3. – Рисунок к примеру

Решение:

1. Введем оси координат (рисунок 7.4).

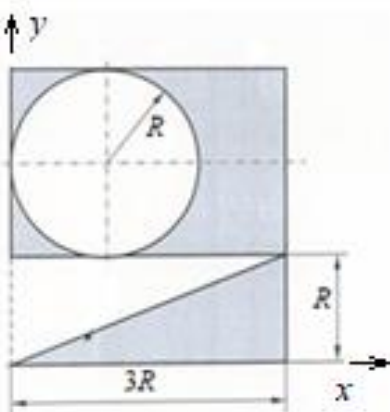


Рисунок 7.4. – Оси координат

2. Разобьем фигуру тела на части: прямоугольник 1, треугольник 2, круг 3, который является частью фигуры с отрицательной площадью (рисунок 7.5).

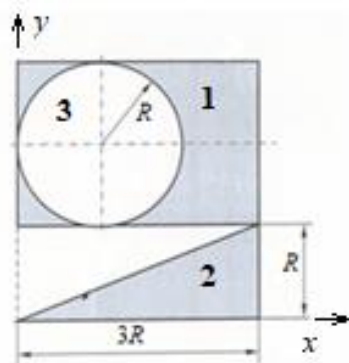


Рисунок 7.5. – Разбиение фигуры тела на части

3. Определяем площадь и координаты центра тяжести прямоугольника 1 (рисунок 7.6).

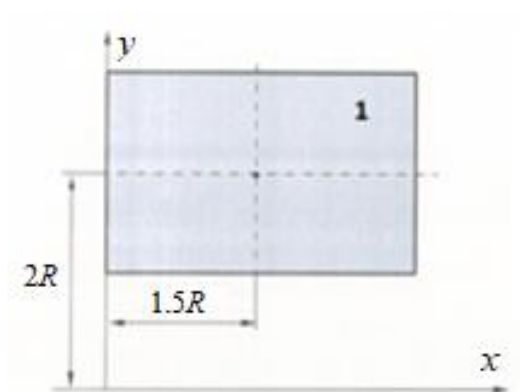


Рисунок 7.6. – К определению площади и координат центра тяжести прямоугольника

$$A_1 = 2R \cdot 3R = 6R^2,$$

$$x_1 = 1,5R = 1,5R,$$

$$y_1 = 2R = 2R.$$

4. Определяем площадь и координаты центра тяжести треугольника 2 (рисунок 7.7).

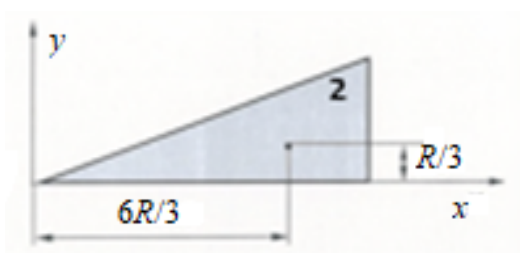


Рисунок 7.7. – К определению площади и координат центра тяжести треугольника

$$A_2 = \frac{1}{2} 3R \cdot R = 1,5 \text{ м}^2,$$

$$x_2 = \frac{2}{3} 3R = 2 \text{ м},$$

$$y_2 = \frac{1}{3} R = \frac{1}{3} \text{ м}.$$

5. Определяем площадь и координаты центра тяжести круга 3 (рисунок 7.8).

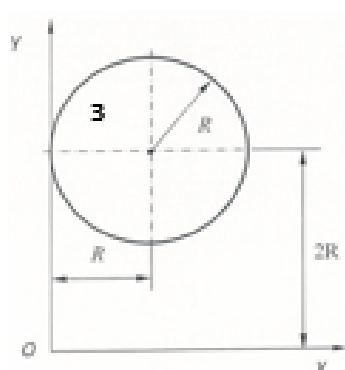


Рисунок 7.8. – К определению площади и координат центра тяжести круга

$$A_3 = -\pi \cdot R^2 = -3,14 \text{ м}^2,$$

$$x_3 = R = 1 \text{ м},$$

$$y_3 = 2R = 2 \text{ м}.$$

6. Определяем координаты центра тяжести плоского тела.

$$x_c = \frac{\sum_i A_i x_i}{\sum_i A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{6 \cdot 1,5 + 1,5 \cdot 2 - 3,14 \cdot 1}{6 + 1,5 - 3,14} = 2,03 \text{ м},$$

$$y_c = \frac{\sum_i A_i y_i}{\sum_i A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{6 \cdot 2 + 1,5 \cdot 0,333 - 3,14 \cdot 2}{6 + 1,5 - 3,14} = 1,43 \text{ м}.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется центром параллельных сил?
2. Что называется центром тяжести твердого тела?
3. По каким формулам определяется центр тяжести твердого тела?

4. По каким формулам определяется центр тяжести объема?
5. По каким формулам определяется центр тяжести плоской фигуры?
6. По каким формулам определяется центр тяжести линии?
7. Что лежит в основе определения центров однородных твердых тел способом симметрии?
8. Что лежит в основе определения центров однородных твердых тел способом разбиения на части?
9. Когда для определения центров однородных твердых тел применяется способ отрицательных площадей?
10. Когда для определения центров однородных твердых тел применяется способ интегрирования?

РАЗДЕЛ II

ОСНОВЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

ТЕМА 8. Основные понятия сопротивления материалов

Цели изучения темы

Выяснить, что изучает наука сопротивление материалов и какой основной элемент искусственных сооружений является предметом ее изучения.

Рассмотреть виды воздействий внешних сил на брус.

Разобраться с понятиями внутренних сил, внутренних усилий и напряжений.

Рассмотреть основные гипотезы и принципы, применяемые в сопротивлении материалов.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [1; 5].

8.1. Введение в сопротивление материалов

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости отдельных элементов искусственных сооружений.

Основным элементом, рассматриваемым в сопротивлении материалов, является **брус** – твердое тело, длина которого существенно больше его поперечных размеров.

Расчеты на прочность связаны с определением размеров бруса, при которых он выдерживает внешнюю нагрузку без опасности разрушения.

Расчеты на жесткость служат для определения размеров бруса, при которых возникающие в нем перемещения при эксплуатационных нагрузках не превышают допустимых значений.

Расчеты на устойчивость служат для определения таких размеров бруса, при которых обеспечивается устойчивость его исходной формы равновесия.

Расчеты бруса на прочность, жесткость и устойчивость производятся с использованием **расчетной схемы**, которая отражает основные геометрические характеристики бруса, его ось и поперечное сечение.

Осью бруса называется линия, соединяющая центры тяжести его поперечных сечений.

Поперечным сечением бруса называется плоская фигура, перпендикулярная к его оси.

На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось. Применяются и другие упрощения, облегчающие его расчет, которые будут рассматриваться в дальнейшем.

Выполнение расчетов бруса базируется на изложенных выше основных положениях теоретической механики. Но при рассмотрении вопросов прочности, жесткости и устойчивости бруса учитываются физические свойства материала, из которого он выполнен и, следовательно, его способность деформироваться при действии внешних сил.

8.2. Виды нагружений бруса внешними силами

Внешние силы в сопротивлении материалов принято называть нагрузками. Нагрузки характеризуются тремя составляющими: величиной, направлением и местом приложения, и их принято классифицировать по следующим признакам: способу приложения; характеру изменения во времени; продолжительности действия; условиям эксплуатации конструкции.

По способу приложения нагрузки принято разделять на **поверхностные** и **объемные**.

Поверхностные нагрузки, действующие по некоторой поверхности бруса, характеризуются интенсивностью нагрузок и измеряются в Н/м^2 или МН/м^2 . Эти единицы, соответственно, также называют Па (Паскаль) и МПа (мега Паскаль). Поверхностные нагрузки могут быть равномерно и неравномерно распределенными.

При расчете бруса поверхностные нагрузки могут приводиться к распределенным по его длине (линии). Такую нагрузку принято называть **погонной нагрузкой** и ее интенсивность измеряется в Н/м , кН/м , МН/м .

Объемные нагрузки действуют на все точки бруса, также характеризуются интенсивностью, которая измеряется в Н/м^3 , кН/м^3 , МН/м^3 . Объемные нагрузки могут быть равномерно и неравномерно распределенными.

По характеру изменения нагрузки во времени различают **статические** и **динамические нагрузки**. При **статических нагрузках** их величина, направление и положение принимаются при расчете не зависящими от времени. При **динамических нагрузках** хотя бы одна из трех составляющих внешних сил изменяется во времени с конечной скоростью.

По продолжительности действия на сооружение нагрузки подразделяются на **постоянные** и **временные**. **Постоянные нагрузки** действуют на конструкцию в течение всего времени эксплуатации, а **временные** – в отдельные промежутки времени ее эксплуатации.

По условиям эксплуатации конструкций нагрузки бывают **нормативными** и **расчетными**. **Нормативные нагрузки** соответствуют нормальным условиям эксплуатации конструкций, **расчетные** – условиям эксплуатации конструкций в предельных состояниях.

При действии на брус внешних сил в нем могут возникать следующие виды **простых нагружений** и соответствующие им формы деформаций (рисунок 8.1):

- растяжение или сжатие;
- сдвиг;
- изгиб;
- кручение.

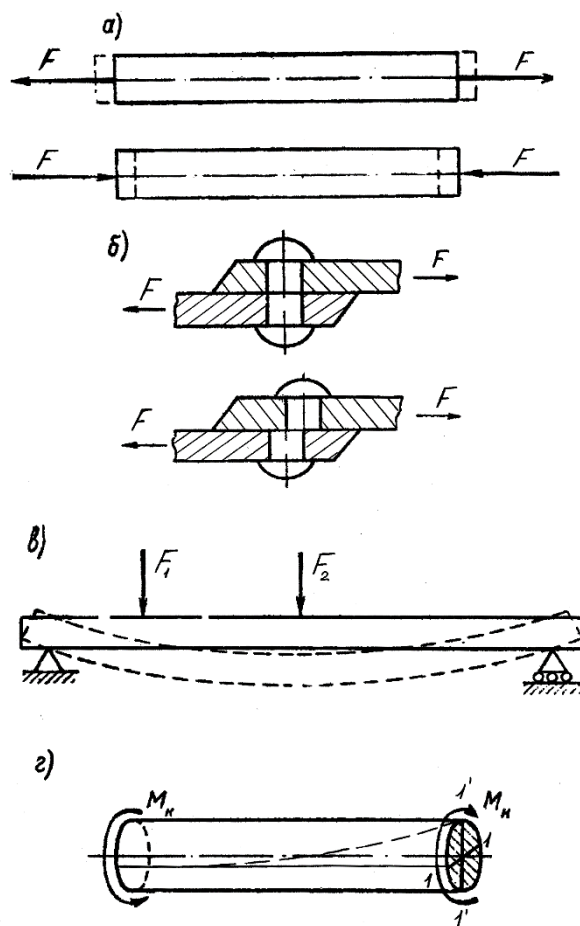


Рисунок 8.1. – Виды простых нагружений бруса

Растяжение или **сжатие** (см. рисунок 8.1, а) возникает в том случае, когда внешние силы направлены по оси прямого бруса и вызывают изменение его длины вдоль оси. При растяжении брус удлиняется, при сжатии укорачивается, но ось его остается прямой.

Сдвиг (см. рисунок 8.1, б) возникает в том случае, когда внешние силы, приложенные к брусу, стремятся сдвинуть одну часть бруса относительно другой его части. На рисунке 8.1, б показана заклепка, которая под действием сил может срезаться, при этом верхняя часть сдвинется относительно нижней.

Изгиб (см. рисунок 8.1, в) возникает в том случае, когда внешние силы, действующие на опертый брус, лежат в плоскости, проходящей через ось бруса, и направлены перпендикулярно к оси бруса. При изгибе ось бруса искривляется.

Кручение (см. рисунок 8.1, г) возникает в том случае, когда на брус действует пара внешних сил, лежащих в плоскостях, перпендикулярных к оси бруса. При кручении круглого бруса прямолинейные образующие превращаются в винтовые линии.

Наряду с простыми нагрузками в брусе могут возникать **сложные нагрузки** (рисунок 8.2), которые представляют собой некоторую комбинацию простых нагрузений. Например, возможны такие комбинации простых нагрузений:

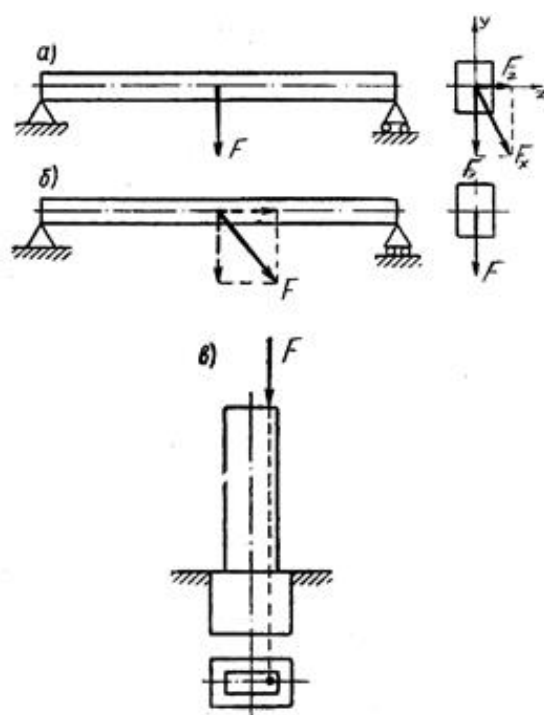


Рисунок 8.2. – Примеры сложных нагрузений бруса

— косоу изгиб, при котором действующие внешние силы вызывают изгиб бруса, происходящий одновременно в двух плоскостях (см. рисунок 8.2, а);

- изгиб, происходящий одновременно с растяжением или сжатием бруса (см. рисунок 8.2, б);
- внецентренное растяжение или сжатие, при котором сила действует на брус параллельно его оси (см. рисунок 8.2, в).

8.3. Внутренние силы, внутренние усилия, напряжения

Под действием внешних сил в брус возникают внутренние силы, которые являются распределенными силами взаимодействия между отдельными частицами бруса, расположенными по разные стороны поперечного сечения. В общем случае нагружения закон распределения внутренних сил по площади поперечного сечения неизвестен.

Для визуализации внутренних сил, возникающих в брус, используется **метод сечений** (рисунок 8.3).

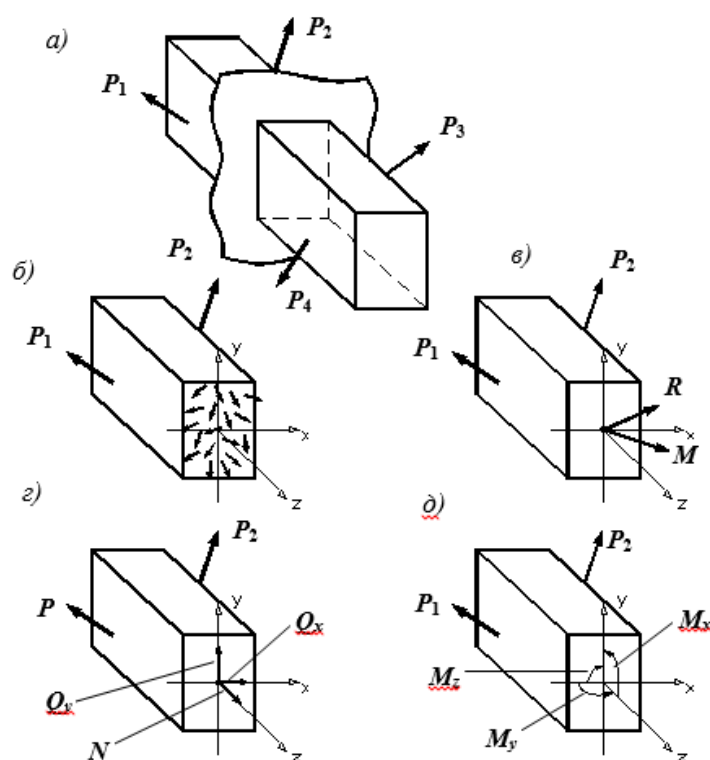


Рисунок 8.3. – Метод сечений

Для этого разрежем брус на две части (см. рисунок 8.3, а) и согласно **принципу освобождаемости от связей** покажем их реакции – распределенную систему неизвестных внутренних сил (см. рисунок 8.3, б). Применяя **правило Пуансо**, приведем их к центру тяжести поперечного сечения и получим

главный вектор и главный момент внутренних сил (см. рисунок 8.3, в). Раскладывая их на составляющие по осям прямоугольной декартовой системы координат получим три силы N, Q_x, Q_y (см. рисунок 8.3, г) и три момента M_x, M_y, M_z (см. рисунок 8.3, д), которые называются **внутренними силовыми факторами** или **внутренними усилиями**, возникающими в поперечном сечении бруса при его деформировании.

Сила N называется **продольной силой**; силы Q_x, Q_y – **поперечными силами**; момент относительно оси z M_z – **крутящим моментом**; моменты относительно осей x, y M_x, M_y – **изгибающими моментами**.

Разрушение бруса не произойдет только в том случае, если эти шесть внутренних усилий сумеют уравновесить внешнюю нагрузку, действующую на его отсеченные части – твердые тела. Уравнения равновесия таких тел были рассмотрены в первом разделе. В сопротивлении материалов их принято обозначать в виде

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0; \sum M_z = 0.$$

Из этих уравнений и определяются внутренние усилия, возникающие в рассматриваемом поперечном сечении стержня. Согласно эти уравнениям следует, что:

- продольная сила N равна сумме проекций всех сил (активных и реактивных), действующих на любую из частей рассеченного бруса, на ось z ;
- поперечные силы Q_x, Q_y равны сумме проекций всех сил, действующих на любую из частей бруса, на оси x и y соответственно;
- изгибающие моменты M_x, M_y равны сумме моментов всех сил, действующих на любую из частей бруса, относительно осей x и y соответственно.

Для описания интенсивности **внутренних сил**, возникающих в произвольной точке поперечного сечения бруса, вводится понятие **напряжения** в этой точке.

Если выделить в окрестности произвольной точки бесконечно малую площадку dA и ввести элементарную равнодействующую внутренних сил dR (рисунок 8.4, а), то отношение и будет характеризовать интенсивность внутренних сил:

$$p = dR/dF.$$

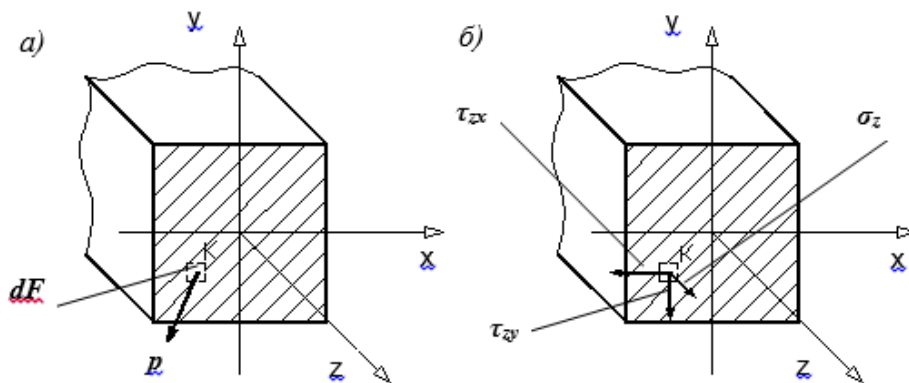


Рисунок 8.4. – Напряжение в произвольной точке поперечного сечения

Эту величину принято называть **полным напряжением**. При расчетах на прочность принято использовать составляющие полного напряжения на оси координат: **нормальное напряжение** σ_z , направленное по перпендикуляру к площадке (параллельно оси z), и **касательные напряжения** τ_{zx} , τ_{zy} , лежащие в плоскости сечения и направленные соответственно вдоль осей x и y (см. рисунок 8.4, б). Первый индекс z у касательных напряжений τ_{zx} , τ_{zy} характеризует нормаль к площадке, на которой они возникают.

В системе СИ напряжение измеряется в Па (Н/м^2) или в МПа (Мн/м^2).

8.4. Основные гипотезы и принципы

В сопротивлении материалов принимают следующие допущения о свойствах материалов рассчитываемых элементов конструкций:

1. Материал однороден, т.е. свойства любых сколь угодно малых его частиц совершенно тождественны.
2. Материал тела полностью заполняет весь объем тела без каких-либо пустот, т.е. тело рассматривается как сплошная среда. Допущение о сплошности можно рассматривать как следствие допущения об однородности материала.
3. Материал изотропен, т.е. физико-механические свойства его по всем направлениям одинаковы.
4. В известных пределах нагружения материал обладает идеальной упругостью.
5. До приложения внешней нагрузки внутренние силы (напряжения) в материале отсутствуют, т.е. не учитывают их существование вследствие термообработки и других причин, их вызывающих.

В отношении характера деформаций конструкций приняты следующие допущения:

1. Перемещения точек конструкции, обусловленные ее упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами элементов конструкции. Следствием этого допущения, называемого **принципом начальных размеров**, является, в частности, возможность не учитывать при составлении уравнений равновесия изменения в расположении и направлении сил, происходящие вследствие деформации конструкции.

2. Перемещения точек элементов конструкции прямо пропорциональны силам, вызвавшим эти перемещения. Конструкции, обладающие указанным свойством, называются **линейно деформируемыми**.

Линейно деформируемые конструкции (системы) подчиняются **принципу независимости действия сил** – результат действия каждой силы в отдельности. Из сказанного следует, что результат действия группы сил не зависит от порядка (последовательности) нагружения ими конструкции.

В сопротивлении материалов применяется **гипотеза плоских сечений** (гипотеза Бернулли). Сечения плоские и нормальные к оси бруса до деформации остаются плоскими и нормальными после деформации.

Так же применяется **принцип Сен-Венана**. Внутренние усилия и напряжения в сечениях достаточно удаленных от мест приложения нагрузки не зависят от характера данной нагрузки. Например, нагрузку, передаваемую колесом на рельс, действующую на определенной площади контакта и по определенному закону, можно заменить сосредоточенной силой.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что изучает сопротивление материалов?
2. Что называется осью бруса?
3. Что называется поперечным сечением бруса?
4. Чем характеризуется нагрузка?
5. По каким признакам принято классифицировать нагрузки?
6. В каких единицах измеряются поверхностные нагрузки?
7. В каких единицах измеряются объемные нагрузки?
8. Как принято классифицировать нагрузки по характеру изменения во времени?
9. Как принято классифицировать нагрузки по продолжительности действия на сооружение?

10. Как принято классифицировать нагрузки по условиям эксплуатации конструкций?
11. Какие бывают виды простых нагружений бруса?
12. Что собой представляют сложные нагружения бруса?
13. Для чего служит метод сечений?
14. Что собой представляют внутренние усилия, возникающие в поперечном сечении бруса?
15. Что называется полным напряжением?
16. Что называется нормальным напряжением?
17. Что называется касательным напряжением?
18. В каких единицах измеряются напряжения?
19. Какие допущения принимаются в сопротивлении материалов о свойствах материалов рассчитываемых элементов конструкций?
20. Какие допущения принимаются в сопротивлении материалов о характере деформаций конструкций?
21. В чем заключается гипотеза плоских сечений?
22. В чем заключается принцип Сен-Венана?

ТЕМА 9. Растяжение-сжатие прямого бруса

Цели изучения темы

Рассмотреть определение внутренних усилий и напряжений в брус при растяжении или сжатии.

Описать числовые характеристики деформации бруса при растяжении или сжатии.

Познакомиться с механическими характеристиками материалов при растяжении.

Рассмотреть методы расчетов конструкций на прочность и жесткость.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [5]

9.1. Внутренние усилия и напряжения бруса при растяжении-сжатии

Растяжением-сжатием называется такой вид простого нагружения, при котором в поперечном сечении прямого бруса возникает только продольная сила (растягивающая или сжимающая), а деформация бруса характеризуется изменением его первоначальной длины.

Растяжение-сжатие вызывается действием силы вдоль оси бруса или систем сил, равнодействующая которых совпадает с осью бруса.

Расчет прямого бруса при растяжении-сжатии включает:

- определение продольных сил в поперечных сечениях;
- определение нормальных напряжений в поперечных сечениях;
- определение продольных перемещений поперечных сечений;
- проверку прочности и жесткости бруса.

Продольные силы, возникающие в поперечных сечениях бруса, определяются с помощью метода сечений (рисунок 9.1).

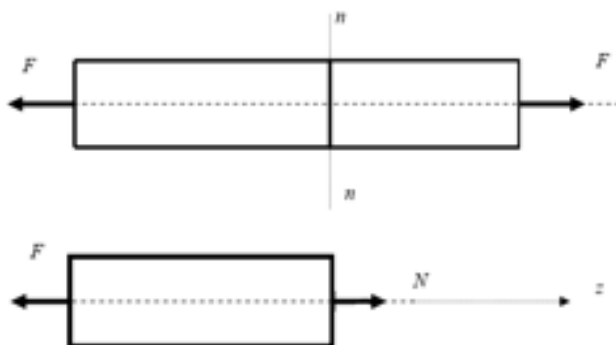


Рисунок 9.1. – Метод сечений

Для определения продольных сил составляется уравнение равновесия – сумма проекций внешних и внутренних сил на ось бруса

$$\sum F_z = 0 \quad N - F = 0 \quad N = F$$

Величины продольных сил не зависят от формы и размеров поперечных сечений бруса.

Продольная сила считается **положительной**, если она направлена от сечения и вызывает **растяжение** бруса (рисунок 9.2, а), и **отрицательной**, если она направлена в сечение и вызывает **сжатие** бруса (рисунок 9.2, б).

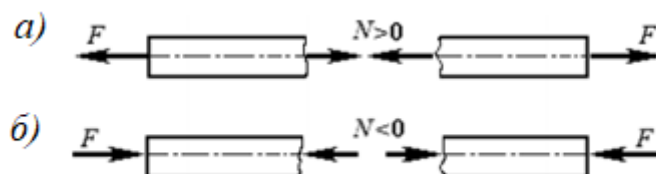


Рисунок 9.2. – Знаки продольных сил

При действии на брус нескольких сил вдоль его оси он разбивается на участки. Границами участков бруса являются:

- сечения, где приложены отдельные силы вдоль оси;
- сечения, где начинается и заканчивается действие распределенных сил вдоль оси;
- опорные и концевые сечения бруса.

Продольные силы, возникающие в поперечных сечениях каждого участка бруса, определяются с помощью метода сечений и уравнений равновесия, составляемых для одной из отсеченных частей стержня.

При действии на брус нескольких внешних сил, приложенных в разных точках по его оси, принято строить графики, показывающие изменение продольных сил в сечениях по длине бруса.

График, показывающий изменение продольных сил по длине бруса, называется **эпюрой продольных сил**. Эпюра продольных сил дает наглядное представление о законе изменения продольной силы в брус в целом и на каждом его участке.

Порядок построения эпюр продольных сил:

- изображается схема бруса с приложенными внешними силами;
- определяются границы участков;
- проводятся на каждом участке рассечения бруса на две части;
- определяются для каждого участка продольные силы из уравнений равновесия любой части бруса, получившихся при его рассечении на рассматриваемом участке;
- определяются значения ординат эпюры участка, подставляя в полученное выражение для продольной силы рассматриваемого участка значения координат начала и конца участка;
- откладываются на оси бруса полученные значения ординат с учетом знака.

Продольная сила N , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределенных по площади поперечного сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями зависимостью

$$N = \int_A \sigma dA,$$

здесь σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dA ; A – площадь поперечного сечения бруса.

Для нахождения напряжений σ в каждой точке поперечного сечения бруса надо знать закон их распределения по этому сечению.

Если на боковой поверхности бруса до его нагружения провести линии, перпендикулярные оси бруса, то каждую такую линию можно рассматривать как след плоскости поперечного сечения бруса. При нагружении бруса осевой силой F эти линии, как показывает опыт, остаются прямыми и параллельными между собой. Это позволяет предполагать, что поперечные сечения бруса, плоские до его нагружения, остаются плоскими и при действии нагрузки. Такой опыт подтверждает гипотезу плоских сечений.

Это позволяет предположить, что внутренние силы по площади поперечного сечения распределяются равномерно и напряжения во всех точках поперечного сечения имеют одинаковую величину. Таким образом,

$$N = \sigma \int_A dA = \sigma \cdot A,$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

При действии на брус нескольких внешних сил нормальные напряжения определяются для каждого участка. Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня (по его длине) строится эпюра нормальных напряжений.

Осью этой эпюры является отрезок прямой, равной длине стержня и параллельной его оси. Для стержня постоянного сечения эпюра нормальных напряжений имеет такой же вид, как и эпюра продольных сил, отличаясь лишь выбранным масштабом. Для стержня переменного сечения вид этих двух эпюр различен; в частности, для стержня со ступенчатым законом изменения поперечных сечений эпюра нормальных напряжений имеет скачки не только в сечениях, в которых приложены сосредоточенные нагрузки, но и в местах изменения размеров поперечных сечений.

9.2. Деформации и перемещения бруса при растяжении-сжатии

Деформация бруса при растяжении-сжатии характеризуется изменением его размеров (рисунок 9.3, а). При растяжении длина бруса увеличивается, поперечные размеры уменьшаются (рисунок 9.3, б), а при сжатии длина бруса уменьшается, а поперечные размеры увеличиваются (рисунок 9.3, в).

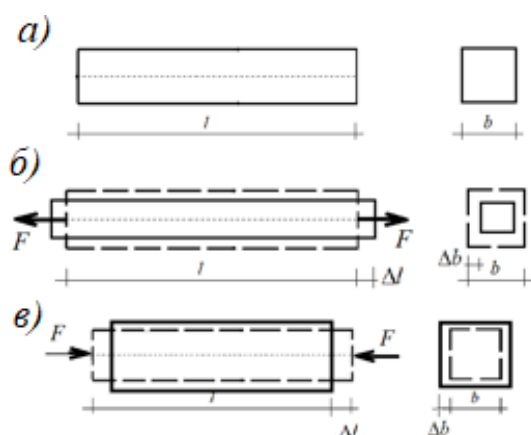


Рисунок 9.3. – Деформация бруса при растяжении-сжатии

Изменение длины бруса характеризуется абсолютной продольной деформацией и определяется по формуле

$$\Delta l = l_1 - l.$$

Увеличение длины бруса называется **абсолютным удлинением** и это положительная величина. Уменьшение длины бруса называется **абсолютным укорочением** и это отрицательная величина.

Абсолютная продольная деформация бруса измеряется в единицах длины – мм, см.

Величина абсолютного удлинения или укорочения зависит от длины бруса и не дает общего представления о значительности этого влияния на его продольную деформацию. Поэтому для оценки влияния длины на деформацию бруса вводится понятие **относительной продольной деформации**. Она характеризует долю абсолютной продольной деформации, приходящейся на единицу длины бруса, и определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Относительная продольная деформация бруса – величина безразмерная.

Изменение размеров поперечного сечения бруса характеризуется **абсолютной поперечной деформацией** и определяется по формуле

$$\Delta b = b_1 - b.$$

Уменьшение размеров поперечного сечения бруса при растяжении называется **абсолютным сужением** и это отрицательная величина. Увеличение

размеров поперечного сечения бруса при сжатии называется **абсолютным расширением** и это положительная величина.

Абсолютная поперечная деформация бруса измеряется в единицах длины – мм, см.

Величина абсолютного сужения или расширения зависит от размеров поперечного сечения бруса и не дает общего представления о значительности этого влияния на поперечную деформацию бруса. Поэтому для оценки влияния размеров поперечного сечения на деформацию бруса вводится понятие **относительной поперечной деформации**. Она характеризует долю абсолютной поперечной деформации, приходящейся на единицу ширины или высоты поперечного сечения бруса, и определяется по формуле

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}.$$

Относительная поперечная деформация бруса – величина безразмерная.

Деформация бруса при растяжении-сжатии существенным образом зависят от его материала. Влияние материала на деформацию бруса и его количественные характеристики прежде всего описываются законом Гука и коэффициентом Пуассона.

Если рассматривать упругие деформации бруса, т.е. деформации которые исчезают после прекращения действия нагрузок, то для них опытным путем была установлена линейная зависимость между малыми относительными продольными деформациями и нормальными напряжениями. Такая зависимость называется законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E называется **модулем упругости** при растяжении-сжатии. Модуль упругости является физической константой материала и определяется экспериментально. Величина E измеряется в Па или кратных единицах кПа, МПа.

Коэффициентом Пуассона называется отношение относительного поперечного укорочения к относительному продольному удлинению

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{|\varepsilon|}.$$

Коэффициент Пуассона ν зависит от свойств материала и для различных материалов изменяется в пределах

$$0 \leq \nu \leq 0,5.$$

Перемещение поперечного сечения бруса при растяжении-сжатии показано (рисунок 9.4) в соответствии с законом Гука определяется по формуле

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

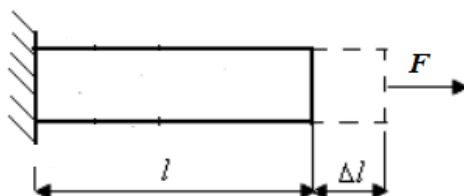


Рисунок 9.4. – Перемещение поперечного сечения бруса

Произведение EA называется жесткостью бруса при его растяжении-сжатии.

9.3. Механические характеристики материалов при растяжении

Для подробного изучения «поведения» различных материалов под нагрузкой производятся лабораторные испытания образцов, изготовленных из этих материалов, на специальных испытательных машинах. Эти испытания проводятся для определения числовых характеристик, позволяющих оценить прочность и пластичность материала. Такие характеристики называются **механическими**.

На рисунке 9.5 изображены круглый и плоский образцы, применяемые при испытании металлов на растяжение

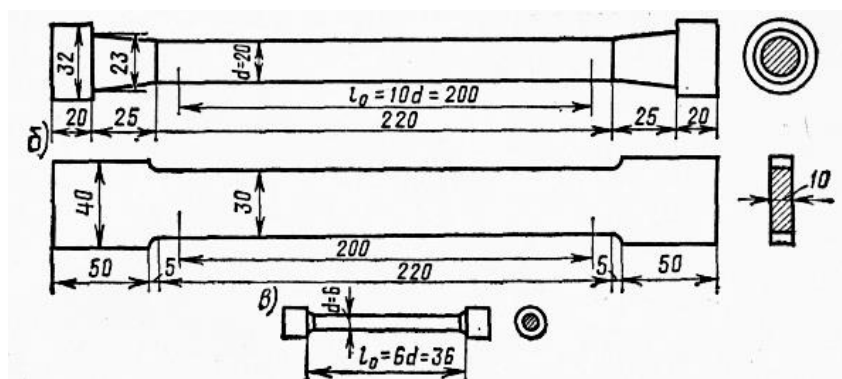


Рисунок 9.5. – Образцы для испытания металлов при растяжении

График зависимости между растягивающей силой P и удлинением образца Δl называется **диаграммой растяжения**. Диаграмма растяжения вычерчивается автоматически самопишущей машиной или может быть построена по точкам путем измерения удлинений образца и соответствующих растягивающих сил.

Для изучения свойств материалов удобнее пользоваться диаграммой растяжения, устанавливающей зависимость между нормальным напряжением σ и деформацией ε .

Обычно в образце вычисляются условные нормальные напряжения путем деления нагрузки P на первоначальную площадь поперечного сечения образца F_0 :

$$\sigma = \frac{P}{F_0},$$

а деформация ε вычисляется путем деления абсолютного удлинения Δl на первоначальную длину образца l_0 :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Рассмотрим подробнее диаграмму растяжения наиболее употребляемой в строительстве малоуглеродистой стали Ст 3 (рисунок 9.6).

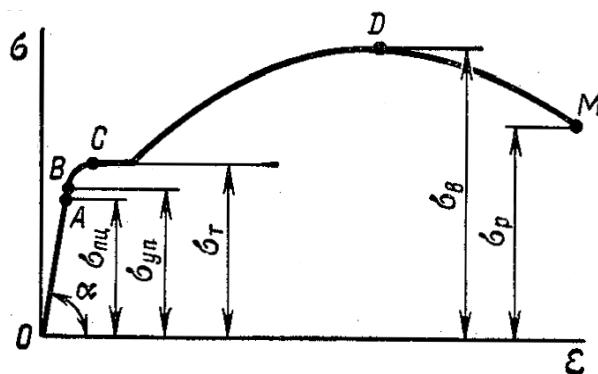


Рисунок 9.6. — Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали Ст 3

На этой диаграмме необходимо отметить ряд характерных точек: A , B , C , D и M .

Вначале на участке OA диаграмма представляет собой наклонную прямую. В этих пределах напряжения σ растут пропорционально деформациям ε , т.е. соблюдается закон Гука, который справедлив до **предела пропорциональности $\sigma_{пц}$** .

Пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$ называется наибольшее напряжение, при котором справедлив закон Гука.

Выше точки *A* диаграмма искривляется, закон Гука нарушается, деформации начинают расти быстрее роста напряжений. Очень близко к точке *A* на криволинейном участке диаграммы можно отметить точку *B*, соответствующую **пределу упругости $\sigma_{уп}$** .

Пределом упругости $\sigma_{уп}$ называется максимальное напряжение, которое может выдержать материал, не обнаруживая признаков остаточной деформации при разгрузке. Точка *B* находится вблизи точки *A*, поэтому их часто считают совпадающими.

Если через точку *B* провести вертикальную линию, то левее этой линии на диаграмме будет зона упругих, а правее – зона упругопластических деформаций, т.к. здесь имеют место и упругие, и пластические деформации.

От некоторой точки *C* диаграмма имеет горизонтальный участок, которому соответствует предел текучести σ_m . На этом участке деформации растут без увеличения нагрузки – материал как бы «течет».

Пределом текучести σ_m называется напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки. Соответственно горизонтальный участок диаграммы называют **площадкой текучести**.

С некоторого момента при дальнейшем увеличении деформаций нагрузка вновь растет. Диаграмма изменяется по плавной кривой с наивысшей точкой *D*, в которой нормальное напряжение принимает наибольшее значение, достигая **предела прочности σ_v** .

Пределом прочности (или временным сопротивлением) σ_v называется отношение наибольшей нагрузки, выдерживаемой образцом, к первоначальной площади его сечения.

До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации образца равномерно распределяются по его расчетной длине.

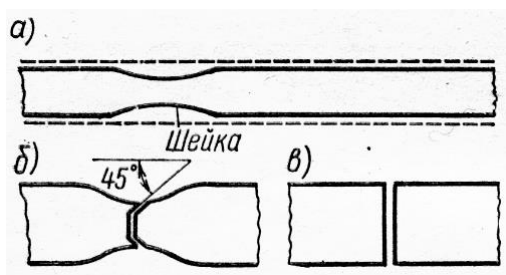


Рисунок 9.7. – Образование шейки

После достижения точки D диаграммы эти деформации концентрируются в одном наиболее слабом месте, где начинает образовываться **шейка** – местное значительное сужение (см. рисунок 9.7), которое быстро прогрессирует.

За точкой D ординаты диаграммы начинают уменьшаться, нагрузка падает, что объясняется дальнейшим уменьшением поперечного сечения шейки. Наконец происходит разрыв образца. Этому на диаграмме соответствуют точка M и условное напряжение σ_p .

9.4. Методы расчетов конструкций на прочность и жесткость

Каждая конструкция, а также любой её элемент под действием нагрузок должны быть прочны. Для решения этой задачи необходимо провести специальные расчеты. Существует три метода решения задачи:

- расчет по разрушающим нагрузкам;
- расчет по допускаемым напряжениям;
- расчет по предельным состояниям.

Расчет по допускаемым напряжениям. В основу расчета по допускаемым напряжениям положено требование, чтобы при работе конструкции ни в одной точке напряжения не превосходили допускаемых. За предел, при котором нарушается прочность материала, для хрупких материалов принимается временное сопротивление, а для пластичных материалов – предел текучести. Допускаемое напряжение берется как некоторая доля от временного сопротивления или от предела текучести путем их деления на **коэффициент запаса прочности для материала**.

Тогда условие прочности конструкции, выполненной из хрупкого материала, выражается в виде

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c],$$

где σ_p и σ_c – наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие напряжения для материала конструкции; $[\sigma_p]$ или σ_{admt} и $[\sigma_c]$ или σ_{admc} – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

Допускаемые напряжения $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ определяются так:

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{\text{вп}}}{[n_b]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{[n_b]},$$

где $[n_b]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности.

Для конструкций из пластических материалов (у которых пределы текучести на растяжение и сжатие одинаковы) используется следующее условие прочности:

$$\sigma \leq [\sigma],$$

где σ – наибольшее по абсолютной величине сжимающее или растягивающее расчетное напряжение для материала конструкции.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ для пластичных материалов определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]},$$

где $[n_m]$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести.

Коэффициенты запаса прочности материала при его растяжении или сжатии назначаются согласно специальным нормативным документам.

Метод расчета по допускаемым напряжениям до 1955 г. применялся в строительном деле и до сих пор применяется в машиностроении.

Расчет по разрушающим нагрузкам. В качестве условия прочности при этом методе расчета выставляется требование, чтобы наибольшая нагрузка на сооружение не превосходила некоторой допускаемой нагрузки $[P]$, которая равна разрушающей (опасной) нагрузке, деленной на некоторый коэффициент $n > 1$, который называется **коэффициентом запаса прочности для конструкций**:

$$P_{\max} \leq [P] = \frac{P_{\text{раз}}}{n}.$$

Коэффициент запаса прочности для конструкций принимался на основе специальных нормативных документов, подобных тем, которые используются в методе расчета по допускаемым напряжениям.

В настоящее время этот метод при расчете конструкций нигде не используется.

Расчет по предельным состояниям. При расчете прочности конструкций одним коэффициентом запаса, используемым в методах расчета по допускаемым напряжениям и разрушающим нагрузкам, трудно учесть многочисленные факторы, которые для различных сооружений могут проявляться в разных сочетаниях.

Для более полного учета влияния различных факторов строительные конструкции в настоящее время рассчитываются по методу предельных состояний.

Предельным состоянием называется такое состояние конструкции, при достижении которого считается невозможной ее дальнейшая нормальная эксплуатация.

Нормативными документами установлены расчеты конструкций по двум группам предельных состояний.

Расчет по предельным состояниям первой группы (или расчет по несущей способности). Такой расчет преследует цель обеспечить прочность как конструкции в целом, так и отдельных ее элементов.

Условие соблюдения этого предельного состояния имеет вид

$$S_{\max} \leq \Phi_{\min},$$

где $S_{\max}$ – возможное наибольшее усилие (продольная, поперечная сила, изгибающий момент), возникающее в рассчитываемом элементе конструкции от наиболее неблагоприятного сочетания расчетных внешних воздействий; $\Phi_{\min}$ – наименьшая величина несущей способности рассчитываемого элемента, являющаяся функцией механических характеристик материала, условий его работы и размеров элемента.

Принципиальное отличие расчета прочности конструкции по первому предельному состоянию от расчетов по допускаемым напряжениям и разрушающим нагрузкам заключается в отказе от применения единого коэффициента запаса прочности.

Прочность элементов конструкций зависит от многих причин и поэтому вместо единого коэффициента запаса вводятся четыре коэффициента, которые называются коэффициентами надежности:

γ_f – коэффициент надежности по нагрузке, который учитывает неточности в назначении действующих нагрузок;

γ_c – коэффициент условий работы, который учитывает особенности условий работы конструкции;

γ_m – коэффициент надежности по материалу, который учитывает несоответствие работы материала реальной конструкции и его работы в образцах при статических испытаниях;

γ_n – коэффициент надежности по ответственности, который учитывает экономические, социальные и экологические последствия, которые могут возникать при разрушении сооружения.

Расчет по предельным состояниям второй группы или расчет по жесткости. Такой расчет преследует цель предотвратить появление в конструкции больших деформаций, нарушающих её нормальную эксплуатацию.

Условие соблюдения этого предельного состояния имеет вид

$$\Delta \leq [\Delta],$$

где Δ – величина перемещений от действия нормативных (эксплуатационных) внешних воздействий; $[\Delta]$ – соответствующая предельная величина, установленная нормами и гарантирующая нормальную эксплуатацию конструкции.

9.5. Примеры к теме

Пример. Стальной ступенчатый брус находится под действием продольных сил (рисунок 9.8).

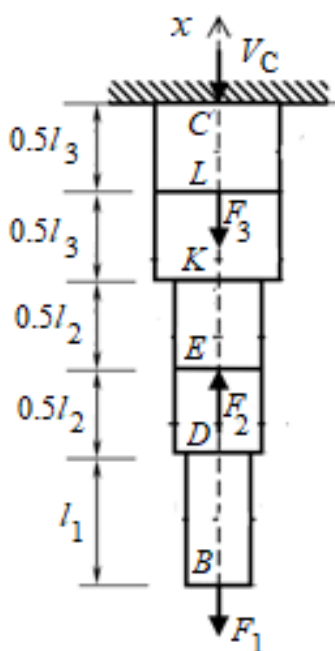


Рисунок 9.8. – Рисунок к примеру

Заданы:

– нормативные значения нагрузок

$$F_1^H = 300 \text{ кН} \quad F_2^H = 1200 \text{ кН} \quad F_3^H = 1500 \text{ кН};$$

– коэффициент надежности по нагрузке

$$\gamma_f = 1.2;$$

– длины ступеней

$$l_1 = l_2 = l_3 = 2 \text{ м};$$

– площади ступеней

$$A_1 = A \quad A_2 = 2A \quad A_3 = 3A \quad A = 26 \text{ см}^2;$$

– расчетное сопротивление материала

$$R = 235 \text{ МПа}.$$

Требуется:

- определить продольные силы и построить их эпюру;
- определить нормальные напряжения и построить их эпюру;
- проверить условие прочности бруса.

Решение:

1. Определяем значения расчетных нагрузок

$$F_1 = F_1^H \cdot \gamma_f = 360 \text{ кН};$$

$$F_2 = F_2^H \cdot \gamma_f = 1440 \text{ кН};$$

$$F_3 = F_3^H \cdot \gamma_f = 1800 \text{ кН}.$$

2. Определяем продольные силы, используя метод сечений (рисунок 9.9).

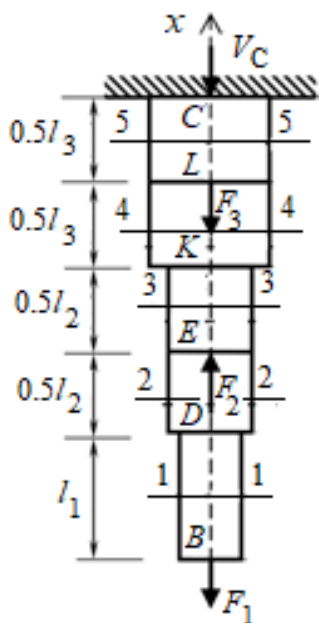


Рисунок 9.9. – Рисунок к определению продольных сил

2.1. Определяем границы участков и их число:

- границы участков - сечения В, D, Е, К, L, С;
- число участков – 5.

2.2. Определяем продольные силы на участках:

- участок BD ($0 \leq x_1 \leq 2$ м) (рисунок 9.10)

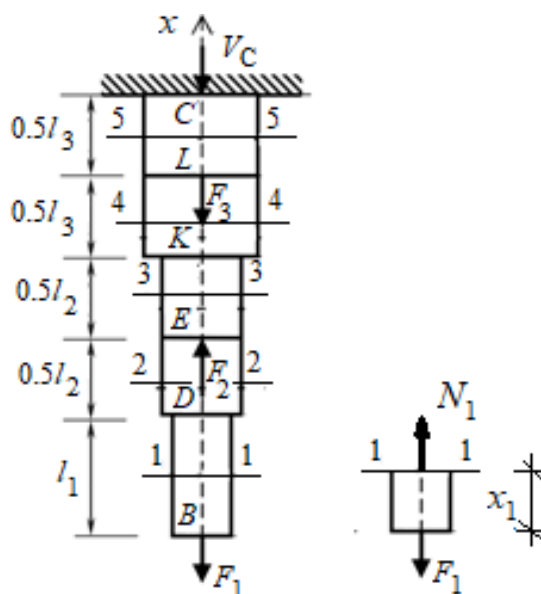


Рисунок 9.10. – К определению продольной силы на участке BD

$$\sum X = 0 \quad N_1 - F_1 = 0 \quad N_1 = F_1 = 360 \text{ кН};$$

- участок DE ($0 \leq x_2 \leq 1$ м) (рисунок 9.11)

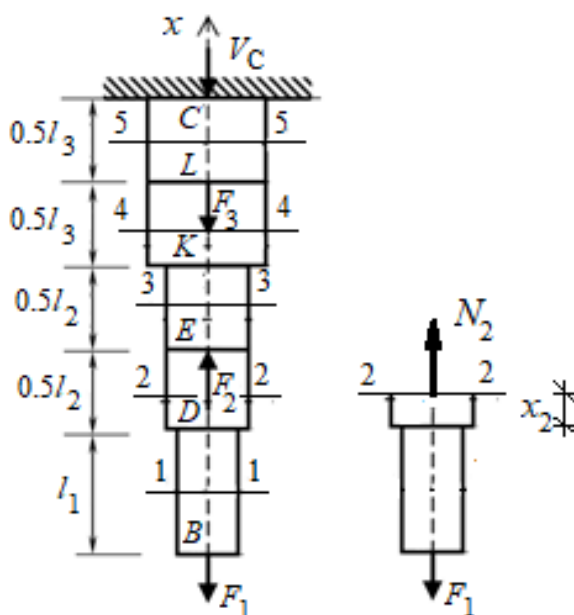


Рисунок 9.11. – К определению продольной силы на участке DE

$$\sum X = 0 \quad N_2 - F_1 = 0 \quad N_2 = F_1 = 360 \text{ кН};$$

- участок EK ($0 \leq x_3 \leq 1$ м) (рисунок 9.12)

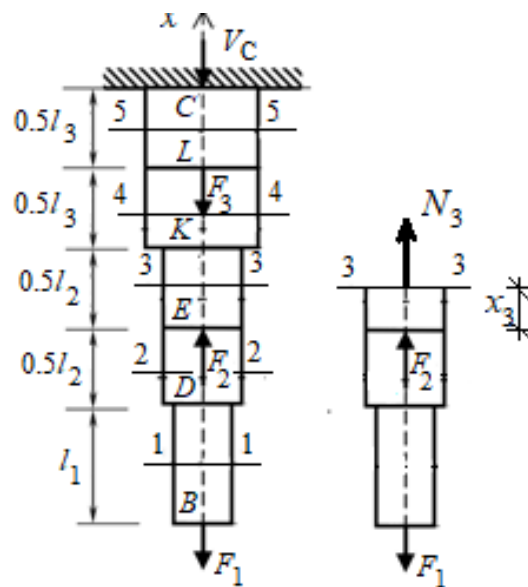


Рисунок 9.12. – К определению продольной силы на участке EK

$$\sum X = 0 \quad N_3 - F_1 + F_2 = 0,$$

$$N_3 = F_1 - F_2 = 360 - 1440 = -1080 \text{ кН};$$

- участок KL ($0 \leq x_4 \leq 1$ м) (рисунок 9.13)

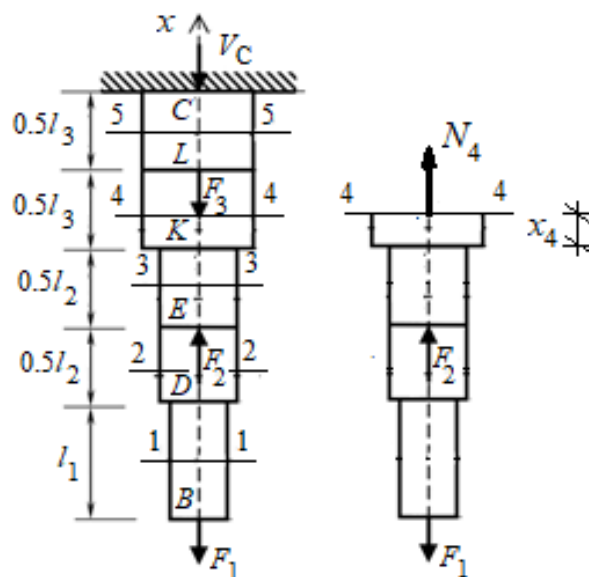


Рисунок 9.13. – К определению продольной силы на участке KL

$$\sum X = 0 \quad N_4 - F_1 + F_2 = 0,$$

$$N_4 = F_1 - F_2 = 360 - 1440 = -1080 \text{ кН};$$

– участок LG ($0 \leq x_5 \leq 1$ м) (рисунок 9.14)

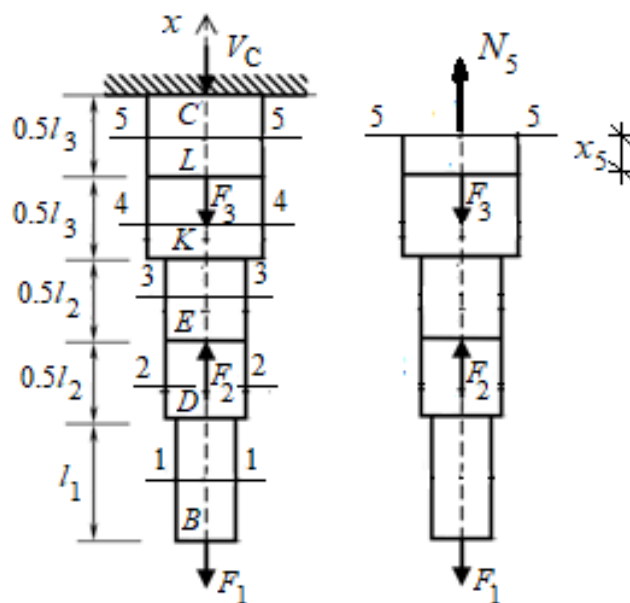


Рисунок 9.14. – К определению продольной силы на участке LG

$$\sum X = 0 \quad N_5 - F_1 + F_2 - F_3 = 0,$$

$$N_5 = F_1 - F_2 + F_3 = 360 - 1440 + 1800 = 720 \text{ кН.}$$

2.3. Строим эпюру продольных сил (рисунок 9.15)

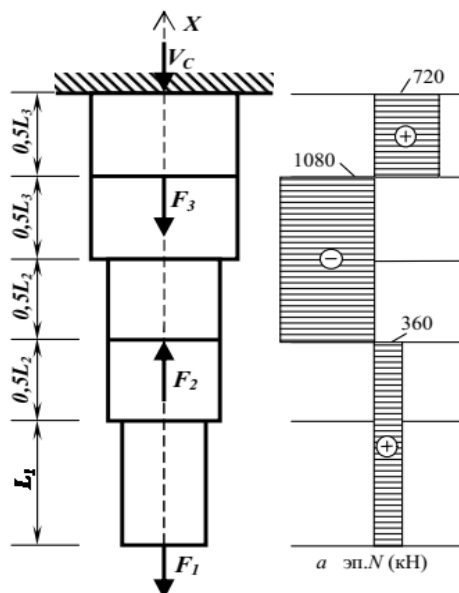


Рисунок 9.15. – Эпюра продольных сил

3. Определяем нормальные напряжения на участках:

– участок BD ($0 \leq x_1 \leq 2$ м)

$$N_1 = 360 \text{ кН} \quad A_1 = A = 26 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{360 \cdot 10^3}{26 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 138,4 \text{ МПа};$$

– участок DE ($0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$)

$$N_2 = 360 \text{ кН} \quad A_2 = 2A = 52 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{360 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 69,2 \text{ МПа};$$

– - участок EK ($0 \leq x_3 \leq 1 \text{ м}$)

$$N_3 = -1080 \text{ кН} \quad A_3 = 2A = 52 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{1080 \cdot 10^3}{52 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -207,7 \text{ МПа};$$

– участок KL ($0 \leq x_4 \leq 1 \text{ м}$)

$$N_4 = -1080 \text{ кН} \quad A_4 = 3A = 78 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{1080 \cdot 10^3}{78 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = -138,4 \text{ МПа};$$

– участок LG ($0 \leq x_5 \leq 1 \text{ м}$)

$$N_5 = 720 \text{ кН} \quad A_5 = 3A = 78 \text{ см}^2,$$

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{A_5} = \frac{720 \cdot 10^3}{78 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-6} = 92,3 \text{ МПа}.$$

4. Строим эпюру нормальных напряжений (рисунок 9.16).

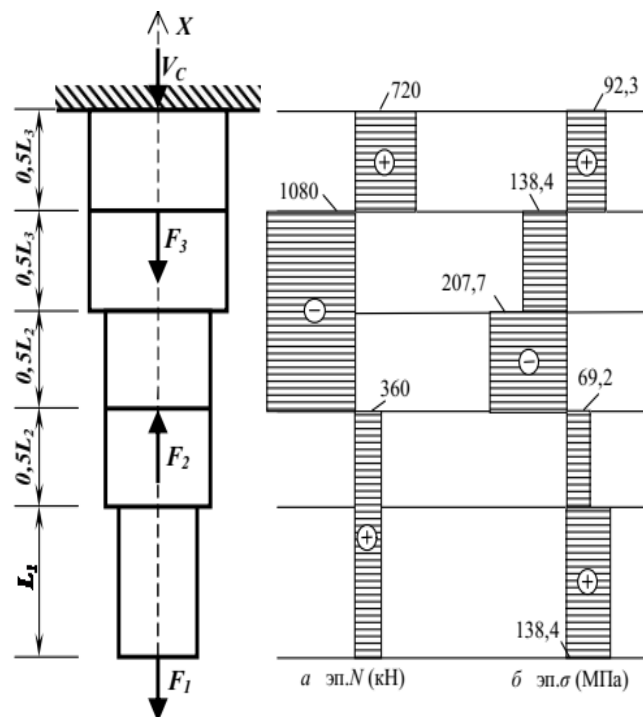


Рисунок 9.16. – Эпюра нормальных напряжений

5. Проверяем условие прочности бруса

$$\sigma_{\max} = |\sigma_3| = 207,7 \text{ МПа} \quad \sigma_{\max} < R = 235 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность бруса обеспечена.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется растяжением/сжатием бруса?
2. Что включает в себя расчет бруса при растяжении/сжатии?
3. Как определяются знаки продольных сил при растяжении/сжатии бруса?
4. Что называется эпюрой продольных сил?
5. Каков порядок построения эпюры продольных сил?
6. По какой формуле определяются нормальные напряжения при растяжении/сжатии бруса?
7. Что происходит с размерами бруса при растяжении?
8. Что происходит с размерами бруса при сжатии?
9. Что называется абсолютным удлинением бруса?
10. Что называется абсолютным укорочением бруса?
11. Что называется относительной продольной деформацией?
12. Что называется абсолютной поперечной деформацией?
13. Что называется абсолютным сужением?
14. Что называется абсолютным расширением?
15. Что называется относительной поперечной деформацией?
16. Что называется модулем упругости материала?
17. Что называется коэффициентом Пуассона?
18. Что называется пределом пропорциональности?
19. Что называется пределом упругости?
20. Что называется пределом текучести?
21. Что называется пределом прочности?
22. В чем суть расчета по допускаемым напряжениям?
23. В чем суть расчета по разрушающим нагрузкам?
24. В чем суть расчета по предельным состояниям первой группы?
25. В чем суть расчета по предельным состояниям второй группы?

ТЕМА 10. Сдвиг

Цели изучения темы

Рассмотреть понятие сдвига, его числовые характеристики и внутренние усилия, возникающие при сдвиге.

Выяснить, какие напряжения возникают при сдвиге и как выглядит для них закон Гука.

Рассмотреть расчеты соединений, работающих на сдвиг.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [1; 5].

10.1. Понятие о сдвиге

Сдвигом называется такой вид простого нагружения, при котором в поперечном сечении прямого бруса возникает только поперечная сила, а деформация бруса характеризуется смещением одной его части относительно другой. Такая деформация будет происходить, если к брусу приложить две равные по значению и противоположно направленные силы F , перпендикулярные к его оси, расстояние между которыми очень мало (рисунок 10.1, а). В этом случае происходит перекашивание прямых углов элементарного прямоугольника $abcd$ и превращения его в параллелограмм $abc'd'$ (рисунок 10.1, б).

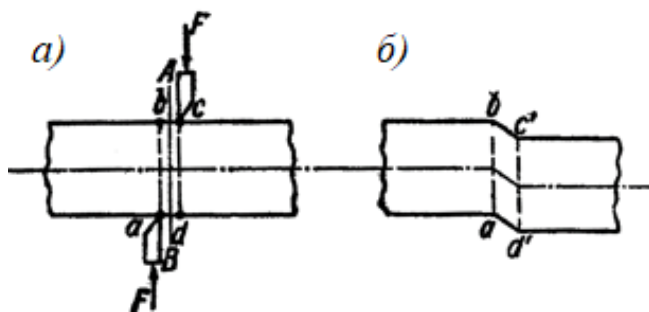


Рисунок 10.1. – Сдвиг

Примером сдвига может служить разрезание разрезании металлических прутков или листов ножницами.

Опишем числовые характеристики сдвига, которые связаны с искажением формы элементарного прямоугольника $abcd$ (рисунок 10.2).

Условно считаем грань ab неподвижной. Величина $cc' = dd' = \Delta S$, на которую сечение cd сдвинулось относительно соседнего сечения ab , очень близко от него расположенного, называется **абсолютным сдвигом**.

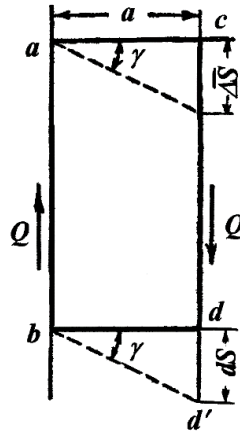


Рисунок 10.2. – Числовые характеристики сдвига

Абсолютный сдвиг зависит от расстояния a между смежными сечениями. Чем больше это расстояние, тем больше будет и величина абсолютного сдвига при прочих одинаковых условиях.

Угол γ , на который изменяются прямые углы, называется **относительным сдвигом**. В упругом состоянии этот угол очень мал. Относительный сдвиг может быть определен из отношения

$$\frac{cc'}{ac} = \frac{\Delta S}{a} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Вследствие малости угла γ тангенс его можно принимать равным самому углу, выраженному в радианах.

Величину поперечной силы Q , возникающей при сдвиге, определим методом сечений. Проведем сечение между двумя срезающими силами (рисунок 10.3, а) и отбросим одну часть, а действие отброшенной части заменим внутренним усилием Q (рисунок 10.3, б). Из условия равновесия найдем:

$$\sum y = 0, \quad Q = F.$$

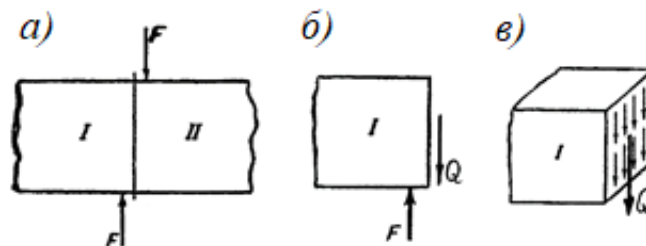


Рисунок 10.3. – К определению поперечной силы

С другой стороны, поперечная сила является равнодействующей внутренних сил, которые лежат в плоскости сечения и численно характеризуются касательными напряжениями τ (см. рисунок 10.3, в):

$$Q = \int_A \tau dA.$$

Тогда из этого выражения получаем формулу для определения касательного напряжения при сдвиге

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

10.2. Закон Гука при сдвиге

На основании экспериментальных данных было установлено, что между касательным напряжением τ и относительным сдвигом γ существует прямая пропорциональность.

$$\tau = G\gamma.$$

Эта зависимость выражает собой **закон Гука при сдвиге**, согласно которому касательное напряжение при сдвиге прямо пропорционально углу сдвига. Величина G называется **модулем упругости при сдвиге** и характеризует собой способность материала сопротивляться деформации сдвига. Так как γ – число отвлеченное, то G имеет такую же размерность, как и τ , т.е. Па или МПа.

Подставив в формулу закона Гука при сдвиге выражения для γ и τ , получим формулу для определения абсолютного сдвига:

$$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}.$$

10.3. Практический расчет соединений, работающих на сдвиг

Рассмотрим основные понятия о расчетах заклепочных и сварных соединений.

Расчет заклепочных соединений. Рассмотрим вначале работу одиночной заклепки, соединяющей три листа (рисунок 10.4, а). Одним из видов разрушения указанного соединения является срез заклепки, который в рассматриваемом случае может происходить по двум сечениям. Поэтому рассматриваемая заклепка называется двухсрезной.

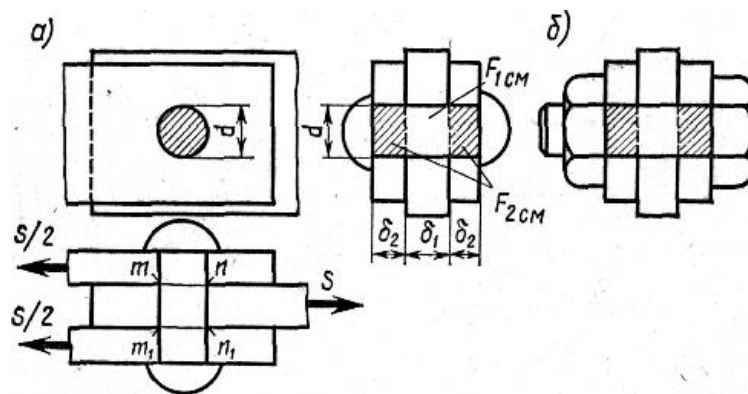


Рисунок 10.4. – Двухсрезная заклепка

Найдем предельную силу S_{cp} , которую может выдержать одна двухсрезная заклепка по условию среза. При этом за момент выхода из строя соединения будем считать состояние текучести в сечениях среза заклепки, сопровождающееся значительным сдвигом листов.

Можно считать, что в момент текучести в каждой точке сечения среза напряжения достигают расчетного предела текучести, который обозначают через R_{cp} . Следовательно, предполагаем, что в предельном состоянии касательные напряжения распределены равномерно по сечению среза и равны R_{cp} . Поэтому

$$S_{cp} = F_{cp} R_{cp},$$

где F_{cp} – площадь двух срезов по сечениям $m-n$ и m_1-n_1 заклепки, равная площади двух кругов диаметром d , где d – диаметр заклепки,

$$F_{cp} = 2 \frac{\pi d^2}{4}.$$

Тогда предельная сила S_{cp} для двухсрезной заклепки будет равняться

$$S_{cp} = \frac{\pi d^2}{2} R_{cp}.$$

Если склепываемый пакет содержит больше трех листов, то заклепка может иметь не два, а большее число срезов. Для заклепки, имеющей k срезов, S_{cp} определяют по формуле

$$S_{cp} = k \frac{\pi d^2}{4} R_{cp}.$$

Помимо среза возможно нарушение соединения вследствие смятия листов или заклепки в месте их контакта. Площадь смятия определяется по формуле

$$F_{cm}^{min} = d \sum \delta,$$

где $\sum \delta$ – наименьшая суммарная толщина листов, сминаемых в одном направлении.

Экспериментально устанавливается расчетная величина условных напряжений смятия R_{cm} . Предельная расчетная сила на одну заклепку по смятию равна

$$S_{cm} = F_{cm}^{min} R_{cm}.$$

Обратимся теперь к определению необходимого числа заклепок при действии на соединение силы N (рис. 10.5).

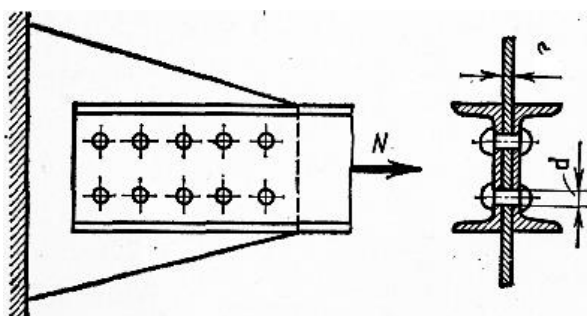


Рисунок 10.5. – К определению числа заклепок соединения

Сделаем допущение о том, что сила распределяется между всеми заклепками поровну. Тогда необходимое число заклепок находится как

$$n = \frac{N}{S_{min}},$$

где S_{min} — меньшая из двух расчетных предельных сил, которую выдерживает одна заклепка по срезу или по смятию.

Подбор сечения и проверку прочности соединяемых элементов производят с учетом ослабления их заклепочными отверстиями, т.е. по площади F_{netto} .

Расчет сварных соединений на срез. Рассмотрим принцип расчет сварного соединения на примере соединения двух листов угловыми швами (рисунок 10.6, а).

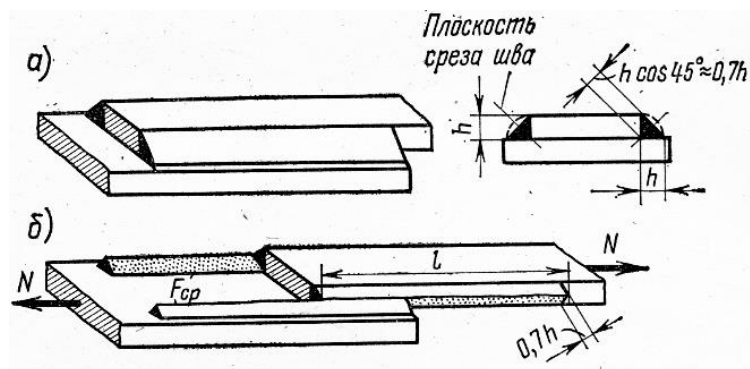


Рисунок 10.6. – К расчету сварных соединений на срез

Сварные соединения не создают ослабления элементов, менее трудоемки, чем другие виды соединения, и потому более экономичны. Они пользуются наибольшим распространением в стальных конструкциях.

Разрушение швов в рассматриваемом соединении происходит от среза по наименьшей возможной площади среза, расположенной в биссекторной плоскости прямого угла, как это показано на рисунке 10.6, б. При этом расчетное поперечное сечение шва принимается в виде треугольника. Обозначая высоту шва через h , получим площадь среза для двух швов:

$$F_{cp} = 2lh \cos 45^\circ \approx 1,4lh.$$

При составлении условия прочности предполагается равномерное распределение касательных напряжений по площади среза шва. Тогда условие прочности примет вид

$$\frac{N}{F_{cp}} = \frac{N}{1,4lh} \leq R_y^{св},$$

где $R_y^{св}$ – расчетное сопротивление материала углового сварного шва на срез; l – расчетная длина одного шва.

Материал шва не имеет, как правило, ярко выраженной площадки текучести. Поэтому в предельном состоянии в сварном шве в отличие от заклепочных соединений касательные напряжения полностью не выравниваются. Исходя из этих соображений ограничивают длину $l \leq 60h$. При этом условии отступление от принятого допущения о равномерном распределении касательных напряжений оказывается не слишком велико. С другой стороны, необходимо, чтобы $l \geq 40$ мм и $l \geq 4h$.

Задавшись высотой шва h , из условия прочности шва на срез можно найти требуемую длину шва.

10.4. Примеры к теме

Пример 1. Два листа толщиной $t=10$ мм соединены внахлестку шестью заклепками диаметром $d=20$ мм (рисунок 10.7). Определить величину допускаемых растягивающих усилий F и необходимую ширину листов b при допускаемых напряжениях: на растяжение $[\sigma]=160$ МПа, на срез $[\tau]=120$ МПа и на смятие $[\sigma_c]=320$ МПа.

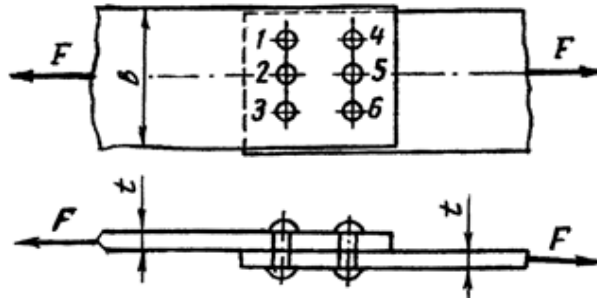


Рисунок 10.7. – К примеру 1

Решение.

1. Определим величину допускаемых растягивающих усилий F из условия прочности заклепочного соединения на срез

$$\tau_{cp} = \frac{Q}{A_{cp}} \leq [\tau].$$

Срезающая сила $Q=F$, а площадь среза для соединения внахлестку

$$A_{cp} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n,$$

где n – число заклепок

$$A_{cp} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} \cdot 6 = 18,84 \text{ см}^2,$$

$$[\tau] = 120 \text{ МПа} = 12 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

$$\frac{F}{A_{cp}} = [\tau].$$

Отсюда

$$F = A_{cp} \cdot [\tau] = 18,84 \cdot 12 \approx 226 \text{ кН}.$$

2. Определим величину допускаемых растягивающих усилий из условия прочности заклепочного соединения на смятие

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{A_{cm}} \leq [\sigma_{cm}].$$

Площадь смятия

$$A_{cm} = t \cdot d \cdot n = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12 \text{ см}^2.$$

Отсюда

$$F = A_{cm} [\sigma_{cm}] = 12 \cdot 32 = 384 \text{ кН}.$$

3. Окончательно выбираем величину допускаемых растягивающих усилий $F = 226 \text{ кН}$, определяющую условие прочности заклепочного соединения на срез.

4. Определим необходимую ширину листов b , исходя из условия прочности ослабленного заклепками сечения листа на растяжение:

$$\sigma = \frac{F}{A_{норм}} \leq [\sigma],$$

$$A_{норм} = t(b - 2d),$$

$$\frac{F}{t(b - 2d)} = [\sigma].$$

$$\frac{226}{1(b - 2 \cdot 2)} = 16; \quad 226 = 16b - 64; \quad b = \frac{226 + 64}{16} = 18,125 \text{ см} \approx 181 \text{ мм}.$$

Пример 2.

Определить необходимую длину фланговых швов для соединения внахлестку двух полос сечением $10 \times 80 \text{ мм}$ и $10 \times 100 \text{ мм}$ (рисунок 5.3), растягиваемых продольными силами F . Допускаемые напряжения принять: на растяжение полос $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, на срез швов $[\tau_s] = 90 \text{ МПа}$. Учесть возможный непровар в начале и в конце каждого шва по 5 мм . ($\ell = \ell_{расч} + 2 \times 5 \text{ мм}$).

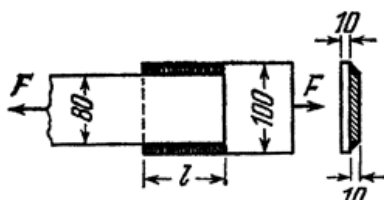


Рисунок 10.8. – К примеру 2

Решение.

1. Определим допускаемую величину растягивающих усилий F из условия прочности полосы сечением 80×10 на растяжение.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{8 \cdot 1} \leq [\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2},$$

$$F = 8 \cdot 16 = 128 \text{ кН}.$$

2. Определим расчетную длину фланговых швов из условия прочности на срез:

$$\tau = \frac{F}{0,7k\ell} \leq [\tau_s],$$

$$\ell = 2\ell_{p.ф.},$$

$$k = 10 \text{ мм} = 1 \text{ см}; [\tau_s] = 90 \text{ МПа} = 9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Отсюда

$$2\ell_{p.ф.} \geq \frac{F}{0,7k[\tau_s]} = \frac{128}{0,7 \cdot 1 \cdot 9} \approx 20,4 \text{ см}.$$

Расчетная длина одного флангового шва $\ell_{p.ф.} = 10,2 \text{ см}$. Действительную длину флангового шва необходимо принять равной

$$\ell = \ell_{p.ф.} + 2 \cdot 0,5 = 10,2 + 1 = 11,2 \text{ см}.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется сдвигом?
2. Что такое абсолютный сдвиг?
3. Что такое относительный сдвиг?
4. По какой формуле определяются касательные напряжения при сдвиге?
5. Какой вид имеет формула закона Гука при сдвиге?
6. Что характеризует модуль упругости при сдвиге?
7. Как определяется предельная сила для двухсрезной заклепки?
8. Как определяется предельная сила для многосрезной заклепки?
9. Как производится расчет сварных соединений на срез?

ТЕМА 11. Геометрические характеристики поперечных сечений

Цели изучения темы

Рассмотреть назначение геометрических характеристик поперечных сечений и их типы.

Рассмотреть определение геометрических характеристик поперечных сечений.

Выяснить зависимость геометрических характеристик поперечных сечений от преобразований координатных осей.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [1; 5].

11.1. Назначение геометрических характеристик поперечных сечений

При оценке прочности и жесткости бруса при различных видах его деформирования существенную роль играют числовые величины, связанные с формой, размерами и ориентацией сечения

Эти числовые величины, характеризующие сопротивляемость бруса различным видам деформаций и зависящие от формы, размеров и ориентации поперечного сечения бруса, называются геометрическими характеристиками поперечного сечения.

Геометрические характеристики поперечного сечения играют важную роль при определении напряжений и перемещений бруса, возникающих при его деформировании. Различают следующие типы поперечных сечений:

- простые поперечные сечения;
- сложные поперечные сечения;
- поперечные сечения прокатных профилей;
- составные поперечные сечения.

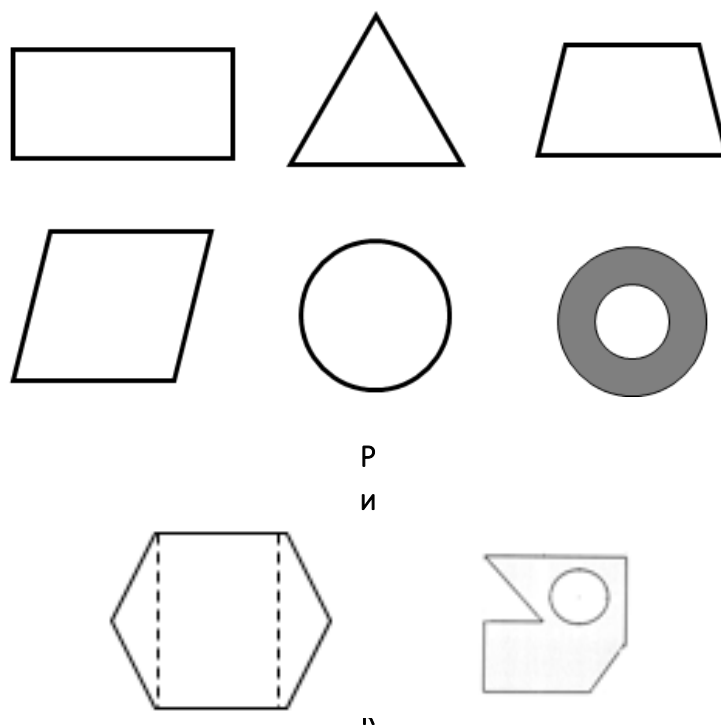


Рисунок 11.2. – Примеры сложных поперечных сечений

Простые поперечные сечения – это сечения, имеющие форму стандартных геометрических фигур. Их основными видами являются прямоугольник, треугольник, трапеция, параллелограмм, круг, кольцо (рисунок 11.1).

– Основные виды простых поперечных сечений

Сложные поперечные сечения – это сечения, которые получаются при объединении нескольких простых сечений. Примеры сложных поперечных сечений приведены на рисунке 11.2.

Поперечные сечения прокатных профилей. Прокатными профилями являются металлические тела, получаемые при их деформировании в горячем или холодном состояниях на прокатных станах металлургических предприятий. Прокатные профили различаются формой и размерами поперечных сечений. Основные виды прокатных профилей: уголок равнополочный (рисунок 11.3, а), уголок неравнополочный (рисунок 11.3, б), двутавр (рисунок 11.3, в), швеллер (рисунок 11.3, д).

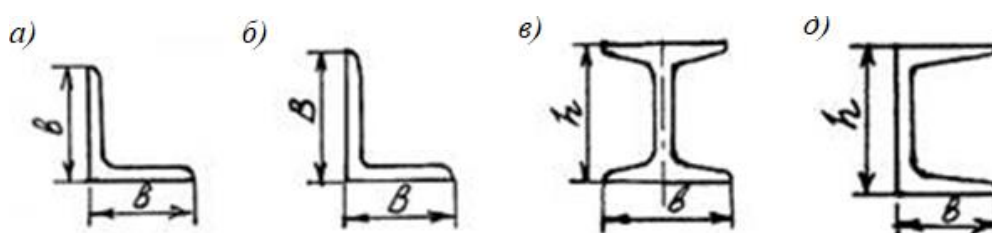
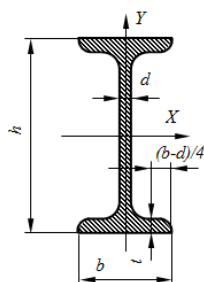


Рисунок 11.3. – Основные виды прокатных профилей

Геометрические характеристики поперечных сечений прокатных профилей определяются согласно сортаменту металлопроката. Сортамент металлопроката – это перечень прокатных профилей, сопровождающийся табличным описанием их размеров и величин геометрических характеристик. Скриншот части сортамента двутавра приведен на рисунке 11.4.

Сортамент двутавров



№ бал-ки	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	d	t			X				Y		
							I_{Xx} см ⁴	W_{Xx} см ³	i_{Xx} см	S_x см ³	I_{Yy} см ⁴	W_{Yy} см ³	i_{Yy} см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70

Рисунок 11.4. – Скриншот части сортамента двутавра

Составные поперечные сечения – это сечения, которые получаются при объединении простых сечений и сечений прокатных профилей, или только сечений прокатных профилей. Примеры составных поперечных сечений приведены на рисунке 11.5.

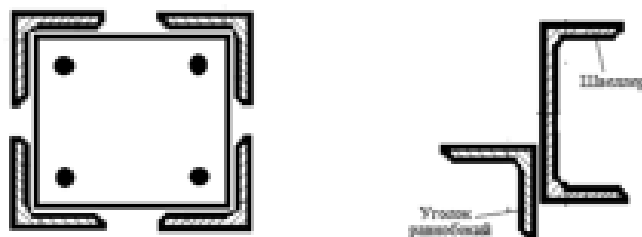


Рисунок 11.5. – Примеры составных поперечных сечений

Различают следующие виды геометрических характеристик произвольного поперечного сечения:

- площадь поперечного сечения;
- статический момент поперечного сечения;
- моменты инерции поперечного сечения.

Если рассмотреть произвольное поперечное сечение (рисунок 11.6),

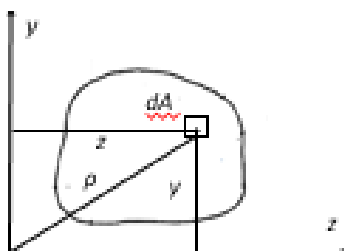


Рисунок 11.6. – Произвольное поперечное сечение

то все геометрические характеристики такого сечения описываются общим математическим выражением

$$\int_A y^m z^n dA. \quad (11.1)$$

Определение значений геометрических характеристик поперечного сечения зависит от его типа.

Для простых поперечных сечений оно производится по готовым формулам соответствующих геометрических фигур.

Для поперечных сечений прокатных профилей значения геометрических характеристик берутся из таблиц сортамента металлопроката.

Для сложных и составных поперечных сечений определение значений геометрических характеристик производится по специальным правилам на основе значений соответствующих геометрических характеристик отдельных частей сложного или составного сечений.

11.2. Определение площади поперечных сечений

Площадь поперечного сечения A является геометрической характеристикой, которой в выражении (11.1) соответствуют следующие значения m и n :

$$m=0, \quad n=0.$$

Тогда для произвольного поперечного сечения выражение (11.1) примет вид

$$A = \int_A dA. \quad (11.2)$$

Согласно (11.2) площадь поперечного является суммой элементарных площадей. Определение площади поперечного сечения зависит от его типа.

Простые поперечные сечения. Вычисление площадей простых поперечных сечений производится по готовым формулам соответствующих геометрических фигур.

Сложные поперечные сечения. Вычисление площадей сложных поперечных сечений производится сложением площадей отдельных частей сложного сечения.

Поперечные сечения прокатных профилей. Значения площадей сечений прокатных профилей берутся из соответствующих таблиц сортамента металлопроката.

Составные поперечные сечения. Вычисление площадей составных поперечных сечений производится сложением площадей составных частей сечения.

Независимо от типа сечения площадь характеризуется следующими общими положениями:

- площадь всегда величина положительная и не зависит от системы координат
- площадь измеряется в см^2 , м^2 ;
- площадь характеризует сопротивляемость бруса растяжению, сжатию, сдвигу.

11.3. Определение статического момента поперечных сечений

Статический момент поперечного сечения S является геометрической характеристикой, которой в выражении (11.1) соответствуют два сочетания значений m и n

$$m=1, n=0$$

и

$$m=0, n=1.$$

Тогда для произвольного поперечного сечения выражение (11.1) в первом случае сочетания значений m и n примет вид

$$S_z = \int_A y dA, \quad (11.3)$$

оно описывает статический момент поперечного сечения относительно оси z .

Во втором сочетании значений m и n выражение (11.1) примет вид

$$S_y = \int_A z dA, \quad (11.4)$$

оно описывает статический момент поперечного сечения относительно оси y .

Согласно полученным выражениям (11.3), (11.4) статический момент относительно некоторой оси это сумма произведений элементарных площадей dA на их расстояние до данной оси, взятая по всей площади сечения A .

Если представить каждую элементарную площадку как элементарную силу, то сумма произведений элементарных площадок на расстояние до оси составит алгебраическую сумму моментов всех сил относительно этой оси. По теореме Вариньона она должна равняться моменту равнодействующей относительно этой оси.

Равнодействующей в этом случае будет суммарная площадь A сечения, и приложена она в центре тяжести сечения. Расстояние до оси равно координате центра тяжести z_c или y_c

$$S_z = A \cdot y_c, \quad S_y = A \cdot z_c. \quad (11.5)$$

Из (11.5) следует, что статические моменты поперечного сечения относительно его осей, проходящих через центр тяжести, равняются нулю. Такие оси называются центральными осями сечения.

Определение статических моментов поперечного сечения зависит от его типа.

Простые поперечные сечения. Статические моменты простых поперечных сечений относительно произвольной оси получаются умножением площади сечения на расстояние от центра тяжести сечения до оси.

Сложные поперечные сечения. Статический момент сложного поперечного сечения вычисляется как сумма статических моментов простых поперечных сечений, на которые можно разбить рассматриваемое сложное поперечное сечение.

Поперечные сечения прокатных профилей. Значения статических моментов сечений прокатных профилей берутся из соответствующих таблиц сортамента металлопроката.

Составные поперечные сечения. Статический момент составного поперечного сечения вычисляется как сумма статических моментов составных частей сечения.

Независимо от типа сечения статический момент характеризуется следующими общими положениями:

- статический момент может принимать различные значения (положительные, отрицательные и равные нулю)
- величина статического момента зависит от положения оси;
- статический момент измеряется в см^3 , м^3 ;
- статический момент используется при определении положения центра тяжести сложного и составного сечений

11.4. Определение моментов инерции поперечных сечений

Различают следующие виды моментов инерции поперечного сечения:

- осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси;
- центробежный момент инерции поперечного сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей.

Осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси является геометрической характеристикой, которой в выражении (11.1) соответствуют два сочетания значений m и n

$$m=2, n=0$$

и

$$m=0, n=2.$$

Тогда для произвольного поперечного сечения выражение (11.1) в первом случае сочетания значений m и n примет вид

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad (11.6)$$

и оно описывает осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси z .

Во втором сочетании значений m и n выражение (11.1) примет вид

$$I_y = \int_A z^2 dA, \quad (11.7)$$

и оно описывает осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y .

Согласно полученным выражениям (11.6), (11.7) статический момент относительно некоторой оси – это сумма произведений элементарных площадей dA на квадрат их расстояние до данной оси, взятая по всей площади сечения A .

Определение осевых моментов инерции поперечного сечения относительно оси зависит от его типа.

Простые поперечные сечения. Вычисление осевых моментов инерции простых поперечных сечений производится по готовым формулам соответствующих геометрических фигур, приводимых в справочниках

Сложные поперечные сечения. Осевой момент инерции сложного поперечного сечения вычисляется как сумма осевых моментов инерции простых поперечных сечений, на которые можно разбить рассматриваемое сложное поперечное сечение.

Поперечные сечения прокатных профилей. Значения осевых моментов инерции сечений прокатных профилей берутся из соответствующих таблиц сортамента металлопроката.

Составные поперечные сечения. Осевой момент инерции составного поперечного сечения вычисляется как сумма осевых моментов инерции отдельных составных частей сечения.

Независимо от типа сечения осевой момент инерции характеризуется следующими общими положениями:

– осевой момент инерции поперечного сечения может принимать только положительные значения;

- величина осевого момента инерции поперечного сечения зависит от положения оси;
- осевой момент инерции поперечного сечения измеряется в $\text{см}^4, \text{м}^4$;
- осевой момент инерции поперечного сечения характеризует сопротивляемость бруса изгибу в плоскости перпендикулярной оси, относительно которой он вычислялся.

Центробежный момент инерции поперечного сечения является геометрической характеристикой, которой в выражении (11.1) соответствует сочетание значений m и n

$$m=1, n=1.$$

Тогда для произвольного поперечного сечения выражение (11.1) примет вид

$$I_{yz} = \int_A yz dA, \quad (11.8)$$

и оно описывает центробежный момент инерции поперечного сечения относительно декартовых осей координат y и z .

Согласно полученным выражениям (11.6), (11.7) статический момент относительно некоторой оси – это сумма произведений элементарных площадей dA на квадрат их расстояния до данной оси, взятая по всей площади сечения A .

Определение центробежного момента инерции поперечного сечения зависит от его типа.

Простые поперечные сечения. Вычисление центробежных моментов инерции простых поперечных сечений производится по готовым формулам соответствующих геометрических фигур, приводимых в справочниках. Центробежные моменты инерции простых симметричных поперечных сечений равняются нулю.

Сложные поперечные сечения. Центробежный момент инерции сложного поперечного сечения вычисляется как сумма центробежных моментов инерции простых поперечных сечений, на которые можно разбить рассматриваемое сложное поперечное сечение.

Поперечные сечения прокатных профилей. Значения центробежных моментов инерции сечений прокатных профилей берутся из соответствующих таблиц сортамента металлопроката.

Центробежные моменты инерции поперечных сечений прокатных профилей относительно центральных осей, из которых хотя бы одна является осью симметрии, равняются нулю.

Составные поперечные сечения. Центробежный момент инерции составного поперечного сечения вычисляется как сумма центробежных моментов инерции отдельных составных частей сечения.

Независимо от типа сечения центробежный момент инерции характеризуется следующими общими положениями:

- центробежный момент инерции поперечного сечения может принимать различные значения (положительные, отрицательные и равные нулю);
- величина центробежного момента инерции поперечного сечения зависит от положения осей;
- центробежный момент инерции поперечного сечения измеряется в см^4 , м^4 ;
- центробежный момент инерции поперечного сечения влияет на сопротивляемость бруса изгибу.

Полярный момент инерции поперечного сечения является геометрической характеристикой, связанной с его осевыми моментами инерции следующей формулой:

$$I_p = I_y + I_z,$$

и он характеризует сопротивляемость бруса кручению в плоскости перпендикулярной оси бруса.

11.5. Изменение моментов инерции поперечных сечений при преобразованиях координатных осей

При вычислении моментов инерции поперечных сечений возможны два вида преобразований координатных осей:

- параллельный перенос осей координат в новое положение;
- поворот осей относительно начала координат.

Выясним, как изменяются моменты инерции поперечного сечения в первом случае. Рассмотрим произвольное поперечное сечение с заданным положением осей y и z и новым положением осей y_1 и z_1 , которые параллельны исходным осям и сдвинуты относительно их на a и b (рисунок 11.7).

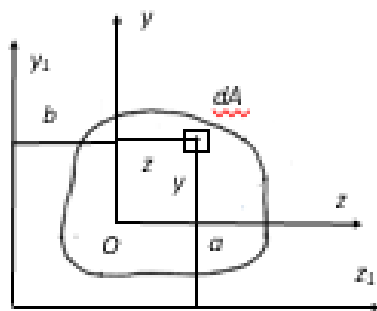


Рисунок 11.7. – Произвольное поперечное сечение с параллельными осями

Будем считать, что значения осевых и центробежного моментов инерции сечения относительно исходных осей известны. Тогда новые значения этих геометрических характеристик:

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + 2bS_z + b^2A, \\ I_{z_1} &= I_z + 2aS_y + a^2A, \\ I_{y_1z_1} &= I_{yz} + aS_y + bS_z + abA. \end{aligned}$$

В случае если исходные оси координат являются центральными, то $S_y = S_z \equiv 0$ и новые значения примут вид:

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + b^2A, \\ I_{z_1} &= I_z + a^2A, \\ I_{y_1z_1} &= I_{yz} + abA. \end{aligned}$$

Выясним, как изменяются моменты инерции поперечного сечения во втором случае. Рассмотрим произвольное поперечное сечение с заданным положением осей y и z и новым положением осей u и v , которые повернуты относительно исходных осей на угол (рисунок 11.8).

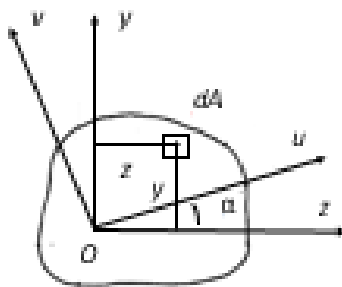


Рисунок 11.8. – Произвольное поперечное сечение с повернутыми осями

Будем считать угол α положительным, если исходную систему осей для перехода к новой надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.

Тогда значения геометрических характеристик относительно повернутых осей имеют вид:

$$\begin{aligned} I_u &= I_z \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{yz} \sin 2\alpha, \\ I_v &= I_z \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \\ I_{uv} &= \frac{I_z - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Среди множества положений повернутых осей можно найти оси, относительно которых осевые моменты инерции поперечного сечения принимают экстремальные значения. Такие оси называются **главными осями инерции**, а их положение определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y}.$$

Главные оси инерции взаимно перпендикулярны.

Осевые моменты инерции поперечного сечения относительно главных осей инерции называются **главными моментами инерции поперечного сечения** и их значения определяются по формуле

$$I_{\max}^{\min} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_z - I_y)^2 + 4I_{zy}^2}.$$

Через любую точку в плоскости сечения можно провести соответствующие ей главные оси инерции. Однако практическое значение для расчетов бруса имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести, т.е. главные центральные оси инерции. Моменты инерции относительно этих осей называются **главными центральными осевыми моментами инерции сечения**.

11.6. Примеры к теме

Пример 1. Для сечения, изображенного на рисунке 11.9, определить значения главных центральных моментов инерции сечения

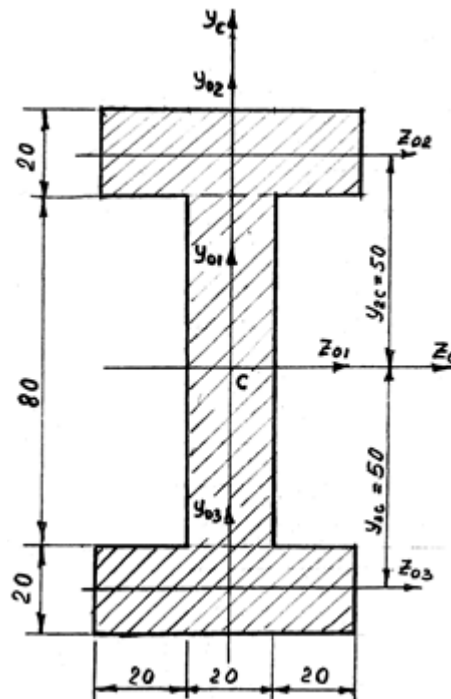


Рисунок 11.9. – К примеру 1

Решение:

1. Разбиваем сечение на простые составные части в виде трех прямоугольников (рисунок 11.10) и для них проводим собственные центральные оси $z_{oi}y_{oi}$.

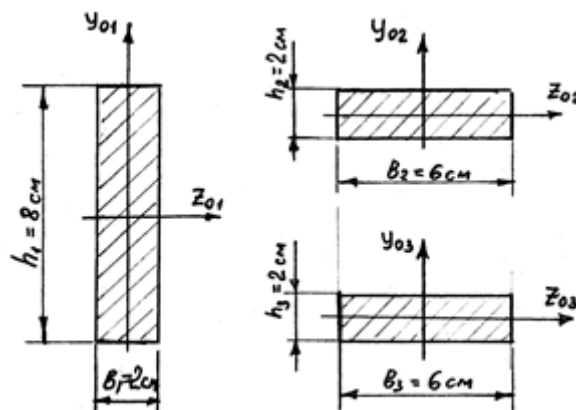


Рисунок 11.10. – Разбиение сечения на простые составные части

2. Определим площади поперечных сечений составных частей и всего сечения:

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 2 \cdot 8 = 16 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = b_2 \cdot h_2 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2;$$

$$A_3 = b_3 \cdot h_3 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 16 + 12 + 12 = 40 \text{ см}^2.$$

3. Определим значения осевых и центробежных моментов инерции составляющих фигур относительно собственных центральных осей $Z_{oi}Y_{oi}$.

$$J_{z_{o1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,333 \text{ см}^4; \quad J_{y_{o1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,333 \text{ см}^4.$$

$$J_{z_{o2}} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^4; \quad J_{y_{o2}} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36 \text{ см}^4.$$

$$J_{z_{o3}} = J_{z_{o2}} = 4 \text{ см}^4; \quad J_{y_{o3}} = J_{y_{o2}} = 36 \text{ см}^4.$$

4. Центробежные моменты инерции фигур при наличии даже только одной оси симметрии равны нулю. Поэтому

$$J_{z_{o1}y_{o1}} = 0; \quad J_{z_{o2}y_{o2}} = 0; \quad J_{z_{o3}y_{o3}} = 0.$$

5. Положение центра тяжести и положение главных центральных осей для сечения, имеющего две оси симметрии, известно. Центр тяжести будет на пересечении осей симметрии, а главные центральные оси совпадают с осями симметрии, т.е. оси $z_c y_c$ – главные центральные оси.

Координаты центров тяжести составляющих фигур относительно главных центральных осей $z_c y_c$ равны:

$$z_{1c} = 0; \quad y_{1c} = 0;$$

$$z_{2c} = 0; \quad y_{2c} = \frac{80}{2} + \frac{20}{2} = 50 \text{ мм} = 5 \text{ см};$$

$$z_{3c} = 0; \quad y_{3c} = -\left(\frac{80}{2} + \frac{20}{2}\right) = -50 \text{ мм} = -5 \text{ см}.$$

Определим значения осевых моментов инерции составляющих частей и всего сечения относительно главных центральных осей $z_c y_c$. $J_{z_c}^{(1)} = J_{z_{o1}}$,

т.к. оси z_c и z_{o1} совпадают.

$$J_{z_c}^{(1)} = 85,333 \text{ см}^4.$$

Аналогично

$$J_{y_c}^{(1)} = J_{y_{o1}} = 5,333 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^{(2)} = J_{y_{o2}} = 36 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c}^{(3)} = J_{y_{o3}} = 36 \text{ см}^4.$$

Для нахождения $J_{z_c}^{(2)}$ и $J_{z_c}^{(3)}$ воспользуемся формулами параллельного переноса:

$$J_{z_c}^{(2)} = J_{z_{o2}} + y_{2c}^2 \cdot A_2 = 4 + 5^2 \cdot 12 = 304 \text{ см}^4.$$

$$J_{z_c}^{(3)} = J_{z_{o3}} + y_{3c}^2 \cdot A_3 = 4 + (-5)^2 \cdot 12 = 304 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^{(1)} + J_{y_c}^{(2)} + J_{y_c}^{(3)} = 5,333 + 36 + 36 = 77,333 \text{ cm}^4.$$

Пример 2.

The diagram shows a Z-shaped cross-section with the following dimensions and coordinate systems:

- Dimensions:**
 - Flange width: 200
 - Web height: 200
 - Flange thickness: 9
 - Web thickness: 8
 - Flange fillet radius: 20.7
 - Web fillet radius: 52
 - Distance from top flange outer face to centroidal axis Y_c : $y_{c1} = 64.4$
 - Distance from bottom flange outer face to centroidal axis Y_c : $y_{c2} = 56.3$
 - Distance from top flange outer face to centroidal axis Z_c : $y_c = 156.3$
 - Distance from bottom flange outer face to centroidal axis Z_c : $y_c = 220.7$
 - Distance from top flange outer face to parallel axis Y_{01} : $y_{01} = 100$
 - Distance from bottom flange outer face to parallel axis Y_{02} : $y_{02} = 100$
 - Distance from top flange outer face to parallel axis Z_{01} : $z_{01} = 100$
 - Distance from bottom flange outer face to parallel axis Z_{02} : $z_{02} = 100$
- Coordinate Systems:**
 - Y_c and Z_c are the centroidal axes.
 - Y_{01} and Z_{01} are parallel axes passing through the top flange outer corner.
 - Y_{02} and Z_{02} are parallel axes passing through the bottom flange outer corner.

Рисунок 11.11. – К примеру 2

Решение:

1. Выписываем из сортамента прокатной стали все данные для прокатных профилей, необходимые для дальнейшего расчета и вычерчивания профилей.

1) двутавр № 20.

$$h=200\text{mm}; \quad b=100\text{mm}; \quad d=5,2\text{mm}; \quad t=8,4\text{mm}; \quad A_1=26,8\text{cm}^2,$$

$$J_{z_{01}} = 1840 \text{ cm}^4; J_{y_{01}} = 115 \text{ cm}^4; J_{z_{01}y_{01}} = 0.$$

2) швеллер № 20.

$$h=200\text{мм}; b=76\text{мм}; d=5,2\text{мм}; t=9\text{мм}; A=23,4\text{см}^2;$$

$$J_{z_{02}}=113\text{ см}^4; J_{y_{02}}=1520\text{ см}^4; J_{z_{02}y_{02}}=0; z_0=2,07\text{ см}.$$

2. Определяем координаты центра тяжести сечения относительно произвольных осей zy .

Одна координата центра тяжести и положение одной из главных центральных осей нам известны. Сечение имеет одну ось симметрии, поэтому одна из главных центральных осей совпадает с ней и центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $z_c = 0$.

Вторую координату центра тяжести сечения y_c определяем по формуле

$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2},$$

где y_1 и y_2 – координаты центров тяжести двутавра и швеллера относительно произвольной оси z .

$$y_1 = \frac{h_1}{2} = \frac{200}{2} = 100\text{мм} = 10\text{см};$$

$$y_2 = h_1 + z_0 = 200 + 20,7 = 220,7\text{ мм} = 22,07\text{ см}.$$

$$y_c = \frac{26,8 \cdot 10 + 23,4 \cdot 22,07}{26,8 + 23,4} = 15,63\text{ см}.$$

3. Через найденное положение центра тяжести проведем главные центральные оси $z_c y_c$ параллельно вспомогательным осям zy и определим координаты центров тяжести двутавра и швеллера относительно их.

$$z_{1c} = 0; y_{1c} = y_1 - y_c = 10 - 15,63 = -5,63\text{ см};$$

$$z_{2c} = 0; y_{2c} = y_2 - y_c = 22,07 - 15,63 = 6,44\text{ см}.$$

4. Определим значения осевых моментов инерции профилей и всего сечения относительно главных центральных осей $z_c y_c$.

Оси y_{01} и y_{02} совпадают с главной центральной осью y_c , поэтому

$$J_{y_c}^{(1)} = J_{y_{01}} = 115\text{ см}^4; J_{y_c}^{(2)} = J_{y_{02}} = 1520\text{ см}^4.$$

Оси z_{01} и z_{02} параллельны главной центральной оси z_c и находятся на расстоянии y_{1c} и y_{2c} соответственно. Для определения осевых моментов двутавра и швеллера относительно главной центральной оси z_c воспользуемся формулами параллельного переноса:

$$J_{z_c}^{(1)} = J_{z_{01}} + y_{1c}^2 A_1 = 1840 + (-5,63)^2 \cdot 26,8 = 2689,5\text{ см}^4;$$

$$J_{z_c}^{(2)} = J_{z_{02}} + y_{2c}^2 A_2 = 113 + 6,44^2 \cdot 23,4 = 1083,5\text{ см}^4.$$

Для всего сечения

$$J_{z_c} = J_{z_c}^{(1)} + J_{z_c}^{(2)} = 2689,5 + 1083,5 = 3773 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = J_{y_c}^{(1)} + J_{y_c}^{(2)} = 115 + 1520 = 1635 \text{ см}^4.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Какие бывают типы поперечных сечений?
2. Что такое простые поперечные сечения?
3. Что такое сложные поперечные сечения?
4. Что такое поперечные сечения прокатных профилей?
5. Что такое составные поперечные сечения?
6. Какие бывают виды прокатных профилей?
7. Какие бывают виды геометрических характеристик произвольного поперечного сечения?
8. Как определяются геометрические характеристики простого поперечного сечения?
9. Как определяются геометрические характеристики сложного поперечного сечения?
10. Как определяются геометрические характеристики поперечных сечений прокатных профилей?
11. Как определяются геометрические характеристики составного поперечного сечения?
12. Какие общие положения характеризуют геометрические характеристики произвольного поперечного сечения?
13. Как определяется полярный момент инерции поперечного сечения?
14. Как изменяются моменты инерции поперечных сечений при параллельном переносе осей координат в новое положение?
15. Как изменяются моменты инерции поперечных сечений при повороте осей относительно начала координат?
16. Что называется главными осями инерции поперечного сечения?
17. Что называется главными моментами инерции поперечного сечения?
18. Что называется главными центральными моментами инерции поперечного сечения?

ТЕМА 12. Изгиб прямого бруса

Цели изучения темы

Рассмотреть понятие об изгибе бруса, его видах и особенностях работы поперечного сечения при изгибе.

Ввести понятие о балке, описать общий порядок ее расчета при плоском изгибе.

Рассмотреть определение внутренних усилий и расчет балок на прочность при плоском изгибе.

Рассмотреть определение перемещений и расчет балок на жесткость при плоском изгибе.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [1; [5].

12.1. Общие сведения об изгибе прямого бруса

Изгибом бруса называется вид нагружения, при котором в поперечных сечениях могут возникать изгибающие моменты и поперечные силы, а деформация бруса характеризуется искривлением его продольной оси. При изгибе бруса в одной части возникает **растяжение**, в другой происходит **сжатие**. Между ними существует промежуточный слой, который не деформируется и поэтому называется **нейтральным слоем**. В этом слое располагается продольная ось бруса.

Если в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, то изгиб называется **чистым**, а если в поперечном сечении возникает также и поперечная сила, то **поперечным**.

Если внешние силы, вызывающие изгиб бруса, лежат в одной плоскости с осью бруса и одной из главных осей инерции поперечного сечения, то изгиб бруса будет происходить в той же плоскости. Такой изгиб принято называть **плоским**, или **прямым, изгибом**, и он может быть чистым или поперечным.

Если плоскость действия внешних сил проходит через ось бруса, но не содержит ни одну из главных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб принято называть **косым изгибом**, и он тоже может быть чистым или поперечным.

Прямой брус, работающий на изгиб, принято называть **балкой**. При рассмотрении изгиба балки вводятся следующие допущения:

- поперечное сечение, плоское до деформации, остается плоским и после нее (гипотеза плоских сечений);

- продольные волокна при растяжении или сжатии не дают друг на друга;
- продольные деформации волокон изменяются по высоте сечения, не изменяются по его ширине.

Общий порядок расчета балки при плоском изгибе включает следующее:

- определение реакций опор;
- определение внутренних усилий;
- определение нормальных напряжений;
- проверку прочности;
- определение перемещений;
- проверку жесткости.

12.2. Определение внутренних усилий при плоском изгибе

Определение внутренних усилий в балке начинается с определения ее опорных реакций, которое осуществляется с использованием уравнений равновесия произвольной плоской системы сил, рассмотренных в теме 5 (см. раздел 1). Уравнения равновесия, составляемые для определения опорных реакций, в статически определимой балке при действии произвольной плоской системы внешних сил можно представить в трех различных вариантах:

- в виде сумм проекций сил на две произвольные не параллельные друг другу оси и суммы моментов сил относительно любой точки плоскости;
- в виде сумм проекций сил на произвольную ось и двух сумм моментов сил относительно любых точек плоскости, не лежащих на одном перпендикуляре к указанной оси проекций;
- в виде трех сумм моментов сил относительно любых точек плоскости, не лежащих на одной прямой.

Выбор того или иного варианта составления уравнений равновесия, а также выбор точек и направлений осей, используемых при составлении этих уравнений, производится в каждом конкретном случае с таким расчетом, чтобы по возможности не проводить совместное решение уравнений.

Для проверки правильности определения опорных реакций их полученные значения рекомендуется подставить в одно из уравнений равновесия, не использованное ранее.

Определение внутренних усилий в балке производится с использованием метода сечений. Внутренние усилия являются составляющими главного

вектора и главного момента внутренних сил при приведении их к центру тяжести поперечного сечения.

При действии на балку только вертикальной нагрузки расположенный в одной плоскости главный вектор внутренних сил будет равен поперечной силе Q , а главный момент – изгибающему моменту M (рисунок 12.1).

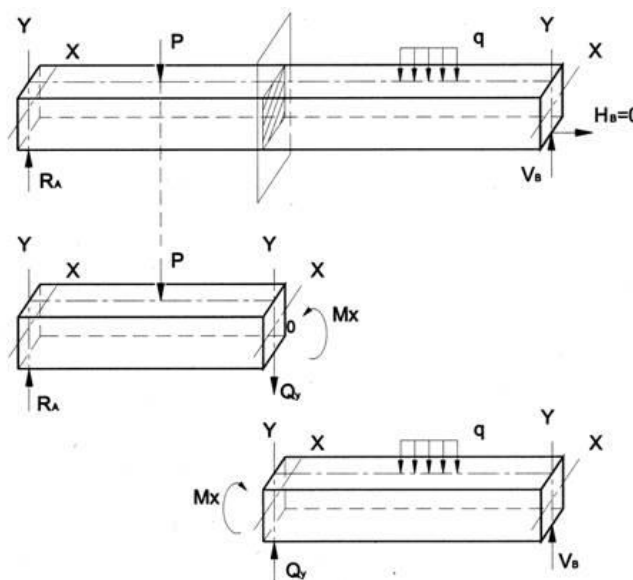


Рисунок 12.1. – К определению внутренних усилий в балке

К центру тяжести могут быть приведены и внешние силы. Они также приводятся к главному вектору и главному моменту.

С другой стороны, внутренние силы в сечении отбрасываемой части должны быть равны внутренним усилиям в сечении правой оставленной части. Поэтому можно сделать следующий вывод: главный вектор и главный момент внутренних сил в сечении правой части балки полностью совпадают по величине и направлению с главным вектором и главным моментом внешних сил, приложенным к левой части.

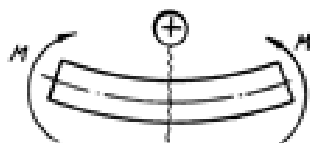
Тогда для определения внутренних усилий в произвольном сечении при плоском изгибе можно использовать два приема:

1. Рассматриваем равновесие отсеченной части с приложенной внешней нагрузкой и внутренними усилиями M и Q положительного направления и из условий равновесия определяем их величину:

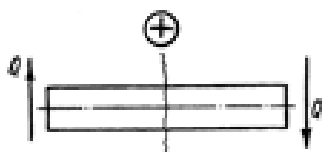
$$\sum y = 0; \rightarrow Q_y;$$

$$\sum m_x = 0; \rightarrow M_x.$$

За положительное направление изгибающего момента принимается такое, когда растягиваются нижние волокна балки, т.е. с выпуклостью вниз.



За положительное направление поперечной силы принимается такое, когда она стремится вращать прилегающую часть балки по часовой стрелке.



2. Записываем выражения для M и Q , пользуясь следующими правилами, вытекающими из равенства главных векторов и главных моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, главному вектору и главному моменту внутренних сил в сечении оставленной части

Изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения относительно центра тяжести этого сечения:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M_{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} M_{\text{внеш}}.$$

Поперечная сила Q равна алгебраической сумме (проекций на нормаль к оси балки) всех сил, приложенных к балке по одну сторону от сечения:

$$Q_y = \sum_{\text{лев}} F_y^{\text{внеш}} = \sum_{\text{прав}} F_y^{\text{внеш}}.$$

Напряжения, возникающие в различных сечениях балки, зависят от величины изгибающего момента M и поперечной силы Q в соответствующих сечениях. Поэтому нужно знать, как изменяются M и Q по длине балки. Удобнее всего представить их графически. Для этого принимают линию, параллельную оси балки, за ось абсцисс и строят два графика, ординаты которых определяют для каждого сечения балки величины M и Q . Первый график называется эпюрой изгибающих моментов, второй – эпюрой поперечных сил.

При построении эпюры M принято откладывать положительные значения моментов со стороны растянутого волокна, отрицательные – со стороны сжатого волокна. Знаки на участках эпюры M обычно не ставятся.

При построении эпюры Q принято откладывать положительные значения поперечных сил вверх от оси, отрицательные – вниз. Знаки на участках эпюры Q ставятся обязательно.

12.3. Определение нормальных напряжений при плоском изгибе

Нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения балки (рисунок 12.2)

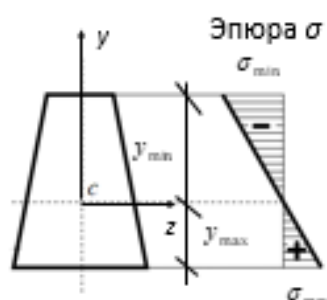


Рисунок 12.2. – К определению нормальных напряжений

определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y$$

где M — изгибающий момент в сечении балки; I_z — момент инерции сечения относительно нейтральной оси; y — расстояние от рассматриваемой точки до нейтральной оси.

Экстремальные нормальные напряжения возникают в точках сечения наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_z} y_{\max} = \frac{M}{W_{z\max}},$$

$$\sigma_{\min} = \frac{M}{I_z} y_{\min} = \frac{M}{W_{z\min}}.$$

Здесь

$$W_{z\max} = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

— осевой момент сопротивления поперечного сечения изгибу в растянутой зоне,

$$W_{zmin} = \frac{I_z}{y_{min}}$$

– осевой момент сопротивления поперечного сечения изгибу в сжатой зоне.

12.4. Расчет балок на прочность при плоском изгибе

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{ext} = \frac{M_{max}}{W_z} \leq R,$$

где M_{max} — максимальный изгибающий момент балки; W_z — момент сопротивления поперечного сечения балки; R — расчетное сопротивление материала балки растяжению (сжатию).

12.5. Определение перемещений при плоском изгибе

Под действием внешних сил, лежащих в плоскости, совпадающей с осью симметрии поперечного сечения балки, происходит плоский изгиб балки, при котором ее продольная ось искривляется в той же плоскости (рисунок 12.3).

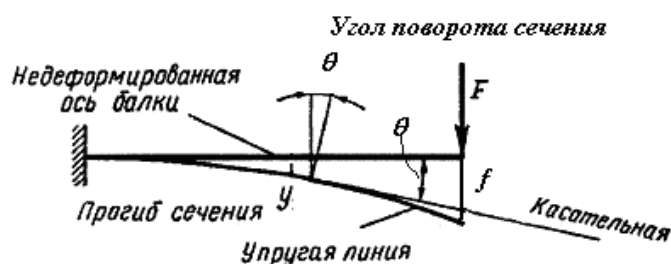


Рисунок 12.3. – Плоский изгиб балки

Изогнутая ось балки называется **упругой линией**. Длина оси балки при изгибе остается неизменной, т.к. точки оси расположены в нейтральном слое. При искривлении оси балки сечения перемещаются по нормали к оси недеформированной балки и одновременно поворачиваются.

Перемещение центра тяжести сечения по нормали называется **прогибом балки** в данном сечении, которое обозначено на рисунке 12.3 буквой y . Наибольший прогиб принято обозначать буквой f . На рисунке 12.3 таким прогибом является перемещение правого конца балки.

Угол θ , на который поворачивается ось симметрии сечения по отношению к своему первоначальному положению, называется **углом поворота сечения**. Пренебрегая деформациями сдвига, можно считать угол поворота сечения балки равным углу между касательной к изогнутой оси балки в этом сечении и осью недеформированной балки.

Для определения прогибов и углов поворота используется приближенное дифференциальное уравнение упругой линии

$$EJ_z y'' = \pm M_z. \quad (12.1)$$

Два знака в правой части уравнения учитывают, что знак кривизны $\frac{1}{\rho} \approx y''$ может не совпадать со знаком изгибающего момента. Известно, что знак кривизны линии зависит от выбора координатной системы, в которой она изображается. Знак изгибающего момента в поперечном сечении балки от этого выбора не зависит, а определяется только расположением растянутых волокон. Поэтому знак правой части (12.1) определяется знаком кривизны изогнутой оси балки в принятой системе координат для ее изображения (рисунок 12.4).

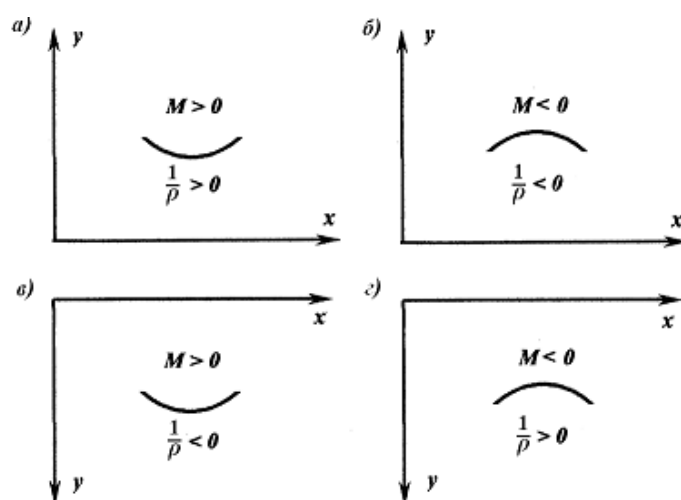


Рисунок 12.4. – К определению знака правой части дифференциального уравнения

Следует обратить внимание, что при положительном направлении оси y вверх знаки кривизны и изгибающего момента совпадают, но в первом случае (см. рисунок 12.4, а) в правой части (12.1) будет знак плюс, а во втором случае (см. рисунок 12.4, б) — знак минус. При положительном направлении оси y вниз (см. рисунок 12.4, в, г) такого совпадения знаков кривизны и изгибающего момента нет, а в правой части (12.1) в обоих случаях будет знак минус.

Для решения уравнения (12.1) проинтегрируем его один раз и получим уравнение углов поворота сечений балки

$$EJ_z y' = \pm \int M_z dx + C, \quad (12.2)$$

где C – постоянная интегрирования. Интегрируя уравнение (12.2), получим уравнение прогибов балки

$$EJ_z y = \pm \iint M_z dx dx + Cx + D, \quad (12.3)$$

где D – вторая постоянная интегрирования.

Постоянные интегрирования C и D определяются из условий, накладывающих ограничения на прогибы и углы поворота сечений в местах опирания балки. Такие условия называются граничными условиями.

Рассмотренный метод решения дифференциального уравнения (12.1) называется методом непосредственного интегрирования, который является одной из разновидностей аналитического метода определения перемещений балок. Общий метод определения перемещений без составления и решения дифференциальных уравнений, применимый не только для балок, но и для стержневых систем, был предложен немецким ученым Мором. Этот метод будет рассматриваться в разделе 3 «Основы строительной механики стержневых систем».

12.6. Расчет балок на жесткость при плоском изгибе

Балки как несущие конструкции, применяемые при возведении строительных сооружений, должны быть не только прочными, но и жесткими. Условие жесткости балки заключается в том, наибольшие значения прогибов балки f не превышали некоторых допускаемых значений $[f]$, устанавливаемых строительными нормами исходя из требований пригодности сооружений к нормальной эксплуатации, связанных с пребыванием людей и работой технологического оборудования. Тогда условие жесткости балки имеет вид

$$f \leq [f].$$

Допускаемые значения прогибов $[f]$ сечений балки зависят от условий эксплуатации строительного сооружения и требований к его надежности. При этом обычно вместо абсолютного значения допускаемого прогиба

используется его относительное значение в долях от пролета балки $[\delta] = \frac{[f]}{l}$.

С учетом этого условие жесткости балки принимает вид

$$\frac{f}{l} \leq [\delta]. \quad (12.4)$$

Условие (12.4) позволяет не только подбирать по жесткости сечение проектируемой балки, но и проверять жесткость существующих балок. Предельно допустимые относительные прогибы для наиболее распространенных строительных сооружений могут принимать следующие значения:

- при подборе сечений проектируемых балок одновременно используются условие прочности (расчет по первому предельному состоянию) и условие жесткости (расчет по второму предельному состоянию). По результатам двух расчетов принимают наибольшие требуемые размеры поперечного сечения;

- при выполнении практических расчетов для определения наибольших значений линейных и угловых перемещений, возникающих в балках, можно использовать готовые формулы, помещенные в таблицах различных справочников по сопротивлению материалов.

12.7. Пример к теме

Пример. Построить эпюры M и Q для балки, изображенной на рисунке 12.5, а.

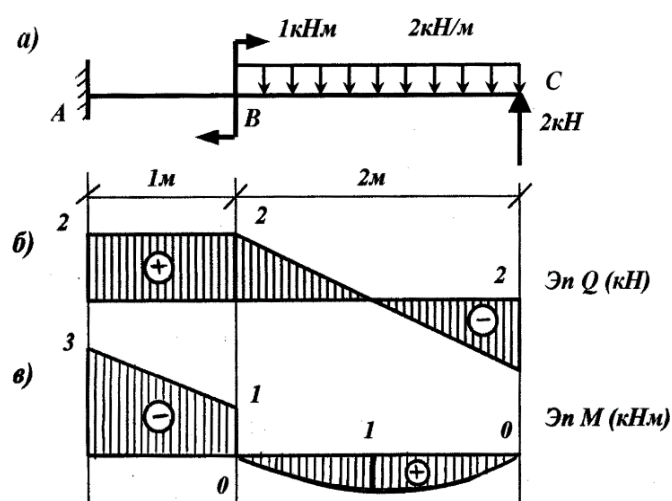


Рисунок 12.5. – К примеру 1

Решение:

1. Для консольной балки опорные реакции можно не определять, а внутренние усилия в поперечных сечениях можно определить через внешние нагрузки, расположенные правее от рассматриваемых сечений.

2. Запишем выражения для M и Q по участкам балки и определим их значения для характерных сечений. Границами участков будут места приложения нагрузок. При составлении аналитических выражений для M и Q можно использовать как общую, так и местную системы отсчета. Удобнее применение местной системы отсчета для каждого участка:

– участок CB (рисунок 12.6) $0 \leq x \leq 2$ м.

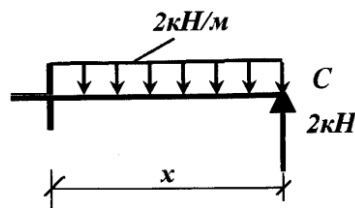


Рисунок 12.6. – Участок CB

$$Q = -2 + 2x,$$

$$x = 0, \quad Q = -2 \text{ кН};$$

$$x = 2 \text{ м}, \quad Q = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

Поперечная сила на этом участке меняет знак, следовательно, функция изгибающего момента на этом участке имеет экстремум. Приравняв нулю функцию поперечной силы определим значение x , при котором изгибающий момент имеет экстремум.

$$Q = -2 + 2x = 0, \quad x = 1 \text{ м}.$$

$$M = 2x - 2 \frac{x^2}{2} = 2x - x^2.$$

Закон изменения изгибающего момента по параболе. Для построения эпюры необходимо минимум три значения.

$$x = 0, \quad M = 0; \quad x = 2 \text{ м}, \quad M = 0; \quad x = 1 \text{ м}, \quad M_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \text{ кНм}.$$

– участок BA (рисунок 12.7) $0 \leq x \leq 1$ м.

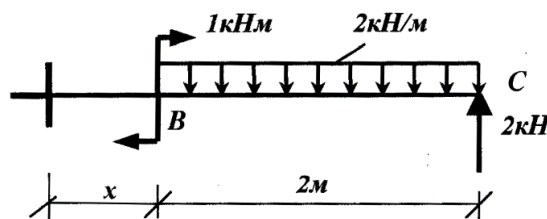


Рисунок 12.7. – Участок BA

$$Q = -2 + 2 \cdot 2 = 2 \text{ кН},$$

$$M = 2(2 + x) - 2 \cdot 2(1 + x) - 1 = 4 + 2x - 4 - 4x - 1 = -1 - 2x.$$

Закон изменения изгибающего момента линейный.

$$x = 0, \quad M = -1 \text{ кНм}; \quad x = 1 \text{ м}, \quad M = -3 \text{ кНм}.$$

На основании выполненных расчетов строим эпюры Q (рисунок 12.5, б) и M (рисунок 12.5, в).

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется изгибом бруса?
2. Какой изгиб называется чистым?
3. Какой изгиб называется поперечным?
4. Какой изгиб называется плоским?
5. Какой изгиб называется косым?
6. Каков общий порядок расчета балки при плоском изгибе?
7. Как определяются внутренние усилия в балке при плоском изгибе?
8. Как определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при плоском изгибе?
9. Как выполняется расчет балки на прочность при плоском изгибе?
10. Как определяются перемещения в балке при плоском изгибе?
11. Как выполняется расчет балки на жесткость при плоском изгибе?

ТЕМА 13. Устойчивость прямых сжатых стержней

Цели изучения темы

Рассмотреть понятие устойчивых и неустойчивых форм равновесия сжатого прямого стержня.

Ввести понятие критической силы и рассмотреть ее определение для упругого сжатого прямого стержня.

Выяснить влияние способов закрепления концов стержня на величину критической нагрузки.

Описать пределы применимости формулы Эйлера и познакомиться с формулой Ясинского.

Рассмотреть практический расчет на устойчивость сжатых прямых стержней.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [1; 5].

13.1. Устойчивые и неустойчивые формы равновесия

Наряду с проблемой прочности существует проблема устойчивости конструкций или ее элементов. Из физики известно, что равновесие твердых тел может быть устойчивым, неустойчивым и безразличным. Например, шарик, расположенный на дне вогнутой сферы, находится в устойчивом равновесии (рисунок 13.1, а), на вершине выпуклой сферы – в неустойчивом (рисунок 13.1, б), а на горизонтальной плоскости – в состоянии безразличного равновесия



Рисунок 13.1. – К понятию устойчивого и неустойчивого равновесия твердых тел

Рассмотренный пример относится к задачам устойчивости положения твердого тела.

В сопротивлении материалов рассматриваются задачи устойчивости форм равновесия тел при их деформировании. Таким телом, прежде всего, является сжатый прямой стержень. Такой стержень при действии сжимающей силы F имеет прямолинейную форму равновесия, но она может быть трех видов (рисунок 13.2).

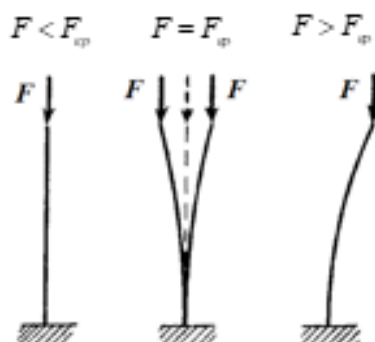


Рисунок 13.2. – Виды форм равновесия сжатого прямого стержня

Пока сжимающая сила меньше некоторого критического значения $F < F_{кр}$ начальная форма равновесия является устойчивой, и она является единственной (см. рисунок 13.2, а).

Если сжимающая сила достигнет некоторого критического значения $F = F_{кр}$, то начальная форма равновесия становится неустойчивой, но она не является единственной. Наряду с прямолинейной формой равновесия появляется бесконечно близкая к ней изогнутая форма равновесия (смежная форма равновесия) (см. рисунок 13.2, б).

Если сжимающая сила превысит критическое значение $F > F_{кр}$, то начальная форма равновесия остается неустойчивой, а стержень будет находиться в изогнутом состоянии равновесия, и она является единственной (см. рисунок 13.2, в).

Наименьшая величина сжимающей силы F , при которой у стержня наряду с исходной прямолинейной формой равновесия появляется изогнутая форма равновесия, и является его **критической нагрузкой**. Изгиб стержня, возникающий при критической нагрузке $F = F_{кр}$, называется **продольным изгибом**.

При увеличении сжимающей силы сверх критического значения $F > F_{кр}$ происходит резкое нарастание прогибов стержня и возникновение значительных дополнительных нормальных напряжений, которые приводят к исчерпанию несущей способности стержня.

Таким образом, продольный изгиб является опасным и его допускать нельзя. Поперечные сечения сжатых стержней должны назначаться не из условий прочности при сжатии, а из условия, чтобы сжимающие напряжения были меньше критических напряжений:

$$\sigma < \sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A}$$

Исследование устойчивости и определение критических сил или нагрузок имеет большое практическое значение, т.к. для любого сооружения в целом и каждого его элемента должна быть обеспечена устойчивость заданной (исходной) формы равновесия под действием приложенных к нему сил. Резкое изменение формы какого-либо элемента может вызвать разрушение всего сооружения.

13.2. Критическая сила и ее определение для упругого сжатого прямого стержня

Для определения критической силы рассмотрим смежную форму равновесия прямого стержня постоянного сечения с шарнирно закрепленными концами, нагруженного сжимающей силой P (рисунок 13.3).

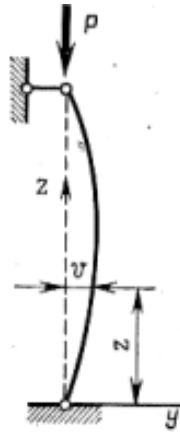


Рисунок 13.3. – К определению критической силы

Изгибающий момент в произвольном сечении равен

$$M = Pv.$$

Дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня запишется в следующем виде:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{Pv}{EI}$$

или

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = 0, \quad (13.1)$$

где

$$k^2 = \frac{P}{EI}. \quad (13.2)$$

Решение дифференциального уравнения (13.1) имеет вид

$$v = A \cos kz + B \sin kz. \quad (13.3)$$

Для определения значений произвольных постоянных A и B используем граничные условия. Первое граничное условие: при $z = 0$ и $v = 0$ $A = 0$.

Следовательно, уравнение оси изогнутого стержня (13.3) примет вид

$$v = B \sin kz. \quad (13.4)$$

Отсюда следует, что стержень изгибается по синусоиде.

Второе граничное условие: при $z = l$ и $v = 0$ $B \sin kl = 0$. Это условие выполняется в двух случаях:

$$B = 0$$

или

$$\sin kl = 0.$$

Первый случай нас не интересует, т.к. при $B = 0$ прогибы во всех точках равны нулю, следовательно, стержень остается прямым.

Второе условие $\sin kl = 0$ дает $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$. С учетом (14.2) получим

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}; \frac{(2\pi)^2 EI}{l^2}; \frac{(3\pi)^2 EI}{l^2}; \dots \frac{(n\pi)^2 EI}{l^2}.$$

Итак, получено не одно, а множество значений критических сил. Каждой критической силе соответствует своя смежная форма равновесия (рисунок 13.4).

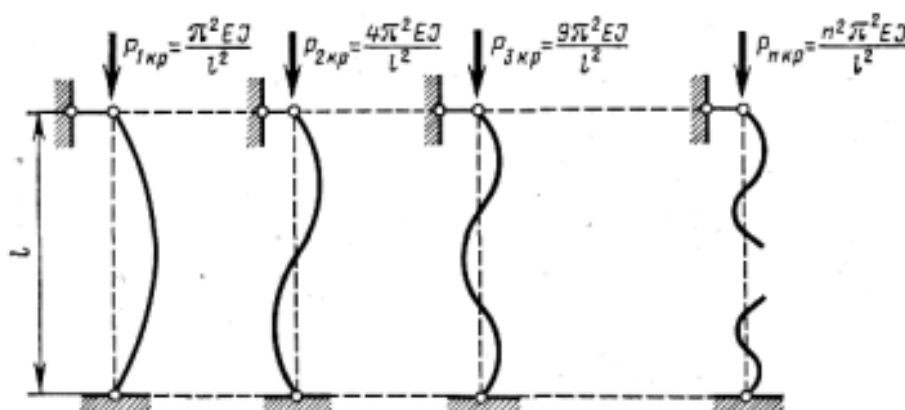


Рисунок 13.4. – Смежные формы равновесия сжатого стержня

Подставляя найденное значение k в уравнение оси изогнутого бруса (13.4), видим, что при первой критической силе стержень изгибается по одной полуволне синусоиды, а при всех последующих критических силах число полуволн равно номеру соответствующей критической силы.

Для инженерных расчетов практический интерес представляет только наименьшая критическая сила

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (13.5)$$

Формула (13.5) впервые была получена Эйлером и поэтому носит его имя.

13.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы

На рисунке 13.5 показаны различные типы закрепления концов сжатого стержня.

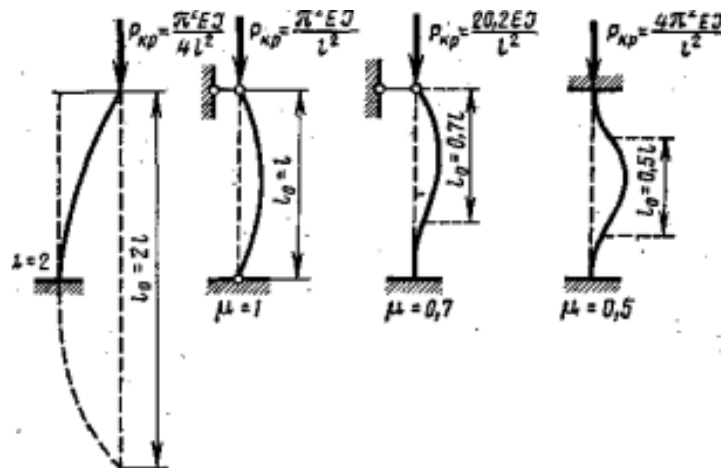


Рисунок 13.5. – Типы закрепления концов сжатого стержня

Для каждой из этих задач выполняется решение аналогично тому, как это сделано для шарнирно опертого стержня. Решение показывает, что для всех случаев, изображенных на рисунке 13.5, критическую силу можно определять по обобщенной формуле

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad (13.6)$$

где μ – так называемый **коэффициент приведенной длины**, а величина $\mu l = l_0$ называется **приведенной длиной**. Приведенная длина l_0 может быть истолкована как некоторая условная длина шарнирно опертого стержня, имеющего такую же критическую силу, как заданный стержень.

При потере устойчивости искривление стержня происходит в плоскости, перпендикулярной оси поперечного сечения, относительно которой момент инерции наименьший, т.е. при изгибе поперечные сечения поворачиваются вокруг этой оси. Поэтому критическую силу по формуле (13.6) следует вычислять по значению главного центрального момента инерции J_{min} .

13.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Так как рассматривается сжатый упругий стержень, то напряжения в материале, вызванные критической силой, не должны превышать предела пропорциональности $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$. Поделив критическую силу на площадь поперечного сечения стержня, получим **критическое напряжение**

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2 A}.$$

Учитывая, что I/A равняется квадрату радиуса инерции поперечного сечения i^2 , введем обозначение

$$\lambda = \frac{l_0}{i}.$$

Величина λ называется **гибкостью стержня**. С учетом этого понятия формула для критического напряжения примет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Следовательно, предел применимости формулы Эйлера описывается математическим выражением

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пц}.$$

Отсюда найдем значение гибкости, при котором $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$,

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}.$$

Величина λ_1 называется **предельной гибкостью стержня**. С учетом этого понятия предел применимости формулы Эйлера примет вид

$$\lambda \geq \lambda_1.$$

Предельная гибкость стержня зависит от упругих свойств его материала, характеризуемых модулем упругости и пределом пропорциональности. Например, значение предельной гибкости для стержня из стали марки Ст.3 равно $\lambda_1 = 100$.

В случае если критическое состояние стержня достигается за пределами упругих деформаций, то для определения критических напряжений на практике обычно используются эмпирические формулы. На основе опытных данных Ф.С. Ясинский предложил эмпирическую формулу следующего вида:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda,$$

где a и b – эмпирические коэффициенты, имеющие размерность напряжения и свои значения для разных конструкционных материалов.

13.5. Практический расчет на устойчивость сжатых прямых стержней

При подборе сечений сжатых стержней необходимо обеспечить, чтобы стержень в процессе эксплуатации при действии сжимающих сил не потерял устойчивость. Поэтому напряжения в сжатом стержне должны быть меньше критических с определенным запасом

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_{кр}}{n_y}, \quad (13.7)$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Сравним эту формулу с формулой, применяемой при подборе сечений растянутых стержней:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq R. \quad (13.8)$$

Обозначим отношение правых частей формул (13.7) и (13.8) через φ :

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y R}$$

и

$$\frac{\sigma_{кр}}{n_y} = \varphi R. \quad (13.9)$$

Подставляя (13.9) в (13.7), получим условие устойчивости сжатого стержня

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R. \quad (13.10)$$

Величина φ представляет собой коэффициент уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе, и в нормативных документах он называется коэффициентом продольного изгиба. Коэффициент φ зависит от критического напряжения и, следовательно, является функцией гибкости стержня:

$$\varphi = \frac{\sigma_{кр}}{n_y R} = f(\lambda).$$

Его значения для различных гибкостей и материалов берутся по таблицам, которые приведены в нормативных документах.

При расчете сжатых стержней на устойчивость могут решаться три задачи: проверочный расчет, проектный расчет, определение несущей способности.

Проверочный расчет заключается в проверке достаточности поперечного сечения сжатого стержня, выполненного из определенного конструкционного материала, для обеспечения его устойчивости при действии заданной нагрузки. Для выполнения проверочного расчета необходимо:

- определить минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня;
- с учетом условий закрепления концов стержня определить коэффициент приведенной длины;
- определить приведенную длину стержня;
- определить гибкость стержня;
- определить по таблицам коэффициент φ ;
- проверить выполнение условия устойчивости стержня (13.10).

Проектный расчет состоит в подборе поперечного сечения заданной формы для сжатого стержня из определенного конструкционного материала при действии заданной нагрузки, удовлетворяющего условию устойчивости стержня.

Подбор поперечного сечения для сжатых стержней представляет собой более сложную задачу, чем для растянутых стержней. Это объясняется тем, что величина φ , входящая в правую часть условия устойчивости стержня, зависит от размеров и формы поперечного сечения и, следовательно, заранее не может быть назначена.

Поэтому подбор поперечного сечения для сжатых стержней проводят методом последовательных приближений:

- задаемся первым приближенным значением φ , например, $\varphi_1 = 0.5$;
- вычисляем приближенное значение требуемой площади поперечного сечения

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R};$$

- в соответствии с заданной формой поперечного сечения определяем минимальный радиус инерции сечения;
- с учетом условий закрепления концов стержня определяем значение гибкости стержня;

- согласно найденному значению гибкости определяем по таблице новое значение коэффициента продольного изгиба φ_2 ;
- находим значение нормального напряжения

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2 A_1} ;$$

- если полученное напряжение меньше расчетного сопротивления, то размеры полученного сечения необходимо уменьшить;
- если полученное напряжение больше расчетного сопротивления, то размеры полученного сечения необходимо увеличить;
- процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока разница между получаемым напряжением и расчетным сопротивлением не будет превышать 3–5%.

Определение несущей способности сводится к определению величины предельной нагрузки для стержня из определенного конструкционного материала и заданного поперечного сечения, удовлетворяющей условию устойчивости стержня.

Для определения предельной нагрузки сжатого стержня, удовлетворяющего условию устойчивости необходимо:

- определить площадь поперечного сечения стержня;
- определить минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня;
- определить приведенную длину стержня;
- определить гибкость стержня;
- определить по таблицам коэффициент продольного изгиба φ ;
- определить значение нагрузки по формуле

$$F_{np} = \varphi R A .$$

13.7. Примеры к теме

Пример 1. Сжатая стальная стойка прямоугольного поперечного сечения (размеры в мм) (рисунок 13.6).

Предел пропорциональности стали $\sigma_{пц} = 200$ МПа. Модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Определить критическую нагрузку стойки.

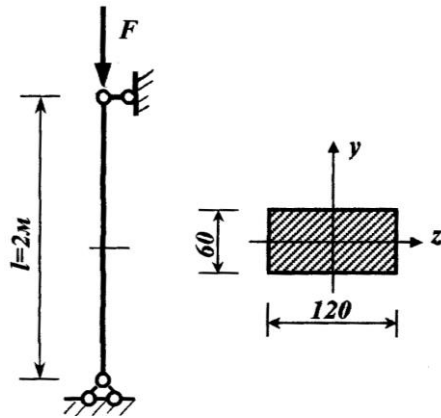


Рисунок 13.6. – К примеру 1

Решение:

1. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения стойки:

– площадь

$$A = 6 \times 12 = 72 \text{ см}^2;$$

– минимальный момент инерции

$$J_{\min} = J_z = \frac{12 \cdot 6^3}{12} = 216 \text{ см}^4;$$

– минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{216}{72}} = 1,732 \text{ см.}$$

2. Определяем гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 200}{1,732} = 115,5.$$

3. Определяем предельную гибкость стойки:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{нц}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Поскольку гибкость стойки

$$\lambda > \lambda_1$$

то потеря устойчивости произойдет в упругой стадии и величину критической силы определяем по формуле Эйлера.

4. Определяем критическую нагрузку

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 216}{(1 \cdot 200)^2} = 1064,8 \text{ кН.}$$

Пример 2. Сжатая стальная стойка двутаврового поперечного сечения (рисунок 13.7).

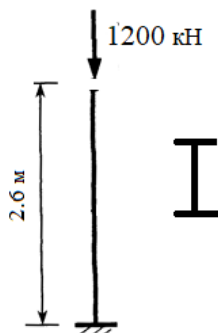


Рисунок 13.7. – К примеру 2

Расчетное сопротивление стали $R = 210$ МПа. Определить площадь поперечного сечения колонны из прокатного двутавра.

Решение:

1. Определяем площадь поперечного сечения в первом приближении:

– задаемся начальным значением коэффициента

$$\varphi_0 = 0,5;$$

– вычисляем площадь поперечного сечения

$$A = \frac{F}{\varphi_0 R} = \frac{1200}{0,5 \cdot 210 \cdot 10} \cdot 10^2 = 114,3 \text{ см}^2;$$

– в соответствии с таблицей сортамента принимаем двутавр № 55

$$A = 114 \text{ см}^2 \quad i_{\min} = 3,44 \text{ см};$$

– вычисляем гибкость стойки

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,44} = 151;$$

– принимаем по таблице значение φ

$$\varphi_1 = 0,32;$$

– вычисляем нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_1 A} = \frac{1200 \cdot 10^{-3}}{0,32 \cdot 114 \cdot 10^{-4}} = 328,9 \text{ МПа};$$

– сравниваем полученное напряжение с расчетным сопротивлением

$$\sigma = 328,9 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа}.$$

Так как оно больше расчетного сопротивления, то требуется увеличение сечения колонны.

2. Определяем площадь поперечного сечения во втором приближении:

– принимаем двутавр № 60

$$A = 132 \text{ см}^2 \quad i_{\min} = 3,60 \text{ см};$$

– вычисляем гибкость стойки

$$\lambda_2 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,60} = 144;$$

– принимаем по таблице значение φ

$$\varphi_2 = 0,34;$$

– вычисляем нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_2 A} = \frac{1200 \cdot 10^{-3}}{0,32 \cdot 132 \cdot 10^{-4}} = 267,4 \text{ МПа};$$

– сравниваем полученное напряжение с расчетным сопротивлением

$$\sigma = 267,4 \text{ МПа} > R = 210 \text{ МПа}.$$

Так как оно больше расчетного сопротивления, то снова требуется увеличение сечения колонны.

3. Определяем площадь поперечного сечения в третьем приближении:

– принимаем двутавр № 65

$$A = 153 \text{ см}^2 \quad i_{\min} = 3,77 \text{ см};$$

– вычисляем гибкость стойки

$$\lambda_3 = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 260}{3,77} = 138;$$

– принимаем по таблице значение φ

$$\varphi_3 = 0,37;$$

– вычисляем нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_3 A} = \frac{1200 \cdot 10^{-3}}{0,37 \cdot 153 \cdot 10^{-4}} = 212 \text{ МПа};$$

– сравниваем полученное напряжение с расчетным сопротивлением

$$\frac{212 - 210}{210} \cdot 100\% = 0,952\%.$$

Так как полученное напряжение отличается от расчетного сопротивления меньше, чем на 3%, то подбор сечения колонны заканчиваем и назначаем сечение из двутавра № 65.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Какие виды форм равновесия могут быть у сжатого прямого стержня?
2. Что называется критической нагрузкой?
3. Что называется продольным изгибом?
4. По какой формуле определяется критическое напряжение?
5. По какой формуле наименьшая критическая сила сжатого стержня с шарнирно закрепленными концами?
6. Что называется коэффициентом приведенной длины?
7. Что называется приведенной длиной?
8. Какой вид имеет формула для наименьшей сжимающей силы сжатого стержня с произвольным закреплением концов?
9. Что называется гибкостью стержня?
10. Что называется предельной гибкостью стержня?
11. Какой вид имеет предел применения формулы Эйлера?
12. Какой вид имеет формула Ясинского?
13. Как выполняется проверочный расчет сжатого стержня?
14. Как выполняется проектный расчет сжатого стержня?
15. Как выполняется определение несущей способности сжатого стержня?

РАЗДЕЛ III

ОСНОВЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

ТЕМА 14. Общие положения и понятия строительной механики

Цели изучения темы

Определить предмет строительной механики и выяснить, из каких этапов состоит расчет конструкций.

Рассмотреть понятие расчетной модели конструкции и выяснить, как она образуется.

Разобраться с понятиями линейно и нелинейно деформируемых систем и выяснить, как они связаны с расчетами конструкций.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [6].

14.1. Предмет строительной механики

Проектируемые архитектором здания должны сочетать в себе как минимум три свойства: функциональность, эстетичность и надежность существования. При этом приоритет принадлежит надежности существования зданий, которая практически полностью зависит от поведения его конструкций.

Для того чтобы здание могло после возведения длительное время надежно функционировать, его конструкции должны обладать тремя свойствами: **прочностью, устойчивостью и жесткостью**.

Разработкой принципов и методов расчета конструкций на прочность, устойчивость и жесткость и занимается **строительная механика**.

Расчет конструкций сооружений на прочность и устойчивость преследует цель обеспечить безопасность и долговечность этих сооружений в сочетании с их экономичностью.

Расчет конструкций сооружений на жесткость преследует цель не допустить возникновения больших перемещений хотя и безопасных для сооружения по условию прочности, но препятствующих его нормальной эксплуатации.

Расчеты конструкций включают два этапа. На первом этапе определяют внутренние усилия и перемещения, возникающие в конструкции. На втором этапе, исходя из условий прочности, жесткости и устойчивости, определяют характерные геометрические размеры новой конструкции или проверяют достаточность таких размеров существующей конструкции.

Среди встречающихся в инженерной практике конструкций достаточно широкий класс образуют стержневые системы, представляющие собой различные объединения стержней. Разработкой методов определения внутренних усилий и перемещений для таких конструкций занимается строительная механика стержневых систем. Дальнейшее изучение методов расчета конструкций будет, в основном, уделено первому этапу расчета плоских стержневых конструкций: многопролетных балок, ферм, рам и других систем.

Второй этап расчета для стержневых конструкций осуществляется так же, как и для отдельного стержня – простейшей стержневой конструкции. Различные виды простых и сложных нагружений отдельного стержня изучались в курсе сопротивления материалов. Рассмотренные там методы определения геометрических характеристик поперечных сечений отдельного стержня или проверки их достаточности, исходя из условий прочности, жесткости и устойчивости, применимы и для стержневых конструкций.

14.2. Расчетная модель конструкции

При расчете конструкций для их описания используется схематизация – основной прием, используемый при изучении реальных объектов и процессов. Это позволяет исключить из расчета второстепенные факторы, оказывающие несущественное влияние на его достоверность и точность.

Совокупность схематизированных описаний геометрической формы, материала и внешних воздействий реальной конструкции, используемых при ее расчете, образует **расчетную модель конструкции**.

Геометрическая форма конструкции образуется совокупностью отдельных элементов, соединенных между собой и с основанием в единое целое. Основные типы простейших конструктивных элементов (массивное тело, пластина, оболочка, прямолинейный и криволинейный стержни) приведены на рисунке 14.1

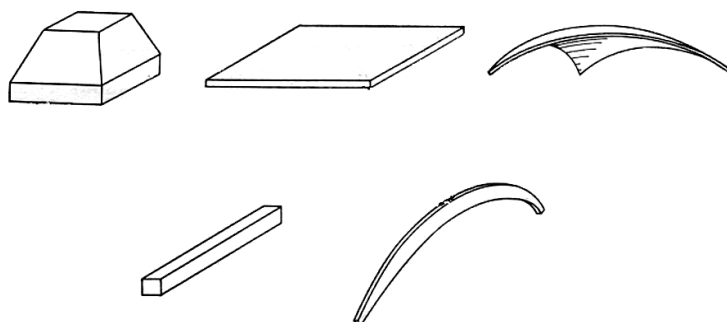


Рисунок 14.1. – Основные типы простейших конструктивных элементов

Как уже отмечалось, при расчете конструкции используется не ее реальное, а упрощенное изображение, которое отражает наиболее существенные особенности геометрической формы, определяющие восприятие конструкцией внешних воздействий. Это упрощенное идеализированное изображение формы конструкции, применяемое при ее расчете, и называется **расчетной схемой конструкции**.

Большое значение для обеспечения долговечности работы конструкции играет материал, из которого она выполнена. Поэтому схематизация свойств реальных материалов – важный момент при образовании расчетной модели конструкции.

Основными конструкционными материалами строительных сооружений являются сталь, бетон, железобетон, древесина, кирпичная кладка. В строительной механике принято рассматривать все материалы, независимо от особенностей их микроструктуры, как воображаемую сплошную однородную среду.

Среда называется сплошной, если она непрерывна в любом объеме и обладает в нем массой. Вследствие свойства непрерывности к такой среде для анализа ее поведения можно применять дифференциальное исчисление.

Под однородностью среды понимается независимость механических свойств от величины выделенного из нее объема. Кроме того, сплошная среда, в случае независимости механических свойств реальных материалов от угловой ориентации, наделяется свойством изотропии. В противном случае среда считается анизотропной.

Сплошная однородная среда, наделенная основными свойствами деформируемости реальных материалов: упругостью, пластичностью и ползучестью, – образует **инженерную модель материала**. Некоторые виды простейших инженерных моделей материала приведены на рисунке 14.2: линейно-упругий материал (рисунок 14.2, а), нелинейно-упругий материал (рисунок 14.2, б), идеальный упруго-пластический материал (рисунок 14.2, в), упруго-пластический материал с линейным упрочнением (рисунок 14.2, г).

Ответственным моментом при расчете конструкции является численное задание внешних воздействий, которые возможны при эксплуатации строительного сооружения.

Различают следующие основные виды внешних воздействий:

- силовое воздействие;
- температурное воздействие;
- кинематическое воздействие.

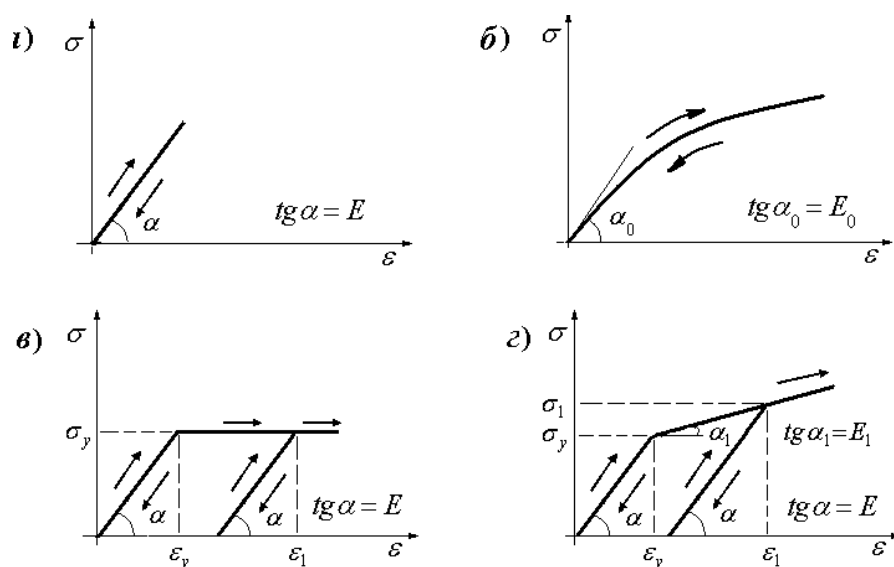


Рисунок 14.2. – Простейшие инженерные модели материала

Силовое воздействие порождается активными внешними силами, действующими на строительные сооружения, и называется **нагрузкой**. Нагрузка характеризуется тремя параметрами: величиной, направлением и местом приложения. Классификация нагрузок по характеру изменения во времени, по продолжительности действия на сооружение и по условиям эксплуатации сооружения была рассмотрена во втором разделе курса.

Температурное воздействие является результатом теплового взаимодействия строительного сооружения с окружающей средой.

Различают следующие виды таких воздействий:

- климатические воздействия, обусловленные изменением температуры окружающего воздуха вследствие солнечной радиации;
- технологические воздействия, обусловленные изменением температуры окружающего воздуха вследствие тепловых технологических излучений.

В дальнейшем для краткости такие воздействия будем называть температурой.

Перемещения, действующие на конструктивные элементы сооружения или на его опорные закрепления, называются **кинематическим воздействием**.

Различают следующие виды кинематических воздействий:

- неравномерная деформация основания сооружения, которую часто называют осадкой опор;
- воздействие усадки и ползучести материала сооружения.

Перечисленные виды внешних воздействий являются результатом проявления во времени взаимодействия сооружения с окружающей его средой и находящихся на нем материальных тел. Точное задание внешних воздействий связано с большими трудностями, т.к. они представляют собой сложные процессы, а характеризующие их числовые величины, как правило, принимают недетерминированные значения.

Поэтому схематизация внешних воздействий, прежде всего, заключается в том, что они не оцениваются в каждом частном случае многочисленными случайными величинами, а задаются детерминировано согласно узаконенными строительными нормами. В этих нормах параметры реальных внешних воздействий заменяются эквивалентными значениями, полученными на основе обработки статистических данных для различных типов сооружений и их конструкций. Кроме того, может упрощаться способ приложения нагрузки. Эквивалентная нагрузка обычно прикладывается равномерно распределенной по площади, хотя в действительности это бывает не часто. В случае малости площади приложения распределенная нагрузка заменяется сосредоточенной силой, чего для реальных конструкций не бывает вообще.

Вычисление величин внешних воздействий, как правило, не входит в задачу строительной механики. Методы расчета конструкций, предлагаемые строительной механикой, являются универсальными и не зависят от конкретных числовых значений внешних воздействий и способов их приложения. Внешние воздействия в строительной механике считаются заданными в общем виде. Вопросы задания конкретных внешних воздействий рассматриваются в курсах, посвященных проектированию строительных конструкций из определенного конструкционного материала (металл, железобетон и т.д.).

14.3. Понятие о линейно и нелинейно деформируемых системах

Основным видом внешнего воздействия на конструкцию является нагрузка. При статическом нагружении конструкция деформируется и находится в состоянии равновесия, которое характеризуется внутренними усилиями и перемещениями. Напряженно-деформированное состояние конструкции рассматривается как физический процесс. Рост нагрузки на конструкцию возможен до тех пор, пока не будет достигнута величина, отвечающая предельному состоянию конструкции по прочности. Такое значение нагрузки называется несущей способностью конструкции.

Каждое отдельное состояние равновесия конструкции может рассматриваться как некоторая точка на координатной плоскости «параметр нагрузки – характерное перемещение». Тогда совокупность состояний равновесия, соответствующих различным уровням нагружения конструкции вплоть до исчерпания несущей способности, будет описываться некоторой линией, которую принято называть кривой состояний равновесия (рисунок 14.3).

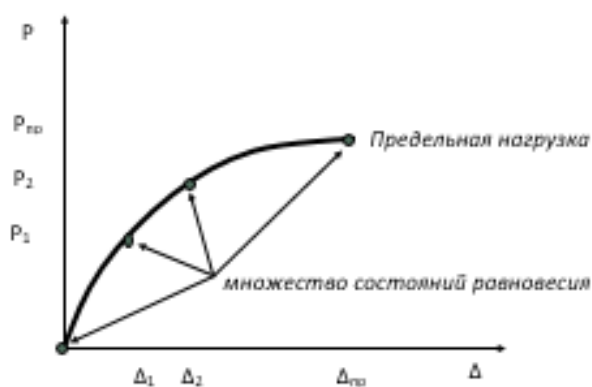


Рисунок 14.3. – Кривая состояний равновесия

По виду очертания этой кривой конструкции, а точнее их расчетные модели, подразделяются на линейно и нелинейно деформируемые системы.

Расчетная модель конструкции, у которой между нагрузкой и вызываемыми ею перемещениями, а также внутренними усилиями принимается прямая пропорциональная зависимость, называется **линейно деформируемой системой**. Данная модель лежит в основе **линейной теории расчета конструкций**.

Для того чтобы реальную конструкцию можно было рассматривать как линейно деформируемую, необходимо чтобы материал конструкции подчинялся закону Гука, а возникающие перемещения были малы по сравнению с первоначальными размерами конструкции.

Применение линейной теории позволяет существенным образом упростить расчет реальных конструкций. Это связано с использованием принципа независимости действия сил и принципа неизменности начальных размеров, которые справедливы только для линейно деформируемых систем.

Суть **принципа независимости действия сил** (принципа суперпозиции) заключается в том, что при действии на конструкцию нескольких нагрузок возникающие внутренние усилия и перемещения равняются сумме внутренних усилий и перемещений от действия каждой нагрузки в отдельности.

Суть **принципа неизменности начальных размеров** (принципа малости перемещений) состоит в том, что при составлении уравнений равновесия конструкции не учитываются изменения ее формы и размеров вследствие деформирования. Он позволяет вести расчет конструкции не по неизвестному конечному деформированному состоянию, а по ее заданному начальному состоянию. Принцип был сформулирован в первой четверти XIX в. французским инженером и ученым Луи Навье.

Однако применение линейной теории расчета конструкций имеет свои границы. Во-первых, начиная с определенного уровня напряженного состояния, закон Гука для строительных материалов перестает соблюдаться и зависимость между напряжениями и деформациями становится нелинейной. Во-вторых, форма и размеры конструкции могут в процессе нагружения существенно изменяться, и в этом случае принцип неизменности начальных размеров становится неприемлемым. В этих случаях расчет реальных конструкций ведут с использованием методов нелинейной строительной механики. Такие методы расчета основываются на понятии нелинейно деформируемой системы.

Нелинейно деформируемой системой называется расчетная модель конструкции, у которой между нагрузкой и вызываемыми ею перемещениями принимается нелинейная зависимость. Принято различать геометрически и физически нелинейные системы.

Геометрически нелинейная система – это система, у которой нелинейная зависимость между нагрузкой и перемещениями обуславливается отказом от принципа неизменности начальных размеров.

Физически нелинейная система – это система, у которой появление нелинейной зависимости между нагрузкой и перемещениями связано с заменой закона Гука нелинейными зависимостями между напряжениями и деформациями.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Чем занимается строительная механика?
2. Каковы цели расчета сооружений?
3. В чем заключается основная задача строительной механики?
4. Что такое несущая система?
5. Что такое несущая конструкция?
6. Какие бывают виды внешних воздействий?

7. Что такое расчетная модель?
8. Что такое расчетная схема?
9. Что такое инженерная модель материала?
10. Что такое состояние равновесия конструкции?
11. Чем характеризуется напряженно-деформированное состояние конструкции?
12. Что такое равновесных состояний?
13. Что такое линейно деформируемая система?
14. Как формулируется принцип независимости действия сил?
15. Как формулируется правило относительной жесткости?
16. Что такое нелинейно деформируемая система?
17. Что такое несущая способность сооружения?
18. Какие существуют методы определения несущей способности сооружения?

ТЕМА 15. Кинематический анализ плоских стержневых конструкций

Цели изучения темы

Рассмотреть разделение стержневых конструкций по статическим и кинематическим признакам и установить взаимосвязь между ними.

Рассмотреть цель кинематического анализа и его основные понятия.

Разобраться с подсчетом числа степеней свободы и анализом структуры стержневых конструкций.

Рассмотреть порядок установления кинематических и статических признаков стержневых конструкций.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [6].

15.1. Разделение расчетных схем конструкций по статическим признакам

По статическим признакам расчетные схемы конструкций подразделяются на статически определимые, статически неопределимые и статически противоречивые системы. В основе такого разделения расчетных схем лежит разрешимость уравнений статики, которые описывают состояние равновесия рассматриваемой конструкции.

Расчетная схема конструкции считается **статически определимой системой**, если при произвольной статической нагрузке опорные реакции и внутренние усилия, возникающие в конструкции, могут быть найдены из уравнений статики единственным и определенным образом.

Расчетная схема конструкции считается **статически неопределимой системой**, если уравнений статики недостаточно для однозначного определения опорных реакций и внутренних усилий, возникающих в конструкции при произвольной статической нагрузке. Определение искомых величин единственным и определенным образом возможно лишь из совместного рассмотрения уравнений статики и условий, характеризующих деформацию конструкции.

Расчетная схема конструкции считается **статически противоречивой системой**, если она, из-за встречающихся противоречий или наложения ограничений на вид нагрузки, не удовлетворяет уравнениям статики. Поскольку такие системы при действии произвольной статической нагрузки не могут находиться в равновесии, то они не допускаются в качестве расчетных схем строительных конструкций.

Таким образом, статический признак расчетной схемы конструкции существенным образом влияет как на метод определения внутренних усилий, так и на возможность ее использования при расчете конструкции. Поэтому расчет конструкции следует начинать с выяснения статического признака применяемой расчетной схемы.

Установление такого признака обычно осуществляется путем сопоставления числа уравнений статики и числа неизвестных величин, подлежащих определению. Считается, что в случае статически определимых систем число уравнений статики и число неизвестных величин одинаковые, а в случае статически неопределимых систем число уравнений статики меньше числа неизвестных величин. Однако такие соотношения являются необходимым, но недостаточным условием для заключения о статическом признаке расчетной схемы конструкции и поэтому могут приводить к неправильным выводам.

15.2. Разделение расчетных схем конструкций по кинематическим признакам

По кинематическим признакам расчетные схемы конструкций подразделяются на геометрически неизменяемые и геометрически изменяемые системы. В основе такого разделения расчетных схем лежит возможность возникновения в них перемещений без учета деформаций материала.

Расчетная схема конструкции считается **геометрически изменяемой системой**, если она допускает относительные перемещения элементов без деформации материала. Такие системы бывают двух типов: с конечной изменяемостью и с мгновенной изменяемостью.

В геометрически изменяемых системах с конечной изменяемостью могут возникать конечные относительные перемещения элементов без их деформации. В геометрически изменяемых системах с мгновенной изменяемостью могут возникать бесконечно малые относительные перемещения элементов без их деформации, после чего система становится геометрически неизменяемой. Любая мгновенно изменяемая система представляет собой вырожденный случай некоторой неизменяемой системы.

Геометрически изменяемые системы с любым типом изменяемости не допускаются в качестве расчетных схем строительных конструкций. Хотя после нагружения мгновенно изменяемые системы становятся геометрически неизменяемыми, но возникающие в них при этом внутренние усилия имеют очень большие значения, и конструкция или разрушится, или значительно деформируется.

Расчетная схема конструкции считается **геометрически неизменяемой системой**, если она не допускает относительные перемещения элементов без деформации материала. Такие системы бывают двух типов – с необходимым числом элементов и с избыточным числом элементов. В системах первого типа удаление одного элемента обращает ее в геометрически изменяемую систему, а для систем второго типа этого не происходит.

15.3. Взаимосвязь кинематических и статических признаков расчетных схем конструкций

Кинематические признаки по сравнению со статическими признаками расчетных схем являются более глубокими и физически более естественными. На их основании могут устанавливаться и статические признаки расчетных схем.

Так как геометрически изменяемые системы допускают относительные перемещения элементов без деформации материала, то при действии произвольной статической нагрузки они не могут находиться в равновесии. Поэтому геометрически изменяемые системы с любым типом изменяемости являются статически противоречивыми системами.

Геометрически неизменяемые системы с необходимым числом связей не допускают относительные перемещения элементов без деформации материала, поэтому при действии произвольной статической нагрузки они будут находиться в равновесии. Однако равновесие системы нарушается после удаления одного элемента, и она становится статически противоречивой. По этой причине геометрически неизменяемые системы с необходимым числом связей являются статически определяемыми системами.

Геометрически неизменяемые системы с избыточными связями при действии произвольной статической нагрузки также будут находиться в равновесии. Однако равновесие такой системы не нарушается после удаления одного элемента. Значит, геометрически неизменяемые системы с избыточным числом элементов являются статически неопределимыми системами.

15.4. Цель кинематического анализа и его основные понятия

Раздел строительной механики, в котором предлагаются специальные приемы для установления кинематических признаков конструкций, называется **кинематическим анализом**. Его основными понятиями являются число степеней свободы, диск, узел, кинематическая связь.

Числом степеней свободы какого-либо тела или системы тел называется количество независимых возможных перемещений тела или системы, которые происходят без деформаций материала. Будем обозначать число степеней свободы символом W .

Диском является абсолютно твердое тело. На плоскости он обладает тремя степенями свободы $W = 3$. Его положение при движении может описываться двумя линейными перемещениями x_C и y_C некоторой произвольной точки C и углом поворота α_C любой прямой, проходящей через точку C (рисунок 15.1)

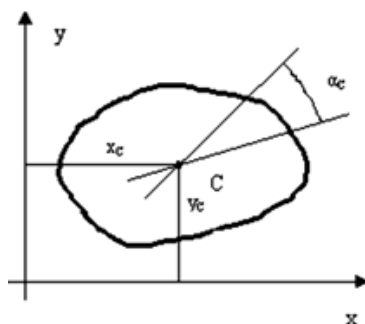


Рисунок 15.1. – К понятию диска

Примерами дисков служат различные конструктивные элементы, например, прямолинейный или криволинейный стержни, а также любая геометрически неизменяемая часть конструкции, например, шарнирно стержневой треугольник.

Особое место среди дисков занимает основание, к которому крепится рассматриваемая система тел. Поскольку для реальных конструкций таким основанием является земная поверхность и при их расчетах не учитывается движение нашей планеты, то основание считается условно неподвижным диском. Число степеней свободы такого диска принимается $W = 0$, и в дальнейшем для краткости он будет называться «земля».

Узлом считается любая точка системы тел, положение которой описывается независимо от тел системы. На плоскости узел обладает двумя степенями свободы $W = 2$. Его положение при движении характеризуется двумя линейными перемещениями x_c и y_c (рисунок 15.2).

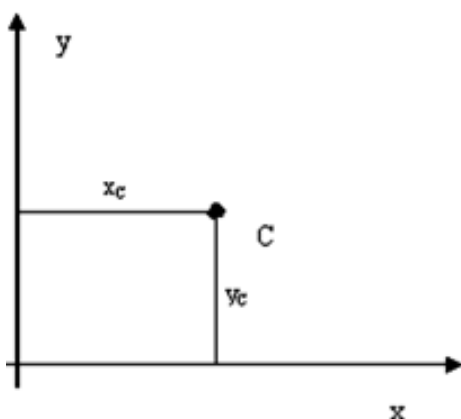


Рисунок 15.2. – К понятию узла

Например, узлами могут являться центры шарнирных узлов конструкции, если сходящиеся в них стержни относить не к числу дисков, а рассматривать как кинематические связи.

Кинематической связью является механическое устройство, уничтожающее одну степень свободы. Если какое-либо устройство уничтожает более одной степени свободы, то оно эквивалентно соответствующему количеству связей.

Различают два вида кинематических связей: **внутренние** и **внешние**. Внутренние связи соединяют диски и узлы рассматриваемой системы, а внешние – это связи, соединяющие систему с «землей», т.е. опорные устройства конструкции.

Основными типами внутренних связей служат **стержень**, **цилиндрический шарнир** и **монолитное соединение тел**, или «припайка». Покажем, сколько степеней свободы уничтожает каждый тип внутренней связи на примере соединения с их помощью двух дисков.

Стержень уничтожает одну степень свободы. Положение двух несвязанных дисков характеризуется шестью независимыми перемещениями $x_C, y_C, \varphi_C, x_D, y_D, \varphi_D$ (рисунок 15.3, а).

После соединения дисков стержнем число таких перемещений уменьшается на единицу и положение системы характеризуется двумя линейными перемещениями x_C, y_C и тремя угловыми перемещениями φ_C, β, γ (рисунок 15.3, б).

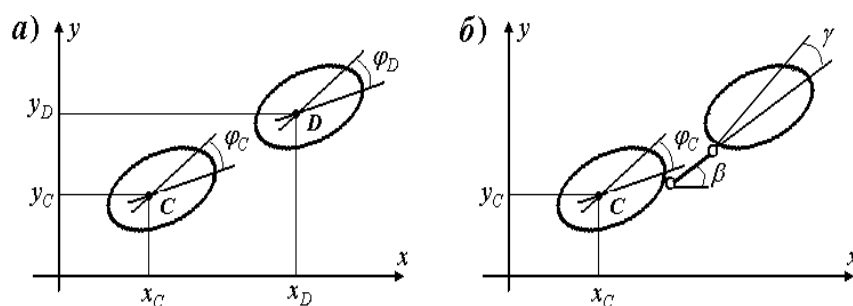


Рисунок 15.3. – К понятию стержня

Цилиндрический шарнир уничтожает две степени свободы. После соединения двух дисков цилиндрическим шарниром число независимых перемещений, описывающих положение системы, уменьшается на две единицы и характеризуется двумя линейными перемещениями x_C, y_C и двумя угловыми перемещениями φ_C, β (рисунок 15.4, а).

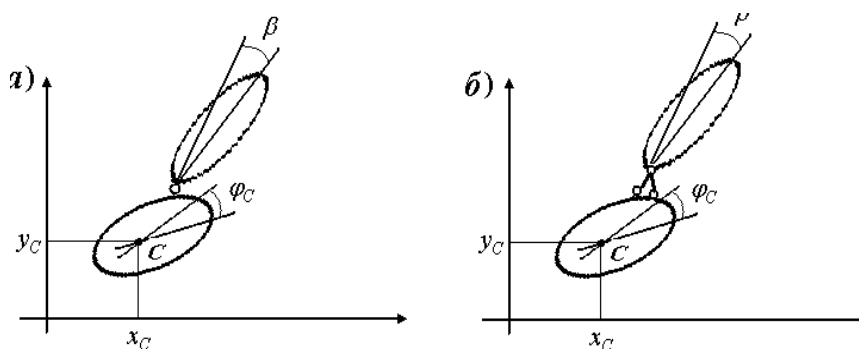


Рисунок 15.4. – К понятию цилиндрического шарнира

Таким образом, цилиндрический шарнир эквивалентен двум кинематическим связям и может изображаться в виде двух стержней (см. рисунок

15.4, б). И наоборот, два любых стержня, соединяющие два диска, могут рассматриваться как некоторый фиктивный шарнир. Такой шарнир располагается в точке пересечения этих стержней, которая определяет положение мгновенного центра вращения системы. В случае параллельности стержней такая точка лежит в бесконечности.

Монолитное соединение уничтожает три степени свободы. После соединения двух дисков с помощью «припайки» число независимых перемещений, описывающих положение системы, уменьшается на три единицы и характеризуется двумя линейными перемещениями x_C , y_C и одним угловым перемещением φ_C (рисунок 15.5, а).

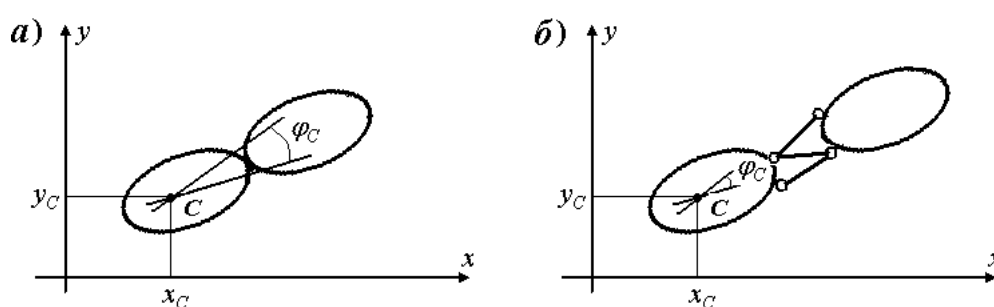


Рисунок 15.5. — К понятию монолитного соединения

Таким образом, монолитное соединение эквивалентно трем кинематическим связям и может изображаться в виде трех стержней (см. рисунок 15.5, б). Такие стержни не должны быть параллельны друг другу или пересекаться в одной точке.

Простейшими типами опорных устройств плоских стержневых конструкций являются **цилиндрическая шарнирно подвижная и неподвижная опоры, подвижная и неподвижная защемляющие опоры**. Рассмотрим, сколько степеней свободы уничтожает каждый тип опорного устройства.

Цилиндрическая шарнирно подвижная опора уничтожает одну степень свободы. В дальнейшем для краткости такую опору будем называть шарнирно подвижной. Положение свободного диска характеризуется тремя независимыми перемещениями. После его присоединения к «земле» с помощью шарнирно подвижной опоры число таких перемещений уменьшается на единицу, т.к. опора допускает вращение вокруг некоторой оси и поступательное перемещение параллельно определенной прямой. Поэтому положение присоединенного к «земле» диска характеризуется одним линейным и одним угловым перемещениями.

Таким образом, шарнирно подвижная опора эквивалентна одной кинематической связи и может изображаться в виде стержня (рисунок 15.6, а). Ось такого стержня направлена перпендикулярно к допускаемому опорой поступательному перемещению.

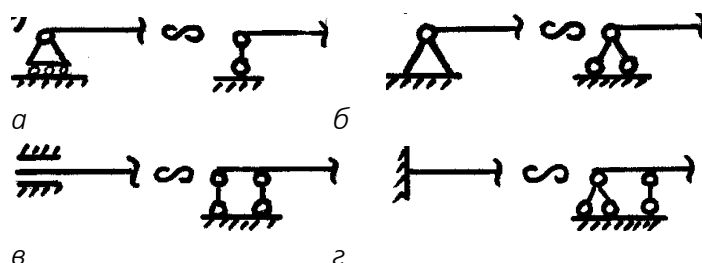


Рисунок 15.6. – Типы опорных устройств плоских стержневых конструкций

Цилиндрическая шарнирно неподвижная опора уничтожает две степени свободы. В дальнейшем для краткости такую опору будем называть шарнирно неподвижной. После присоединения диска к «земле» с помощью шарнирно неподвижной опоры число таких перемещений уменьшается на две единицы, т.к. такая опора допускает только вращение вокруг некоторой оси. Поэтому положение присоединенного к «земле» диска характеризуется одним угловым перемещением.

Таким образом, шарнирно неподвижная опора эквивалентна двум кинематическим связям и может изображаться в виде двух стержней (см. рисунок 15.6, б).

Подвижная защемляющая опора уничтожает две степени свободы. После присоединения диска к «земле» с помощью подвижной защемляющей опоры число таких перемещений уменьшается на две единицы, т.к. такая опора допускает только поступательное перемещение параллельно определенной прямой. Поэтому положение присоединенного к «земле» диска характеризуется одним линейным перемещением.

Таким образом, подвижная защемляющая опора эквивалентна двум кинематическим связям и может изображаться в виде двух параллельных стержней перпендикулярно к допускаемому опорой поступательному перемещению (см. рисунок 15.6, в). Расстояние между стержнями считается бесконечно малой величиной.

Неподвижная защемляющая опора уничтожает три степени свободы, так как она не допускает никаких перемещений диска после присоединения

к «земле». Неподвижная заземляющая опора эквивалентна трем кинематическим связям и может изображаться в виде сочетания шарнирно подвижной и шарнирно неподвижной опор, расстояние между которыми считается бесконечно малой величиной (см. рисунок 15.6, з).

15.5. Подсчет числа степеней свободы для плоских стержневых конструкций

Для подсчета числа степеней свободы конструкция представляется в виде **кинематической цепи** – совокупности дисков и узлов с наложенными на них внутренними и внешними связями. Внешние связи представляются в эквивалентном стержневом изображении.

Кинематическая цепь состоит из элементов, приносящих степени свободы (диски, узлы) и уничтожающих их (шарниры, стержни, опорные стержни). С учетом числа степеней свободы, приносимых и уничтожаемых соответствующими элементами цепи, формула для подсчета числа степеней свободы плоской стержневой конструкции в общем случае имеет следующий вид:

$$W = 3D + 2U - 2Ш - C - C_o. \quad (15.1)$$

Здесь D – число дисков, U – число узлов, $Ш$ – число шарниров, C – число стержней внутри цепи, C_o – число опорных стержней.

Определение числа шарниров производится с учетом их кратности. Шарнир считается кратным, если он соединяет более двух дисков. Степень кратности такого шарнира на единицу меньше числа соединяемых дисков.

Подсчет числа степеней свободы по формуле (15.1) не зависит от способа образования кинематической цепи и может приводить к следующим результатам:

$$W > 0, \quad W \leq 0.$$

В случае $W > 0$ система является геометрически изменяемой, т.к. число степеней свободы, приносимых элементами цепи, превышает число степеней свободы, выключаемых кинематическими связями. Условие геометрической изменяемости $W > 0$ является необходимым и достаточным.

В случае $W \leq 0$ система является геометрически неизменяемой, т.к. число степеней свободы, уничтоженных кинематическими связями, превышает число степеней свободы, приносимых элементами цепи. Однако условие геометрической неизменяемости $W \leq 0$ является необходимым, но не достаточным.

15.6. Анализ геометрической структуры плоских стержневых конструкций

Анализ геометрической структуры конструкции заключается в последовательном рассмотрении схем соединения кинематическими связями дисков и узлов кинематической цепи конструкции между собой и с основанием. Цель – поиск схем соединения, приводящих к возникновению мгновенного центра вращения для системы в целом или для отдельных ее частей. В случае обнаружения таких схем соединения делается вывод о геометрической изменчивости стержневой конструкции, несмотря на полученный результат подсчета числа степеней свободы $W \leq 0$. Поэтому для проведения анализа геометрической структуры нужно иметь некоторые исходные схемы соединения, приводящие или не приводящие к появлению мгновенного центра вращения.

Основные схемы соединения элементов кинематической цепи между собой. Два диска, соединенные между собой тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями, образуют единый диск (рисунок 15.7, а).

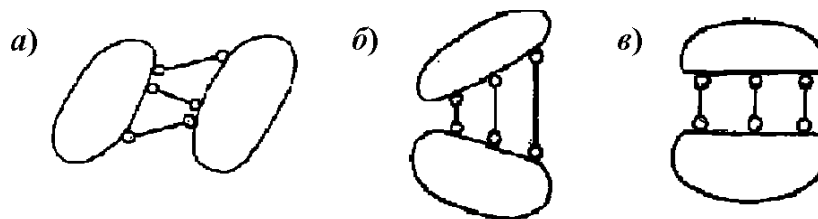


Рисунок 15.7. – Соединения двух дисков

Неправильное расположение стержней между дисками, приводящее к возникновению мгновенного центра, показано на рисунке 15.7, б, в.

Три диска, соединенные между собой тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой, образуют единый диск (рисунок 15.8, а).

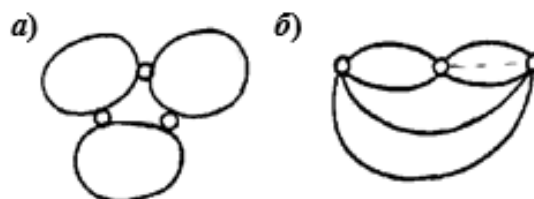


Рисунок 15.8. – Соединения трех дисков

Неправильное расположение шарниров между дисками, приводящее к возникновению мгновенного центра, показано на рисунке 15.8, б.

Два диска, соединенные между собой при помощи шарнира и стержня, ось которого не проходит через центр шарнира, образуют единый диск (рисунок 15.9, а).



Рисунок 15.9. – Соединения двух дисков при помощи шарнира и стержня

Неправильное расположение связей между дисками, приводящее к возникновению мгновенного центра, показано на рисунке 15.9, б.

Узел, присоединенный к диску с помощью двух стержней, не лежащими на одной прямой, образуют единый диск (рисунок 15.10, а)

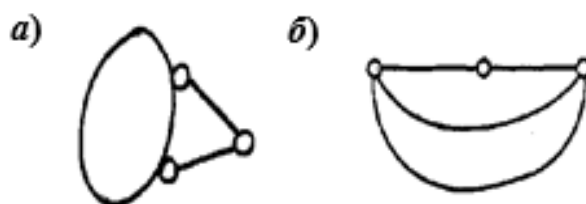


Рисунок 15.10. – Узел, присоединенный к диску с помощью двух стержней

Неправильное присоединение узла к диску, приводящее к возникновению мгновенного центра, показано на рисунке 15.10, б.

Три узла, соединенные между собой тремя стержнями и образующие шарнирно стержневой треугольник, являются диском.

Основные схемы присоединения элементов кинематической цепи к основанию. Диск, присоединенный к основанию с помощью неподвижной защемляющей опоры, образует с ним единый диск.

Диск, присоединенный к основанию с помощью шарнирно неподвижной и шарнирно подвижной опор, образует с ним единый диск (рисунок 15.11, а). Такое присоединение диска к основанию называется балочной схемой опирания, и оно эквивалентно соединению двух дисков с помощью трех стержней, непараллельных и не пересекающихся в одной точке. Непра-

вильное расположение опор, приводящее к образованию мгновенно изменяемой системы, показано на рисунке 15.11, б.

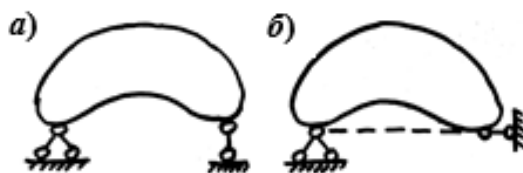


Рисунок 15.11. – Присоединения диска к основанию

Два диска, соединенные шарниром и присоединенные к основанию с помощью двух шарнирно неподвижных опор, образуют с ним единый диск (рисунок 15.12, а).

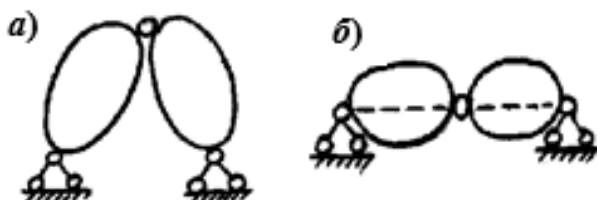


Рисунок 15.12. – Присоединения двух дисков к основанию

Такое присоединение двух дисков к основанию называется трехшарнирной схемой опирания, и оно эквивалентно соединению трех дисков с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой. Неправильное взаимное расположение шарнира и опор, приводящее к образованию мгновенно изменяемой системы, показано на рисунке 15.12, б.

15.7. Порядок установления кинематических и статических признаков конструкции

Для установления кинематических и статических признаков плоской стержневой конструкции необходимо:

- изобразить расчетную схему конструкции в виде кинематической цепи;
- подсчитать число дисков D , число узлов U , число шарниров $Ш$, число стержней внутри цепи C , число опорных стержней C_o ;
- подсчитать число степеней свободы кинематической цепи W ;
- если $W > 0$, сделать вывод о геометрической изменяемости и статической противоречивости конструкции;

- если $W \leq 0$, провести анализ геометрической структуры конструкции;
- сделать вывод о кинематических и статических свойствах конструкции с учетом результатов анализа геометрической структуры конструкции.

15.8. Пример к теме

Пример. Для стержневой системы, показанной на рисунке 15.13, а, сделать кинематический анализ и вывод о ее кинематических и статических признаках.

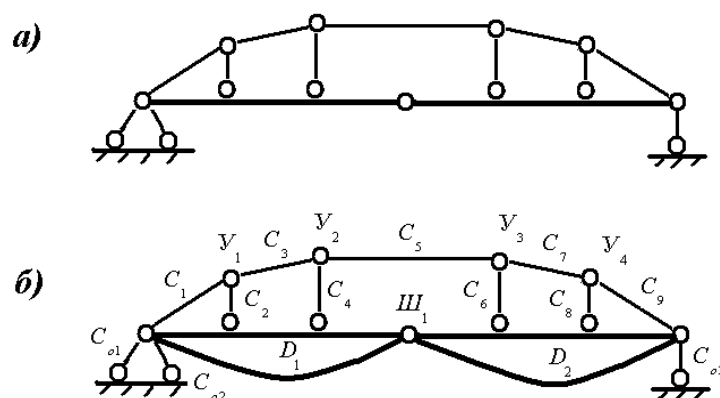


Рисунок 15.13. – Стержневая система

Решение:

Для подсчета числа степеней свободы представим систему в виде кинематической цепи. Согласно рисунку (рисунок 15.13, б),

$$D=2; Y=4; Ш=1; C=9; C_o=3.$$

Тогда по формуле (15.1)

$$W=3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 9 - 3 = 0.$$

Поскольку подсчитанное число степеней свободы удовлетворяет условию $W = 0$, то выполним анализ геометрической структуры системы.

Узел Y_1 крепится к диску D_1 при помощи двух стержней C_1 и C_2 , не лежащих на одной прямой, и образует с ним единый диск. Узел Y_2 крепится к расширенному диску при помощи двух стержней C_3 и C_4 , не лежащих на одной прямой, и образует с ним единый диск. Рассуждая аналогично, можно показать, что узлы Y_3 и Y_4 образуют с диском D_2 единый диск.

Два полученных диска соединены между собой при помощи шарнира $Ш_1$ и стержня C_5 , ось которого не проходит через центр шарнира. Поэтому система без учета опорных стержней образует единый диск. Этот

единый диск крепится к основанию тремя опорными стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке и, следовательно, образует с ним единый диск.

Таким образом, на основании подсчета числа степеней свободы и анализа геометрической структуры можно сделать выводы, что рассматриваемая стержневая система геометрически неизменяемая с необходимым числом связей и статически определимая.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Как разделяются расчетные схемы конструкций по статическим признакам?
2. Как разделяются расчетные схемы конструкций по кинематическим признакам?
3. Как взаимосвязаны классификации расчетных схем конструкций по статическим и кинематическим признакам?
4. Какова цель кинематического анализа?
5. Что называется числом степеней свободы?
6. Что называется диском?
7. Что называется узлом?
8. Что называется кинематической связью?
9. Какие бывают типы внутренних связей?
10. Какие бывают типы внешних связей?
11. Что называется кинематической цепью?
12. Какой вид имеет формула для подсчета числа степеней свободы?
13. Для чего нужен анализ геометрической структуры?
14. Каков порядок установления кинематических и статических признаков стержневых конструкций?

ТЕМА 16. Методы расчета статически определимых систем при неподвижной нагрузке

Цели изучения темы

Рассмотреть числовые характеристики внутренних сил плоских стержневых конструкций.

Познакомиться с видами статически определимых стержневых конструкций и их свойствами.

Рассмотреть статический метод определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях и его применение к расчету многопролетных балок.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [6].

16.1. Внутренние силы и их числовые характеристики

При расчете стержневой конструкции заданной геометрической формы из определенного конструкционного материала и с известными внешними воздействиями неизвестными величинами могут являться:

- 1) опорные реакции;
- 2) внутренние силы;
- 3) размеры поперечных сечений конструктивных элементов;
- 4) перемещения конструкции.

Из второго раздела курса известно, что **внутренние силы**, возникающие в элементах стержневой конструкции, с помощью **метода сечений** могут рассматриваться как внешние силы (рисунок 16.1, а, б). Такой прием позволяет включать внутренние силы в уравнения равновесия конструкции.

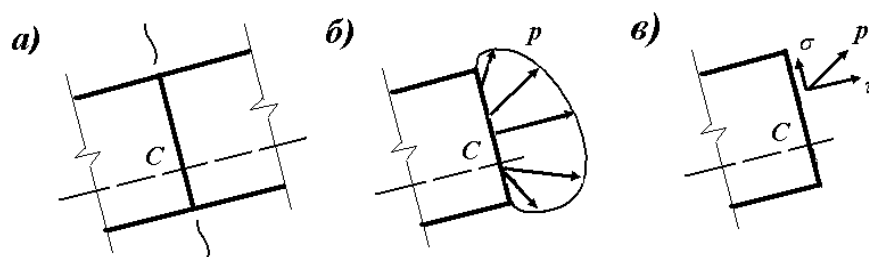


Рисунок 16.1. – Метод сечений

Числовой мерой внутренних сил в произвольной точке поперечного сечения конструктивного элемента являются **напряжения** – **полные p** , **нормальные σ** и **касательные τ** (см. рисунок 16.1, в). Напряжения численно характеризуют интенсивность внутренних сил, приходящихся на единицу площади поперечного сечения.

Для поперечного сечения в целом числовой мерой внутренних сил являются составляющие главного вектора и главного момента таких сил при их приведении к центру тяжести поперечного сечения. В плоских стержневых конструкциях такими составляющими являются **продольная сила N** , **поперечная сила Q** и **изгибающий момент M** . Их принято называть внутренними

усилиями конструкции, и они связаны с напряжениями следующими интегральными зависимостями:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad Q_y = \int_A \tau dA, \quad M_z = \int_A \sigma y dA. \quad (16.1)$$

Отличительной особенностью расчета статически определимых стержневых конструкций является независимость определения опорных реакций и внутренних усилий от перемещений, возникающих в конструкции, и размеров поперечных сечений ее конструктивных элементов. Это радикальным образом упрощает расчет таких конструкций, т.к. опорные реакции и внутренние усилия могут быть найдены из условий равновесия.

При определении внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях могут использоваться три формы: **аналитическая**, **графическая** и **матричная**. Графическая форма в настоящее время утратила свою актуальность и практически при расчетах реальных конструкций не применяется.

16.2. Виды статически определимых конструкций и их свойства

По геометрической структуре статически определимые стержневые конструкции можно разделить на два вида – **простые и составные**. Конструкции первого вида, мысленно отделенные от «земли», являются диском (рисунок 16.2, а). Примерами таких конструкций являются консольная балка и рама с балочной схемой опирания, показанные на рисунке 16.2, б.

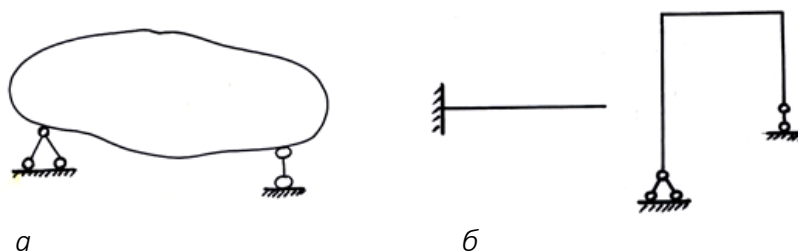


Рисунок 16.2. – Простые статически определимые стержневые конструкции

Конструкции второго вида состоят из элементов двух типов – основных и дополнительных. Отличительным признаком основных элементов является их геометрическая неизменяемость по отношению к «земле» без учета остальных элементов конструкции. Следовательно, основные элементы служат

основанием для опирания дополнительных элементов. Поэтому при расчете составных статически определимых стержневых конструкций целесообразно использование **монтажной схемы**. Такая схема показывает последовательность опирания частей составной конструкции на «землю» и друг на друга. Пример составной конструкции и ее монтажной схемы показан на рисунке 16.3.

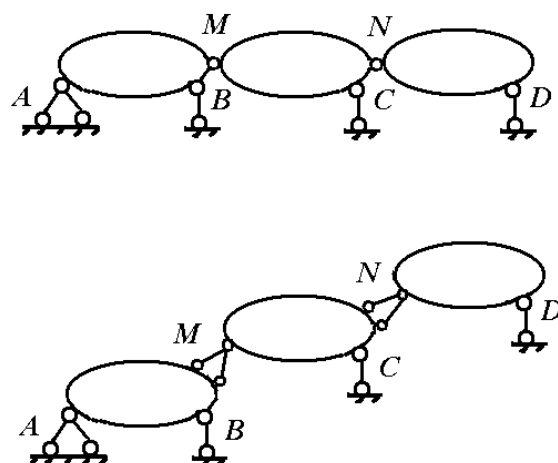


Рисунок 16.3. – Составная статически определимая стержневая конструкция

Все статически определимые стержневые конструкции обладают рядом общих свойств, существенно отличающих их от статически неопределимых стержневых конструкций. Рассмотрим эти свойства без доказательств.

Первое свойство. Каждой нагрузке, приложенной к конструкции, соответствует единственная система значений опорных реакций и внутренних усилий этой конструкции.

Второе свойство. Нагрузка, приложенная к основному элементу составной конструкции, вызывает внутренние усилия только в этом элементе, а нагрузка, приложенная к дополнительному элементу, вызывает внутренние усилия как в нем, так и в элементах, на которые он опирается.

Третье свойство. Уравновешенная нагрузка, приложенная к геометрически неизменяемой части конструкции, вызывает внутренние усилия только в этой части, а в остальных частях конструкции они равны нулю.

Четвертое свойство. Замена нагрузки, приложенной к некоторой геометрически неизменяемой части конструкции, эквивалентной нагрузкой не изменяет внутренних усилий в остальных частях конструкции.

Пятое свойство. В статически определимых стержневых конструкциях не возникают внутренние усилия от температурного воздействия, осадки опор и вследствие неточностей изготовления конструктивных элементов.

16.3. Аналитическая форма определения внутренних усилий

Аналитическая форма определения внутренних усилий в произвольной плоской статически определимой стержневой конструкции основана на использовании уравнений и условий равновесия конструкции при действии некоторой нагрузки. Существует три разновидности аналитической формы – **статический метод, кинематический метод и метод замены связей**. При определении внутренних усилий в плоских статически определимых конструкциях обычно применяют статический метод. Поэтому далее рассмотрим только статический метод.

Статический метод определения внутренних усилий основан на использовании метода сечений и рассмотрении условий равновесия конструкции в целом или отдельных ее частей. Искомые внутренние усилия находятся в виде функций, описывающих изменение внутренних усилий по длине конструктивных элементов. Графики таких функций называются **эпюрами** соответствующих внутренних усилий.

Расчет конструкций начинается с определения опорных реакций. При балочной или консольной схеме опирания конструкции для определения опорных реакций используется одна из разновидностей уравнений равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости. При трехшарнирной схеме опирания конструкции указанные уравнения дополняются условиями равновесия отдельных частей конструкции относительно промежуточного шарнира. Для включения опорных реакций в уравнения равновесия и дополнительные условия в качестве неизвестных величин их при помощи принципа освобождения от связей переводят в число внешних сил, приложенных к рамной конструкции в местах присоединения опорных закреплений.

Для определения внутренних усилий в произвольном сечении K некоторого элемента плоской стержневой конструкции разделяем ее в этом сечении на две части (рисунок 16.4) и заменяем удаленные связи их реакциями – внутренними усилиями этого сечения. Обе части конструкции под действием приложенных к ним внешних сил и внутренних усилий находятся в равновесии. Возможны **две разновидности определения внутренних усилий статическим методом**.

Первая разновидность основана на применении уравнений равновесия к одной из отделенных частей конструкции. Такие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
\sum M_K^{омд.ч.} &= 0; \quad M_z + \sum_i^{омд.ч.} M_{G_iK} = 0 \\
\sum n^{омд.ч.} &= 0; \quad Q_y + \sum_i^{омд.ч.} G_{in} = 0, \\
\sum t^{омд.ч.} &= 0; \quad N + \sum_i^{омд.ч.} G_{it} = 0
\end{aligned} \tag{16.1}$$

где $\sum_i^{омд.ч.} M_{G_iK}$ – сумма моментов внешних сил отдельной части конструкции относительно центра тяжести сечения K ; $\sum_i^{омд.ч.} G_{in}$ и $\sum_i^{омд.ч.} G_{it}$ – суммы проекций внешних сил отдельной части рамной конструкции, соответственно, на нормаль и касательную к оси стержня в сечении K . Решая уравнения (16.1), определяем внутренние усилия в сечении как некоторые функции величин, описывающих его положение – координат сечения, угла наклона касательной или нормали.

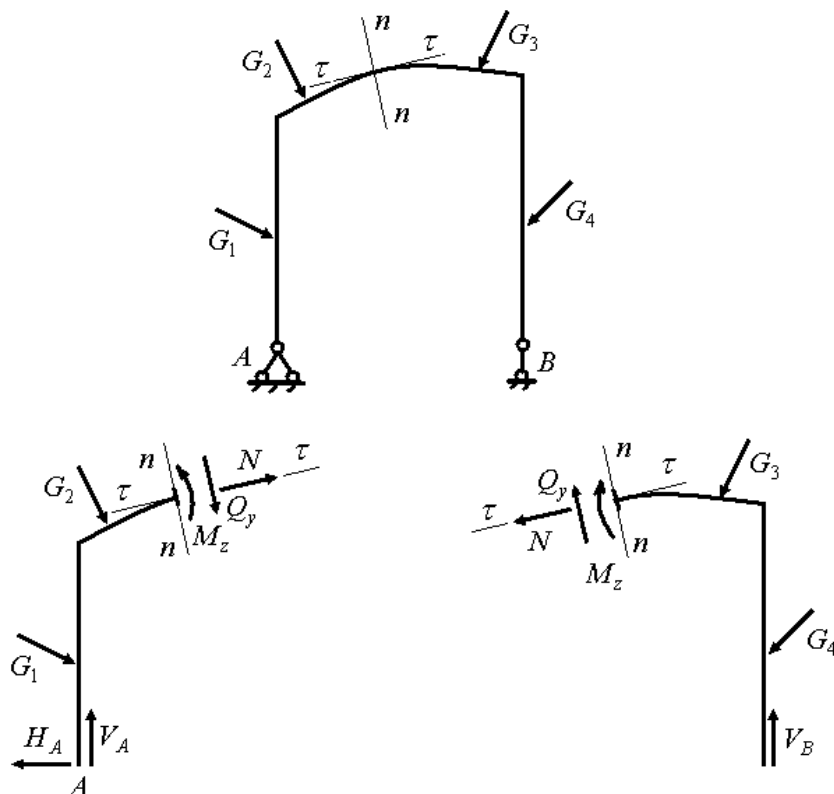
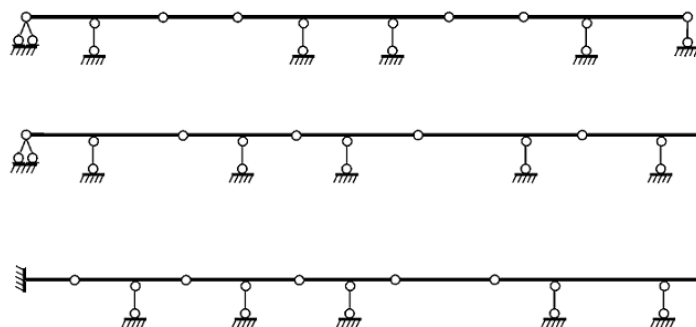


Рисунок 16.4. – К определению внутренних усилий статическим методом

Вторая разновидность основана на использовании приема приведения системы сил к точке. Из условия равновесия рамной конструкции в целом следует, что главный вектор и главный момент внешних сил одной части как по величине, так и по направлению, совпадают с главным вектором и главным моментом внутренних сил другой части. Поэтому, приводя внешние силы одной части конструкции к центру тяжести поперечного сечения другой части конструкции, можно найти внутренние усилия без составления и решения уравнений равновесия.

16.4. Особенности расчета многопролетных шарнирных балок

Многопролетной шарнирной балкой (МШБ) называется геометрически неизменяемая стержневая система, состоящая из однопролетных простых или консольных балок, соединенных между собой промежуточными шарнирами. Основные типы таких конструкций показаны на рисунке 16.5.



Рисунке 16.5. – Основные типы многопролетных шарнирных балок

Условие геометрической неизменяемости МШБ имеет вид

$$Ш = C_0 - 3,$$

где $Ш$ – число промежуточных шарниров, соединяющих элементы МШБ, C_0 – число опорных стержней, с учетом эквивалентного стержневого изображения заземляющих опор. Но данное условие является необходимым, но не достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости МШБ. Для обеспечения достаточности необходимо, чтобы при размещении шарниров выполнялись следующие требования:

- в пролете не может быть более двух шарниров;
- в смежных пролетах не может находиться по два шарнира;
- пролеты без шарниров не могут располагаться рядом;

- в крайнем пролете при крайней шарнирной опоре не может быть более одного шарнира;

- в крайнем пролете при крайней защемляющей неподвижной опоре должен быть хотя бы один шарнир.

Для определения внутренних усилий в МШБ и построения их эпюр удобно пользоваться ее монтажной схемой. Согласно этой схеме действие нагрузки на элементы МШБ подчиняется следующим правилам:

- Нагрузка, приложенная к основному элементу, может вызывать внутренние усилия только в этом элементе.

- Нагрузка, приложенная к дополнительному элементу, может вызывать внутренние усилия, как в нем, так и в элементах, на которые он опирается.

Для построения эпюр внутренних усилий в МШБ необходимо осуществить следующее:

1. Изобразить монтажную схему МШБ с действующей нагрузкой.
2. Определить порядок расчета элементов, как отдельных балок.
3. Рассчитать самый верхний дополнительный элемент на собственную нагрузку и построить эпюры M и Q .
4. Рассчитать последовательно нижележащие элементы, согласно намеченному порядку п. 2, на собственную нагрузку и «перевернутые» опорные реакции вышележащих элементов и построить эпюры M и Q .
5. Объединить эпюры M и Q отдельных элементов в сводные эпюры МШБ.

16.5. Примеры к теме

Пример 1. Для многопролетной шарнирной балки, показанной на рисунке 16.6, а, требуется построить эпюры M и Q . Монтажная схема балки и порядок расчета ее звеньев приведены на рисунке 16.6, б.

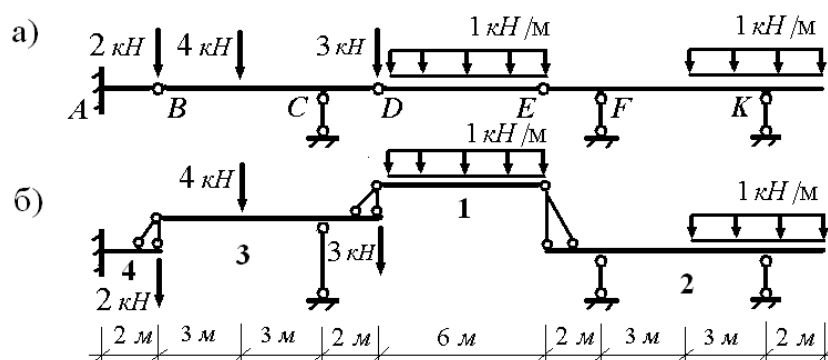


Рисунок 16.6. – К расчету заданной балки

Решение:

В соответствии с указанным порядком рассчитаем звенья многопролетной балки как однопролетные балки.

Расчет звена DE. Расчет начинаем с определения опорных реакций, схема которых показана на рисунке 16.7, а.

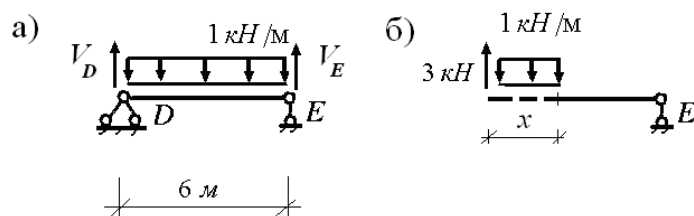


Рисунок 16.7. – К расчету звена DE

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакций:

$$\sum M_E = 0;$$

$$V_D \cdot 6 - 1 \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$V_D = 3 \text{ кН.}$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакций:

$$\sum M_D = 0;$$

$$-V_E \cdot 6 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = 0;$$

$$V_E = 3 \text{ кН.}$$

Составляя для звена DE сумму проекций всех сил на ось y, можно убедиться, что опорные реакции найдены верно

$$\sum y = 0; \quad 3 - 1 \cdot 6 + 3 = 6 - 6 = 0.$$

Переходим к определению внутренних усилий. Для их определения будем использовать вторую разновидность статического метода. В рассматриваемом звене можно выделить один участок. Рассечем звено в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть звена (см. рисунок 16.7, б). Переменная x, определяющая положение сечения, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 6 \text{ м}$.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части звена, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий:

$$M = 3 \cdot x - 0.5x^2;$$

$$Q = 3 - 1 \cdot x.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении x поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв к нулю выражение для поперечной силы, найдем, что это возможно при значении

$$x = 3 \text{ м.}$$

И поскольку полученное значение x принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента. Таким образом, изгибающий момент звена DE принимает следующие характерные значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 3 \text{ м; } M = 4,5 \text{ кНм;}$$

$$x = 6 \text{ м; } M = 0.$$

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах звена DE принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 3 \text{ кН;}$$

$$x = 6 \text{ м; } Q = -3 \text{ кН.}$$

Эпюры внутренних усилий звена DE , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для M и Q , приведены на рисунке 16.8.

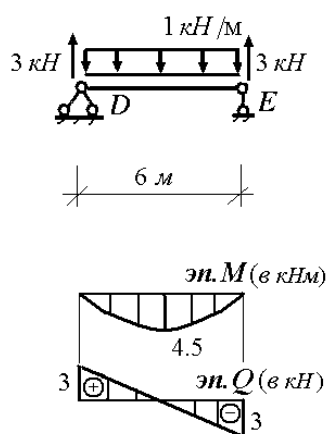


Рисунок 16.8. – Эпюры внутренних усилий звена DE

Расчет звена EK . При расчете звена EK учитывается сила давления на него звена DE в точке E , равная величине опорной реакции $V_E = 3 \text{ кН}$ и направленная вниз. Схема нагружения звена EK и его опорные реакции показаны на рисунке 16.9.

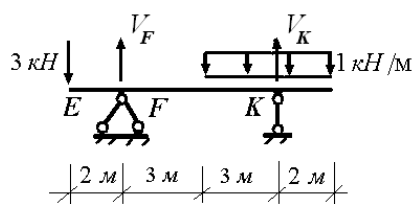


Рисунок 16.9. – К расчету звена ЕК

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакции:

$$\Sigma M_K = 0;$$

$$V_F \cdot 6 - 3 \cdot 8 - 1 \cdot 3 \cdot 1.5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$V_F = 4.416 \text{ кН}.$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакции:

$$\Sigma M_F = 0;$$

$$-V_K \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 4.5 + 1 \cdot 2 \cdot 7 = 0;$$

$$V_K = 3.584 \text{ кН}.$$

Составляя для звена *EK* сумму проекций всех сил на ось *y*, можно убедиться, что опорные реакции найдены верно:

$$\Sigma y = 0; \quad -3 + 4.416 - 1 \cdot 5 + 3.584 = -8 + 8 = 0.$$

При определении внутренних усилий для звена *EK* следует рассматривать 4 участка для определения внутренних усилий – *EF*, *FM*, *MK*, *KN* (рисунок 16.10, а).

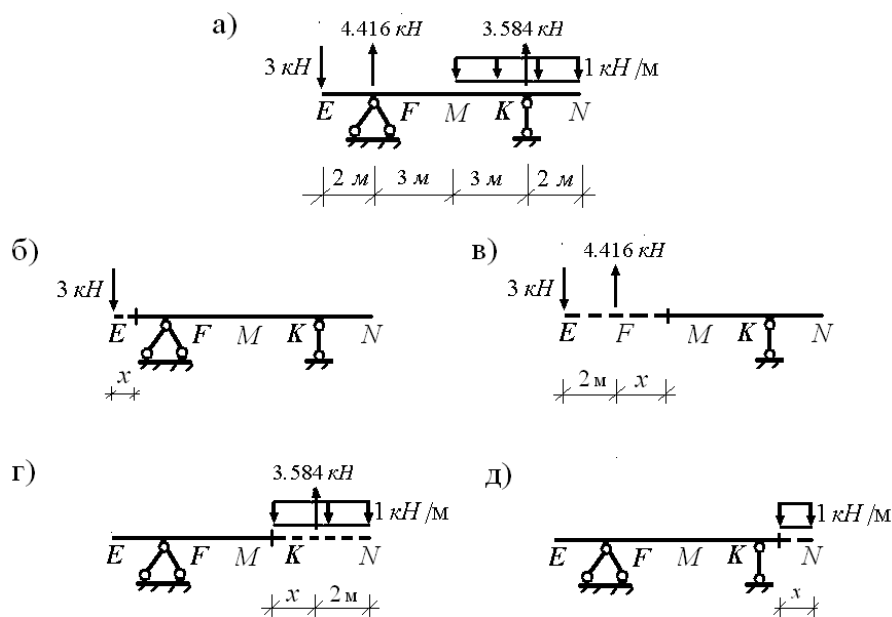


Рисунок 16.10. – К определению внутренних усилий звена ЕК

Рассмотрим участок EF . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (см. рисунок 16.10, б). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 2$ м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка EF :

$$M = -3 \cdot x$$

$$Q = -3 \text{ кН}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке EF изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -6 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке EF растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а ее величина постоянна по длине участка EF .

Далее рассмотрим участок FM . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (см. рисунок 16.10, в). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 3$ м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка FM

$$M = -3 \cdot (x+2) + 4.416 \cdot x$$

$$Q = 1.416 \text{ кН}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке FM изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает значения

$$x = 0; \quad M = -6 \text{ кНм};$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -1,752 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке EF растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а ее величина постоянна по длине участка FM .

Далее рассмотрим участок MK . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (см. рисунок 16.10, г). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 3$ м. Приводя внешние силы отделенной части

к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка MK :

$$M = 3.584 \cdot x - 0.5 \cdot (x+2)^2$$

$$Q = -3.584 + (x+2)$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке MK изменение его величины описывается нелинейной функцией и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении x поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв к нулю выражение для поперечной силы, найдем, что это возможно при значении

$$x = 1,584 \text{ м.}$$

И поскольку полученное значение x принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке MK принимает следующие характерные значения

$$x = 0; \quad M = -2 \text{ кНм};$$

$$x = 1,584 \text{ м}; \quad M = -0,745 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -1,752 \text{ кНм.}$$

и, следовательно, на участке MK растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке MC изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения[^]

$$x = 0; \quad Q = -1,584 \text{ м};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad Q = -1,416 \text{ кНм.}$$

И, наконец, рассмотрим участок KN . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (см. рисунок 16.10, д). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться интервале $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка KN

$$M = -0.5 \cdot x^2$$

$$Q = x$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке KN изменение его величины описывается нелинейной функцией

и поэтому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении x поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв к нулю выражение для поперечной силы, найдем, что это возможно при значении

$$x = 0.$$

И поскольку полученное значение x принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке KN принимает следующие характерные значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -2 \text{ кНм},$$

значит, на участке KN растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке KN изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad Q = 2 \text{ кНм}.$$

Эпюры внутренних усилий звена EK , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для M и Q , приведены на рисунке 16.11.

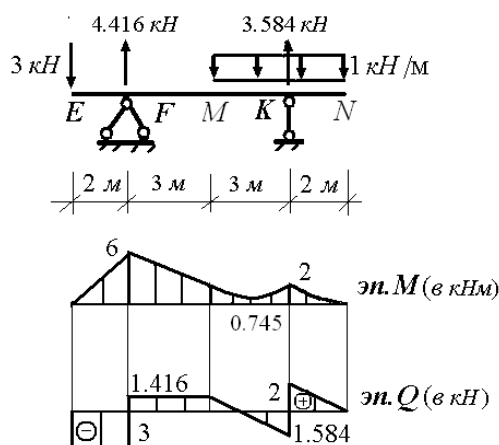


Рисунок 16.11. – Эпюры внутренних усилий звена EK

Расчет звена BD . При расчете звена BD учитывается сила давления на него звена DE в точке D , равная величине опорной реакции $V_D = 3 \text{ кН}$ и направленная вниз. Схема нагружения звена BD и его опорные реакции показаны на рисунке 16.12.

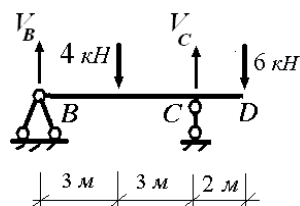


Рисунок 16.12. – К расчету звена BD

Составляя уравнение моментов относительно правой опоры, найдем величину левой опорной реакций

$$\sum M_C = 0;$$

$$V_B \cdot 6 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 0;$$

$$V_B = 0.$$

Составляя уравнение моментов относительно левой опоры, найдем величину правой опорной реакций

$$\sum M_B = 0;$$

$$-V_C \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 0;$$

$$V_C = 10 \text{ кН}.$$

Составляя для звена BD сумму проекций всех сил на ось y, можно убедиться, что опорные реакции найдены верно

$$\sum y = 0; \quad -4 + 10 - 6 = -10 + 10 = 0$$

При определении внутренних усилий для звена BD следует рассматривать 3 участка для определения внутренних усилий – BK, KC, CD (рисунок 16.13, а)

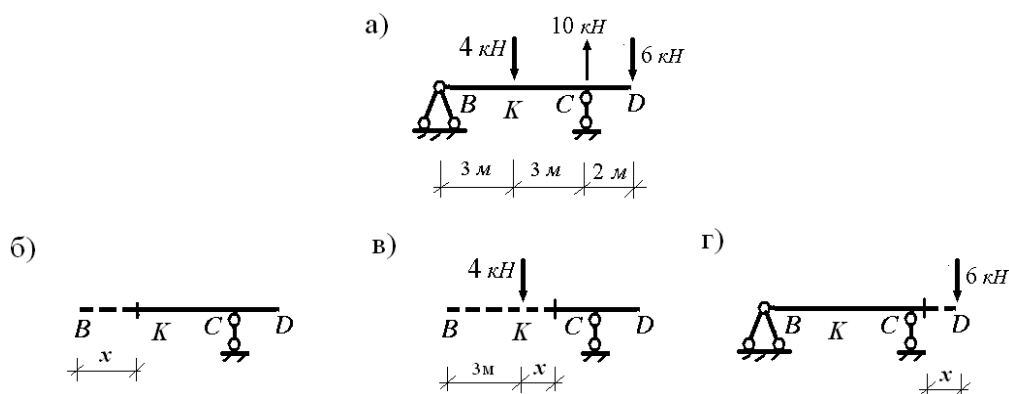


Рисунок 16.13. – К определению внутренних усилий для звена BD

Рассмотрим участок BK. Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (см. рисунок 16.13, б).

Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 3$ м. Поскольку к отделенной части не приложены внешние силы, то на участке BK внутренние усилия равны нулю:

$$M = 0$$

$$Q = 0$$

Далее рассмотрим участок KC . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть (см. рисунок 16.13, *в*). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 3$ м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка KC :

$$M = -4 \cdot x$$

$$Q = -4 \text{ кН}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке KC изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -12 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке KC растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила отрицательная, а ее величина постоянна по длине участка KC .

И, наконец, рассмотрим участок CD . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть (см. рисунок 16.13, *г*). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в следующем интервале: $0 \leq x \leq 2$ м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения левой части, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка CD :

$$M = -6 \cdot x$$

$$Q = 6 \text{ кН}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке CD изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -12 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке KC растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила положительная, а ее величина постоянна по длине участка CD .

Эпюры внутренних усилий звена BD , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для M и Q , приведены на рисунке 16.14.

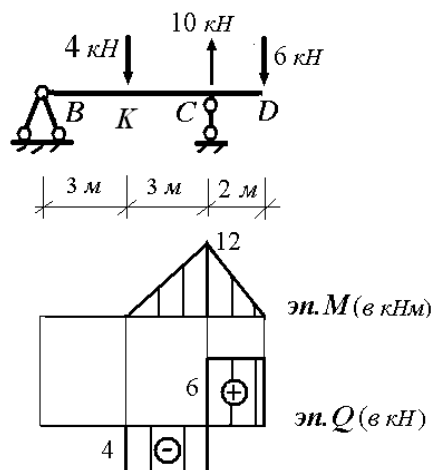


Рисунок 16.14. – Эпюры внутренних усилий звена BD

Расчет звена AB . При расчете звена AB не учитывается сила давления на него звена BD в точке B , т.к. величина опорной реакции $V_B = 0$. Схемы нагружения звена AB и его опорных реакций показаны на рисунке 16.15, a .

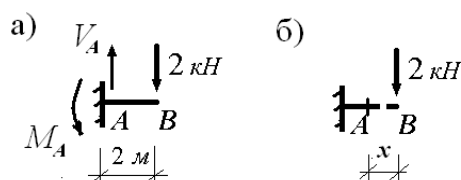


Рисунок 16.15. – К расчету звена AB

Составляя уравнение проекций сил на ось y , найдем величину вертикальной опорной реакции:

$$\sum y = 0;$$

$$V_A - 2 = 0;$$

$$V_A = 2 \text{ кН.}$$

Составляя уравнение моментов относительно опоры, найдем величину реактивного момента:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-M_A + 2 \cdot 2 = 0;$$

$$M_A = 4 \text{ кНм.}$$

Ввиду простоты вычислений опорных реакций нет необходимости в проведении проверки правильности их определения.

Для определения внутренних усилий в рассматриваемом звене можно выделить один участок. Рассечем звено в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть звена (см. рисунок 16.15, б). Переменная x , определяющая положение сечения, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 2$ м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения правой части звена, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий:

$$M = -2 \cdot x$$

$$Q = 2 \text{ кН}$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что для звена AB изменение его величины описывается линейной функцией, которая на его границах принимает следующие значения

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 2 \text{ м}; \quad M = -4 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на звене AB растянуты верхние волокна.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что эта сила положительная, а ее величина постоянна по длине звена AB .

Эпюры внутренних усилий звена AB , построенные согласно полученным аналитическим выражениям для M и Q , приведены на рисунке 16.16.

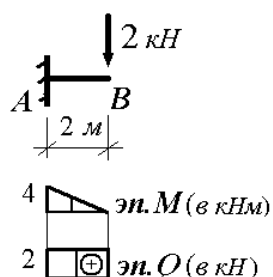


Рисунок 16.15. – Эпюры внутренних усилий звена AB

Эпюры внутренних усилий для многопролетной шарнирной балки получаются объединением эпюр внутренних усилий, построенных отдельно для каждого звена МШБ, и приведены на рисунке 16.17.

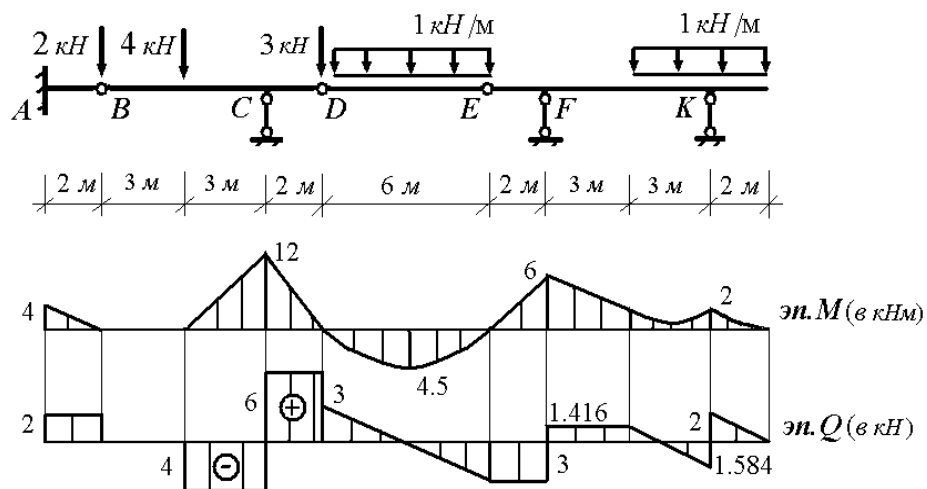


Рисунок 16.17. – Эпюры внутренних усилий многопролетной шарнирной балки

Пример 2. Для рамы, показанной на рисунке 16.18, а, требуется определить статическим методом внутренние усилия M , Q , N и построить их эпюры.

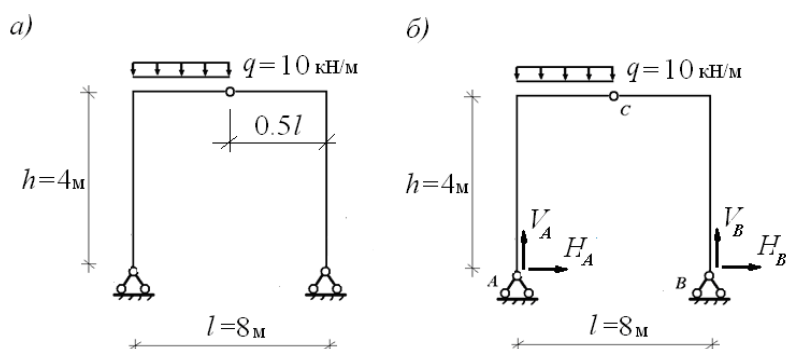


Рисунок 16.18. – К примеру 2

Решение:

Зададимся первоначальной схемой составляющих опорных реакций рамы (см. рисунок 16.18, б). Для определения вертикальной составляющей V_A составим уравнение моментов относительно опоры B для рамы в целом:

$$\sum M_B = 0; V_A \cdot l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{4} l = 0,$$

решая которое найдем значение V_A :

$$V_A = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l = \frac{3}{8} \cdot 10 \cdot 8 = 30 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной составляющей V_B составим уравнение моментов относительно опоры А для рамы в целом:

$$\sum M_A = 0; -V_B \cdot l + \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot l = 0,$$

решая которое найдем значение V_B :

$$V_B = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l = \frac{1}{8} \cdot 10 \cdot 8 = 10 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальной составляющей H_A составим уравнение моментов сил относительно точки С для левой части рамы:

$$\sum M_C^{л.ч.} = 0; -H_A \cdot h + V_A \cdot \frac{1}{2}l - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{4}l = 0,$$

решая которое найдем значение H_A :

$$H_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_A \cdot l}{h} - \frac{1}{8} \cdot \frac{q \cdot l^2}{h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30 \cdot 8}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{4} = 10 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальной составляющей H_B составим уравнение моментов сил относительно точки С для правой части рамы:

$$\sum M_C^{п.ч.} = 0; H_B \cdot h - V_B \cdot \frac{1}{2}l = 0,$$

решая которое найдем значение H_B .

Для проверки правильности найденных составляющих опорных реакций составим для рамы в целом уравнение проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum y = 0; V_A - \frac{ql}{2} + V_B = 30 - 40 + 10 = 0,$$

и на горизонтальную ось

$$\sum x = 0; H_A - H_B = 10 - 10 = 0.$$

Из приведенных уравнений видно, что опорные реакции рамы найдены верно.

Переходим к определению внутренних усилий рамы. Для их определения будем использовать вторую разновидность статического метода. Для рассматриваемой рамы можно выделить 4 участка для определения внутренних усилий: AM , MC , CN , NB (рисунок 16.19, а).

Пунктирной линией на рисунке 16.19 обозначены «отмеченные» волокна каждого участка рамы.

Рассмотрим участок AM . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной нижнюю часть рамы (рисунок 16.19, б). Переменная x , определяющая положение сечения на участке,

может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 4$ м. Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка AM :

$$M = -H_A x = -10x;$$

$$Q = -H_A = -10 \text{ кН};$$

$$N = -V_A = -30 \text{ кН}.$$

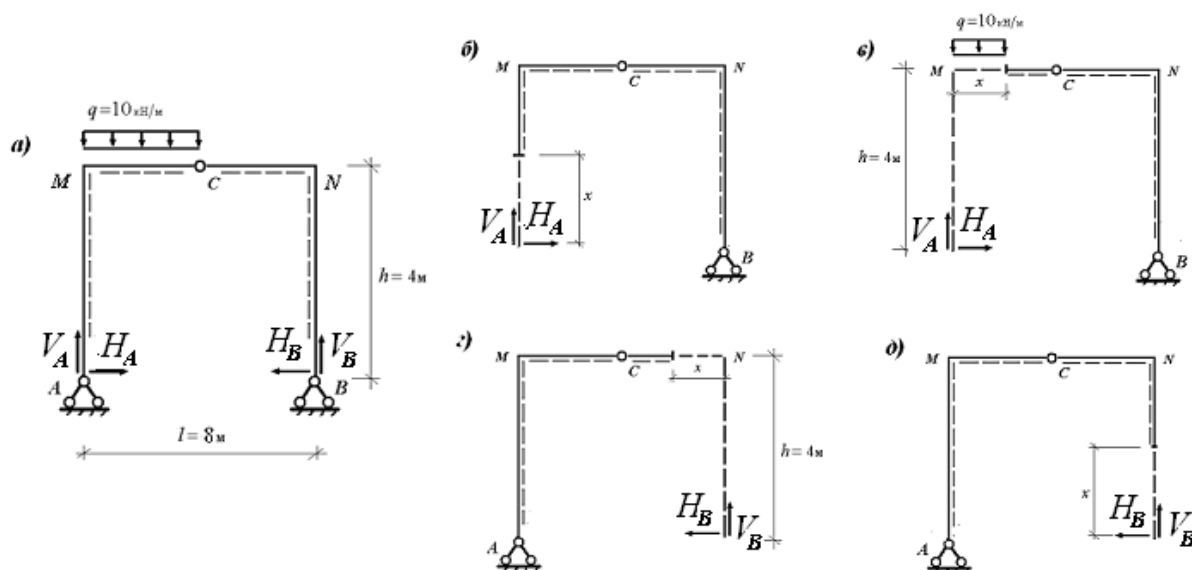


Рисунок 16.19. – К определению внутренних усилий рамы

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке AM изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -10 \cdot 4 = -40 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке AM растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что эти силы отрицательны, а их величины постоянны по длине участка AM .

Рассмотрим участок MC . Разсечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной левую часть рамы (см. рисунок 16.19, в). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 4$ м.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка MC :

$$M = -H_A h + V_A x - \frac{qx^2}{2} = -40 + 30x - 5x^2;$$

$$Q = V_A - qx = 30 - 10x;$$

$$N = -H_A = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке *МС* изменение его величины описывается нелинейной функцией и потому требуется проверка на существование у нее точек экстремума. Для этого, в соответствии с дифференциальной зависимостью между поперечной силой и изгибающим моментом, нужно выяснить, при каком значении *x* поперечная сила принимает нулевые значения. Приравняв к нулю выражение для поперечной силы, найдем, что это возможно при значении

$$x = 3 \text{ м}.$$

И поскольку полученное значение *x* принадлежит интервалу своего изменения, то ему соответствует экстремальное значение изгибающего момента.

Таким образом, изгибающий момент на участке *МС* принимает следующие характерные значения

$$x = 0; \quad M = -40 \text{ кНм};$$

$$x = 3 \text{ м}; \quad M = -40 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 5 \text{ кНм};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 + 30 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 0,$$

и, следовательно, на одной части участка растянуты наружные волокна, а на другой – внутренние.

Из полученного выражения для поперечной силы следует, что на участке *МС* изменение ее величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad Q = 30 \text{ кН};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad Q = 30 - 10 \cdot 4 = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для продольной силы следует, что эта сила отрицательна, а ее величина постоянна по длине участка.

Рассмотрим участок *CN*. Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной правую часть рамы (см. рисунок 16.19, *г*). Переменная *x*, определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 4 \text{ м}$.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка *CN*:

$$M = -H_B h + V_B x = -40 + 10x;$$

$$Q = -V_B = -10 \text{ кН};$$

$$N = -H_B = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке CN изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = -40 \text{ кНм};$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 + 10 \cdot 4 = 0,$$

и, следовательно, на участке CN растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что эти силы отрицательны, а их величины постоянны по длине участка CN .

Рассмотрим участок NB . Рассечем его в произвольном сечении на две части и выберем в качестве отделенной нижнюю часть рамы (см. рисунок 16.19, ∂). Переменная x , определяющая положение сечения на участке, может изменяться в интервале $0 \leq x \leq 4 \text{ м}$.

Приводя внешние силы отделенной части к центру тяжести поперечного сечения другой части рамы, получим следующие аналитические выражения для внутренних усилий участка NB :

$$M = -H_B x = -10x;$$

$$Q = H_B = 10 \text{ кН};$$

$$N = -V_B = -10 \text{ кН}.$$

Из полученного выражения для изгибающего момента следует, что на участке NB изменение его величины описывается линейной функцией, которая на границах участка принимает следующие значения:

$$x = 0; \quad M = 0;$$

$$x = 4 \text{ м}; \quad M = -40 \text{ кНм},$$

и, следовательно, на участке NB растянуты наружные волокна.

Из полученных выражений для поперечной и продольной сил следует, что поперечная сила положительна, а продольная сила отрицательна. Величины обеих сил постоянны по длине участка NB .

Эпюры внутренних усилий рамы, построенные согласно полученным аналитическим выражениям для M , Q и N на каждом участке, приведены на рисунке 16.20.

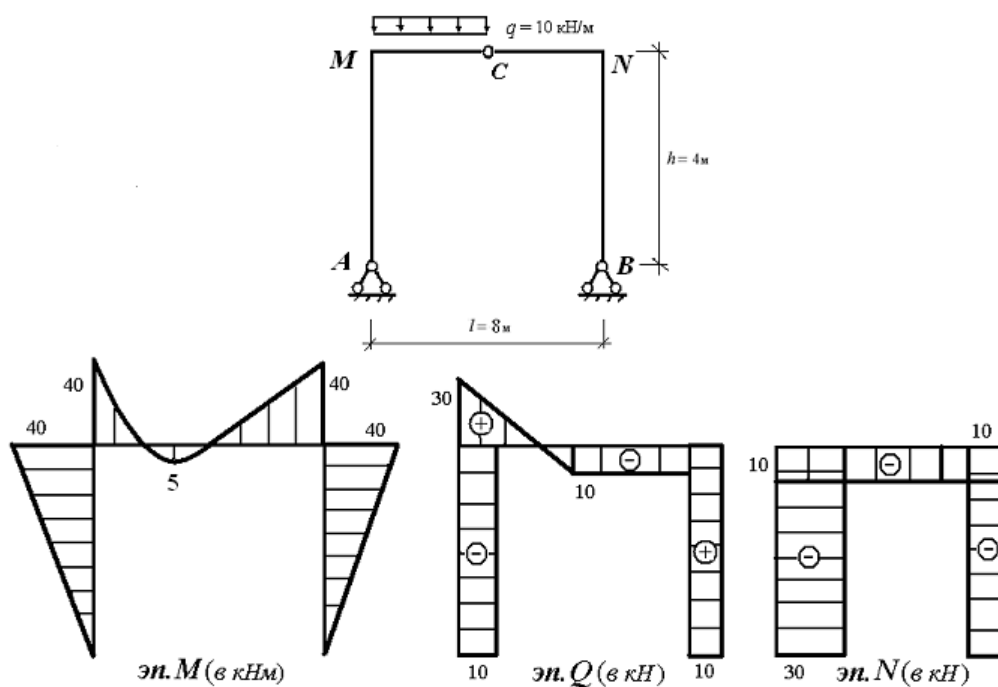


Рисунок 16.20. – Эпюры внутренних усилий рамы

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что является числовой мерой внутренних сил в произвольной точке поперечного сечения?
2. Что является числовой мерой внутренних сил для поперечного сечения в целом?
3. Какие бывают виды статически определимых стержневых конструкций?
4. Что показывает монтажная схема составной статически определимой стержневой конструкции?
5. Как формулируются свойства статически определимых стержневых конструкций?
6. Какие существуют методы определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?
7. На чем основан статический метод определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?
8. Что собой представляют эпюры внутренних сил?
9. На чем основана первая разновидность статического метода определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?

10. На чем основана первая разновидность статического метода определения внутренних усилий в статически определимых стержневых конструкциях?

11. Что называется многопролетной шарнирной балкой?

12. Какой вид имеет условие геометрической неизменяемости многопролетной шарнирной балки?

13. Каким требованиям должно удовлетворять размещение шарниров в пролетах многопролетной шарнирной балки?

14. Каков порядок построения эпюр внутренних усилий в многопролетной шарнирной балки?

ТЕМА 17. Определение перемещений

Цели изучения темы

Рассмотреть понятие деформации конструкции и ее количественные характеристики.

Познакомиться с целями определения перемещений и двумя подходами к их определению.

Рассмотреть определение перемещений от нагрузки в линейно деформируемых плоских стержневых системах.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [6].

17.1. Общие сведения о перемещениях

Конструкции при приложении к ним внешних воздействий изменяют свою форму и размеры. Эти изменения называются **деформацией конструкции**. Деформация сопровождается переходом конструкции из начального недеформированного состояния в некоторое деформированное состояние.

В зависимости от способности конструкции сохранять деформацию различают **упругие и упруго-пластические деформации**. В первом случае конструкция после снятия внешних воздействий полностью восстановит свою форму и размеры и возвратится в начальное недеформированное состояние. Во втором случае происходит частичное восстановление формы и размеров конструкции, и после снятия внешних воздействий она не возвратится в начальное недеформированное состояние.

В зависимости от изменения деформаций конструкции во времени при постоянных внешних воздействиях различают **постоянные** и **переменные во времени деформации**. Деформация конструкции, переменная во времени, включает в себя две составляющие. Первая составляющая характеризует изменения формы и размеров конструкции, возникающие вслед за приложением внешнего воздействия, и называется **мгновенной деформацией**. Вторая характеризует происходящие во времени изменения мгновенной деформации вследствие ползучести конструкционного материала и называется **запаздывающей деформацией**.

Изменения формы и размеров стержневой конструкции складываются из деформаций ее отдельных стержней. В свою очередь изменения формы и размеров отдельного стержня komponуются из деформаций элементарных объемов сплошной гипотетической среды, моделирующей конструкционный материал. Поэтому для количественного описания деформированного состояния конструкции используются две разновидности величин: **дифференциальные** и **интегральные характеристики**.

Дифференциальные характеристики характеризуют происшедшие изменения формы и размеров конструкции в окрестности ее произвольной точки. Ими, как известно из второго раздела, посвященного основам сопротивления материалов, являются относительные числовые величины ε и γ .

С помощью величины ε оценивается изменение линейных размеров элементарного параллелепипеда, и она называется **относительной линейной деформацией**. Величина γ используется для описания изменения формы элементарного параллелепипеда за счет сдвига его граней, и она называется **сдвиговой деформацией**, или углом сдвига.

Интегральные характеристики описывают происшедшие изменения формы и размеров конструкции в целом. Ими являются **линейное и угловое перемещения**. Рассмотрим в недеформированном состоянии некоторой конструкции точки A и B и соединяющий их отрезок прямой (рисунок 17.1, а). При деформировании конструкции от действия, например, нагрузки, эти точки займут новые положения: A_1 и B_1 . Линейные перемещения этих точек характеризуются длинами отрезков прямых AA_1 и BB_1 , соединяющих положения точек в недеформированном и деформированном состояниях конструкции (рисунок 17.1, б). Угловое перемещение характеризуется величиной угла поворота ϕ отрезка прямой AB при переходе конструкции из недеформированного в деформированное состояние (рисунок 17.1, б)

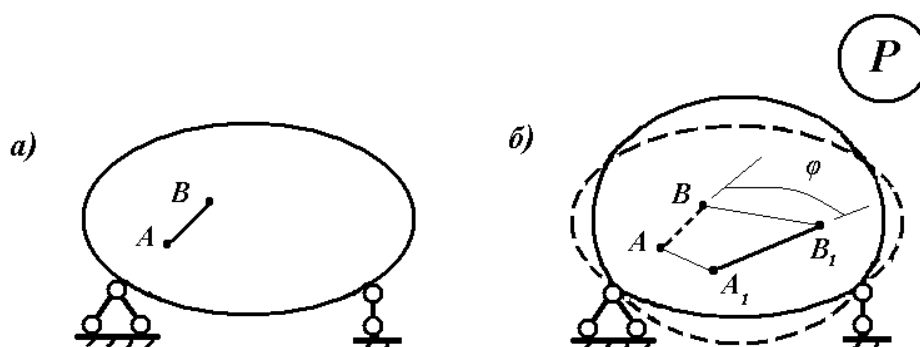


Рисунок 17.1. – Интегральные характеристики деформированного состояния конструкций

Умение определять перемещения необходимо для оценки пригодности конструкций к нормальной эксплуатации. Такая пригодность конструкции, как отмечалось ранее, характеризуется ее **жесткостью**. Понятием, противоположным жесткости конструкции, является **податливость** конструкции. И, следовательно, податливость характеризует способность конструкции допускать возникновение в ней перемещений. Таким образом, жесткость и податливость являются характеристиками деформативности конструкции.

Жесткость конструкции зависит от применяемого конструкционного материала, жесткости конструктивных элементов и способов соединения этих элементов между собой.

Влияние конструкционного материала на жесткость конструкции описывается двумя модулями: E и G . Модуль упругости E характеризует способность материала сопротивляться возникновению упругих линейных деформаций, а модуль сдвига G – угловых деформаций.

Жесткость конструктивного элемента зависит от жесткости его поперечного сечения и длины элемента. **Жесткость поперечного сечения** описывается тремя величинами:

- **изгибной жесткостью** EI , где I – момент инерции поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба;
- **продольной жесткостью** EA , где A – площадь поперечного сечения;
- **сдвиговой жесткостью** GA .

Жесткость конструктивного элемента характеризуется отношением жесткости поперечного сечения к длине элемента и называется, соответственно, его погонной жесткостью при изгибе, растяжении-сжатии или сдвиге.

В зависимости от жесткости конструкции возможны **два подхода к определению перемещений**.

Один подход связан с определением малых перемещений, и он справедлив для жестких конструкций. Такие конструкции обычно относятся к линейно-деформируемым системам. Согласно этому подходу определяются перемещения, которые малы по сравнению с размерами самой конструкции.

Второй подход позволяет определять большие перемещения, и он справедлив для гибких конструкций. Такие конструкции обычно относятся к геометрически нелинейным системам. Согласно этому подходу определяются перемещения, которые не малы по сравнению с размерами самой конструкции.

В дальнейшем рассматриваются малые перемещения, возникающие при упругой деформации стержневых конструкций от нагрузки. Для их определения будем использовать аналитическую форму.

17.2. Связь между внешними силами и перемещениями в линейно-деформируемых системах

Рассмотрим произвольную линейно-деформируемую стержневую конструкцию, которую условно изобразим в виде простой балки. Пусть к ней приложены n сосредоточенных сил (рисунок 17.2, а). От действия заданных сил конструкция деформируется, и по направлению каждой из них возникнут линейные перемещения точек их приложения.

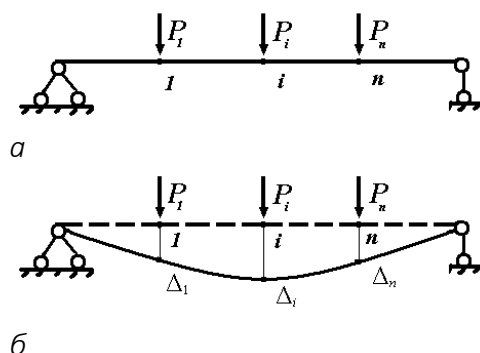


Рисунок 17.2. – К понятию полных перемещений

Линейные перемещения, происходящие в конструкции от действия всех сил одновременно, будем называть **полными перемещениями** и обозначать Δ_i ($i=1, \dots, n$) (см. рисунок 17.2, б). Индекс i указывает номер направления, по которому возникает перемещение.

При раздельном приложении сил P_j ($j=1, \dots, n$) по рассматриваемым направлениям в конструкции также будут возникать линейные перемещения

Δ_{ij} ($i, j=1, \dots, n$) (рисунок 17.3), являющиеся частями соответствующих полных перемещений Δ_i .

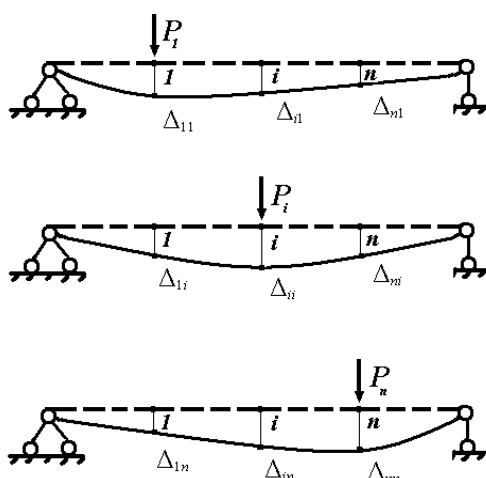


Рисунок 17.3. – К понятию частичных перемещений

Первый индекс i в обозначении **частичных перемещений** указывает номер направления, по которому перемещение происходит, а второй индекс j – номер направления, по которому действует сила, вызывающая это перемещение.

Частичное перемещение вида Δ_{ii} называется **собственным перемещением**, и оно возникает от силы P_i по ее направлению. Частичное перемещение вида Δ_{ij} ($i \neq j$) называется **побочным перемещением**.

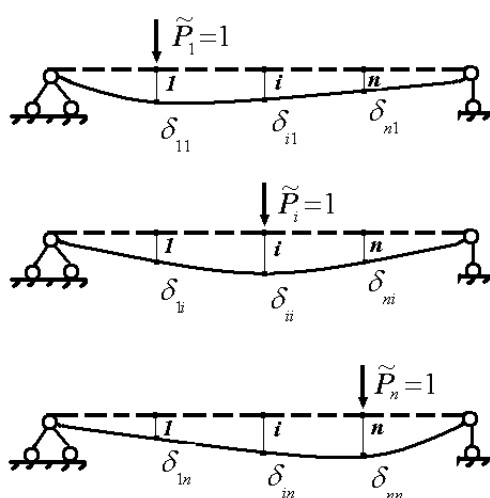


Рисунок 17.4. – К понятию единичных перемещений

Если к конструкции по направлению номер j приложить безразмерную силу $\tilde{P}_j = 1$, то возникающие в конструкции перемещения по указанным выше направлениям называют **единичными**. Такие перемещения обозначаются δ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) (см. рисунок 17.4) и их индексы указывают те же направления, что и для частичных перемещений Δ_{ij} . Единичные перемещения, как и частичные, подразделяются на собственные и побочные.

Полное и частичное перемещения конструкции по некоторому направлению i , согласно принципу независимости действия сил, связаны соотношением

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} . \quad (17.1)$$

В свою очередь произвольное частичное перемещение Δ_{ij} линейно зависит от соответствующего ему единичного перемещения δ_{ij} :

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} P_j . \quad (17.2)$$

Подставляя (17.2) в (17.1), получим соотношение, связывающее полное перемещение конструкции с действующими силами:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} P_j . \quad (17.3)$$

Соотношение (17.3), согласно которому полное перемещение Δ_i является линейной функцией действующих сил P_j ($j = 1, \dots, n$), называется **обобщенным законом Гука**, или **законом Гука для конструкции**.

Входящие в (17.2) и (17.3) единичные перемещения играют роль коэффициентов пропорциональности между силами и перемещениями. Они позволяют количественно оценивать способность конструкции получать перемещения по определенному направлению и поэтому называются **коэффициентами податливости**.

17.3. Аналитическая форма определения перемещений в плоских стержневых конструкциях

В основе аналитической формы определения перемещений в деформируемых системах лежит **принцип возможных перемещений**. Согласно этому принципу, если деформируемая система находится в равновесии,

то сумма работ всех действующих сил, включая и внутренние силы, на возможных перемещениях системы от положения равновесия равняется нулю.

Возможными перемещениями деформируемой системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, которые допускаются наложенными связями системы. Так как рассматриваемые плоские стержневые конструкции являются линейно-деформируемыми системами, то для них, ввиду линейной зависимости между перемещениями и внешними воздействиями, возможными перемещениями являются любые малые конечные перемещения, которые могут возникать в конструкции.

Пусть имеется некоторая плоская стержневая конструкция, которая подвергается одновременному воздействию нагрузки, температуры и осадке опор (рисунок 17.5, а). При задании перемещений опор их нумерация согласуется с нумерацией реакций конструкции.

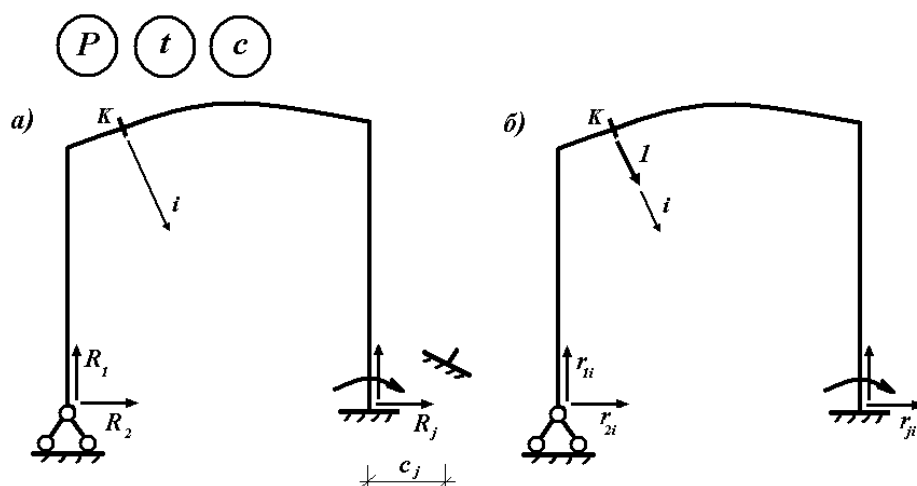


Рисунок 17.5. – К определению перемещений

Будем считать, что по статическим свойствам конструкция может быть как статически определимой, так и статически неопределимой. От внешних воздействий конструкция деформируется, и в ней возникают перемещения. Требуется для некоторого сечения K по произвольному направлению i определить его перемещение Δ_i .

Исходное состояние конструкции назовем действительным состоянием. Будем считать, что для этого состояния известны опорные реакции $R_1, \dots, R_j$ и внутренние усилия M , Q , N в стержнях конструкции. Тогда, как следствие, можно считать известными напряжения σ , τ и деформации ϵ , γ в любой точке конструкции.

Образует вспомогательное единичное состояние. Для этого в сечении K заданной конструкции по направлению искомого перемещения приложим безразмерную силу, равную единице (см. рисунок 17.5, б). Также считаем, что во вспомогательном состоянии известны следующие величины:

- единичные опорные реакции $r_{1i}, \dots, r_{ji}$;
- единичные внутренние усилия m_i, q_i, n_i в стержнях конструкции;
- единичные напряжения σ_i, τ_i и единичные деформации ε_i, γ_i в произвольной точке конструкции.

Поскольку конструкция во вспомогательном единичном состоянии находится в равновесии, применим к этому состоянию принцип возможных перемещений, задавая в качестве возможных перемещения действительного состояния конструкции. При этом предполагается, что во время придания возможных перемещений температура во всех точках конструкции остается без изменения. Тогда уравнение принципа возможных перемещений будет включать работу единичной силы, единичных опорных реакций, единичных внутренних сил на соответствующих перемещениях действительного состояния и имеет вид

$$1 \cdot \Delta_i + \sum_j r_{ji} c_j - \sum_k \int \int_A (\sigma_i \varepsilon + \tau_i \gamma) dA ds = 0. \quad (17.4)$$

В уравнение (17.4) входит единственная неизвестная величина – перемещение Δ_i , и, следовательно, его решение имеет вид

$$\Delta_i = - \sum_j r_{ji} c_j + \sum_k \int \int_A (\sigma_i \varepsilon + \tau_i \gamma) dA ds. \quad (17.5)$$

Формула (17.5) не используется непосредственно для вычисления перемещений в стержневых конструкциях. Но она позволяет выразить искомое перемещение для произвольной плоской стержневой конструкции (статически определимой или неопределимой) при одновременном приложении нагрузки, температурного воздействия и осадки опор через характеристики ее действительного и единичного состояний. Поэтому эта формула имеет фундаментальное значение при определении перемещений в линейно-деформируемых плоских стержневых системах, является для них общей формулой и на ее основе получают рабочие формулы для определения перемещений.

17.4. Рабочая формула для определения перемещений от нагрузки

При действии на плоскую стержневую конструкцию произвольной нагрузки, используя общую формулу (17.5), можно получить формулу следующего вида:

$$\Delta_i = \sum_k \int_l \frac{m_i M}{EI_z} ds + \sum_k \int_l \frac{n_i N}{EA} ds + \sum_k \int_l k \frac{q_i Q}{GA} ds. \quad (17.6.)$$

Слагаемые в формуле (17.6) отражают влияние на величину перемещения Δ_i , соответственно, изгибных, продольных и сдвиговых деформаций, возникающих в стержнях конструкции при различных схемах их нагружения. Каждое слагаемое формулы имеет одинаковую структуру и включает в себя внутренние усилия единичного и действительного состояний, а также соответствующие жесткости стержней конструкции.

Формула (17.6) называется формулой Максвелла–Мора и позволяет вычислять перемещения в плоских стержневых конструкциях от действия произвольной нагрузки. Для этого необходимо рассмотреть действительное и вспомогательное единичное состояния и определить возникающие в них внутренние усилия.

При образовании вспомогательного состояния вид прикладываемой единичной силы зависит от определяемого перемещения. Если искомое перемещение простое, то прикладывается простая единичная сила, а если обобщенное – то соответствующая этому перемещению обобщенная единичная сила. Например, при отыскании угла поворота нужно прикладывать безразмерный единичный момент.

Доказано, что влиянием отдельных слагаемых в формуле Максвелла–Мора можно пренебрегать при определении перемещений для частных видов стержневых конструкций. Так, при определении перемещений в балках можно ограничиваться учетом только изгибных деформаций. Это же справедливо для обычных рамных конструкций, и только в случае рам повышенной этажности необходим учет продольных деформаций. Совместный учет изгибных и продольных деформаций требуется при определении перемещений в арках и комбинированных системах. А при определении перемещений в ферменных конструкциях достаточно учитывать влияние только продольных деформаций.

17.5. Вычисление интегралов, встречающихся при определении перемещений от нагрузки

При определении перемещений в плоской стержневой конструкции могут встретиться два типа размеров поперечных сечений ее стержней. В одном случае эти размеры могут быть переменными по длине каждого стержня конструкции, а в другом – они постоянны в пределах каждого стержня, но могут быть переменными для различных стержней.

При переменных размерах поперечных сечений для вычисления интегралов, входящих в формулу Максвелла–Мора, обычно применяют численные методы интегрирования. Подынтегральные функции в этих интегралах являются дробными и для них, как правило, не удастся получить аналитические выражения для первообразных функций.

Если в плоской стержневой конструкции жесткости поперечного сечения EI_z , EA , GA в пределах каждого стержня постоянны, то интегралы, входящие в формулу Максвелла–Мора, принимают вид

$$\int_I m_i M ds, \int_I n_i N ds, \int_I q_i Q ds. \quad (17.7)$$

Подынтегральные выражения этих интегралов имеют одинаковую структуру и представляют собой произведение функций двух видов.

Функции вида m_i, n_i, q_i описывают закономерности изменения внутренних усилий единичного состояния. Эти функции по длине каждого стержня конструкции всегда являются линейными.

Функции вида M, N, Q описывают закономерности изменения внутренних усилий в действительном состоянии при действии нагрузки. В зависимости от конкретной схемы нагружения эти функции по длине одних стержней конструкции могут быть линейными, а по длине других – нелинейными. Для общности дальнейших рассуждений будем считать функции второго вида нелинейными.

С учетом сделанного анализа структуры подынтегральных выражений в (17.7) эти интегралы могут быть представлены в виде

$$\int_{x_a}^{x_b} F dx, \quad (17.8)$$

где f – некоторая линейная функция и F – некоторая нелинейная непрерывная функция, заданные в некоторой области определения $x_a \leq x \leq x_b$.

За начало отсчета на оси абсцисс примем точку пересечения графика линейной функции с этой осью. Графики рассматриваемых функций показаны на рисунке 17.6.

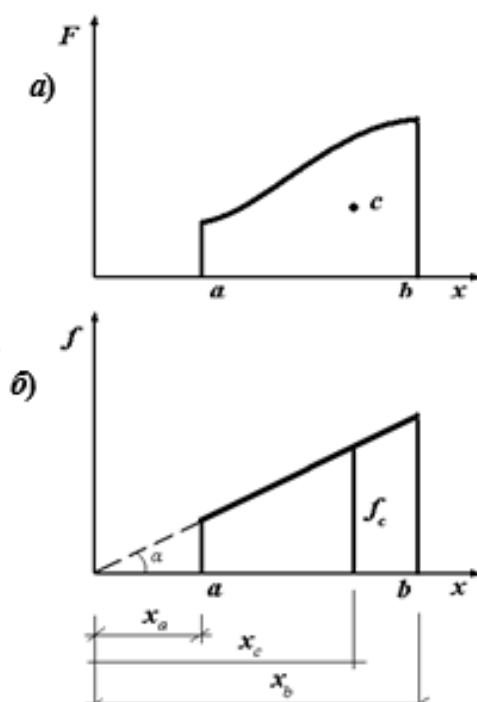


Рисунок 17.6. – Графики рассматриваемых функций

В заданной системе координат линейная функция f имеет вид

$$f = kx, \quad (17.9)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Подставим (17.9) в (17.8) и получим, что

$$\int_{x_a}^{x_b} F dx = k \int_{x_a}^{x_b} x F dx.$$

Поскольку $F dx = d\Omega$ есть площадь элементарного участка графика нелинейной функции F (см. рисунок 17.6, a), а интеграл $\int_{x_a}^{x_b} x d\Omega$ представляет собой статический момент площади всего графика этой функции, то интеграл вида (17.8) равняется

$$\int_{x_a}^{x_b} F dx = k x_c \Omega. \quad (17.10)$$

Здесь x_c – абсцисса центра тяжести площади графика нелинейной функции F , а Ω – площадь этого графика. С учетом (17.9) формула (17.10) примет вид

$$\int_{x_a}^{x_b} f F dx = f_c \Omega, \quad (17.11)$$

где $f_c = kx_c$ – ордината на графике линейной функции f (см. рисунок 17.6, б).

Таким образом, определенный интеграл от произведения двух функций, одна из которых линейная, а вторая нелинейная, равняется произведению площади графика нелинейной функции на ординату графика линейной функции, расположенную под центром тяжести площади графика нелинейной функции. В случае если вторая функция тоже является линейной, то при пользовании формулой (17.11) безразлично, площадь графика какой функции следует вычислять.

Рассмотренный графоаналитический прием вычисления определенного интеграла называется правилом Верещагина. Так как при его применении для вычисления интегралов в формуле Максвелла–Мора перемножаемые величины относятся к эпюрам внутренних усилий, возникающих в конструкции, то это правило называют и правилом перемножения эпюр.

17.6. Пример к теме

Пример. Для рамы, показанной на рисунке 17.7, определить вертикальное перемещение шарнира C от приложенной нагрузки. Жесткостные параметры рамы: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа и $I_z = 7080$ см⁴.

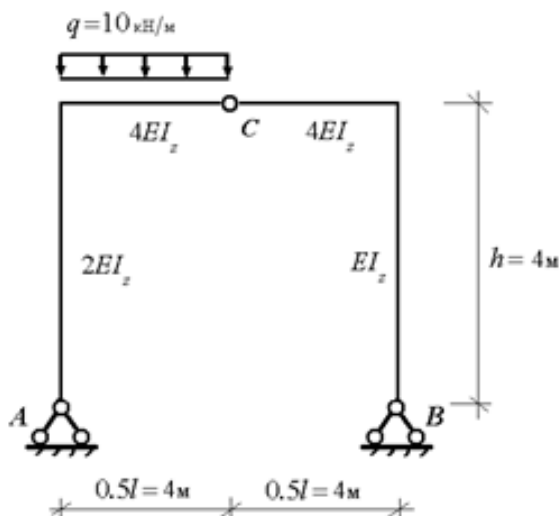


Рисунок 17.7. – К примеру

Решение:

Действительное состояние заданной рамы было рассмотрено в примере 2 темы 16. Эпюра изгибающих моментов действительного состояния имеет вид, показанный на рисунке 17.8, а.

Вспомогательное единичное состояние, соответствующее искомому перемещению, и единичная эпюра изгибающих моментов показаны на рисунке 17.8, б.

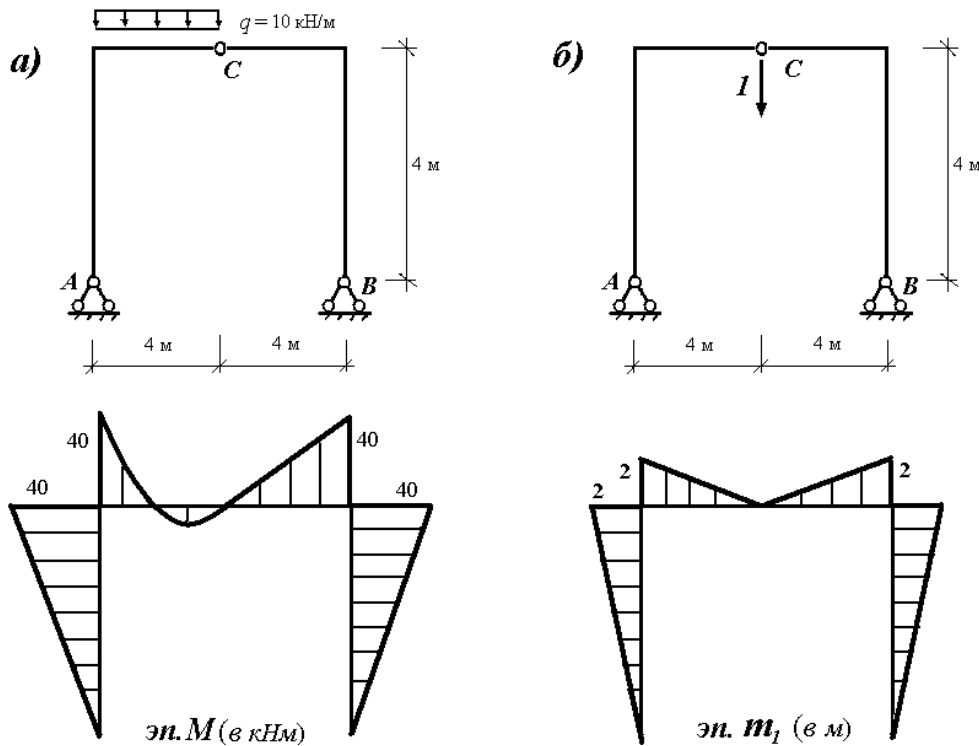


Рисунок 17.8. – Действительное и единичное состояния рамы

Для определения вертикального перемещения шарнира С перемножим по правилу Верещагина эпюры изгибающих моментов действительного и вспомогательного состояний заданной рамы

$$\Delta_1 = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{4EI} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{10 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{186,7}{EI}.$$

Тогда числовое значение искомого перемещения

$$\Delta_1 = \frac{186,7}{EI_z} = \frac{186,7}{2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-8}} = 0,013 \text{ м}.$$

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется деформацией конструкции?
2. Как классифицируются деформации конструкции?
3. Что описывают дифференциальные характеристики деформированного состояния конструкции?
4. Что описывают дифференциальные характеристики деформированного состояния конструкции?
5. Что описывают интегральные характеристики деформированного состояния конструкции?
6. Что характеризует жесткость конструкции?
7. Что характеризует податливость конструкции?
8. От чего зависит жесткость конструкции?
9. Чем описывается влияние конструкционного материала на жесткость конструкции?
10. Чем характеризуется жесткость конструктивного элемента?
11. Что называется полным, частичным и единичным перемещениями?
12. В чем заключается закон Гука для конструкции?
13. Как формулируется принцип возможных перемещений?
14. Как образуется единичное состояние?
15. Какой вид имеет формула Максвелла–Мора и что она позволяет определять?
16. Как формулируется правило Верещагина и что оно позволяет определять?

ТЕМА 18. Введение в теорию расчета статически неопределимых стержневых конструкций

Цели изучения темы

Рассмотреть понятие степени статической неопределимости и ее составляющие.

Познакомиться с разновидностями статически неопределимых стержневых конструкций.

Изучить свойства статически неопределимых стержневых конструкций.

Рассмотреть формулировки основной и частной задач расчета статически неопределимых конструкций.

Выяснить сущность метода сил.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [7].

18.1. Степень статической неопределимости

Расчетная схема стержневой конструкции считается статически неопределимой системой, если уравнений статики недостаточно для однозначного определения опорных реакций и внутренних усилий, возникающих в конструкции при произвольной статической нагрузке.

Как было установлено ранее, статически неопределимые стержневые конструкции всегда являются геометрическими неизменяемыми системами с избыточным числом связей. Необходимым количественным признаком такой разновидности геометрической неизменяемости конструкции выступает следующее соотношение для числа степеней свободы:

$$W < 0.$$

Следовательно, количество лишних или избыточных связей в конструкции, которые можно удалить, сохраняя ее геометрическую неизменяемость, равняется

$$L = -W. \quad (18.1)$$

Число таких связей называется **степенью статической неопределимости**, и эта величина – важная количественная характеристика, с помощью которой принято различать статически неопределимые стержневые конструкции. Например, при $L = 1$ конструкция называется один раз статически неопределимой, при $L = 2$ – два раза статически неопределимой и т.д.

Если для стержневой конструкции, имеющей вид замкнутого контура и опертой по балочной схеме (рисунок 18.1, а), определить число степеней свободы, то получим $W = 0$. Напрашивается вывод, что у нее отсутствуют лишние связи, а конструкцию можно считать статически определимой системой.

Однако попытаемся найти внутренние усилия в сечении 1, используя метод сечений и уравнения равновесия для системы сил, произвольно расположенных на плоскости. Тогда согласно схеме, показанной на рисунке 18.1, б, получим, что в три уравнения равновесия, кроме трех интересующих нас внутренних усилий в сечении 1, входят еще три неизвестных внутренних усилия M_2 , Q_2 , N_2 , связанные с удалением связей в сечении ригеля. Следовательно, одних уравнений равновесия для определения всех внутренних усилий недостаточно и конструкция трижды статически неопределимая.

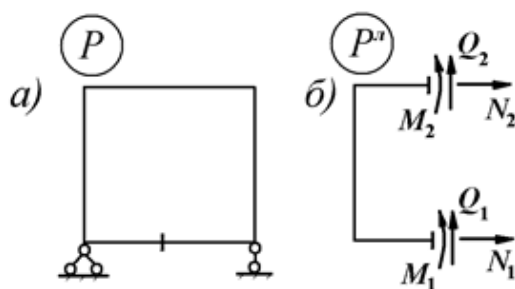


Рисунок 18.1. – Стержневая конструкция, имеющая вид замкнутого контура

Таким образом, замкнутый контур дополнительно приносит три лишние связи. В общем случае, когда конструкция состоит только из K замкнутых контуров, то ее степень статической неопределимости определяется как

$$Л = 3K. \quad (18.2)$$

В том случае, когда замкнутый контур разрезается шарниром, то число лишних связей уменьшается на единицу. Поэтому для конструкции, состоящей из K замкнутых контуров с общим числом врезанных шарниров $Ш$, степень статической неопределимости определяется по формуле

$$Л = 3K - Ш. \quad (18.3)$$

При подсчете числа шарниров, входящих в (18.3), учитывается степень их кратности. Степень кратности шарнира, разрезающего одновременно несколько замкнутых контуров, равняется числу стержней замкнутых контуров, примыкающих к такому шарниру, минус один. Например, для шарнира, показанного на рисунке 18.2, степень кратности равняется двум

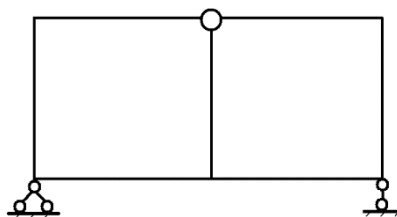


Рисунок 18.2. – К понятию кратного шарнира

Итак, в общем случае, когда стержневая конструкция включает участки, как содержащие замкнутые контуры, так и не содержащие их, степень статической неопределимости конструкции определяется по формуле

$$Л = -W + 3K - Ш. \quad (18.4)$$

Полученные формулы (18.1)–(18.4) позволяют определять степень статической неопределимости для любых плоских стержневых конструкций. Формула (18.1) справедлива для конструкций, не имеющих замкнутых контуров. Формула (18.2) применима для конструкций, состоящих из одних замкнутых контуров. Формула (18.3) распространяется на конструкции, состоящие из замкнутых контуров с врезанными в них шарнирами. И, наконец, формула (18.4) позволяет определить степень статической неопределимости для стержневых конструкций, имеющих участки, как содержащие замкнутые контуры, так и не содержащие их.

Однако существует универсальная формула, позволяющая единообразно определять степень статической неопределимости во всех рассмотренных выше случаях. Она имеет вид

$$L = 3K - \mathcal{U}. \quad (18.5)$$

Величина K , входящая в формулу (18.5), определяет число замкнутых контуров искусственной конструкции. Для ее получения необходимо в заданной конструкции заменить все шарнирные соединения (внутренние узлы и опорные закрепления) жесткими, а также «замкнуть» ее диском «земля».

Величина $\mathcal{U}$, входящая в формулу (18.5), определяет число шарниров, которые нужно ввести в искусственную конструкцию, чтобы получить из нее заданную конструкцию. Подсчет числа вводимых шарниров ведется с учетом их кратности.

Формулы (18.4) и (18.5) позволяют определить для произвольной плоской стержневой конструкции степень полной статической неопределимости. В общем случае эта величина складывается из двух составляющих:

$$L = L_1 + L_2,$$

где L_1 – число внешних лишних связей, определяющих **степень внешней статической неопределимости конструкции**; L_2 – число внутренних лишних связей, определяющих **степень внутренней статической неопределимости конструкции**.

Число внешних лишних связей определяется по формуле

$$L_1 = C_0 - 3 - C_{\text{зам}},$$

где C_0 – общее число опорных стержней конструкции; $C_{\text{зам}}$ – число опорных стержней, заменяющих недостающие внутренние связи в конструкции, отделенной от опорных закреплений.

Число внутренних лишних связей определяется по формуле

$$L_2 = L - L_1.$$

В зависимости от значений, принимаемых L_1 и L_2 , принято различать следующие разновидности статически неопределимых стержневых конструкций:

- $L_1 \neq 0$ и $L_2 = 0$ – **внешне статически неопределимые стержневые конструкции;**
- $L_1 = 0$ и $L_2 \neq 0$ – **внутренне статически неопределимые стержневые конструкции;**
- $L_1 \neq 0$ и $L_2 \neq 0$ – **статически неопределимые стержневые конструкции общего вида.**

18.2. Свойства статически неопределимых конструкций

Статически неопределимые стержневые конструкции обладают рядом специфических свойств, существенным образом отличающих их от статически определимых конструкций. Перечислим эти свойства без доказательства:

1. Внутренние усилия в статически неопределимых стержневых конструкциях зависят от числа лишних связей, а также их геометрических и физических параметров.
2. Несущая способность статически неопределимых стержневых конструкций больше по сравнению со статически определимыми конструкциями, которые могут быть получены из статически неопределимых удалением лишних связей.
3. В статически неопределимых стержневых конструкциях возникающие перемещения, как правило, меньше перемещений статически определимых конструкций, которые могут быть получены из статически неопределимых удалением лишних связей.
4. В статически неопределимых стержневых конструкциях, как правило, возникают дополнительные внутренние усилия от осадки опор и изменений температуры.
5. В статически неопределимых стержневых конструкциях могут возникать монтажные внутренние усилия в случае неточностей изготовления отдельных элементов этих конструкций.
6. Внутренние усилия, возникающие в статически неопределимых стержневых конструкциях от действия нагрузки, зависят от соотношения

жесткостей (EI , EA , GA) поперечных сечений отдельных элементов конструкции, а внутренние усилия, возникающие от кинематических воздействий, — от самих величин этих жесткостей.

18.3. Основная и частная задачи расчета статически неопределимых систем

Формулировка **основной задачи** расчета стержневых статически-неопределимых конструкций, имеющая наибольшее значение для их проектирования, звучит следующим образом. При заданных геометрической схеме конструкции и приложенных к ней внешних воздействиях определить оптимальные поперечные сечения (форму и размеры) всех конструктивных элементов и обеспечить достаточную надежность (прочность, жесткость и устойчивость) конструкции в целом. В общем виде такая задача пока не решена.

Вместо этого строительная механика предлагает решение другой **частной задачи**. Решение такой задачи позволяет определить внутренние усилия и перемещения в стержневой статически-неопределимой конструкции при заданных геометрической схеме системы, поперечных сечениях стержней и внешних воздействиях.

Поскольку внутренние усилия в статически-неопределимой конструкции зависят от геометрических и физических параметров системы, а те, в свою очередь, влияют на качественную и количественную стороны процесса ее деформирования, то для решения частной задачи используются **дополнительные уравнения, отражающие особенности деформирования конструкции**.

Входящие в дополнительные уравнения неизвестные величины называются **основными неизвестными задач** и подлежат первоочередному определению. В качестве основных неизвестных задач могут использоваться внутренние усилия в лишних связях или узловые перемещения стержневой конструкции.

В зависимости от природы используемых основных неизвестных различают следующие классические методы решения частной задачи или методы расчета статически неопределимых стержневых конструкций:

- **метод сил** — в качестве основных неизвестных используются внутренние усилия в лишних связях стержневой конструкции;
- **метод перемещений** — в качестве основных неизвестных используются узловые перемещения стержневой конструкции;
- **смешанный метод** — в качестве основных неизвестных одновременно используются величины первого и второго вида.

Суть расчета статически неопределимых стержневых конструкций названными методами состоит в следующем. Расчет заданной конструкции заменяется расчетом некоторой более простой эквивалентной конструкцией. Такая конструкция называется основной системой, образование которой для каждого метода производится по-разному. Затем, исходя из особенностей деформирования заданной конструкции в определенных местах, получают дополнительные уравнения. Такие уравнения называются каноническими уравнениями соответствующего метода. Решение канонических уравнений позволяет определить основные неизвестные. После этого определяют требуемые внутренние усилия и перемещения заданной конструкции.

18.4. Примеры к теме

Пример 1. Для стержневой системы, показанной на рисунке 18.3, определить степень полной, внешней и внутренней статической неопределимости.

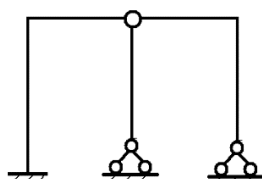


Рисунок 18.3. – К примеру 1

Решение:

Для подсчета степени полной статической неопределимости по формуле (18.1) определим для рассматриваемой системы величины

$$W = -2; K = 0; Ш = 0.$$

Следовательно, степень полной статической неопределимости равна $L = 2$.

Для подсчета степени полной статической неопределимости по формуле (18.5) преобразуем заданную конструкцию в искусственную систему, состоящую из замкнутых контуров (рисунок 18.4, а).

Число замкнутых контуров в искусственной системе равно

$$K = 2.$$

Тогда число шарниров, с учетом степени их кратности, которые нужно ввести в искусственную систему, чтобы получить из нее заданную конструкцию (рисунок 18.4, б), будет равно

$$Ш = 4.$$

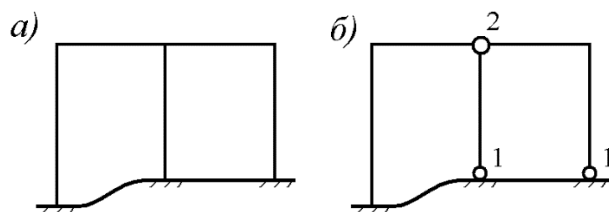


Рисунок 18.4. – Преобразование заданной конструкции в искусственную систему

Следовательно, степень полной статической неопределимости по формуле (18.5) также равна

$$L = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Для рассматриваемой конструкции

$$C_0 = 7; C_{зам} = 2,$$

поэтому величина

$$L_1 = 7 - 3 - 2 = 2,$$

а величина

$$L_2 = 2 - 2 = 0.$$

Таким образом, на основании подсчета степени статической неопределимости и ее составляющих можно сделать вывод, что рассматриваемая стержневая конструкция два раза внешне статически неопределимая система.

Пример 2. Для стержневой системы, показанной на рисунке 18.5, определить степень полной, внешней и внутренней статической неопределимости.

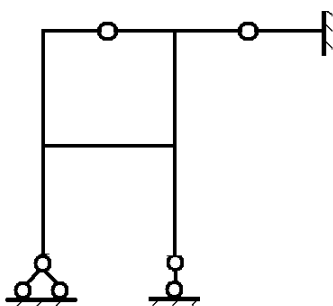


Рисунок 18.5. – К примеру 2

Решение:

При подсчете степени полной статической неопределимости по формуле (18.1) для рассматриваемой системы получим величины

$$W = -2; K = 1; \mathcal{W} = 1.$$

Следовательно, степень полной статической неопределимости равна $L = 4$.

При преобразовании заданной конструкции в искусственную систему (рисунок 18.6, а) число замкнутых контуров в такой системе равно

$$K = 3,$$

а число шарниров, с учетом степени их кратности, которые нужно ввести в искусственную систему, чтобы получить из нее заданную конструкцию (рисунок 18.6, б) будет

$$Ш = 5.$$

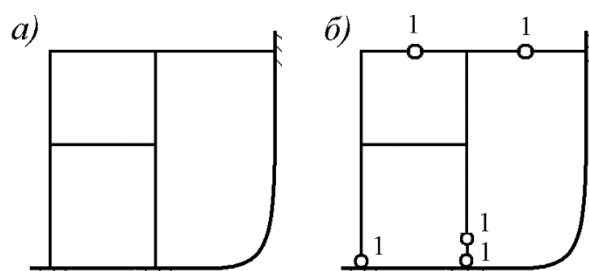


Рисунок 18.6. – Преобразование заданной конструкции в искусственную систему

Следовательно, степень полной статической неопределимости по формуле (18.5):

$$L = 3 \cdot 3 - 5 = 4.$$

Для рассматриваемой конструкции

$$C_0 = 6 \quad C_{зам} = 1,$$

поэтому величина

$$L_1 = 6 - 3 - 1 = 2,$$

а величина

$$L_2 = 4 - 2 = 2.$$

Таким образом, на основании подсчета степени статической неопределимости и ее составляющих можно сделать вывод, что рассматриваемая стержневая конструкция четыре раза статически неопределимая система. В том числе она два раза внешне и два раза внутренне статически неопределимая система.

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что называется степенью статической неопределимости?
2. Как влияет замкнутый контур на число лишних связей?
3. Как влияет шарнир в замкнутом контуре на число лишних связей?

4. Чему равняется степень кратности шарнира замкнутого контура?
5. Какой вид имеют частные формулы для подсчета степени статической неопределимости?
6. Какой вид имеет универсальная формула для подсчета степени статической неопределимости?
7. Что называется степенью внешней статической неопределимости?
8. Что называется степенью внутренней статической неопределимости?
9. Какой вид имеет формула для подсчета внешних лишних связей?
10. Какой вид имеет формула для подсчета внутренних лишних связей?
11. Что называется внешне статически неопределимой стержневой конструкцией?
12. Что называется внутренне статически неопределимой стержневой конструкцией?
13. Что называется статически неопределимой стержневой конструкцией общего вида?
14. Какими свойствами обладают статически неопределимые стержневые конструкции?
15. Как формулируется основная задача расчета стержневых статически неопределимых конструкций?
16. Как формулируется частная задача расчета стержневых статически неопределимых конструкций?
17. Какие существуют методы расчета статически неопределимых стержневых конструкций?

ТЕМА 19. Расчет статически неопределимых стержневых конструкций методом сил

Цели изучения темы

Рассмотреть, как формулируется задача расчета методом сил для произвольной плоской статически неопределимой стержневой системы.

Выяснить, как образуется основная система и получаются канонические уравнения метода сил.

Рассмотреть, как определяются внутренние усилия при расчете методом сил произвольной плоской статически неопределимой стержневой системы.

При изложении темы использовались материалы, содержащиеся в [7].

19.1. Постановка задачи

Задана произвольная плоская статически-неопределимая стержневая конструкция (рисунок 19.1), для которой считаются известными все размеры геометрической схемы и поперечных сечений стержней

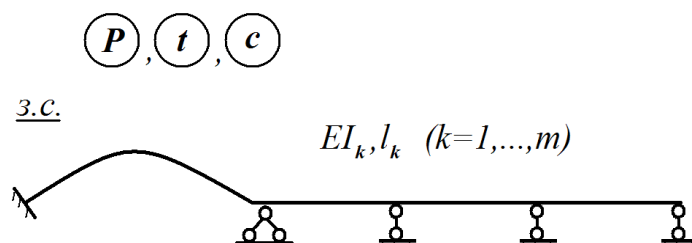


Рисунок 19.1. – К постановке задачи

Степень статической неопределимости заданной системы равняется

$$Л = n.$$

На заданную систему действуют произвольная нагрузка, температурные изменения (температура) и осадка опор, показанные на рисунке 19.1 условными буквенными обозначениями: P – нагрузка, t – температура, c – осадка опор. Заданная конструкция считается линейно деформируемой системой.

19.2. Основная система и канонические уравнения

В основе расчета стержневых конструкций методом сил лежит переход от заданной статически неопределимой системы к расчету эквивалентной статически определимой системы. Эквивалентность двух систем должна состоять в одинаковости внутренних усилий (**статическая эквивалентность**) и одинаковости перемещений (**кинематическая эквивалентность**). Такая эквивалентная система и называется **основной системой метода сил**.

Для получения основной системы из заданной системы сначала удаляют все лишние связи (рисунок 19.2) так, чтобы преобразованная система была геометрически неизменяемой с необходимым числом связей и, следовательно, статически-определимой. Поскольку возможны различные схемы удаления лишних связей в заданной системе, то возможно получение нескольких вариантов статически-определимых систем.

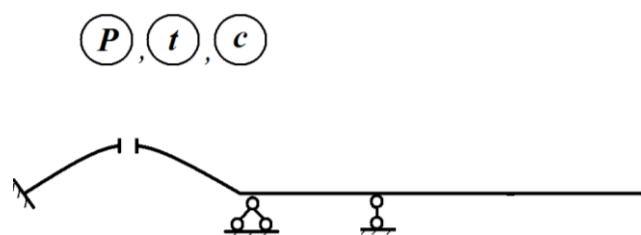


Рисунок 19.2. – Основная система метода сил

Статическая эквивалентность полученной статически-определимой системы заданной системе достигается приложением к ней в качестве дополнительных внешних воздействий реакций удаленных лишних связей $X_1, \dots, X_n$ (рисунок 19.3, а).

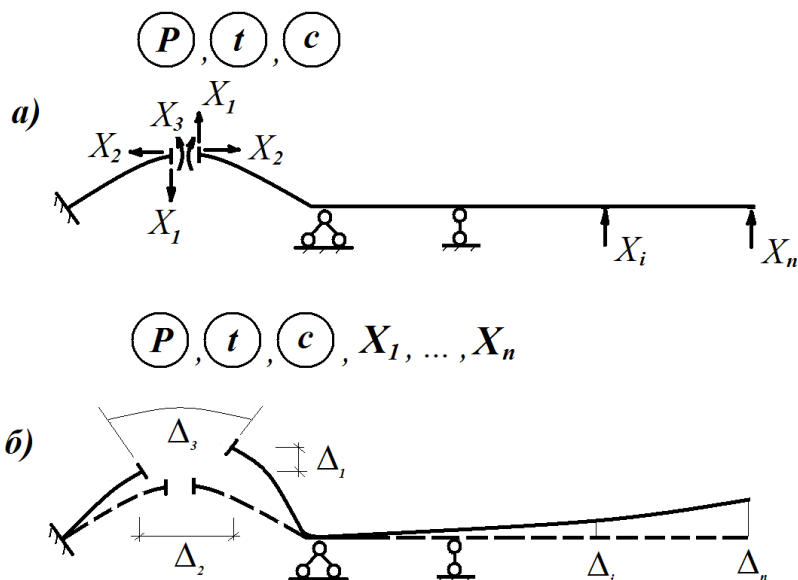


Рисунок 19.3. – К понятиям статической и кинематической эквивалентностей

При дальнейшем расчете эти реакции подлежат первоочередному определению и поэтому они называются **основными неизвестными метода сил**. И поскольку основные неизвестные являются реакциями, то они имеют статическую природу.

Для достижения **кинематической эквивалентности** двух систем вводятся условия обращения в ноль полных перемещений (рисунок 19.3, б):

$$\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_n = 0, \quad (19.1)$$

возникающих в статически-определимой системе по направлению основных неизвестных. Эти перемещения порождаются основными неизвест-

ными и заданными внешними воздействиями, поэтому они являются функциям этих величин и условия (19.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1(X_1,\dots,X_n,P,t,c) &=0, \\\\ \Delta_n(X_1,\dots,X_n,P,t,c) &=0. \end{aligned}\tag{19.2}$$

Поскольку заданная стержневая конструкция считается линейно деформируемой системой, то дополнительные условия (19.2), согласно принципу суперпозиции, принимают вид:

[illegible]

Входящие в (19.3) величины имеют следующий смысл:

$\Delta_{iX_j} (i, j = 1, \dots, n)$ – частичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе по направлению основного неизвестного № i , вызванное действием основного неизвестного X_j ;

$\Delta_{ip}, \Delta_{it}, \Delta_{ic} \ (i=1, \dots, n)$ – частичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе по направлению основного неизвестного № i , вызванное действием, соответственно, нагрузки, температуры или осадки опор.

Изменения частичного перемещения Δ_{iX_j} и основного неизвестного X_j связаны прямой пропорциональной зависимостью, поэтому

$$\Delta_{iX_j} = \delta_{ij} X_j, \quad (19.4)$$

где δ_{ij} – единичное перемещение (простое или обобщенное) в основной системе по направлению основного неизвестного № i от действия безразмерной силы (простой или обобщенной) $\tilde{X}_i = 1$.

С учетом (19.4) соотношения (19.3) принимают вид уравнений

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} + \Delta_{1c} &= 0, \\ \\ \delta_{n1}X_1 + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} + \Delta_{nc} &= 0. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Полученные уравнения (19.5) представляют собой систему неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно основных неизвестных $X_1, \dots, X_n$ и называются **каноническими уравнениями метода сил**. Они имеют кинематическую природу, т.к. каждое такое уравнение выражает равенство нулю полного перемещения в основной системе по направлению соответствующего основного неизвестного от действия всех основных неизвестных, а также нагрузки, температуры и осадки опор.

Входящие в эти уравнения единичные перемещения δ_{ij} в качестве множителей при основных неизвестных называются **коэффициентами канонических уравнений метода сил**. В зависимости от соотношений между индексами различают два вида таких коэффициентов. В случае если $i = j$, то соответствующие коэффициенты называются **главными коэффициентами**, и они удовлетворяют условию строгой положительности

$$\delta_{ii} > 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

В случае если $i \neq j$, то соответствующие коэффициенты называются **побочными коэффициентами**, и они удовлетворяют условию взаимности

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Входящие в канонические уравнения частичные перемещения $\Delta_{ip}, \Delta_{it}, \Delta_{ic} \quad (i=1, \dots, n)$ от действия, соответственно, нагрузки, температуры или осадки опор называются **свободными членами канонических уравнений**.

19.3. Определение коэффициентов и свободных членов

Для определения коэффициентов канонических уравнений метода сил нужно последовательно загрузить основную систему безразмерными силами $\tilde{X}_j = 1 \quad (j=1, \dots, n)$, найти для каждого нагружения внутренние усилия m_j, q_j, n_j и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются **единичными**, а соответствующие им схемы нагружения считаются **единичными состояниями основной системы**.

После нахождения единичных внутренних усилий m_j, q_j, n_j и построения их эпюр производится вычисление коэффициентов δ_{ij} по формуле Максвелла–Мора. При этом роль нагрузки играют безразмерные силы $\tilde{X}_j = 1 \quad (j=1, \dots, n)$, а соответствующие им единичные внутренние усилия

m_j, q_j, n_j играют роль внутренних усилий действительного состояния. Тогда формула Максвелла-Мора для определения δ_{ij} принимает вид

$$\delta_{ij} = \sum_k \int_I \frac{m_i m_j}{EI_z} ds + \sum_k \int_I \frac{n_i n_j}{EA} ds + \sum_k \int_I k \frac{q_i q_j}{GA} ds.$$

Необходимость учета отдельных слагаемых, как уже отмечалось ранее, зависит от вида стержневой конструкции.

Для определения свободных членов канонических уравнений Δ_{ip} ($i=1, \dots, n$) необходимо рассмотреть основную систему под действием нагрузки, найти внутренние усилия M_p^0, Q_p^0, N_p^0 и построить их эпюры. Такие внутренние усилия и их эпюры называются грузовыми, а соответствующая им схема нагружения считается **грузовым состоянием основной системы**.

После нахождения грузовых внутренних усилий M_p^0, Q_p^0, N_p^0 и построения их эпюр производится вычисление свободных членов Δ_{ip} по формуле Максвелла-Мора, которая с учетом введенных обозначений принимает следующий вид:

$$\Delta_{ip} = \sum_k \int_I \frac{m_i M_p^0}{EI_z} ds + \sum_k \int_I \frac{n_i N_p^0}{EA} ds + \sum_k \int_I k \frac{q_i Q_p^0}{GA} ds.$$

Для определения свободных членов канонических уравнений Δ_{it} ($i=1, \dots, n$) необходимо рассмотреть основную систему под действием температуры, найти для каждого стержня удельный температурный перепад $\Delta t'$, приращение температуры на оси Δt_o и построить эпюры этих величин. После нахождения величин $\Delta t'$ и Δt_o производится вычисление свободных членов Δ_{it} по формуле температурных перемещений для плоских статически определимых стержневых конструкций:

$$\Delta_{it} = \sum_k \alpha \int_I (n_i \Delta t_o + m_i \Delta t') ds.$$

Для вычисления свободных членов канонических уравнений Δ_{ic} ($i=1, \dots, n$) используется формула для определения перемещений в плоских статически определимых стержневых конструкциях от заданных смещений опор c_j :

$$\Delta_{ic} = - \sum_j r_{ji} c_j.$$

Входящие в эту формулу единичные опорные реакции r_{ji} считаются найденными при рассмотрении единичных состояний основной системы.

19.4. Решение канонических уравнений

Математической формой канонических уравнений метода сил является система неоднородных линейных алгебраических уравнений

[illegible]

Связь между величинами, входящими в системы уравнений (19.6) и (19.5), определяется соотношениями

$$a_{jj} = \delta_{jj}, \quad x_j = X_j, \quad b_j = -(\Delta_{jP} + \Delta_{jt} + \Delta_{jC}).$$

Поэтому для решения канонических уравнений метода сил применяют численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений. При числе основных неизвестных, не превышающем 10^3 , обычно применяется метод Гаусса. При большем числе основных неизвестных применяют итерационные методы, например, метод простой итерации.

19.5. Определение внутренних усилий заданной системы

Для определения внутренних усилий, которые возникают в заданной системе от приложенных к ней внешних воздействий, используется основная система метода сил и результаты ее расчета следующим образом.

При нахождении коэффициентов канонических уравнений δ_{ij} основная система загружалась безразмерными силами $\tilde{X}_j = 1 (j = 1, \dots, n)$, для каждого нагружения были получены единичные внутренние усилия m_j, q_j, n_j . Поскольку приложенные к основной системе в качестве дополнительных внешних воздействий основные неизвестные $X_1, \dots, X_n$ найдены и основная система считается линейно деформируемой, то внутренние усилия, возникающие в ней от действия $X_1, \dots, X_n$, будут равны

$$\begin{aligned}
M_x^0 &= m_1 X_1 + \dots + m_n X_n, \\
Q_x^0 &= q_1 X_1 + \dots + q_n X_n, \\
N_x^0 &= n_1 X_1 + \dots + n_n X_n.
\end{aligned}
\tag{19.7}$$

При определении свободных членов канонических уравнений Δ_{ip} ($i=1, \dots, n$) к основной системе прикладывалась заданная нагрузка, и были найдены грузовые внутренние усилия M_p^0, Q_p^0, N_p^0 .

Для определения свободных членов канонических уравнений Δ_{it} ($i=1, \dots, n$) и Δ_{ic} ($i=1, \dots, n$) основная система рассматривалась под действием, соответственно, температуры и осадки опор. При этом в соответствии со свойствами статически определимых систем в основной системе не возникают внутренние усилия от этих внешних воздействий. Значит,

$$M_t^0 \equiv 0, Q_t^0 \equiv 0, N_t^0 \equiv 0 \tag{19.8}$$

и

$$M_c^0 \equiv 0, Q_c^0 \equiv 0, N_c^0 \equiv 0. \tag{19.9}$$

Таким образом, для определения внутренних усилий в заданной системе необходимо, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить внутренние усилия, полученные в основной системе от основных неизвестных $X_1, \dots, X_n$, заданной нагрузки, температуры и осадки опор. Следовательно, при совместном действии на заданную систему нагрузки, температуры и осадки опор формулы для определения внутренних усилий, с учетом (19.8) и (19.9), имеют вид

$$\begin{aligned}
M &= m_1 X_1 + \dots + m_n X_n + M_p^0, \\
Q &= q_1 X_1 + \dots + q_n X_n + Q_p^0, \\
N &= n_1 X_1 + \dots + n_n X_n + N_p^0.
\end{aligned}
\tag{19.10}$$

В случае раздельного действия нагрузки, температуры и осадки опор формулы (19.10) принимают вид:

— для нагрузки

$$\begin{aligned}
M_p &= m_1 X_1 + \dots + m_n X_n + M_p^0, \\
Q_p &= q_1 X_1 + \dots + q_n X_n + Q_p^0, \\
N_p &= n_1 X_1 + \dots + n_n X_n + N_p^0.
\end{aligned}$$

— для температуры или осадки опор

$$M = m_1 X_1 + \dots + m_n X_n,$$

$$Q = q_1 X_1 + \dots + q_n X_n,$$

$$N = n_1 X_1 + \dots + n_n X_n.$$

19.6. Пример к теме

Пример. Для рамы, показанной на рисунке 19.4, определить внутренние усилия и построить их эпюры

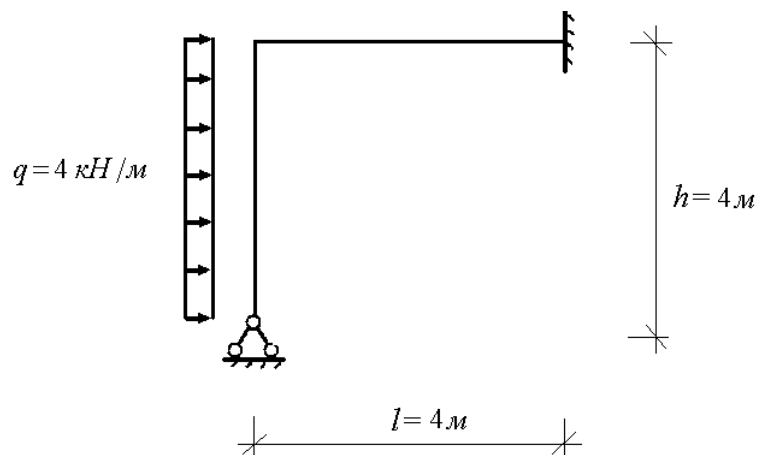


Рисунок 19.4. – К примеру

Поперечные сечения всех элементов рамы имеют одинаковую изгибную жесткость EI_z .

Решение:

У рамы отсутствуют замкнутые контуры, поэтому степень ее статической неопределимости определяется по формуле

$$\mathcal{L} = -W$$

и равняется

$$\mathcal{L} = -3 \cdot 1 + 5 = 2.$$

Для образования основной системы метода сил отбросим два опорных стержня на левой опоре. Выбранный вариант основной системы показан на рисунке 19.5.

Канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом ее степени статической неопределимости, имеют вид

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0,$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

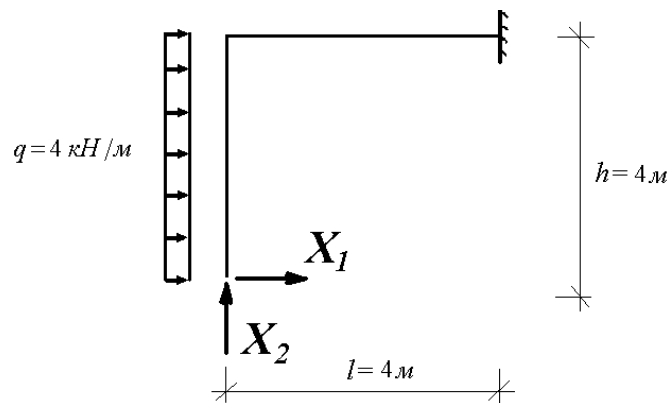


Рисунок 19.5. – Основная система метода сил

Для определения коэффициентов и свободных членов образуем единичные и грузовое состояния и строим для них эпюры внутренних усилий как для статически определимых рам.

Первое единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис. 19.6

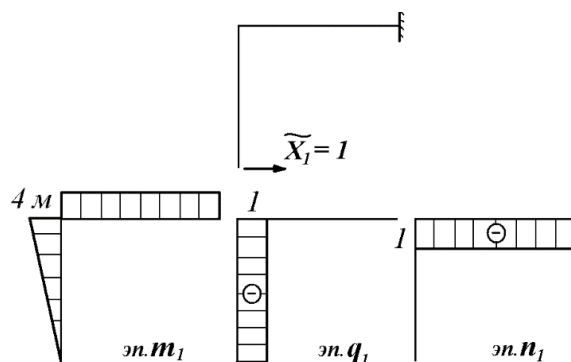


Рисунок 19.6. – Первое единичное состояние

Второе единичное состояние и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рисунке 19.7

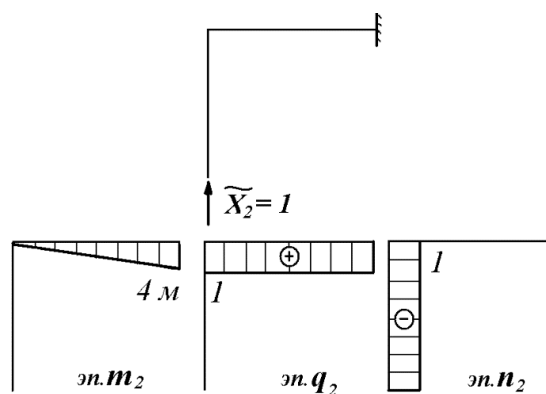


Рисунок 19.7. – Второе единичное состояние

Находим коэффициенты канонических уравнений по формуле Максвелла–Мора с использованием правила Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum_{k=1}^2 \int_I \frac{m_1^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{85,333}{EI_z},$$

$$\delta_{22} = \sum_{k=1}^2 \int_I \frac{m_2^2}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{21,333}{EI_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_{k=1}^2 \int_I \frac{m_1 m_2}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -\frac{32}{EI_z}.$$

Грузовое состояние основной системы и соответствующие ему эпюры внутренних усилий показаны на рис. 19.8

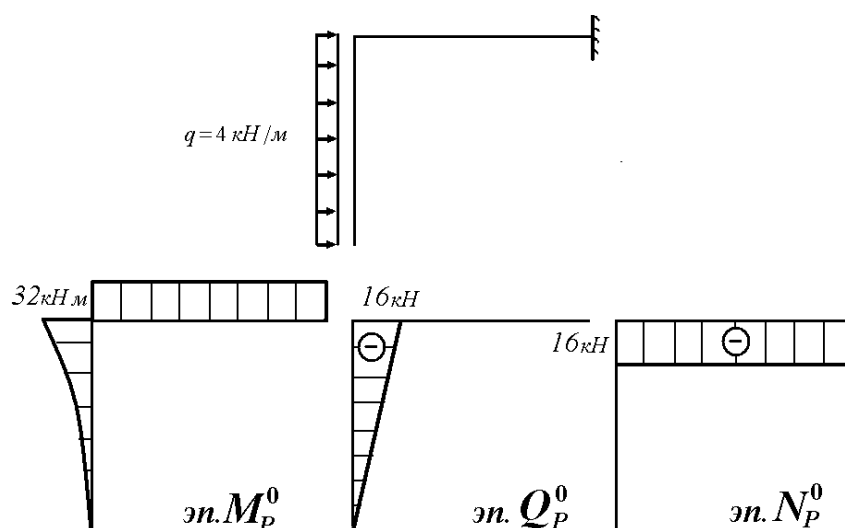


Рисунок 19.8. – Грузовое состояние

Находим свободные члены канонических уравнений по формуле Максвелла–Мора с использованием правила Верещагина:

$$\Delta_{1P} = \sum_{k=1}^2 \int_I \frac{m_1 M_P^0}{EI_z} ds = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + 32 \cdot 4 \cdot 4 \right) = \frac{640}{EI_z},$$

$$\Delta_{2P} = \sum_{k=1}^2 \int_I \frac{m_2 M_P^0}{EI_z} ds = -\frac{1}{EI_z} \cdot 32 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{256}{EI_z}.$$

Таким образом, канонические уравнения метода сил для рассчитываемой рамы, с учетом найденных значений коэффициентов и свободных членов, принимают вид:

$$85,333X_1 - 32X_2 + 640 = 0,$$

$$-32X_1 + 21,333X_2 - 256 = 0.$$

Решая систему канонических уравнений, получим следующие значения основных неизвестных:

$$X_1 = -6,857 \text{ кН}, \quad X_2 = 1,714 \text{ кН}.$$

Формулы для определения окончательных внутренних усилий рассчитываемой рамы принимают вид

$$M = m_1 X_1 + m_2 X_2 + M_p^0,$$

$$Q = q_1 X_1 + q_2 X_2 + Q_p^0,$$

$$N = n_1 X_1 + n_2 X_2 + N_p^0.$$

Построенные в соответствии с этими формулами эпюры окончательных внутренних усилий приведены на рисунке 19.9.

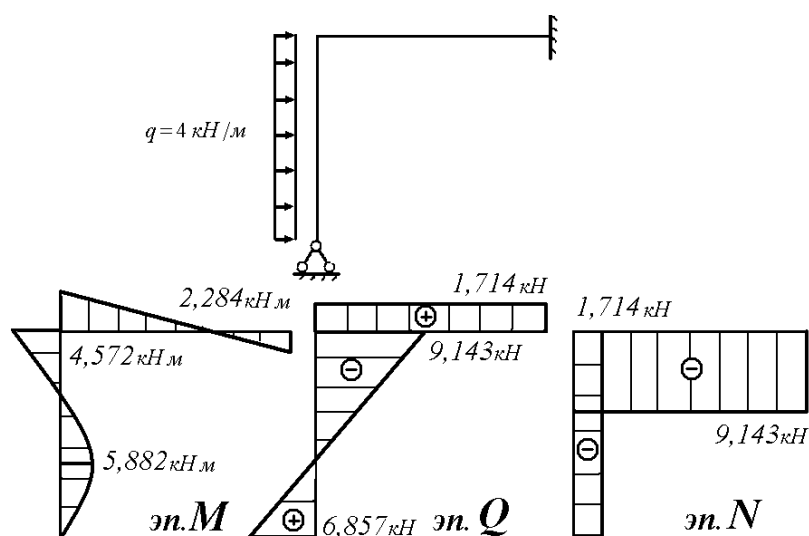


Рисунок 19.9. – Эпюры окончательных внутренних усилий

Вопросы по теме для текущего контроля

1. Что собой представляет заданная система?
2. Как образуется основная система метода сил?
3. В чем заключается статическая эквивалентность основной и заданной систем?
4. В чем заключается кинематическая эквивалентность основной и заданной систем?
5. Что собой представляют основные неизвестные метода сил?
6. Что собой представляют канонические уравнения метода сил?
7. Что собой представляют коэффициенты канонических уравнений метода сил?

8. Что собой представляют свободные члены канонических уравнений метода сил?
9. Как определяются коэффициенты канонических уравнений метода сил?
10. Как определяются свободные члены канонических уравнений метода сил?
11. Как решаются канонические уравнения метода сил?
12. Как определяются внутренние усилия заданной системы при расчете методом сил?

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин ; под ред. А.В. Александрова. – М. : Высш. шк., 2004. – 560 с.
2. Коровкин, В.М. Теоретическая механика : учеб.-метод. комплекс / В.Н. Коровкин, Н.А. Кулик ; под общ. ред. Н.А. Кулик. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – 287 с.
3. Ксендзенко, Л.С. Элементы векторной алгебры в статике : учеб.-метод. пособие. В 2 ч. / Л.С. Ксендзенко, Л.А. Бойко. – Владивосток : Изд. Дальневосточ. федер. ун-та, 2021. – Ч. 1. – 50 с.
4. Литова, Г.Г. Основы векторной алгебры : учеб.-метод. пособие / Г.Г. Литова, Д.Ю. Ханукаева. – М. : РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2009. – 90 с.
5. Сопротивление материалов : учеб.-метод. комплекс / сост. В.К. Родионов ; под общ. ред. Л.С. Турищева. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – 367 с.
6. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс. В 3 ч. / сост. и общ. ред. Л.С. Турищева. – Новополоцк: ПГУ, 2005. – Ч. 1 : Статически определимые системы. – 224 с.
7. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс. В 3 ч. / сост. и общ. ред. Л.С. Турищева. – Новополоцк: ПГУ, 2009. – Ч. 2 : Статически неопределимые системы. – 200 с.
8. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для вузов / С.М. Тарг. – Изд. двадцатое, стереотип. – М. : Высш. шк., 2010. – 416 с.
9. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики : учеб. для вузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 2002. – Ч. 1 : Статика. Кинематика. – 424 с.